Compendium PAU Aragón

Con todas las soluciones desarrolladas paso a paso

Gerard Romo Garrido

Toomates Cooleccción vol. 77

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos

Toomates Coolección **Problem Solving** (en español):

Geometría Axiomática , Problemas de Geometría 1 , Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría , Álgebra , Teoría de números , Combinatoria , Probabilidad
Trigonometría , Desigualdades , Números complejos , Funciones

Toomates Coolección **Llibres de Text** (en catalán):

Nombres (Preàlgebra) , Àlgebra , Proporcionalitat , Mesures geomètriques , Geometria analítica
Combinatòria i Probabilitat , Estadística , Trigonometria , Funcions , Nombres Complexos ,
Àlgebra Lineal , Geometria Lineal , Càlcul Infinitesimal , Programació Lineal , Mates amb Excel

Toomates Coolección **Compendiums**:

PAU España: Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares Aragón
PAU Internacional: Portugal A Portugal B Italia UK (A Level) IB Francia (BAC)
Canguro: ESP CAT FR USA UK AUS 2023 2024
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Internacional: IMO OMI IGO SMT INMO CMO REOIM Arquimede HMMT BMO
Pruebas acceso: ACM4 , CFGS , PAP
Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales, para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Versión de este documento: **18/05/2024**

Consulta el **Catálogo de libros** Toomates Coolección en http://www.toomates.net/biblioteca.htm
Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**
Visita mi pàgina web: **www.toomates.net** **¡Matemáticas patós!**

Índice.

Fuente.

www.matematicasentumundo.es

Julio García Galavis (IES Andalán, Zaragoza)

Soluciones presentadas por bloques temáticos en:
http://www.matematicasentumundo.es/EVAU_Zgz_MII.pdf
http://www.matematicasentumundo.es/EVAU_Zgz_MCCSSII.pdf

OPCIÓN A

1. Discutir el sistema $\begin{cases} ax - y + z = 0 \\ x + y + az = 3 \\ -x + y \quad = 1 \end{cases}$ según los valores del parámetro *a* [1,5 puntos]. Resolverlo en los casos en que admita infinitas soluciones [1 punto].

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Empecemos estudiando el rango de A según los valores de a:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a+1+1-a^2 = -a^2+a+2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

X Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$: rg A = rg B = 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

X Para $a = -1$: las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Puesto que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ rg A = 2

Orlamos el menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+3+1+3 \neq 0 \Rightarrow$ rg B = 3

Como rg A $\neq$ rg B $\Rightarrow$ el sistema es INCOMPATIBLE.

X Para $a = 2$: las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Puesto que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ rg A = 2

Orlamos el menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+3+1-6 = 0 \Rightarrow$ rg B = 2

Como rg A = rg B = 2 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

X Debemos resolver el sistema en este último caso, es decir para $a = 2$: a la vista del menor que da rango a la matriz de los coeficientes, la segunda y tercera ecuaciones son independientes respecto a las incógnitas x e y. Consideramos z como un parámetro: $z = \lambda$.

$$\begin{cases} x + y = 3 - 2\lambda \\ -x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2y = 4 - 2\lambda \Rightarrow y = 2 - \lambda \ ; \ x = 3 - 2\lambda - 2 + \lambda = 1 - \lambda .$$

Por tanto: $\boxed{x = 1 - \lambda \ , \ y = 2 - \lambda \ , \ z = \lambda}$

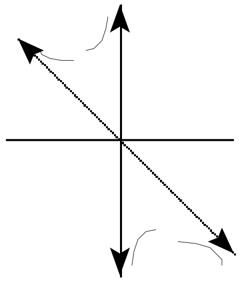
2. Dada la función $f(x) = -x - \dfrac{1}{x}$ se pide

a) Asíntotas y simetrías de la curva $y = f(x)$ [0,5 puntos].
b) Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento [1,5 puntos].
c) Dibujar la gráfica [0,5 puntos].

SOLUCIÓN.

a) X $x = 0$ es una asíntota vertical de la función pues $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x - \dfrac{1}{x}\right) = \infty$.

Además: $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$



X $y = -x$ es una asíntota oblicua de la función. Además:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0^+ \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0^-$$

X Simetrías: $f(-x) = x + \dfrac{1}{x} = -f(x) \Rightarrow$ la función es simétrica respecto al origen de coordenadas.

b) $f'(x) = -1 + \dfrac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \ , \ x = 1$ (puntos críticos)

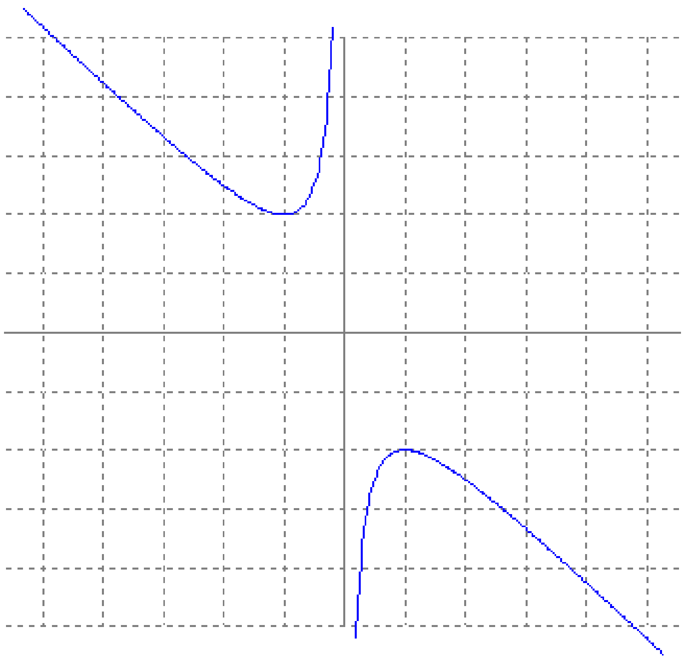
$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f''(-1) > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo en } (-1, 2) \\ f''(1) < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo en } (1, -2) \end{array} \right.$$

X Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

f' < 0		f' > 0		f' > 0		f' < 0
	! 1		0		1	

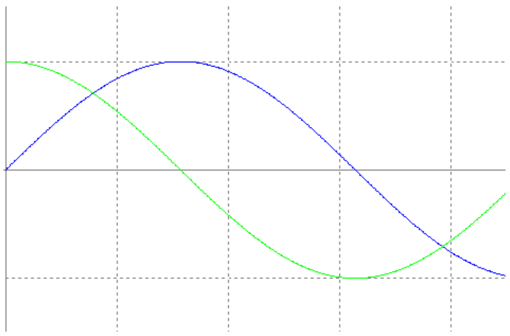
La función es creciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

c)



3. Hallar el área limitada en el primer cuadrante por las gráficas de las funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ y el eje de ordenadas [2 puntos]

SOLUCIÓN.



En el primer cuadrante, el punto de corte de ambas funciones es:

$$\operatorname{sen} x = \cos x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$$

Por tanto: $S = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx = \left[\operatorname{sen} x + \cos x \right]_0^{\pi/4} =$

$$= \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - (\operatorname{sen} 0 + \cos 0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 =$$

$$= \boxed{\left(\sqrt{2} - 1\right)\, u^2}$$

4. Sea $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ una base ortonormal, hallar todos los vectores que son ortogonales a $\vec{u}$ y a $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ que tengan módulo 1. [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sean $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$, $\vec{w} = (0, 0, 1)$ los vectores de la base ortonormal y $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ las coordenadas de los vectores buscados respecto a la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Se tiene:

$$\vec{x} \perp \vec{u} \;\Rightarrow\; \vec{x} \cdot \vec{u} = 0 \;\Rightarrow\; (x_1, x_2, x_3) \cdot (1, 0, 0) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$$

$$\vec{x} \perp (\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) \;\Rightarrow\; \vec{x} \cdot (\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) = 0 \;\Rightarrow\; (0, x_2, x_3) \cdot (1, 1, -1) = 0 \;\Rightarrow\; x_2 - x_3 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = x_3$$

luego $\vec{x} = (0, x_3, x_3)$.

Y como $|\vec{x}| = 1 \;\Rightarrow\; \sqrt{x_3^2 + x_3^2} = 1 \;\Rightarrow\; \sqrt{2x_3^2} = 1 \;\Rightarrow\; 2x_3^2 = 1 \;\Rightarrow\; x_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Por tanto: $\boxed{\vec{x} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ y $\boxed{\vec{x} = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

5. Nos dan la recta r determinada por los puntos A (2,1,1) y B (0,!1,!1) y la recta s determinada por los puntos C (1,2,!1) y D (1,4,!2). Razonar su posición relativa. [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

$\overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2)$ P $(1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{CD} = (0, 2, -1)$. Como $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son linealmente independientes: las rectas se cortan o se cruzan.

Consideremos el vector $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, -2)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \text{el vector } \overrightarrow{AC} \text{ depende linealmente de } \overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{CD} \;\Rightarrow\; \text{las rectas se cortan}$$

OPCIÓN B

1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices B tales que A B = B A [1,5 puntos]; Calcular A^n con n entero positivo [1 punto].

SOLUCIÓN.

X Sea $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$. $\quad \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{23}&b_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{12}&b_{13}&0\\b_{22}&b_{23}&0\\b_{32}&b_{33}&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left|\begin{array}{l}b_{11}=b_{22}=b_{33}=a\\b_{12}=b_{13}=b_{23}=0\\\quad b_{21}=b_{32}=b\\\quad b_{31}=c\end{array}\right.\qquad \text{luego: } \boxed{B=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}}$$

X $A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\boxed{A^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

2. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f dada por $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2 & \text{si } x<-1\\ 1 & \text{si } -1\le x\le 1\\ 2x^2-x & \text{si } x>1\end{cases}$ razonando las respuestas [2 puntos].

SOLUCIÓN.

X Continuidad: la función es continua en $(-\infty,-1)$ U $(-1,1)$ U $(1,+\infty)$ por tratarse de funciones polinómicas.
Estudiemos la continuidad en $x=-1$ y en $x=1$:

$\boxed{x=-1}$:

a) $\exists\, f(-1)=1$

b) $\exists \lim\limits_{x\to-1} f(x)$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left(x^2+2x+2\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1} 1=1\end{array}\right|\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to-1} f(x)=1$

c) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=f(-1) \Rightarrow$ la función es continua en $x=-1$

$\boxed{x=1}$:

a) $\exists\, f(1)=1$

b) $\exists \lim\limits_{x\to1} f(x)$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1} 1=1\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(2x^2-x\right)=1\end{array}\right|\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to1} f(x)=1$

c) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1) \Rightarrow$ la función es continua en $x=1$

Por tanto, la función es continua $\forall\, x$

X Derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<-1 \\ 0 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ 4x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

$\exists\, f'(x)\ \ \forall x\in(-\infty,-1)\ \text{U}\ (-1,1)\ \text{U}\ (1,+\infty)$ por tratarse de funciones polinómicas.

Veamos si es derivable en $x=-1$ y en $x=1$:

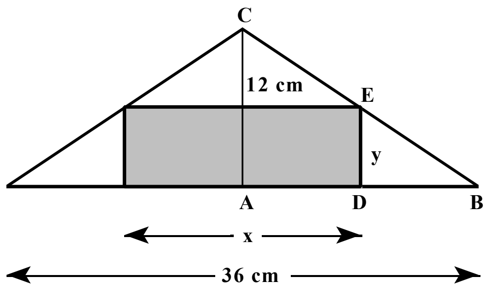
$\boxed{x=-1}$: $\left.\begin{array}{l} f'(-1^-)=2\cdot(-1)+2=0 \\ f'(-1^+)=0 \end{array}\right| \Rightarrow\ \exists\, f'(-1)$

$\boxed{x=1}$: $\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=0 \\ f'(1^+)=4\cdot 1-1=3 \end{array}\right| \Rightarrow\ \nexists\, f'(1)$

Por tanto, la función no es derivable en $x=1$.

3. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo isósceles cuya base es el lado desigual y mide 36 cm y la altura correspondiente mide 12 cm. Suponer que un lado del rectángulo está en la base del triángulo [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.



Sean x e y las dimensiones del rectángulo. La función que debe ser máxima es: $S=x\cdot y$

Busquemos una relación entre las variables x e y:

Los triángulos ABC y DBE son semejantes por estar en posición de Tales. Sus lados son entonces proporcionales:

$$\frac{AC}{DE}=\frac{AB}{DB}\ \Leftrightarrow\ \frac{12}{y}=\frac{18}{18-\frac{x}{2}}\ \Leftrightarrow\ 18y=216-6x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{216-6x}{18}=12-\frac{x}{3} \qquad \text{y por tanto:}\quad S=x\cdot y=x\cdot\left(12-\frac{x}{3}\right)=12x-\frac{1}{3}x^2\ \rightarrow\ \text{máxima}$$

$$S'(x)=12-\frac{2}{3}x=0\ \Rightarrow\ x=18 \quad \text{y como } S''(x)=-\frac{2}{3}<0\ \Rightarrow\ x=18 \text{ hace el área máxima.}$$

Por tanto, las dimensiones del rectángulo de área máxima son: $\boxed{\text{base}=18\text{ cm},\ \text{altura}=6\text{ cm}}$

4. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(6,0)$ y $(0,4)$ y que tiene el centro en la recta $x-y=0$. [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Si el centro está en la recta $x-y=0\ \Leftrightarrow\ y=x$, sus coordenadas son $C(a,a)$. La distancia de C a los puntos dados de la circunferencia es la misma: $\sqrt{(a-6)^2+a^2}=\sqrt{a^2+(a-4)^2}\ \Leftrightarrow\ \cancel{a^2}-12a+36+\cancel{a^2}=\cancel{a^2}+\cancel{a^2}-8a+16\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 20 = 4a \quad \Rightarrow \quad a = 5 \quad \Rightarrow \quad C(5,5)$.

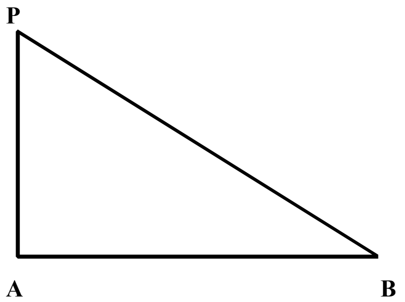
El radio es la distancia de C a cualquiera de los puntos de la circunferencia: $r = \sqrt{5^2 + (5-4)^2} = \sqrt{26}$.

La ecuación de la circunferencia es entonces:

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 26 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = 26 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x^2 + y^2 - 10x - 10y + 24 = 0}$$

5. Hallar el punto P de la recta r de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ que con los puntos A $(1,1,1)$ y B $(3,1,0)$ forma un triángulo rectángulo de hipotenusa BP. [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.



Si la hipotenusa es BP, el ángulo recto debe estar en A y, por tanto, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

Un punto P de la recta tiene por coordenadas: $P(2+\lambda, 1+\lambda, 1)$,

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,0,-1) \\ \overrightarrow{AP} = (1+\lambda, \lambda, 0) \end{array} \right| \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 2 + 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P(1,0,1)}$$

OPCIÓN A

1. *Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&5&3\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, *hallar la matriz X dada por A X A*$^{!1}$ *= B* [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.

$$A\,X\,A^{-1}=B \quad\Leftrightarrow\quad X=A^{-1}\,B\,A$$

Calculemos A^{-1}: $\quad |A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&5&3\end{vmatrix}=6-5=1$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&5&3\end{pmatrix} \;\rightarrow\; A^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&5\\0&1&3\end{pmatrix} \;\rightarrow\; \mathrm{Adj}\left(A^t\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-1\\0&-5&2\end{pmatrix} \;\rightarrow\; A^{-1}=\frac{\mathrm{Adj}\left(A^t\right)}{|A|}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-1\\0&-5&2\end{pmatrix}$$

Por tanto: $\quad X=A^{-1}\,B\,A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-1\\0&-5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&3&0\\2&-5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&5&3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0&5&3\\-1&6&3\\2&-10&-5\end{pmatrix}}$

2. *Hallar, en función del parámetro positivo a, la posición relativa de la circunferencia de ecuación* $(x-2)^2+y^2=a$ *y la recta de ecuación y = x.* [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y la recta:

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=a\\ y=x\end{cases} \;\Rightarrow\; x^2-4x+4+x^2=a \;\Rightarrow\; 2x^2-4x+4-a=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{4\pm\sqrt{16-8(4-a)}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{8a-16}}{4}$$

X Si $a=2$: la recta es tangente a la circunferencia pues sólo se cortan en un punto.

X Si $a>2$: la recta es secante a la circunferencia pues se cortan en dos puntos.

X Si $a<2$: la recta es exterior a la circunferencia pues no tienen puntos comunes.

3. *Hallar el punto de la recta* $\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=1+2\lambda\\ z=2+\lambda\end{cases}$ *más próximo al punto A (0, !1, 1)* [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Puesto que el punto A es un punto de la recta, el punto de la recta más próximo a A es el propio A.

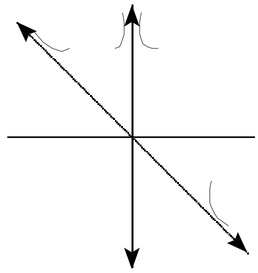
4. *Dada la función* $f(x) = -x + \dfrac{4}{x^2}$*, se pide:*

a) Asíntotas de la curva y = f(x) [1 punto]
b) Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento [1 punto]
c) Dibujar la gráfica [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) X Asíntotas verticales: $x = 0$ pues $\lim\limits_{x \to 0} \left(-x + \dfrac{4}{x^2} \right) = \infty$.

Posición de la curva respecto a la asíntota:



$$\lim_{x \to 0^-} \left(-x + \frac{4}{x^2} \right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 0^+} \left(-x + \frac{4}{x^2} \right) = +\infty$$

X Asíntota oblicua: es la recta $y = -x$

Posición de la curva respecto a la asíntota: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0^+$

b) $f'(x) = -1 - \dfrac{8x}{x^4} = -1 - \dfrac{8}{x^3} = 0 \;\Rightarrow\; -\dfrac{8}{x^3} = 1 \;\Rightarrow\; x^3 = -8 \;\Rightarrow\; x = -2$ (punto crítico)

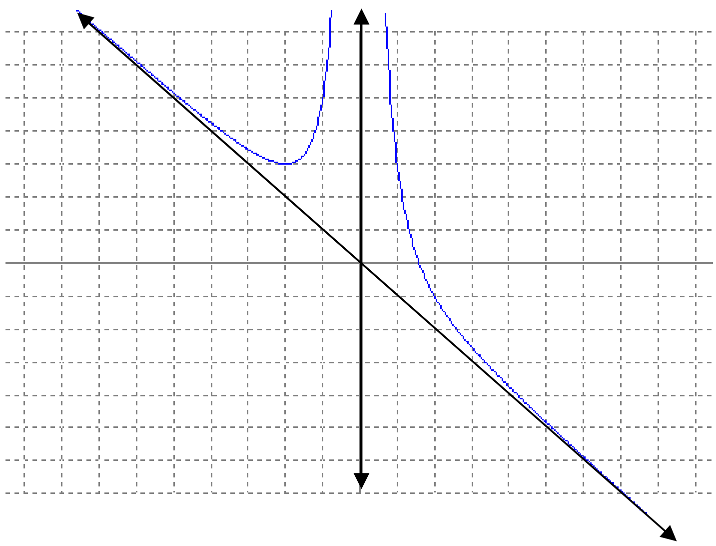
$f''(x) = \dfrac{24x^2}{x^6} = \dfrac{24}{x^4} \;\Rightarrow\; f''(-2) > 0 \;\Rightarrow\; x = -2$ es un mínimo relativo: $(-2\,,3)$

X Intervalos de crecimiento y decrecimiento: los valores de x donde $f'(x)$ puede cambiar de signo son $x = -2$ y $x = 0$:

f' < 0	f' > 0	f' < 0
	! 2	0

La función es decreciente en: $(-\infty\,,-2) \cup (0\,,+\infty)$
La función es creciente en: $(-2\,,0)$

c)



5. *La derivada segunda de una función f es f''(x) = 6 (x – 1). Hallar la función si su gráfica pasa por el punto (2 , 1) y en este punto es tangente a la recta 3x – y – 5 = 0.* [2 puntos]

SOLUCIÓN.

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int 6(x-1)\,dx = 6\left(\frac{x^2}{2} - x + C\right) = 3x^2 - 6x + C$$

Como la gráfica es tangente a la recta $y = 3x - 5$ en el punto $\left(2\,,1\right)$: $f\,'(2) = 3 \;\Rightarrow\; \cancel{12} - \cancel{12} + C = 3 \;\Rightarrow\; C = 3$ luego $f\,'(x) = 3x^2 - 6x + 3$.

$$f\,(x) = \int f\,'(x)\,dx = \int \left(3x^2 - 6x + 3\right) dx = \frac{3x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 3x + K = x^3 - 3x^2 + 3x + K$$

y como la gráfica pasa por el punto $\left(2\,,1\right)$: $8 - 12 + 6 + K = 1 \;\Rightarrow\; K = -1$

Por tanto: $\boxed{f\,(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

OPCIÓN B

1. *Hallar el rango de la matriz* $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ *según sea el valor del parámetro a* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Puesto que el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{rg\,B} \geq 2$

Se observa que la cuarta columna es combinación lineal de la primera, por lo que no debemos tenerla en cuenta para el estudio del rango. Orlemos el menor anterior con los elementos de la segunda y tercera columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \cancel{a} + a^2 - \cancel{a} - \cancel{1} - a + \cancel{1} = a^2 - a = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

X Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$: $\mathrm{rg\,B} = 3$

X Para $a = 0$ o $a = 1$: $\mathrm{rg\,B} = 2$

2. *Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la suma de los cuadrados de las distancias de P a A $(0,0)$ y a B $(2,0)$ es 4. ¿Qué figura representa esta ecuación?* [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sea $\mathrm{P}\left(x\,,y\right)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Se tiene:

$$\left[d\left(P\,,A\right)\right]^2 + \left[d\left(P\,,B\right)\right]^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 + \left(x-2\right)^2 + y^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \;\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\; 2x^2 + 2y^2 - 4x = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x^2 + y^2 - 2x = 0}$ que es una circunferencia

3. *Hallar el punto del eje OY que es coplanario con los puntos P (1 , 1 , 1) , Q (2 , 2 , 1) y R (1 , 2 , 0).* [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Un punto del eje OY es $Y(0\,,y\,,0)$. Para que sea coplanario con los puntos P, Q y R, los vectores $\overrightarrow{PY}=(-1,\,y-1\,,-1)$, $\overrightarrow{PQ}=(1\,,1\,,0)$ y $\overrightarrow{PR}=(0\,,1\,,-1)$ deben ser linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & y-1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \cancel{1}-\cancel{1}+y-1=0 \quad\Rightarrow\quad y=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{Y(0\,,1\,,0)}$$

4. *Hallar a y b para que la función f dada por* $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 1 \\ -x^2+ax+b & \text{si } x>1 \end{cases}$ *sea continua y derivable para todo x real* [1,5 puntos]. *Encontrar los puntos en donde la recta tangente a la curva y = f(x) es paralela al eje OX* [1 punto].

SOLUCIÓN.

X La función es continua en $(-\infty\,,1)\,\mathrm{U}\,(1\,,+\infty)$ por ser funciones polinómicas las definidas en dichos intervalos.
La función tiene que ser continua en $x=1$ y para ello debe ser:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 1} x^2=\lim_{x\to 1}\left(-x^2+ax+b\right) \quad\Leftrightarrow\quad 1=-1+a+b \quad\Leftrightarrow\quad a+b=2 \qquad (*)$$

X $f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x\le 1 \\ -2x+a & \text{si } x>1 \end{cases}$.

La función es derivable $(\exists\, f'(x))$ $\forall x\in(-\infty\,,1)\,\mathrm{U}\,(1\,,+\infty)$. También tiene que ser derivable en $x=1$ y para ello debe ser: $f'(1^-)=f'(1^+) \quad\Leftrightarrow\quad 2=-2+a \quad\Rightarrow\quad \boxed{a=4}$

Sustituimos el valor de a en la igualdad (*) y obtenemos: $\boxed{b=-2}$

X $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\ \le\ 1 \\ -x^2+4x-2 & \text{si } x\ >\ 1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x\le 1 \\ -2x+4 & \text{si } x>1 \end{cases}$

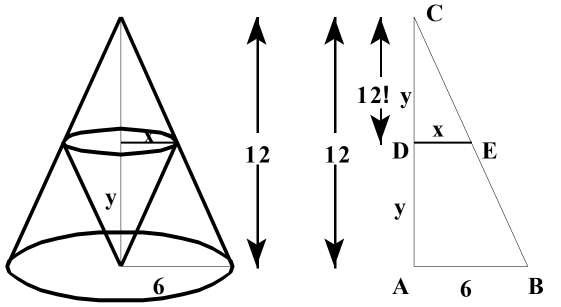
Los puntos de tangente horizontal son aquellos en los que $f'(x)=0$:

Para $x\in(-\infty\,,1)$: $f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x=0 \quad\Rightarrow\quad x=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{(0\,,0)}$

Para $x\in(1\,,+\infty)$: $f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad -2x+4=0 \quad\Rightarrow\quad x=2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{(2\,,2)}$

5. *Un cono circular recto tiene una altura de 12 cm y radio de la base de 6 cm. Se inscribe un cono de vértice el centro de la base del cono dado y base paralela a la del cono dado. Hallar las dimensiones (altura y radio de la base) del cono de volumen máximo que puede inscribirse así* [2 puntos].

SOLUCIÓN.



El volumen del cono inscrito es: $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$

Encontremos una relación entre las variables x e y:

Los triángulos ABC y DEC son semejantes, luego

$$\frac{x}{6} = \frac{12-y}{12} \quad \Leftrightarrow \quad 12x = 72 - 6y \quad \Leftrightarrow \quad y = 12 - 2x$$

El volumen del cono inscrito viene dado entonces por la función: $V = \frac{1}{3}\pi x^2 (12 - 2x) = 4\pi x^2 - \frac{2}{3}\pi x^3$.

Estudiemos para qué valor de x el volumen es máximo:

$$V' = 8\pi x - 2\pi x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi x(4 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ , \ x = 4 \quad \text{(valores críticos)}$$

$$V'' = 8\pi - 4\pi x \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} V''(0) = 8\pi > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{volumen mínimo} \\ V''(4) = 8\pi - 16\pi < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{volumen máximo} \end{array} \right.$$

Por tanto, el volumen es máximo para $x = 4$, $y = 4$ es decir 4 cm de altura y 4 cm de radio de la base.

OPCIÓN A

1. Discutir el sistema $\begin{cases} x+(a^2-1)\,y+a\,z=1 \\ (a^2-1)\,y+(a-1)\,z=0 \\ x+a^2\,z=0 \end{cases}$ según sea el valor del parámetro *a* [1,5 puntos]. Hallar, si existe, la solución del mismo cuando *a* = 0 [1 punto]

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2-1 & a & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & 0 \end{array}\right)$

Estudiemos el rango de la matriz de los coeficientes según los valores de a:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^2(a+1)(a-1)+(a+1)(a-1)^2-a(a+1)(a-1)=(a+1)(a-1)\left[a^2+a-1-a\right]=$$

$$=(a+1)(a-1)(a^2-1)=(a^2-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad a=-1 \ , \ a=1$$

X Para $a \neq -1$ y $a \neq 1$: $\text{rg}\,A=\text{rg}\,B=3=\text{n}^\text{o}$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

X Para $a=-1$: las matrices de los coeficientes y ampliada son $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Puesto que el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1+1=2\neq 0 \Rightarrow \text{rg}\,A=2$. Orlamos este menor con los términos independientes:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow \text{rg}\,B=3$. Por tanto: $\text{rg}\,A \neq \text{rg}\,B \Rightarrow$ el sistema es INCOMPATIBLE.

X Para $a=1$: las matrices de los coeficientes y ampliada son $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Es evidente que $\text{rg}\,A=1$ y puesto que el menor de la matriz ampliada $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow \text{rg}\,B=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{rg}\,A \neq \text{rg}\,B \Rightarrow$ el sistema es INCOMPATIBLE

X Para $a=0$ el sistema es $\begin{cases} x-y=1 \\ -y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$ compatible determinado de soluciones: $\boxed{x=0 \ , \ y=-1 \ , \ z=1}$

2. Dada la función *f* definida por $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \le -1 \\ ax^3+bx & \text{si } -1 < x < 2 \\ 11x-16 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$ se pide:

a) Hallar *a* y *b* para que la función sea continua en todo x real [0,5 puntos]
b) Analizar su derivabilidad [1 punto]
c) Representación gráfica [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Puesto que en los tres intervalos de definición la función es polinómica, es continua. Los únicos puntos de posible discontinuidad son $x=-1$ y $x=2$.

X Para que la función sea continua en $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to -1} 0 = \lim_{x\to -1}\left(ax^3+bx\right) \Leftrightarrow 0=-a-b \quad (*)$$

X Para que la función sea continua en $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\left(ax^3+bx\right) = \lim_{x\to 2}\left(11x-16\right) \Leftrightarrow 8a+2b=6 \Leftrightarrow 4a+b=3 \quad (*)$$

De las igualdades (*): $\begin{cases} -a-b=0 \\ 4a+b=3 \end{cases} \Rightarrow 3a=3 \Rightarrow \boxed{a=1 \;,\; b=-1}$

b) Se tiene: $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \le -1 \\ x^3-x & \text{si } -1 < x < 2 \\ 11x-16 & \text{si } 2 \le x \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2-1 & \text{si } -1<x<2 \\ 11 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

$f'(x)$ existe para $\forall x \in (-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$. Veamos si la función es derivable en $x=-1$ y $x=2$:

X $x=-1$: $\left.\begin{array}{l} f'\left(-1^-\right)=0 \\ f'\left(-1^+\right)=2 \end{array}\right| \Rightarrow f'\left(-1^-\right) \ne f'\left(-1^+\right) \Rightarrow$ la función no es derivable en $x=-1$

X $x=2$: $\left.\begin{array}{l} f'\left(2^-\right)=11 \\ f'\left(2^+\right)=11 \end{array}\right| \Rightarrow f'\left(2^-\right) = f'\left(2^+\right) \Rightarrow$ la función es derivable en $x=2$

c) X La función definida en $\left(-\infty,-1\right]$, $f(x)=0$, tiene como gráfica el eje de abscisas.

X La función definida en $(-1,2)$, $f(x)=x^3-x$:

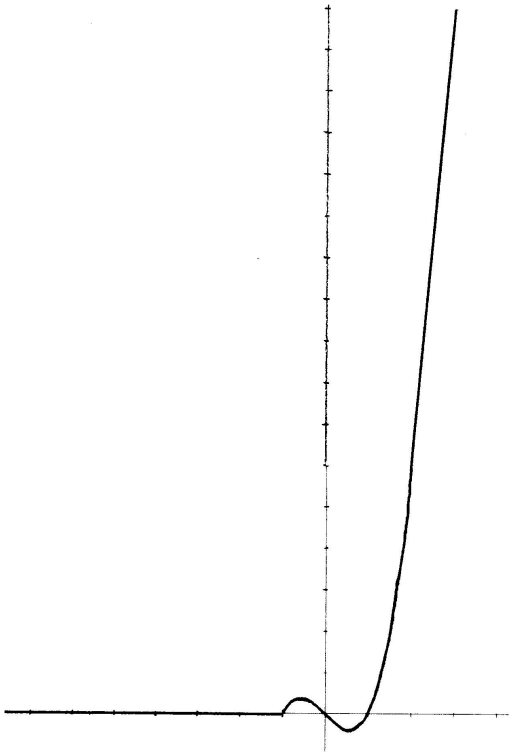
- Corta al eje de abscisas en los puntos: $x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1)=0 \Rightarrow x=0 \;,\; x=-1 \;,\; x=1$
- $f'(x)=3x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\pm\,0,58$ (puntos críticos)

$$f''(x)=6x \Rightarrow \left|\begin{array}{l} f''\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)<0 \Rightarrow \text{En } x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ tiene un máximo relativo}: \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right) \approx \left(-0,58 \;,\; 0,38\right) \\ f''\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)>0 \Rightarrow \text{En } x=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ tiene un mínimo relativo}: \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) \approx \left(0,58 \;,\; -0,38\right) \end{array}\right.$$

- $f''(x)=6x=0 \Rightarrow x=0$ y como $f'''(x)=6 \ne 0 \Rightarrow$ En $(0,0)$ tiene un punto de inflexión

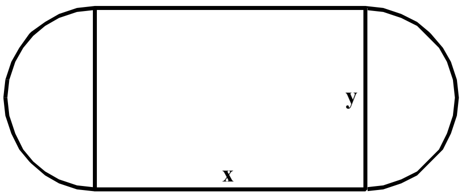
X La función definida en $\left[2,+\infty\right)$, $f(x)=11x-16$, es una recta que pasa por los puntos: $(2,6)$ y $(3,17)$.

La gráfica de la función es:



3. Un campo de atletismo de 400 metros de perímetro consiste en un rectángulo con un semicírculo en cada uno de dos lados opuestos. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.



Sean x e y los lados del rectángulo. El área del rectángulo debe ser máxima:

$$S = x \cdot y \rightarrow \text{ máxima } \quad (1)$$

Como el perímetro de la pista debe ser de 400 metros:

$$P = 2x + \cancel{2}\pi \frac{y}{\cancel{2}} = 400 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{400-2x}{\pi}$$

Sustituyendo en (1): $S = x \cdot \frac{400-2x}{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(400x - 2x^2\right) \quad \Rightarrow \quad S' = \frac{1}{\pi} \cdot \left(400 - 4x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 100$

y como $S'' = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-4\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 100$ hace máxima la superficie del rectángulo . Las dimensiones son por tanto:

$$\boxed{x = 100 \text{ m} \ , \ y = \frac{200}{\pi} ; \ 63{,}66 \text{ m}}$$

4. Hallar el punto simétrico del punto A $(-1,3,3)$ respecto al plano π de ecuación general $x+y-2z=5$. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Calculemos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto A. Está determinada por el punto A y un vectorr normal al plano, $\vec{n}=(1,1,-2)$: $\left\{\begin{array}{l} x=-1+t \\ y=3+t \\ z=3-2t \end{array}\right.$ es su ecuación en paramétricas. Calculemos las coordenadas del punto P de corte de la recta y el plano: $-1+t+3+t-2(3-2t)=5 \Rightarrow 6t=9 \Rightarrow t=\frac{9}{6}=\frac{3}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\ ,\ y=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}\ ,\ z=3-\frac{6}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2},0\right)$$

El punto P es el punto medio del segmento de extremos A y su simétrico A':

$$\frac{1}{2}=\frac{-1+x}{2} \Rightarrow x=2 \ ;\ \frac{9}{2}=\frac{3+y}{2} \Rightarrow y=6 \ ;\ 0=\frac{3+z}{2} \Rightarrow z=-3 \text{ y por tanto: } \boxed{A'(2,6,-3)}$$

OPCIÓN B

1. Determinar *a*, *b* y *c* para que la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix}$ verifique que su traspuesta A^t coincide con su inversa A^{-1} [1,5 puntos]. Calcular en todos esos casos la matriz A^4 [1 punto].

SOLUCIÓN.

Calculemos las matrices traspuesta e inversa de A:

$$A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix} \qquad |A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{vmatrix}=\frac{c}{\sqrt{2}}-\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{c-b}{\sqrt{2}}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix} \xrightarrow{A^t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix} \xrightarrow{Adj(A^t)} \begin{pmatrix} \frac{c-b}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{2}} & c & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{2}} & -b & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{Adj(A^t)}{|A|}} A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{c-b} & \frac{c\sqrt{2}}{c-b} & -\frac{1}{c-b} \\ -\frac{a}{c-b} & -\frac{b\sqrt{2}}{c-b} & \frac{1}{c-b} \end{pmatrix}$$

$$A^t = A^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{c-b} & \frac{c\sqrt{2}}{c-b} & -\frac{1}{c-b} \\ -\frac{a}{c-b} & -\frac{b\sqrt{2}}{c-b} & \frac{1}{c-b} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 0 \ , \ b = -c$$

Al igualar los términos a_{33}: $\quad c = \frac{1}{2c} \quad \Rightarrow \quad 2c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ b = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$. Para los valores encontrados de los parámetros se debe comprobar que los restantes elementos de ambas matrices son también iguales.

Por tanto: $\quad \boxed{a = 0 \ , \ b = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ c = -\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad$ ó $\quad \boxed{a = 0 \ , \ b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ c = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

X Se tiene: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad$ ó $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

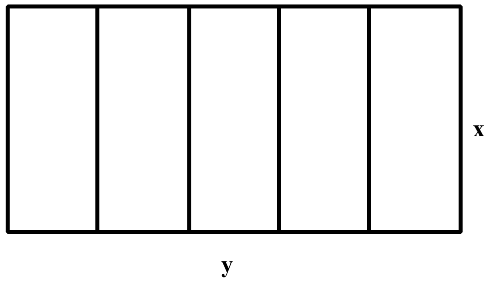
En el primer caso: $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En el segundo caso:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^4 = \left(A^2\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Un jardinero dispone de 120 metros de valla y desea delimitar un terreno rectangular y dividirlo en cinco lotes con vallas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno para que el área sea la mayor posible? [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



Sean x e y los lados del rectángulo (ver figura).

Puesto que dispone de 120 metros de valla:

$$2y + 6x = 120 \quad \Rightarrow \quad y + 3x = 60 \quad \Rightarrow \quad y = 60 - 3x$$

El área del terreno debe ser máxima: $\quad S = x \cdot y = 60x - 3x^2$

$S' = 60 - 6x = 0 \;\Rightarrow\; x = 10$ y como $S'' = -6 < 0 \;\Rightarrow\; x = 10$ hace máxima el área del terreno. Sus dimensiones serán entonces: $\boxed{x = 10\text{ m} \;,\; y = 30\text{ m}}$

3. Dibujar el recinto limitado por la curva $y = x\,e^x$, el eje OX y la recta paralela al eje OY que pasa por el punto donde la curva tiene su mínimo relativo [1 punto]. Hallar el área de dicho recinto [1,5 puntos].

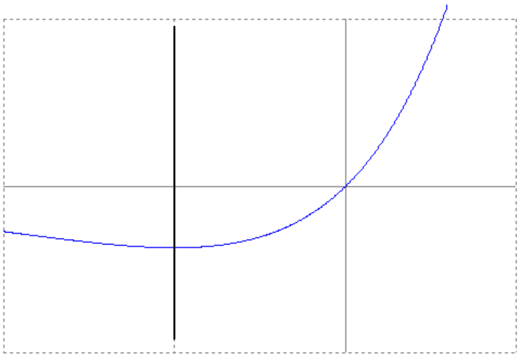
SOLUCIÓN.

X - Puntos de corte de la función con el eje OX: $x\,e^x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ pues $e^x \neq 0 \;\forall x$. Por lo tanto el único punto de corte con los ejes es el origen de coordenadas.

- Puntos de máximo y de mínimo: $y' = e^x + x\,e^x = e^x\,(1+x) = 0 \;\Rightarrow\; x = -1$ (punto crítico)

$y'' = e^x\,(1+x) + e^x = e^x\,(2+x)$; $y''(-1) > 0 \;\Rightarrow\;$ mínimo: $(-1\,,-0{,}37)$

Puesto que la función es continua, en $(-\infty\,,-1)$ la función es decreciente y en $(-1\,,+\infty)$ es creciente.



X $S = \left| \int_{-1}^{0} x\,e^x\,dx \right| = \boxed{\begin{array}{l} u = x \;\Rightarrow\; du = dx \\ dv = e^x\,dx \;\Rightarrow\; v = e^x \end{array}} =$

$= \left| \left[x\,e^x - \int e^x\,dx \right]_{-1}^{0} \right| = \left| \left[x\,e^x - e^x \right]_{-1}^{0} \right| = \left| -1 + \frac{2}{e} \right| =$

$= 1 - \frac{2}{e}$; $\boxed{0{,}26\text{ u}^2}$

4. Nos dan los vectores $a = (1,0,!1)$, $b = (0,2,!1)$ y $c = (2,0,0)$, hallar:

i) Valor absoluto del producto mixto de a, b y c y dar su significado geométrico. [1 punto]
ii) Ángulo que forman b y c. [0,5 puntos]
iii) Razonar si (a,b,c) forman base y, en caso afirmativo, hallar las coordenadas de $(1,!2,0)$ en dicha base. [1 punto]

SOLUCIÓN.

i) $[a\,,b\,,c] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4$.

Significado geométrico: el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son a, b y c es de 4 u^3.

ii) Sea α el ángulo que forman los vectores b y c. Se tiene: $\cos\alpha = \dfrac{b\cdot c}{|b|\,|c|} = \dfrac{0}{\sqrt{5}\cdot 2} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 90^{\circ}$

iii) Puesto que su producto mixto es distinto de 0, los vectores son linealmente independientes y por tanto forman una base del espacio vectorial tridimensional.

Sean $(t_1\,,t_2\,,t_3)$ las coordenadas del vector $(1\,,-2\,,0)$ respecto a la base $(a\,,b\,,c)$:

$$(1,-2,0) = t_1\,(1,0,-1) + t_2\,(0,2,-1) + t_3\,(2,0,0) = (t_1 + 2t_3\,,\,2t_2\,,\,-t_1 - t_2) \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} t_1 + 2t_3 = 1 \\ 2t_2 = -2 \\ -t_1 - t_2 = 0 \end{array} \right. \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; t_2 = -1 \;,\; t_1 = 1 \;,\; t_3 = 0$ y, por tanto es: $(1\,,-1\,,0)$

OPCIÓN A

1. Hallar los valores del parámetro *a* para que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \\ x + (a-1)y + az = 0 \end{cases}$ admita infinitas soluciones [1,5 puntos]. Resolverlo en cada uno de esos casos [1 punto].

SOLUCIÓN.

X El sistema homogéneo tiene infinitas soluciones cuando la matriz de los coeficientes tenga rango < 3 y para ello:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \cancel{a} + a^2 - \cancel{a} - \cancel{1} - a + \cancel{1} = 0 \;\Rightarrow\; a^2 - a = 0 \;\Rightarrow\; a\left(a-1\right) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{a=0}\;,\;\boxed{a=1}$$

X Para $a = 0$: como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\Rightarrow$ las dos primeras ecuaciones son independientes respecto a las incógnitas x e y. Considerando $z = \lambda$ como un parámetro: $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$ luego las soluciones son: $\boxed{x = -\lambda \;,\; y = -\lambda \;,\; z = \lambda}$

X Para $a = 1$: como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\Rightarrow$ las dos primeras ecuaciones son independientes respecto a x e y. Considerando $z = \mu$ como un parámetro: $\begin{cases} x = -\mu \\ x + y = -\mu \end{cases} \;\Rightarrow\; \boxed{x = -\mu \;,\; y = 0 \;,\; z = \mu}$

2. Comprobar que todas las funciones $f(x) = 3x^5 + 10x^3 + ax + b$ tienen un único punto de inflexión [1 punto]. Hallar *a* y *b* para que la tangente a la gráfica de dicha función en el punto de inflexión sea la recta $y = x + 2$ [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.

X $f'(x) = 15x^4 + 30x^2 + a \;\Rightarrow\; f''(x) = 60x^3 + 60x = 0 \;\Rightarrow\; 60x\left(x^2+1\right) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ (posible pto. de inflexión)

y como $f'''(x) = 180x^2 + 60 \;\Rightarrow\; f'''(0) = 60 \neq 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ tiene un solo punto de inflexión en $x = 0$: $\left(0\,,\,b\right)$

X La pendiente de la recta tangente es: $f'(0) = a$ y su ecuación: $y - b = a\left(x - 0\right) \;\Leftrightarrow\; y = ax + b$ e identificándola con la recta dada: $\boxed{a = 1 \;,\; b = 2}$

3. Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \ast\, x \,\ast$ y $f(x) = x^2 - 2$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

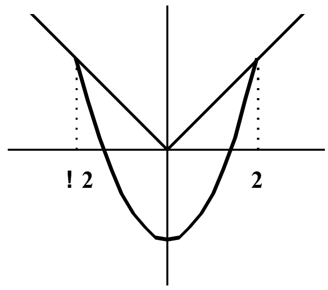
La primera función está definida así: $f(x) = \left| x \right| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y su gráfica está formada por las bisectrices del segundo y del primer cuadrantes.

La gráfica de la segunda función es una parábola. Obtengamos el vértice:

$f'(x) = 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ y como $f''(x) = 2 > 0 \;\Rightarrow\;$ El vértice (mínimo relativo) es el punto $(0\,,-2)$.

Además pasa por los puntos $(-2\,,2)$ y $(2\,,2)$.

Tenemos:



Como el recinto es simétrico respecto al eje de ordenadas, obtengamos el área del recinto entre $x = 0$ y $x = 2$:

$$S = \int_0^2 \left[x - x^2 + 2\right] dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right) - 0 = -\frac{8}{3} + 6 = \frac{10}{3}$$

Por tanto, el área de todo el recinto es: $S = \dfrac{20}{3}\ u^2$

4. Lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por los puntos $(2,2)$ y $(6,0)$ [1,5 puntos]. Entre todas éstas escribir la ecuación de la que tiene radio mínimo [1 punto].

SOLUCIÓN.

Sea $C(x\,,y)$ el centro de dichas circunferencias: $(X - x)^2 + (Y - y)^2 = r^2$.

Como pasa por el punto $(2\,,2)$:

$$(2 - x)^2 + (2 - y)^2 = r^2 \;\Leftrightarrow\; 4 - 4x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = r^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = r^2 \quad (*)$$

Como pasa por el punto $(6\,,0)$:

$$(6 - x)^2 + (0 - y)^2 = r^2 \;\Leftrightarrow\; 36 - 12x + x^2 + y^2 = r^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 - 12x + 36 = r^2 \quad (*)$$

Igualando las expresiones (*):

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4x - 4y + 8 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 12x + 36 \;\Leftrightarrow\; 8x - 4y - 28 = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{2x - y - 7 = 0}$$ que es una recta.

X El centro de las circunferencias es $C(x\,,2x-7)$ y el radio es la distancia de C al punto $(6\,,0)$:

$$r = \sqrt{(x-6)^2 + (2x-7)^2} = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + 4x^2 - 28x + 49} = \sqrt{5x^2 - 40x + 85}$$

Veamos cuándo el radio es mínimo: $r' = \dfrac{10x - 40}{2\sqrt{5x^2 - 40x + 85}} = \dfrac{5x - 20}{\sqrt{5x^2 - 40x + 85}} = 0 \;\Rightarrow\; x = 4$

$$r'' = \frac{5\sqrt{5x^2 - 40x + 85} - (5x - 20)\dfrac{10x - 40}{2\sqrt{5x^2 - 40x + 85}}}{5x^2 - 40x + 85} \;\Rightarrow\; r''(4) > 0 \;\Rightarrow\;$$ el radio es mínimo para $x = 4$.

El centro es $C(4\,,1)$ y el radio $r = \sqrt{80 - 160 + 85} = \sqrt{5}$ y, por tanto, la circunferencia:

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 5 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 5 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0}$$

OPCIÓN B

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices 2H2 X tales que X A = X [1 punto] y todas las matrices Y tales que Y A = B [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.

X Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$XA = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+2b & -2a-3b \\ 2c+2d & -2c-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2b = a \Rightarrow a = -2b \\ -2a-3b = b \Rightarrow b = b \\ 2c+2d = c \Rightarrow c = -2d \\ -2c-3d = d \Rightarrow d = d \end{cases}$$

Por tanto: $X = \begin{pmatrix} -2b & b \\ -2d & d \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2\lambda & \lambda \\ -2\mu & \mu \end{pmatrix}}$

X $YA = B \Rightarrow Y = B \cdot A^{-1}$

Calculemos A^{-1}: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6+4 = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \to A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \to \mathrm{Adj}\left(A^t\right) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\left(A^t\right)}{|A|} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $Y = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix}}$

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ se pide:

a) Asíntotas de la curva y = f(x) [0,5 puntos]
b) Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento [1,5 puntos]
c) Dibujar la gráfica [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

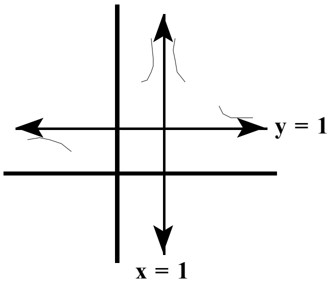
a) X Asíntotas verticales: $x = 1$ pues $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{(x-1)^2} = \infty$. Además: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{(x-1)^2} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{(x-1)^2} = +\infty$

X Asíntotas horizontales u oblicuas:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x^2-2x+1 \\ \hline -x^2+2x-1 & 1 \\ \hline 2x-1 & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = 1 + \dfrac{2x-1}{x^2-2x+1} \Rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal de la función

Además: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = 0^-$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = 0^+$. Se tiene entonces:



b) $f'(x) = \dfrac{2x\,(x-1)^2 - x^2\,2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{2x\,(x-1)\left(\cancel{x}-1-\cancel{x}\right)}{(x-1)^4} = -\dfrac{2x}{(x-1)^3} = 0 \quad\Rightarrow\quad x=0$ (punto crítico)

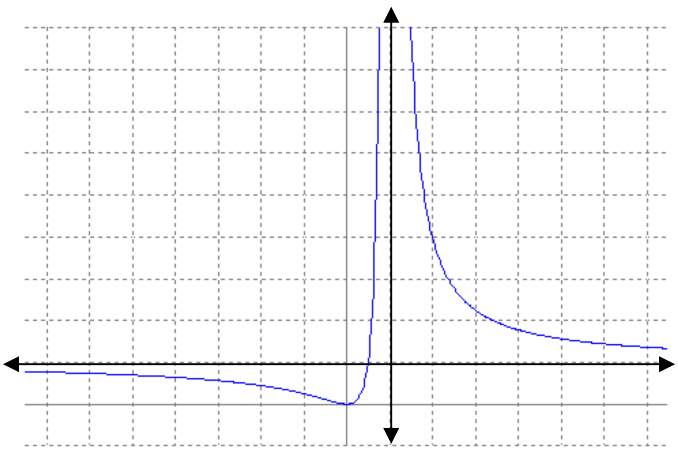
$f''(x) = -\dfrac{2\,(x-1)^3 - 2x\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \dfrac{-2\,(x-1)^2\,(x-1+3x)}{(x-1)^6} = \dfrac{-2\,(4x-1)}{(x-1)^4} \quad\Rightarrow\quad f''(0)>0 \quad\Rightarrow$ En $x=0$ la función tiene un mínimo relativo: $(0\,,0)$

X Intervalos de crecimiento y decrecimiento: $f'(x)$ cambia de signo en $x=0$ y en $x=1$:

f' < 0	f' > 0	f' < 0
0	1	

Luego la función es decreciente en $(-\infty\,,0)\,U\,(1\,,+\infty)$ y creciente en $(0\,,1)$

c)



3. Hallar los puntos de la curva $x^2 - y^2 = 1$ más próximos al punto de coordenadas (4 , 0) [2 puntos]. ¿Cómo se llama dicha curva?, dibujarla [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

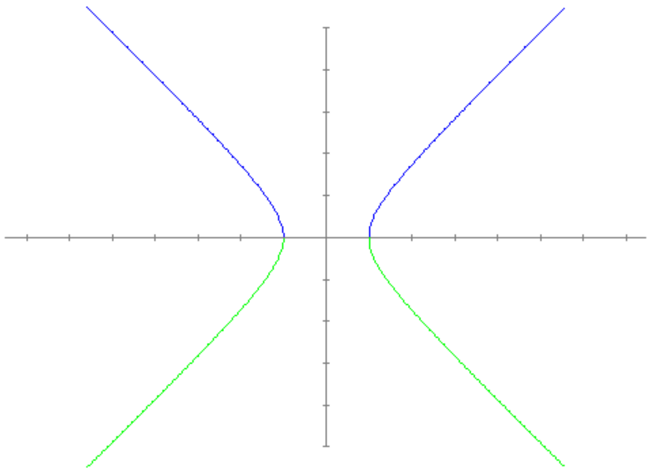
$x^2 - y^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{x^2-1}$ luego los puntos de la curva son $\left(x\,,\sqrt{x^2-1}\right)$. La distancia al punto $(4\,,0)$ es:

$d=\sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{x^2-1}-0\right)^2}=\sqrt{x^2-8x+16+x^2-1}=\sqrt{2x^2-8x+15}$. Veamos cuándo es mínima esta distancia:

$$d' = \frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2-8x+15}} = \frac{2x-4}{\sqrt{2x^2-8x+15}} = 0 \quad\Rightarrow\quad x=2$$

y como $d'' = \dfrac{2\sqrt{2x^2-8x+15} - (2x-4)\dfrac{4x-8}{2\sqrt{2x^2-8x+15}}}{2x^2-8x+15} \quad\Rightarrow\quad d''(2)>0 \quad\Rightarrow$ Para $x=2$ la distancia es mínima. Por tanto, los puntos buscados son: $\left(2\,,\sqrt{3}\right)$ y $\left(2\,,-\sqrt{3}\right)$

X La curva es una hipérbola: $a=1\ ,\ b=1 \Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$ luego los focos son los puntos $\left(-\sqrt{2}\,,0\right)$ y $\left(\sqrt{2}\,,0\right)$. Las asíntotas son las rectas: $y=x$ e $y=-x$.



4. Hallar el punto (o puntos) P de la recta de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=1 \\ y=2+2\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$ que con los puntos A (1,1,1) y B (3,1, !1) forman un triángulo isósceles de lados iguales AP y BP [1,5 puntos]. Hallar también el área de dichos triángulos [1 punto].

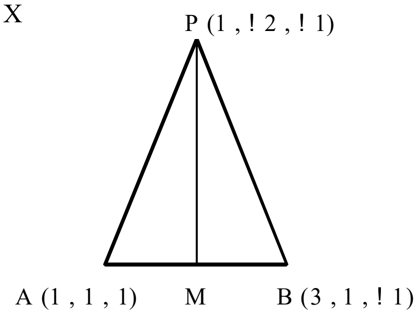
SOLUCIÓN.

Sea $P\left(1\,,2+2\lambda\,,1+\lambda\right)$.

$$d\left(A\,,P\right)=d\left(B\,,P\right) \Rightarrow \sqrt{(1-1)^2+(2+2\lambda-1)^2+(1+\lambda-1)^2}=\sqrt{(1-3)^2+(2+2\lambda-1)^2+(1+\lambda+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{4\lambda^2}+\cancel{4\lambda}+\cancel{1}+\cancel{\lambda^2}=4+\cancel{4\lambda^2}+\cancel{4\lambda}+\cancel{1}+\cancel{\lambda^2}+4\lambda+4 \Rightarrow 4\lambda+8=0 \Rightarrow \lambda=-2 \Rightarrow \boxed{P\left(1\,,-2\,,-1\right)}$$

X



$$b=d\left(A\,,B\right)=\sqrt{(3-1)^2+(1-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Coordenadas del punto medio de AB: $M\left(2\,,1\,,0\right)$

luego: $h=d\left(P\,,M\right)=\sqrt{(2-1)^2+(1+2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{11}$

y por tanto: $S=\frac{1}{2}\,2\sqrt{2}\,\sqrt{11}=\boxed{\sqrt{22}\ u^2}$

OPCIÓN A

1. *Las matrices X e Y son las soluciones del sistema de ecuaciones matriciales* $\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$. *Se pide hallar X e Y* [1 punto] *y calcular si tiene sentido* X^{-1} *e* Y^{-1} *(razonar la posible respuesta negativa)* [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.

• Multiplicamos por 2 la primera ecuación y las sumamos:

$$\begin{cases} 4X - 2Y = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 5X = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = 2X - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• No existe X^{-1} porque $|X| = 0$. En cambio sí existe Y^{-1} porque $|Y| = 1 \neq 0$.

Calculemos Y^{-1}: $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Y^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Adj\left(Y^t\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Y^{-1} = \dfrac{Adj\left(Y^t\right)}{|Y|} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. *Se define la función f del modo siguiente:* $f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

Encontrar los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas [1 punto]. *Estudiar su derivabilidad* [1 punto] *y hallar los puntos de su gráfica en los que la tangente es paralela al eje OX* [0,5 puntos]. *(NOTA: ln significa logaritmo neperiano).*

SOLUCIÓN.

• Si la gráfica pasa por el origen de coordenadas: $f(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

Para que la función sea continua, debe serlo en x = 1 y para ello debe ser $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$:

$$\lim_{x \to 1} \left(2x^2 + ax\right) = \lim_{x \to 1} \left(\ln x - 1\right) \Rightarrow 2 + a = -1 \Rightarrow a = -3$$

• La función derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x > 1 \\ 4x - 3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ que existe $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Veamos si $f'\left(1^-\right) = f'\left(1^+\right)$:

$f'\left(1^-\right) = 4 \cdot 1 - 3 = 1$ *y* $f'\left(1^+\right) = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow f'\left(1^-\right) = f'\left(1^+\right)$ y, por tanto, la función es derivable $\forall x$.

• Si la tangente es paralela a OX, su pendiente es 0 y por tanto $f'(x) = 0$. La derivada sólo se anula cuando $4x - 3 = 0$ $\Rightarrow x = \dfrac{3}{4}$. El punto de la gráfica en el que la tangente es paralela al eje OX es por tanto $\left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{9}{8}\right)$.

3. *Dibujar el recinto limitado por las gráficas de las funciones* $y=\frac{1}{x^2}$, $y = x$ *e* $y = 8x$ [1 punto]. *Hallar el área de este recinto* [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.

• La función $y=\frac{1}{x^2}$ tiene al eje de ordenadas, $x=0$, como asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ y además:

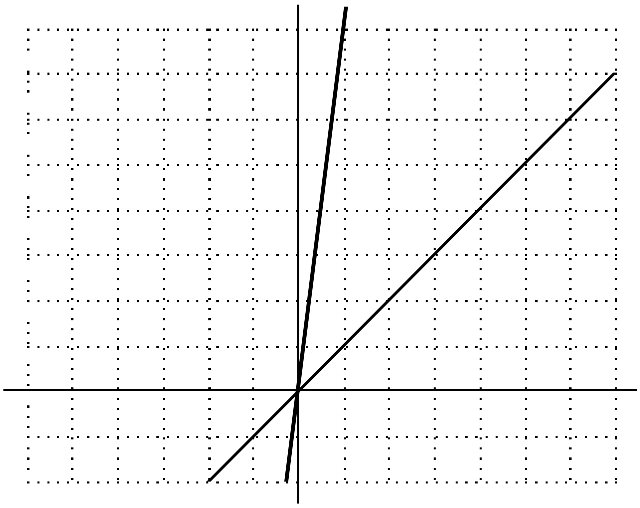
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

El eje de abscisas, $y=0$, es una asíntota horizontal de la función pues $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$ y además: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0^+$

La función es positiva $\forall x$, simétrica respecto al eje OY pues $f(x)=f(-x)$, pasa por los puntos $(-1,1)$ y $(1,1)$, $\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ y $\left(2,\frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},4\right)$ y $\left(\frac{1}{2},4\right)$, ...

• La recta $y=x$ es la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Corta a $y=\frac{1}{x^2}$ en el punto $(1,1)$.

• La recta $y=8x$ pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,8)$. Corta a $y=\frac{1}{x^2}$ en el punto $\left(\frac{1}{2},4\right)$



• Área del recinto. Lo calcularemos por partes:

(1) Área del triángulo limitado por el eje de abscisas y la recta $y=8x$ entre las abscisas $x=0$ y $x=\frac{1}{2}$:

$$A_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4=1\ \text{u}^2$$

(2) Área limitada por la función $y=\frac{1}{x^2}$, el eje OX y las abscisas $x=\frac{1}{2}$ y $x=1$:

$$A_2=\int_{1/2}^{1}x^{-2}\,dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{1/2}^{1\infty}=\left[-\frac{1}{x}\right]_{1/2}^{1}=-1+2=1\ \text{u}^2$$

(3) Área del triángulo limitado por OX y la recta $y=x$ entre las abscisas $x=0$ y $x=1$:

$$A_3=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}\ \text{u}^2$$

El área del recinto es $A_1+A_2-A_3=1+1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ \text{u}^2$

4. *Nos dan la recta r determinada por los puntos A (1, 1, 1) y B (3, 1, 2) y la recta s dada por* $\begin{cases}x-2z-1=0\\ y-2=0\end{cases}$. *Se pide:*

i) *Averiguar su posición relativa.* [1 punto]

ii) *Si existe, hallar la ecuación general del plano que las contiene.* [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Dos puntos de r están dados y un vector direccional de la recta es: $\overrightarrow{AB}=(2,0,1)$

Obtengamos dos puntos de la recta s: $\left.\begin{matrix}x=2z+1\\ y=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}z=0:\ x=1,\ y=2\ \Rightarrow\ P(1,2,0)\\ z=1:\ x=3,\ y=2\ \Rightarrow\ Q(3,2,1)\end{matrix}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{PQ}=(2,0,1)$

i) Puesto que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{PQ}$ $\Rightarrow$ las rectas son paralelas o coincidentes. Como el punto A de r no pertenece a s (la coordenada "y" debería ser 2), las rectas son paralelas.

ii) Sea $X(x\,,y\,,z)$ un punto cualquiera del plano que contiene a r y s. Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}=(0\,,1\,,-1)$ y $\overrightarrow{AX}=(x-1\,,y-1\,,z-1)$ son linealmente dependientes por estar contenidos en un mismo plano. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cdot(z-1)+2\cdot(y-1)-(x-1)=0 \;\Leftrightarrow\; 2z-2+2y-2-x+1=0 \;\Leftrightarrow\; x-2y-2z+3=0$$

OPCIÓN B

1. *Discutir según el valor del parámetro a el sistema lineal* $\begin{cases} \text{ax} + 7\text{y} + 20\text{z} = 1 \\ \text{ax} + 8\text{y} + 23\text{z} = 1 \\ \text{x} - \text{az} = 1 \end{cases}$ [1,5 puntos] *y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones* [1 punto].

SOLUCIÓN.

La matriz de los coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 20 & 1 \\ a & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -a & 1 \end{array}\right)$

El único menor de orden 3 de A es: $\begin{vmatrix} a & 7 & 20 \\ a & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = -8a^2+161-160+7a^2 = -a^2+1=0 \;\Rightarrow\; a=\pm 1$

• Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$: $rg\ A = rg\ M = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

• Si $a=-1$: puesto que el menor $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -8+7=-1 \neq 0 \;\Rightarrow\; rg\ A = 2$. Veamos cuál es el rango de M. Orlamos el menor que da rango a A con los términos independientes: $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8+7-8+7=-2 \neq 0 \;\Rightarrow\; rg\ M = 3$

Como $rg\ A \neq rg\ M$ $\Rightarrow$ el sistema es incompatible

• Si $a=1$: puesto que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8-7=1 \neq 0 \;\Rightarrow\; rg\ A = 2$. Veamos cuál es el rango de M. Orlamos el menor que da rango a A con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; rg\ M = 2$

Puesto que $rg\ A = rg\ M = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

• Resolvamos el sistema en este último supuesto, es decir cuando $a=1$:

Utilizaremos las dos primeras ecuaciones con "x" e "y" como incógnitas principales y "z" como parámetro ($z=\lambda$)

$$\left.\begin{array}{l} x+7y=1-20\lambda \\ x+8y=1-23\lambda \end{array}\right\} \;\Leftrightarrow\; \left.\begin{array}{r} -x-7y=-1+20\lambda \\ x+8y=1-23\lambda \end{array}\right\} \quad \text{Sumando: } y=-3\lambda \;\Rightarrow\; x=1-20\lambda+21\lambda=1+\lambda$$

Luego las soluciones son: $x=1+\lambda$, $y=-3\lambda$, $z=\lambda$

2. *De la función* $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ *nos piden:*

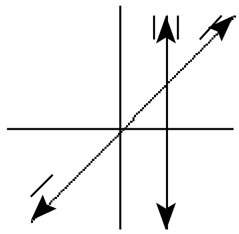
i) *Dominio de definición y asíntotas.* [1 punto]
ii) *Máximos y mínimos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.* [1 punto]
iii) *Representación gráfica.* [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

i) • $D = \mathbb{R} - \{\,1\,\}$

• $x = 1$ es una asíntota vertical de la función pues $\lim\limits_{x \to 1} \left(x + \dfrac{4}{(x-1)^2} \right) = \infty$.

Además: $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(x + \dfrac{4}{(x-1)^2} \right) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(x + \dfrac{4}{(x-1)^2} \right) = +\infty$



• $y = x$ es una asíntota oblicua de la función.
Posición relativa de la curva respecto a la asíntota:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4}{(x-1)^2} \right) = 0^+ \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{(x-1)^2} \right) = 0^+$$

ii) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2} = x + 4 \cdot (x-1)^{-2} \;\Rightarrow\; y' = 1 - 8 \cdot (x-1)^{-3} = 1 - \dfrac{8}{(x-1)^3} = 0 \;\Rightarrow\; 1 = \dfrac{8}{(x-1)^3} \;\Rightarrow\; (x-1)^3 = 8 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x - 1 = 2 \;\Rightarrow\; x = 3$ (punto crítico)

$y'' = 24 \cdot (x-1)^{-4} = \dfrac{24}{(x-1)^4} > 0 \quad \forall x \;\Rightarrow$ la función tiene un mínimo relativo en $x = 3$: $(3\,,4)$

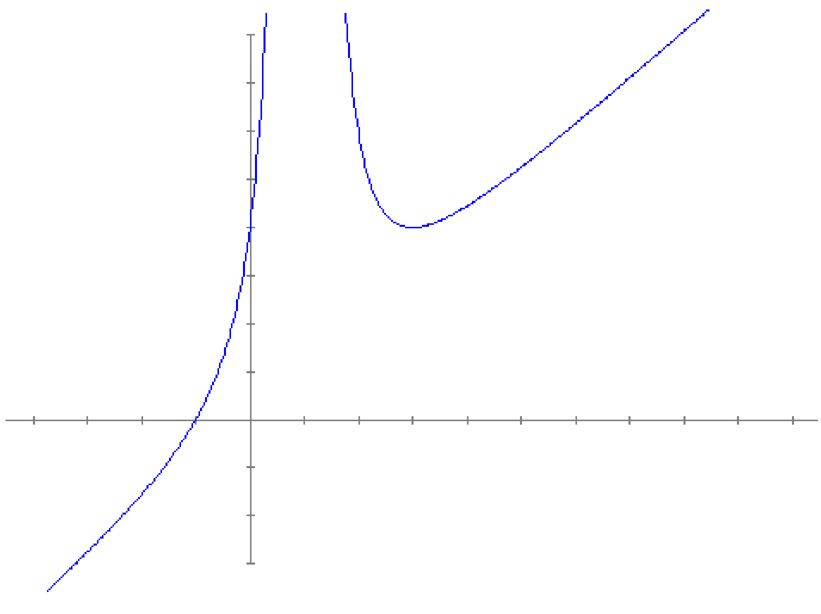
Intervalos de crecimiento y decrecimiento: la primera derivada tiene cambios de signo en $x = 1$ y $x = 3$:

$y' > 0$	1	$y' < 0$	3	$y' > 0$

La función es creciente en $(-\infty\,,1) \cup (3\,,+\infty)$

La función es decreciente en $(1\,,3)$

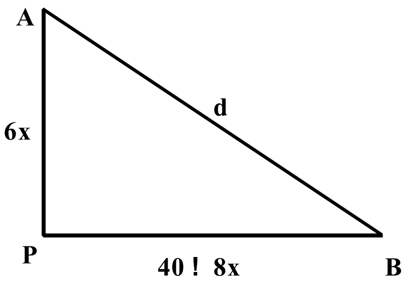
iii) Representación gráfica. Además de los datos ya obtenidos, la gráfica pasa por los puntos $(-1\,,0)$ y $(0\,,4)$:



3. *El barco A abandona un puerto a las 0 horas y navega directamente hacia el norte a la velocidad constante de 6 nudos. El barco B se encuentra a las 0 horas a 40 millas marinas al este del puerto y navega en dirección a dicho puerto a la velocidad constante de 8 nudos. ¿Cuándo se hallarán estos barcos lo más próximos el uno del otro? (Dar el resultado en horas y minutos).* [2,5 puntos]
NOTA: un nudo es una milla marina por hora.

SOLUCIÓN.

Sea x el tiempo (en horas) transcurrido desde las 0 horas. Al cabo de x horas, el barco A está a $6x$ millas del puerto P y el barco B a $40-8x$ millas de P. La distancia entre ambos barcos es:



$$d=\sqrt{(6x)^2+(40-8x)^2}=\sqrt{36x^2+1600-640x+64x^2}=$$

$$=\sqrt{100x^2-640x+1600}$$

Se trata de averiguar el valor de x que hace mínima esta distancia:

$$d'=\frac{200x-640}{2\sqrt{100x^2-640x+1600}}=\frac{100x-320}{\sqrt{100x^2-640x+1600}}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 100x-320=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{32}{10}=\frac{16}{5} \quad \text{(valor crítico)}$$

$$d''=\frac{100\cdot\sqrt{100x^2-640x+1600}-(100x-320)\cdot\dfrac{200x-640}{2\sqrt{100x^2-640x+1600}}}{100x^2-640x+1600}$$

y para $x=\frac{16}{5}$: $d''\left(\frac{16}{5}\right)=\frac{100\cdot\sqrt{1024-2048+1600}-0}{1024-2048+1600}=\frac{100\cdot\sqrt{576}}{576}=\frac{2400}{576}>0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{16}{5}$ hace mínima d.

Por tanto, los barcos estarán a una distancia mínima cuando hayan transcurrido $\frac{16}{5}$ horas, es decir a las 3 h 12 min.

4. *Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene centro C (−1, 1) y es tangente a la recta 3x – 4y – 3 = 0* [1 punto]. *De todas las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, encontrar las que sean tangentes a esta circunferencia* [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.

• Puesto que la tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia, calculemos la ecuación de la recta perpendicular a la tangente que pasa por C:

La pendiente de la tangente es $\frac{3}{4}$ luego la pendiente de una perpendicular es $-\frac{4}{3}$. La ecuación del radio es entonces:

$$y-1=-\frac{4}{3}(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad 3y-3=-4x-4 \quad\Leftrightarrow\quad 4x+3y+1=0$$

El punto de corte del radio y la tangente es:

$$\left.\begin{matrix}4x+3y+1=0\\3x-4y-3=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}16x+12y+4=0\\9x-12y-9=0\end{matrix}\right\} \quad sumando:\ 25x=5 \ \Rightarrow\ x=\frac{1}{5} \quad , \quad y=\frac{-\frac{4}{5}-1}{3}=-\frac{9}{15}=-\frac{3}{5}:\quad P\left(\frac{1}{5},-\frac{3}{5}\right)$$

Entonces: $r = d\,(C\,,P) = \sqrt{\left(\frac{1}{5}+1\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{25}+\frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{100}{25}} = 2$

La ecuación de la circunferencia es:

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

• La recta perpendicular a $y = x$ que pasa por C es: $y-1 = -1\,(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad y-1 = -x-1 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x$

Cortamos esta recta y la circunferencia:

$$\left.\begin{array}{c} y = -x \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad x^2 + x^2 + 2x + 2x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 4x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}\ .$$

Los puntos de tangencia son: $\left(-1+\sqrt{2}\,,1-\sqrt{2}\right)$ y $\left(-1-\sqrt{2}\,,1+\sqrt{2}\right)$ y las rectas paralelas a $y = x$ que pasan por dichos puntos son:

$y - 1 + \sqrt{2} = x + 1 - \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 2 - 2\sqrt{2} = 0 \quad ; \quad y - 1 - \sqrt{2} = x + 1 + \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 2 + 2\sqrt{2} = 0$

OPCIÓN A

1. Hallar en función de *a* el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}$ [1,5 puntos] y calcular cuando exista la matriz inversa $A^{!1}$ en los casos a = 1 y a = !1 [1 punto].

SOLUCIÓN.

Puesto que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow$ El rango de la matriz A es 2, como mínimo.

Veamos para qué valores del parámetro a el rango es 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 4a + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{array}{l} \nearrow -1 \\ \searrow -3 \end{array}$$

Por tanto:
X Para $a = -1$ o $a = -3$: rg A = 2
X Para $a \neq -1$ y $a \neq -3$: rg A = 3

X A^{-1} existe cuando $|A| \neq 0$. Por tanto, cuando $a = -1$, $\nexists\ A^{-1}$.

Para $a = 1$: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 3 = 8$. Tenemos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to$

$$\to \mathrm{Adj}\left(A^t\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\left(A^t\right)}{|A|} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & 1/8 \\ -3/2 & 5/8 & 3/8 \\ -1/2 & -1/8 & 1/8 \end{pmatrix}}$$

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 3}$, se pide:

i) Hallar su dominio de definición. [0,5 puntos]
ii) Hallar el punto o puntos en los que la gráfica de la curva y = f(x) tiene tangente horizontal. [1,5 puntos]
iii) Dibujar esta curva en un pequeño entorno de cada uno de estos puntos. [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

i) Las funciones numerador (exponencial) y denominador (polinómica) tienen por dominio ¡ . Como se trata de una función racional, y el denominador se anula para $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$, su dominio es: ¡ $-\left\{ -\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{3} \right\}$

ii) Serán los puntos en los que $f'(x) = 0$: $\quad f'(x) = \dfrac{e^x \cdot \left(x^2 - 3\right) - e^x \cdot 2x}{\left(x^2 - 3\right)^2} = \dfrac{e^x \cdot \left(x^2 - 2x - 3\right)}{\left(x^2 - 3\right)^2} = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} = \begin{array}{l} \nearrow -1 \\ \searrow 3 \end{array}$ luego la tangente es horizontal en $x = -1$ y en $x = 3$.

iii) Comprobaremos si los puntos de tangente horizontal son puntos de mínimo o de máximo relativo:

$$f''(x) = \frac{\left[e^x\left(x^2-2x-3\right)+e^x\left(2x-2\right)\right]\cdot\left(x^2-3\right)^2 - e^x\left(x^2-2x-3\right)\cdot 2\left(x^2-3\right)2x}{\left(x^2-3\right)^4}$$

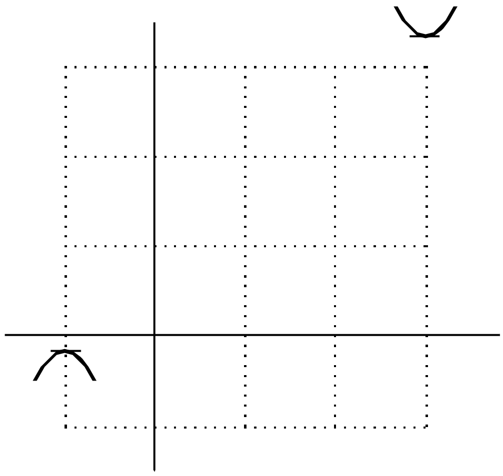
X $\quad f''(-1) = \frac{\left[e^{-1}\cdot 0 + e^{-1}\cdot(-4)\right]\cdot(-2)^2 - e^{-1}\cdot 0}{16} = \frac{-16\,e^{-1}}{16} < 0 \quad \Rightarrow$ En $x=-1$ la función tiene un máximo relativo:

$$f(-1) = \frac{e^{-1}}{-2} = -\frac{1}{2e}\ ;\ -0{,}18 \quad \Rightarrow \quad \left(-1\ ,\ -0{,}18\right) \text{ máximo}$$

X $\quad f''(3) = \frac{\left[e^3\cdot 0 + e^3\cdot 4\right]\cdot 6^2 - e^3\cdot 0}{6^4} = \frac{4\cdot 6^2\cdot e^3}{6^4} > 0 \quad \Rightarrow$ En $x=3$ la función tiene un mínimo relativo:

$$f(3) = \frac{e^3}{6}\ ;\ 3{,}35 \quad \Rightarrow \quad \left(3\ ,\ 3{,}35\right) \text{ mínimo}$$

Se tiene por tanto:



3. Hallar el valor de *m* (que supondremos positivo) para que el área delimitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = mx$ valga 36 (unidades de área) [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Definimos la función diferencia: $y = mx - x^2$ (siendo la función $y = x^2$ una parábola que tiene su mínimo en el origen, la gráfica de la recta $y = mx$ está "por encima" de la parábola en el primer cuadrante).

El área delimitada por ambas funciones es igual a la que delimitan la función diferencia y el eje OX:

- Puntos de corte con OX: $mx - x^2 = 0 \Rightarrow x\left(m-x\right) = 0 \Rightarrow x = 0\ ,\ x = m$

- La superficie es de 36 u^2:

$$S = \int_0^m \left(mx - x^2\right)dx = \left[\frac{mx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^m = \frac{m^3}{2} - \frac{m^3}{3} = 36 \Rightarrow 3m^3 - 2m^3 = 216 \Rightarrow m^3 = 216 \Rightarrow \boxed{m = 6}$$

4. Se sabe que el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ vale 3 y que el módulo del vector $\vec{v} \times \vec{w}$ es 1. Se pide:

i) Hallar razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D sabiendo que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{w}$ y $\overrightarrow{AD} = \vec{w} + 2\vec{v}$ [1,5 puntos].

ii) Hallar razonadamente la longitud de la altura de dicho tetraedro que une el vértice B con la cara ACD [1 punto]

SOLUCIÓN.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 3 \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{u}|\,|\vec{v}\times\vec{w}|\cos\alpha = 3 \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{u}|\cos\alpha = 3 \quad \alpha = (\vec{u}, \vec{v}\times\vec{w})$$

i) $$\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \frac{1}{6}\left[\vec{u}-\vec{v}\ ,\ \vec{w}\ ,\ \vec{w}+2\vec{v}\right] = \frac{1}{6}\left[(\vec{u}-\vec{v})\cdot\left[\vec{w}\times(\vec{w}+2\vec{v})\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[(\vec{u}-\vec{v})\cdot\left[(\vec{w}\times\vec{w}) + 2(\vec{w}\times\vec{v})\right]\right] = \frac{1}{6}\left[(\vec{u}-\vec{v})\cdot\left[\vec{0} - 2(\vec{v}\times\vec{w})\right]\right] = \frac{1}{6}\left[(\vec{u}-\vec{v})\cdot\left[-2(\vec{v}\times\vec{w})\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[-2\left[\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right] + 2\left[\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right]\right] = \frac{1}{6}\cdot(-2)\cdot 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad V = 1\ u^3$$

ii) $$V = \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\right] = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right) = 1$$

Por otra parte: $h = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right) \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{6}{\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|} = \dfrac{6}{\left|\vec{w}\times(\vec{w}+2\vec{v})\right|} = \dfrac{6}{\left|\vec{w}\times\vec{w} + 2(\vec{w}\times\vec{v})\right|} =$

$$= \frac{6}{\left|-2(\vec{v}\times\vec{w})\right|} = \frac{6}{2} = 3\ u$$

OPCIÓN B

1. Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar a partir de estos lingotes uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C. ¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes? [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.

Sean x , y , z el nº de gramos de cada uno de los tres lingotes. Cada lingote pesa 100 grs y, por tanto, la cantidad que contienen de cada uno de los metales es su tanto por ciento. Se tiene:
$$\begin{cases} 0,2\,x + 0,1\,y + 0,2\,z = 15 \\ 0,2\,x + 0,4\,y + 0,4\,z = 35 \\ 0,6\,x + 0,5\,y + 0,4\,z = 50 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por la regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,5 & 0,4 \end{vmatrix} = 0,032 + 0,024 + 0,02 - 0,048 - 0,008 - 0,04 = -0,02$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 0,1 & 0,2 \\ 35 & 0,4 & 0,4 \\ 50 & 0,5 & 0,4 \end{vmatrix}}{-0,02} = \frac{2,4 + 2 + 3,5 - 4 - 1,4 - 3}{-0,02} = \frac{-0,5}{-0,02} = 25$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}0,2 & 15 & 0,2\\ 0,2 & 35 & 0,4\\ 0,6 & 50 & 0,4\end{vmatrix}}{-0,02}=\frac{2,8+2+3,6-4,2-1,2-4}{-0,02}=\frac{-1}{-0,02}=50$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}0,2 & 0,1 & 15\\ 0,2 & 0,4 & 35\\ 0,6 & 0,5 & 50\end{vmatrix}}{-0,02}=\frac{4+1,5+2,1-3,6-1-3,5}{-0,02}=\frac{-0,5}{-0,02}=25$$

Por tanto, debemos coger 25 grs del primer lingote, 50 grs del segundo y 25 grs del tercero.

2. Dada la función $f(x)=\sqrt{x^2-4}-x-2$, se pide:

i) Hallar su dominio de definición. [0,5 puntos]
ii) Hallar, si los tiene, sus extremos relativos. [1 punto]
iii) Hallar, si las tiene, las asíntotas horizontales de la curva y = f(x). [1 punto]

SOLUCIÓN.

i) $x^2-4\geq 0 \;\Rightarrow\; (x+2)\cdot(x-2)\geq 0 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x+2\geq 0\\ x-2\geq 0\end{array}\right. \;\Rightarrow\; [2\,,+\infty]\\ \left\{\begin{array}{l}x+2\leq 0\\ x-2\leq 0\end{array}\right. \;\Rightarrow\; [-\infty\,,-2]\end{array}\right.$

Por tanto: $D(f)=[-\infty\,,-2]\,U\,[2\,,+\infty]=\mathbb{R}-(-2\,,2)$

ii) $f'(x)=\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-4}}-1=0 \;\Rightarrow\; x=\sqrt{x^2-4} \;\Rightarrow\; x^2-x+4=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-16}}{2} \;\Rightarrow$ no tiene extremos relativos

iii) Veamos las tendencias de la función cuando $x\to-\infty$ y cuando $x\to+\infty$:

X $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-4}-(x+2)\right]=\infty-(-\infty)=\infty \;\Rightarrow$ no existe asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$.

X $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[\sqrt{x^2-4}-(x+2)\right]\cdot\left[\sqrt{x^2-4}+(x+2)\right]}{\sqrt{x^2-4}+(x+2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}-4-\cancel{x^2}-4x-4}{\sqrt{x^2-4}+(x+2)}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{4x+4}{\sqrt{x^2-4}+(x+2)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{4x}{x+x}\right]=-2 \;\Rightarrow$$

$y=-2$ es una asíntota horizontal de la función (cuando $x\to+\infty$)

3. Hallar el punto P de la curva $y = \sqrt{x}$ más próximo al punto $Q = \left(\frac{19}{2} , 0 \right)$ [1,5 puntos]. ¿Qué ángulo forman la recta que une P y Q y la tangente a la curva en el punto P? [1 punto]

SOLUCIÓN.

$P\left(x , \sqrt{x}\right)$. $\quad d = d\left(P , Q\right) = \sqrt{\left(x - \frac{19}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 - 19x + \frac{361}{4} + x} = \sqrt{x^2 - 18x + \frac{361}{4}}$

Veamos cuándo la distancia entre ambos puntos es mínima:

$$d' = \frac{2x - 18}{2\sqrt{x^2 - 18x + \frac{361}{4}}} = \frac{x - 9}{\sqrt{x^2 - 18x + \frac{361}{4}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 9$$

$$d'' = \frac{\sqrt{x^2 - 18x + \frac{361}{4}} - \left(x - 9\right) \cdot \frac{2x - 18}{2\sqrt{x^2 - 18x + \frac{361}{4}}}}{x^2 - 18x + \frac{361}{4}} \quad \Rightarrow \quad d''(9) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Para } x = 9 \text{ la distancia es mínima.}$$

Por tanto: $P\left(9 , 3\right)$

X $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2} , -3\right) \Rightarrow$ la pendiente de la recta PQ es $m_1 = \frac{-3}{\frac{1}{2}} = -6$

La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P es: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{6}$

Como las pendientes son inversas y opuestas las dos rectas son perpendiculares.

4. Dadas la recta $r : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$ y la recta s determinada por los puntos $P\ (1, 2, 0)$ y $Q\ (a, a, 1)$, se pide hallar a para que estas rectas estén contenidas en un plano [1,5 puntos]. Escribir la ecuación general de dicho plano [1 punto]

SOLUCIÓN.

X La ecuación de todos los planos que contienen a r (haz de planos) es: $\left(x + y + z - 1\right) + \lambda \left(x - 2y + 2z + 4\right) = 0$
De entre ellos, el que contiene al punto P es: $\left(1 + 2 + 0 - 1\right) + \lambda \left(1 - 4 + 0 + 4\right) = 0 \Rightarrow 2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2$ es decir: $x + y + z - 1 - 2\left(x - 2y + 2z + 4\right) = 0 \Leftrightarrow -x + 5y - 3z - 9 = 0 \equiv \pi$
Si ahora hacemos que $Q \in \pi$: $-a + 5a - 3 - 9 = 0 \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3$

X La ecuación del plano ya ha sido obtenida: $\pi \equiv -x + 5y - 3z - 9 = 0$

Junio 2000.

OPCIÓN A

1. *Hallar, si existe, una matriz cuadrada 2H2, A, que cumpla las siguientes condiciones:*

1) Coincide con su traspuesta.

2) Verifica la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

3) Su determinante vale 9. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

X $A = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

X $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12}+a_{22} \\ -a_{11}-a_{12} & -a_{12}-a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & -a_{11}-a_{12}+a_{12}+a_{22} \\ -a_{11}-a_{12} & a_{11}+a_{12}-a_{12}-a_{22} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}+a_{12} = -3 \\ -a_{11}+a_{22} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = -a_{11}-3 \\ a_{22} = a_{11}-3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{11}-3 \\ -a_{11}-3 & a_{11}-3 \end{pmatrix}$$

X $\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{11}-3 \\ -a_{11}-3 & a_{11}-3 \end{vmatrix} = 9 \Rightarrow a_{11}^2 - 3a_{11} - a_{11}^2 - 3a_{11} - 3a_{11} - 9 = 9 \Rightarrow -9a_{11} = 18 \Rightarrow a_{11} = -2$

Por tanto, la matriz A es: $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

2. *Hallar los valores de las constantes a, b y c para que las gráficas de las funciones*

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad y \quad g(x) = x^3 + c$$

pasen por el punto (1 , 2) y en este punto tengan la misma tangente. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Por pertenecer el punto $(1,\ 2)$ a ambas funciones: $f(1) = 2$; $g(1) = 2$ y por tener en dicho punto la misma tangente: $f'(1) = g'(1)$.

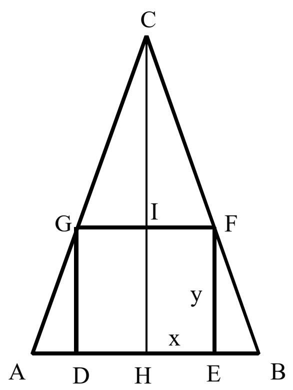
$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b = 2 \Rightarrow a + b = 1$; $g(1) = 2 \Rightarrow 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'(1) = 2 + a \\ g'(x) = 3x^2 \Rightarrow g'(1) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1) = g'(1) \Rightarrow 2 + a = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 0$$

Por tanto, las funciones son: $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^3 + 1$

3. *Un triángulo isósceles tiene 10 cm de base (que es el lado desigual) y 20 cm de altura. Se inscribe en este triángulo un rectángulo uno de cuyos lados se apoya en la base del triángulo. Hallar las dimensiones del rectángulo así construido y que tenga la mayor área posible.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



Sea x la mitad de la base e y la altura del rectángulo. La función que debe ser máxima es $A = 2xy$.

Como la función depende en principio de dos variables, busquemos una relación entre ellas. Los triángulos CHB y FEB son semejantes por lo que puede establecerse la siguiente proporción:

$$\frac{CH}{EF} = \frac{HB}{EB} \Leftrightarrow \frac{20}{y} = \frac{5}{5-x} \Rightarrow y = \frac{20\cdot(5-x)}{5} = 4\cdot(5-x) = 20-4x$$

La función que debe ser máxima es: $A = 2x(20-4x) = 40x - 8x^2$. Veamos para qué valor alcanza su máximo:

$A' = 40 - 16x = 0 \Rightarrow x = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$ y como $A'' = -16 < 0 \Rightarrow$ la función alcanza un máximo para $x = \frac{5}{2}$. Para este valor de x: $y = 20 - 4\cdot\frac{5}{2} = 20 - 10 = 10$

Las dimensiones del rectángulo son: base = 5 cm , altura = 10 cm.

4. *Dada la recta r de ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = 1 \end{cases}$ *y los puntos P (1 , 1 , 2) y Q (1 , !1 , 2), se pide:*

1) Encontrar la posición relativa de r y la recta determinada por P y Q [1,5 puntos]
2) Hallar el punto o puntos R de r para los que el triángulo PQR es isósceles de lados iguales PR y QR [1 punto].

SOLUCIÓN.

1) Un vector direccional de la recta r es $\bar{u} = (2, 1, 0)$ y un punto de la misma el $A(-1, -1, 1)$. En la recta que pasa por P y Q, un vector direccional es $\bar{v} = PQ = (0, -2, 0)$ y uno de sus puntos el $P(1, 1, 2)$, por ejemplo.

Veamos si los vectores $\bar{u}, \bar{v}$ y $AP = (2, 2, 1)$ son o no linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{ los vectores son linealmente independientes } \Rightarrow \text{ las rectas se cruzan.}$$

2) Un punto cualquiera de r es: $R(-1+2\alpha, -1+\alpha, 1)$.

$$d(P, R) = d(Q, R) \Rightarrow \sqrt{(1+1-2\alpha)^2 + (1+1-\alpha)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(1+1-2\alpha)^2 + (-1+1-\alpha)^2 + (2-1)^2} \Rightarrow$$
$$4 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 + \alpha^2 - 4\alpha + 1 = 4 + 4\alpha^2 - 8\alpha + \alpha^2 + 1 \Rightarrow 4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow R(1, 0, 1)$$

Junio 2000

OPCIÓN B

1. *Discutir el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + (a-1)z = 0 \\ x + (a-1)y + az = a \end{cases}$ *según los valores del parámetro a* [1 punto]. *Resolverlo en todos los casos de compatibilidad* [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.

Sean A y B las matrices de los coeficientes y ampliada, respectivamente: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & a-1 & a & a \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = a-1-(a-1)^2 = a-1-a^2+2a-1 = -a^2+3a-2 = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3\pm 1}{-2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = 1 \;,\; a = 2$$

X Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = \text{n}^\text{o}$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

Para resolverlo aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ a & a-1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)\cdot(a-2)} = \frac{a-a-(a-1)^2}{(a-1)(a-2)} = \frac{-(a-1)^2}{(a-1)(a-2)} = -\frac{a-1}{a-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{(a-1)(a-2)} = \frac{a-1-a\cdot(a-1)}{(a-1)(a-2)} = \frac{a-1-a^2+a}{(a-1)(a-2)} = \frac{-a^2+2a-1}{(a-1)(a-2)} = -\frac{(a-1)^2}{(a-1)(a-2)} = -\frac{a-1}{a-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)(a-2)} = \frac{a-1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2}$$

X Si $a = 1$: $\operatorname{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Orlando el menor anterior con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-1 = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg} B = 2$.

Por tanto: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2 < \text{n}^\text{o}$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

Resolución: las dos ecuaciones independientes son la primera y la segunda y utilizando z como parámetro:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; x = 1 - k,\; y = 0,\; z = k$$

X Si $a=2$: $\operatorname{rg} A = 2$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} B = 3$. Por tanto, el sistema es incompatible para $a=2$.

2. *Se considera la función:* $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x}$

1) *Estudiar su continuidad y derivabilidad cuando x = 1.* [1 punto]
2) *¿Alcanza para dicho valor de x un máximo o mínimo relativo? Razonar la respuesta.* [1 punto]
3) *Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, se pregunta si el extremo en cuestión es absoluto.* [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

$|x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x<1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ y, por tanto: $f(x) = \begin{cases} -1+\dfrac{1}{x} & \text{si } x<1 \\ 1-\dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) **Continuidad**:

X $\exists\, f(1) = 0$

X $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(-1+\dfrac{1}{x}\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ luego $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

X $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y, por tanto, la función es continua en x = 1.

Derivabilidad: la función derivada de f(x) es $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ y como $f'(1^-) = -1$ y $f'(1^+) = 1$

$\Rightarrow$ la función no es derivable en x = 1 pues sus derivadas laterales son distintas

2) Puesto que $f'(1^-) < 0$, la función es decreciente a la izquierda de 1. Como $f'(1^+) > 0$, la función es creciente a la derecha de 1. Por tanto, en x = 1 la función alcanza el menor valor de entre los puntos próximos $\Rightarrow$ es un mínimo.

3) No es un mínimo absoluto puesto que la recta x = 0 es una asíntota vertical de la función y a la izquierda de 0 la función decrece indefinidamente.

3. *Haciendo el cambio de variable* $u = e^x$ *calcular* $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

$u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$

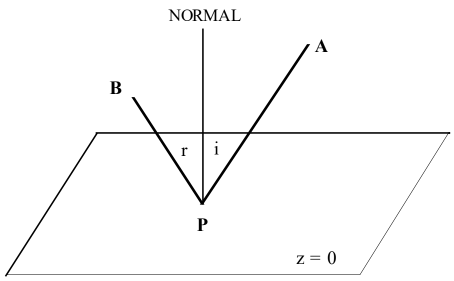
Se tiene: $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \int \frac{du}{u^2-1} = (1)$

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{(u+1)(u-1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1} = \frac{Au-A+Bu+B}{(u+1)(u-1)} = \frac{(A+B)u-A+B}{u^2-1} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}\ ,\ B = \frac{1}{2}$$

$$(1) = -\frac{1}{2}\int\frac{du}{u+1} + \frac{1}{2}\int\frac{du}{u-1} = -\frac{1}{2}\ln(u+1) + \frac{1}{2}\ln(u-1) = \ln\sqrt{\frac{u-1}{u+1}} = \ln\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} + C$$

4. *Suponer que el plano coordenado $z = 0$ es un espejo (reflectante en ambas caras). Desde el punto A (3, 2, 4) se emite un rayo de luz, que reflejándose en este espejo, ilumina el punto B (0, !1, 2).*
1) ¿En qué punto del espejo debe incidir el citado rayo? [1,5 puntos]
2) Hallar la ecuación general del plano que contiene a los rayos incidente y reflejado. [1 punto]

SOLUCIÓN.



Como P está en el plano $z = 0$, sus coordenadas son: $P(x,\ y,\ 0)$ y el vector $AP = (x-3,\ y-2,\ -4)$ y el $BP = (x,\ y+1,\ -2)$.
Un vector normal al plano es: $\bar{n} = (0,\ 0,\ 1)$.

Debe suceder: ≅ $\hat{i} = \hat{r} \Rightarrow \cos\hat{i} = \cos\hat{r}$
≅ AP, BP y $\bar{n}$ están en un mismo plano.

≅ De la primera condición:

$$\cos\ \hat{i} = \frac{AP\cdot\bar{n}}{|AP|\cdot|\bar{n}|} = \frac{-4}{\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2+16}\cdot\sqrt{1}} = \frac{-4}{\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+29}}$$

$$\cos\ \hat{r} = \frac{BP\cdot\bar{n}}{|BP|\cdot|\bar{n}|} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+(y+1)^2+4}} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+y^2+2y+5}}$$

Igualando:

$$-4\sqrt{x^2+y^2+2y+5} = -2\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+29} \Rightarrow 16\left(x^2+y^2+2y+5\right) = 4\left(x^2+y^2-6x-4y+29\right) \Rightarrow$$

$$4x^2+4y^2+8y+20 = x^2+y^2-6x-4y+29 \Rightarrow 3x^2+3y^2+6x+12y-9=0 \Rightarrow x^2+y^2+2x+4y-3=0 \quad (*)$$

≅ De la segunda condición, si los tres vectores están en un mismo plano son linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & -4 \\ x & y+1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-3)(y+1) - x(y-2) = 0 \Rightarrow xy + x - 3y - 3 - xy + 2x = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0 \quad (**)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (*) y (**):

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y-3=0 \\ y = x-1 \end{cases} \Rightarrow x^2+x^2-2x+1+2x+4x-4-3=0 \Rightarrow 2x^2+4x-6=0 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm4}{2} \Rightarrow x=1\ ,\ x=-3 \Rightarrow y=0\ ,\ y=-4$$

Nos salen dos soluciones: $P_1\,(1, 0, 0)$ y $P_2\,(-3, -4, 0)$

2) La ecuación del plano ya ha sido obtenida en (**): $x - y - 1 = 0$

Septiembre 2000

OPCIÓN A

1. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$*, se pide:*

i) Hallar el valor o valores de a para que se cumpla la igualdad $A^2 + 2A + I = O$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y O la matriz nula de orden 3 [1,5 puntos].
ii) Calcular en esos casos la matriz inversa de A [1 punto].

SOLUCIÓN.

i) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2a & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

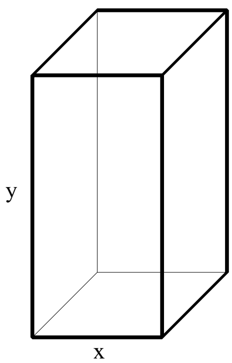
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+2a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1$$

ii) Para $a = -1$: como $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ la matriz A tiene inversa. Para calcularla, damos los siguientes pasos: (1) Calculamos la matriz traspuesta: A^t. (2) Calculamos la matriz adjunta de la traspuesta: $\mathrm{Adj}(A^t)$. (3) Dividimos por el valor del determinante de A: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{Adj}(A^t)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, hallar las dimensiones (lado de la base y altura) del que tiene volumen máximo.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



Se tiene: $2x + 2y = 30 \Leftrightarrow x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$

La función que debe ser máxima es: $V = x^2 \cdot y = x^2 \cdot (15 - x) = 15x^2 - x^3$

Estudiemos los valores de x en los que esta función alcanza un máximo:

$$V' = 30x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(10 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ , } x = 10$$

$$V'' = 30 - 6x : \quad \begin{array}{l} V''(0) = 30 > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ mínimo} \\ V''(10) = -30 < 0 \Rightarrow x = 10 \text{ máximo} \end{array}$$

Por tanto, las medidas del prisma de volumen máximo son: arista de la base = 10 cm , arista lateral = 5 cm

3. *Tenemos la función f definida para todo número real no negativo y dada por* $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

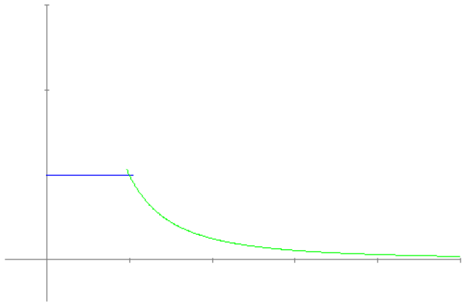
Se pide su representación gráfica [0,5 puntos], *hallar* $\int_0^3 f(x)\,dx$ [1,5 puntos] *e interpretar geométricamente el resultado* [0,5 puntos].

SOLUCIÓN.

X La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ es decreciente $\forall x > 1$ pues $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} < 0 \quad \forall x > 1$.

X $\lim\limits_{x \to \infty^+} \dfrac{1}{x^2} = 0^+ \Rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.

X Pasa por $(1,1)$, $\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$, ...



X $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = [x]_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = 1 - 0 + \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{5}{3}$

Se trata del área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

4. *Hallar la ecuación de la circunferencia C que pasa por los puntos (0, 2) y (0, !2) y es tangente a la recta r: y = 3x + 2* [1,5 puntos]. *En el haz de rectas paralelas a r hay otra tangente a C, hallar su ecuación.* [1 punto]

SOLUCIÓN.

Puesto que la tangente $y = 3x + 2$ pasa por el punto $(0,\ 2)$ y la circunferencia también, éste debe ser el punto de tangencia. El centro de la circunferencia estará en el punto de corte de la mediatriz del segmento de extremos $(0, 2)$ y $(0, -2)$ que es el eje de abscisas $y = 0$ y la normal a $y = 3x + 2$ en $(0,\ 2)$: $y - 2 = -\dfrac{1}{3}x \Leftrightarrow y = 2 - \dfrac{x}{3}$

El centro de la circunferencia es por tanto: $\begin{cases} y = 0 \\ y = 2 - \dfrac{x}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{3} = 2 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow C(6, 0)$

El radio es: $r = \sqrt{(6-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

La ecuación de la circunferencia es por tanto: $(x-6)^2 + (y-0)^2 = 40 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x - 4 = 0$

El haz de rectas paralelas a r es: $y = 3x + n$ y el punto de tangencia de la segunda tangente debe ser el simétrico del $(0, 2)$ respecto al centro de la circunferencia:

$$6 = \frac{0 + x_0}{2} \Rightarrow x_0 = 12 \quad ; \quad 0 = \frac{2 + y_0}{2} \Rightarrow y_0 = -2 \quad \text{es decir, el punto } (12, -2).$$

Haciendo que la recta del haz pase por este punto: $-2 = 36 + n \Rightarrow n = -38 \Rightarrow y = 3x - 38$

Septiembre 2000

OPCIÓN B

1. *Sea A una matriz 4H4 cuyas filas, de arriba a abajo son F_1, F_2, F_3 y F_4 y cuyo determinante vale 2. Sea* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Calcular razonadamente:*

1) El determinante de la matriz A B [1 punto]
2) El determinante de la matriz 3 A [0,5 puntos]
3) El determinante de la matriz cuyas filas son (de arriba a abajo): $2F_1 + F_2$, !F_2 , $3F_4$ y F_3+F_1 [1 punto]

SOLUCIÓN.

Calculemos el determinante de B: $|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

(1) y (2): desarrollando por los adjuntos de la primera fila

1) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot (-1) = -2$

2) Si multiplicamos todos los elementos de una línea por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número. En nuestro caso, cada una de las cuatro líneas (filas o columnas) se multiplica por tres, luego el determinante quedará multiplicado por 3^4: $|3A| = 81.2 = 162$

3) $$\begin{vmatrix} 2F_1 + F_2 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 + F_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2F_1 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 + F_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_2 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 + F_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2F_1 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2F_1 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_2 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_2 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_1 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 6 \cdot 2 = 12$$

2. *Hallar a, b y c para que la función f definida en todo número real y dada por* $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ *sea continua y derivable en todo x real y además alcance un extremo relativo para x = 3* [1,5 puntos]. *Representar gráficamente la función f', analizando su continuidad y derivabilidad* [1 punto].

SOLUCIÓN.

Puesto que las funciones definidas a la izquierda y a la derecha de x = 2 son continuas, basta exigir que lo sea en x = 2 y para ello debe ser $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2} (x-1) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow 1 = 4a + 2b + c$ (*)

$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ 2ax + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Para que la función sea derivable en x = 2 debe ser: $f'(2^-) = f'(2^+) \Leftrightarrow 1 = 4a + b$ (*)

Para que la función tenga un extremo relativo en x = 3 debe ser $f'(3) = 0 \Rightarrow 6a + b = 0$ (*)

De las tres condiciones (*) se sigue: $\begin{cases} 4a + 2b + c = 1 \\ 4a + b = 1 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a - b = -1 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}\ ,\ b = 3\ ,\ c = -3$

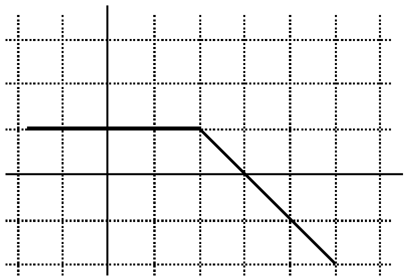
$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

La función es continua y derivable $\forall x \neq 2$ por tratarse de funciones polinómicas. Veamos lo que ocurre en x = 2:

Continuidad: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 = f(2) \Rightarrow$ la función es continua.

Derivabilidad: $f''(2^-) = 0\ ,\ f''(2^+) = -1 \Rightarrow$ la función no es derivable en x = 2

Su gráfica es:



3. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}\,dx$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Puesto que

$$\begin{array}{r|l} x^2\ !\ x + 1 & x^2\ !\ x\ !\ 2 \\ \hline !x^2\ + x + 2 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Se tiene: $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}\,dx = \int \left(1 + \frac{3}{x^2 - x - 2}\right)dx = x + \int \frac{3}{x^2 - x - 2}\,dx = (1)$

Por otra parte: $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = -1\ ,\ 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = (x+1)\cdot(x-2) \Rightarrow$

$$\frac{3}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax - 2A + Bx + B}{(x+1)\cdot(x-2)} = \frac{(A+B)x + (-2A+B)}{x^2 - x - 2} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A - B = 0 \\ -2A + B = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-3A = 3 \Rightarrow A = -1\ ,\ B = 1 \Rightarrow \int \frac{3}{x^2 - x - 2}\,dx = \int \frac{-1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx = -\ln|x+1| + \ln|x-2| = \ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|$$

y por tanto: $(1) = x + \ln\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| + C$

4. *Hallar el valor del parámetro m para que las rectas r y s dadas por:*

$$r : \frac{x+5}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2} \qquad s : \frac{x-m}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

se corten [1,5 puntos]. *Encontrar entonces el punto de intersección* [1 punto]

SOLUCIÓN.

Un punto de r es: $A\left(-5,\ 1,\ -1\right)$, y un vector direccional: $\overline{u} = \left(-3,\ 2,\ 2\right)$
Un punto de s es: $B\left(m,\ 0,\ 1\right)$, y un vector direccional: $\overline{v} = \left(-1,\ 4,\ 2\right)$

Las dos rectas se cortarán cuando los vectores $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{AB}$ sean linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ m+5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff -24 + 2 + 4m + 20 - 8m - 40 + 4 - 6 = -4m - 44 = 0 \Rightarrow m = -11$$

Para obtener el punto de corte, podemos proceder así:

la recta r en paramétricas es $\begin{cases} x = -5 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ luego un punto cualquiera de r es $\left(-5-3t,\ 1+2t,\ -1+2t\right)$. Veamos cuál debe ser el valor de t para que este punto pertenezca a la recta s (con $m = -11$):

$$\frac{-5-3t+11}{-1} = \frac{1+2t}{4} = \frac{-1+2t-1}{2} \iff \begin{cases} -6+3t = \dfrac{1+2t}{4} \Rightarrow -24+12t = 1+2t \Rightarrow 10t = 25 \Rightarrow t = \dfrac{25}{10} = \dfrac{5}{2} \\ -6+3t = -1+t \Rightarrow 2t = 5 \Rightarrow t = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Luego el punto común de ambas rectas es: $\left(-5 - \dfrac{15}{2},\ 1+5,\ -1+5\right) = \left(-\dfrac{25}{2},\ 6,\ 4\right)$

Junio 2001.

OPCIÓN A

1. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, se pide:*

a) Hallar A^n *para todo entero positivo n* [1 punto]
b) Calcular, si existe, la inversa de la matriz A y la de la matriz $I_3 + A$ [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \ldots . \quad A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ No existe A^{-1}

$$I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad |I_3 + A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \exists (I_3 + A)^{-1}$$

$$\text{Adj}(I_3 + A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2 & -a & 1 \end{pmatrix} \to [\text{Adj}(I_3 + A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to (I_3 + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Hallar los valores de los coeficientes b, c y d para que la gráfica de la función* $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ *corte al eje OY en el punto (0 , !1), pase por el punto (2 , 3) y en este punto tenga tangente paralela al eje OX* [1,5 puntos]. *Una vez hallados esos valores hallar los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la citada función* [1 punto]

SOLUCIÓN.

X La función debe cumplir: $f(0) = -1$, $f(2) = 3$ y $f'(2) = 0$. Se tiene: $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

$f(0) = -1 \Rightarrow d = -1$
$f(2) = 3 \Rightarrow 8 + 4b + 2c - 1 = 3 \Rightarrow 4b + 2c = -4$ (*)
$f'(2) = 0 \Rightarrow 12 + 4b + c = 0 \Rightarrow 4b + c = -12$ (*) Restando las igualdades (*): $c = 8 \Rightarrow b = -5$

Por tanto, la función tiene por ecuación: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$

X $f'(x) = 3x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100-96}}{6} = \dfrac{10 \pm 2}{6} \Rightarrow x = 2 \,,\, x = \dfrac{4}{3}$ (puntos críticos)

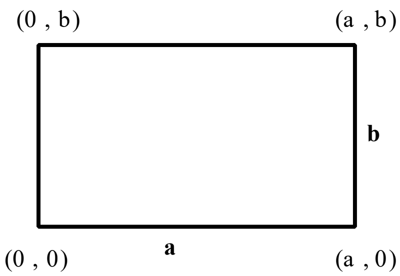
$f''(x) = 6x - 10$: $f''(2) > 0 \Rightarrow$ En $x = 2$ la función tiene un mínimo relativo: $(2, 3)$

$f''\left(\dfrac{4}{3}\right) < 0 \Rightarrow$ En $x = \dfrac{4}{3}$ la función tiene un máximo relativo: $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{85}{27}\right)$

X Puesto que la función es continua, los intervalos de crecimiento y decrecimiento están separados por los extremos relativos: $\left(-\infty, \dfrac{4}{3}\right)$ Y $(2, +\infty) \to$ Creciente $\left(\dfrac{4}{3}, 2\right) \to$ Decreciente

3. *Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas (0 , 0), (a , 0), (a , b) y (0 , b), de modo que el punto (a , b) tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación* $y = \dfrac{1}{x^2} + 4$. *De todos estos rectángulos hallar razonadamente el de área mínima* [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.



El área del rectángulo es $A = a \cdot b$

Si (a, b) pertenece a la curva de ecuación $y = \dfrac{1}{x^2} + 4$, se verifica: $b = \dfrac{1}{a^2} + 4$ por lo que el área del rectángulo está expresada por la función $A = a \cdot \left(\dfrac{1}{a^2} + 4\right) = \dfrac{1}{a} + 4a$ que debe ser mínima.

$A' = -\dfrac{1}{a^2} + 4 = 0 \Rightarrow a^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$; $A'' = \dfrac{2a}{a^4}$ y $A''\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow$ mínimo

Por tanto, el rectángulo de área mínima debe tener $a = \dfrac{1}{2}$ de base y $b = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} + 4 = 8$ de altura, es decir, las coordenadas de sus vértices son: $(0, 0)$, $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, 8\right)$ y $(0, 8)$.

4. *Sean r la recta determinada por los puntos A (1, 0, !1) y B (1, !1, !1) y s la recta de ecuaciones* $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{3}$. *Se pide:*

a) Averiguar su posición relativa [1 punto]

b) Hallar, si existe, una recta que pase por el punto C (1, 2, 4) y que corte a las rectas r y s [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Un vector direccional de r es $\overline{u} = BA = (0, 1, 0)$ y uno de sus puntos es $A(1, 0, -1)$, por ejemplo. Un vector direccional de s es $\overline{v} = (2, 5, 3)$ y uno de sus puntos $P(3, 0, 0)$.

Puesto que las coordenadas de los vectores direccionales no son proporcionales, las rectas no son paralelas y, por tanto, se cortan o se cruzan. Para diferenciar una posición de la otra, veamos si las rectas son o no coplanarias. Para ello, consideremos el vector $AP = (2, 0, 1)$ de origen un punto de r y extremo un punto de s y comprobemos si los vectores

$\overline{u}$, $\overline{v}$ y AP son linealmente independientes (r y s no están en el mismo plano y se cruzan) o dependientes (r y s están en un mismo plano y se cortan):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{los vectores son linealmente independientes} \quad \Rightarrow \quad \text{las rectas se cruzan.}$$

b) Hallemos el plano que contiene a r y a C y el plano que contiene a s y a C. La intersección de ambos planos, si existe, será la recta pedida.

X Plano que contiene a r y pasa por C:
Sea $X(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano. Vectores del plano son $\overline{u} = BA = (0, 1, 0)$, $\overline{u}' = AC = (0, 2, 5)$ y $AX = (x - 1, y, z + 1)$ que deben ser linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ x-1 & y & z+1 \end{vmatrix} = 0 \iff 5(x-1) = 0 \iff x - 1 = 0 \quad (*)$$

X Plano que contiene a s y pasa por C:
Sea $X(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano.
Vectores del plano son $\overline{v} = (2, 5, 3)$, $\overline{v}' = PC = (-2, 2, 4) \approx (-1, 1, 2)$ y $PX = (x - 3, y, z)$ que deben ser linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ x-3 & y & z \end{vmatrix} = 0 \iff 2z - 3y + 10(x-3) - 3(x-3) - 4y + 5z = 7(x-3) - 7y + 7z = 0 \iff x - y + z - 3 = 0 \quad (*)$$

Los planos (*) no son paralelos luego se cortan en una recta, que es la recta pedida: $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$

Junio 2001

OPCIÓN B

1. *Tenemos una matriz 3H3 cuyas columnas son (de izquierda a derecha): C_1 , C_2 , C_3 y su determinante vale 2.*
a) Se considera la matriz A cuyas columnas son (de izquierda a derecha): !C_2 , C_3+C_2 , 3C_1 , calcular razonadamente el determinante de la matriz $A^{!1}$ caso de que esta matriz inversa exista [1,5 puntos].
b) Sea ahora la matriz cuyas columnas son: C_1+C_2 , C_2+C_3 , C_3!C_1. Razonar la existencia o no existencia de la matriz inversa de la misma [1 punto]

SOLUCIÓN.

Sea $B = (C_1 \quad C_2 \quad C_3)$ y $|B| = 2$

a) $|A| = |-C_2 \quad C_3 + C_2 \quad 3C_1| \overset{(1)}{=} |3C_1 \quad -C_2 \quad C_3 + C_2| \overset{(2)}{=} -3 \cdot |C_1 \quad C_2 \quad C_3 + C_2| \overset{(3)}{=}$

$= -3 \cdot |C_1 \quad C_2 \quad C_3| = -3 \cdot |B| = -6$

Propiedades aplicadas: (1) "Si en un determinante se cambian entre sí dos líneas, el determinante cambia de signo", aplicada dos veces con lo que el determinante no varía el signo. (2) "Si se multiplican (o dividen) los elementos de una línea por un número, el determinante queda multiplicado (o dividido) por ese número" (3) "Si a una columna se le suma una combinación lineal de otras columnas, el determinante no varía"

Puesto que $\left|A \cdot A^{-1}\right| = \left|I\right| = 1 = \left|A\right| \cdot \left|A^{-1}\right| \;\Rightarrow\; \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{\left|A\right|} = -\dfrac{1}{6}$

b) La primera columna es la diferencia de la segunda y la tercera: $C_1 + C_2 = C_2 + C_3 - C_3 + C_1$ por lo que el determinante de la matriz será 0 al ser una columna combinación lineal de las otras $\Rightarrow$ La matriz no tiene inversa.

2. *Hallar el punto de la curva de ecuación* $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ *en el que la tangente a la misma tiene pendiente mínima. Escribir la ecuación de dicha tangente* [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.

La tangente a la gráfica de una función en un punto es el valor de la función derivada en dicho punto. Se trata entonces de averiguar en qué punto $f'(x)$ es mínima:

$m = f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 \;\rightarrow\;$ mínima $\qquad$ $m' = 6x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$ (punto crítico)

$m'' = 6 > 0 \;\Rightarrow\;$ en $x = 1$ la función tiene un mínimo

Se trata entonces del punto $(1, 0)$. En este punto la tangente tiene por pendiente: $m = 3 - 6 + 6 = 3$

Ecuación de la tangente: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \;\Rightarrow\; y = 3 \cdot (x - 1) \;\Leftrightarrow\; 3x - y - 3 = 0$

3. *Hallar todas las funciones f cuya derivada es* $f'(x) = \dfrac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$ *indicando el dominio de definición de éstas* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Tenemos que hallar las primitivas de $f'(x)$: $\displaystyle\int \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}\, dx$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +\,0x^3 & +\,0x^2 & +\,x & +\,1 & x^2 + x \\ \cline{6-6}
!x^4 & !\,x^3 & & & & x^2 \,!\, x + 1 \\ \cline{1-3}
 & !\,x^3 & +\,0x^2 & +\,x & +\,1 & \\
 & x^3 & +\,x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & +\,x & +\,1 & \\
 & & !x^2 & !\,x & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 1 &
\end{array}
$$

$$\int \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}\, dx = \int \left(x^2 - x + 1 + \frac{1}{x^2 + x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{1}{x^2 + x}\, dx = (1)$$

Descompongamos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} = \frac{Ax + A + Bx}{x(x + 1)} = \frac{(A + B)x + A}{x^2 + x} \;\Rightarrow\; \begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; A = 1\;,\; B = -1$$

Luego: $(1)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\int \frac{1}{x}\,dx+\int \frac{-1}{x+1}\,dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\ln x-\ln(x+1)+C=$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\ln\frac{x}{x+1}+C$

El dominio será $D=\left\{x\in R\ /\ \frac{x}{x+1}>0\ ,\ x\neq -1\right\}$. Estudiemos el signo de $\frac{x}{x+1}$:

x / x+1 > 0 | x / x+1 < 0 | x / x+1 > 0

−1 | 0

Luego: $D=(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

4. *Dados los puntos: A (1, 0, 0), B (0, −1, 0) y C (0, 0, 3), se pide:*
a) Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de A, B y C, indicando qué figura forman [1,5 puntos].
b) Hallar las coordenadas del centro de la circunferencia que pasa por esos puntos [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Sea $P(x,y,z)$ un punto del lugar geométrico. Se verifica: $d(P,A)=d(P,B)=d(P,C)$.

$d(P,A)=d(P,B)\ \Rightarrow\ \sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2+z^2}\ \Rightarrow\ x^2-2x+1+y^2+z^2=x^2+y^2+2y+1+z^2$

$\Rightarrow\ 2x+2y=0\ \Leftrightarrow\ x+y=0$ que es la ecuación de un plano π.

$d(P,B)=d(P,C)\ \Rightarrow\ \sqrt{x^2+(y+1)^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}\ \Rightarrow\ x^2+y^2+2y+1+z^2=x^2+y^2+z^2-6z+9$

$\Rightarrow\ 2y+6z-8=0\ \Leftrightarrow\ y+3z-4=0$ que es la ecuación de un plano π'.

Los puntos que equidistan de A, B y C deben verificar al mismo tiempo ambas ecuaciones $\Rightarrow$ el lugar geométrico es la recta intersección de π y π':

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+3z-4=0 \end{cases}$$

b) El centro de la circunferencia equidista de A, B y C, luego debe estar en la recta anterior y además están en el mismo plano. La intersección de la recta y el plano será el punto buscado.

Obtengamos la ecuación del plano que contiene a A, B y C. Sea $X(x,y,z)$ un punto cualquiera del plano. Los vectores AB, AC y AX están en el mismo plano y son linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ x-1 & y & z \end{vmatrix}=0\ \Leftrightarrow\ -3(x-1)+3y-z=0\ \Leftrightarrow\ -3x+3y-z+3=0$$

Calculemos el punto de intersección de la recta y el plano: $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + 3z = 4 \\ 3x - 3y + z = 3 \end{cases}$.

Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9-4}{1+9+9} = \frac{5}{19} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{19} = \frac{4-9}{19} = -\frac{5}{19} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}}{19} = \frac{3+12+12}{19} = \frac{27}{19}$$

Luego el centro de la circunferencia que pasa por A, B y C es: $O\left(\frac{5}{19}\ ,-\frac{5}{19}\ ,\ \frac{27}{19}\right)$

Septiembre 2001

OPCIÓN A

1. *Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a:* $\begin{cases} x+2y+z=a \\ x+y-az=a \\ 2x+3y+z=a \end{cases}$ *, se pide:*

1) Discusión del mismo en función del parámetro a. [1 punto]
2) Resolución en los casos de compatibilidad. [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

1) Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & -a & a \\ 2 & 3 & 1 & a \end{array}\right)$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, el rango de ambas matrices es, como mínimo, 2.

Estudiemos para qué valores de a el rango es 3: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+3-4a-2-2+3a = -a = 0 \Rightarrow a = 0$

Se tiene:

X Para $a \neq 0$: $\text{rg}\,A = \text{rg}\,M = 3 = \text{nº de incógnitas} \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

X Para a = 0: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}\,M = 2$ y entonces: $\text{rg}\,A = \text{rg}\,M = 2 < \text{nº de incógnitas} \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

2) X Para $a \neq 0$ el sistema es compatible determinado. Para resolverlo, aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 1 & -a \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-a} = \frac{a+3a-2a^2-a-2a+3a^2}{-a} = \frac{a^2+a}{-a} = -a-1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & -a \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a} = \frac{a+a-2a^2-2a-a+a^2}{-a} = \frac{-a^2-a}{-a} = a+1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix}}{-a} = \frac{a+3a+4a-2a-3a-2a}{-a} = \frac{a}{-a} = -1$$

X Para $a = 0$: las dos primeras ecuaciones son independientes para las incógnitas x e y. Considerando $z = \lambda$, como un parámetro, el sistema a resolver es:

$\begin{cases} x+2y=-\lambda \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow$ restando las dos ecuaciones: $y = -\lambda$, $x = \lambda$, $z = \lambda$

2. *Sea f la función definida para todo número real x de modo que para los valores de x pertenecientes al intervalo cerrado [!1 , 1] se tiene* $f(x)=(x+1)(x-1)^2$ *y para los valores de x no pertenecientes a dicho intervalo se tiene f(x) = 0. Se pide:*

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad. [1,5 puntos]

b) Hallar razonadamente su valor máximo, indicando el valor o valores de x en donde se alcanza. [1 punto]

SOLUCIÓN.

Se tiene: $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-1 \\ x^3-x^2-x+1 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ 0 & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) X Continuidad: la función es continua $\forall x\neq -1$ y 1 porque la función es constante o polinómica. Veamos si lo es en cada uno de dichos puntos:

$$\left.\begin{array}{c} \exists f(-1)=0 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=0\ ,\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to -1} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1) \end{array}\right| \Rightarrow \text{ la función es continua en } x=-1$$

$$\left.\begin{array}{c} \exists f(1)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0\ ,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \end{array}\right| \Rightarrow \text{ la función es continua en } x=1$$

Por tanto, la función es continua $\forall x$

X Derivabilidad: la función derivada es $f'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-1 \\ 3x^2-2x-1 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ 0 & \text{si } x>1 \end{cases}$

La función es derivable $\forall x\neq -1$ y 1. Veamos lo que ocurre en estos valores:

$$\left|\begin{array}{l} f'(-1^-)=0 \\ f'(-1^+)=4 \end{array}\right. \Rightarrow \text{ la función no es derivable en } x=-1$$

$$\left|\begin{array}{l} f'(1^-)=0 \\ f'(1^+)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{ la función es derivable en } x=1$$

b) Puesto que la función es constante e igual a 0 para $x<-1$ y para $x>1$, analicemos los puntos del intervalo $(-1,\ 1)$ donde la función alcance su máximo relativo:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{2\pm 4}{6}=-\frac{1}{3}\ ,\ 1$$

$$f''(x)=6x-2: \left|\begin{array}{l} f''\left(-\frac{1}{3}\right)=-4<0 \Rightarrow \text{ la función tiene un máximo en } x=-\frac{1}{3} \text{ de valor: } f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{27} \\ f''(1)=4>0 \Rightarrow \text{ en } x=1 \text{ la función tiene un mínimo relativo} \end{array}\right.$$

Por tanto, la función alcanza su valor máximo en $x=-\frac{1}{3}$

3. *Hallar la función f definida en todo número real que verifica las dos condiciones siguientes:*

a) $f'(x) = x^2 e^x$

b) *Su gráfica pasa por el punto (0 , 2).* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

La función f es la primitiva de f'(x) que pasa por el punto (0 , 2): $f(x) = \int x^2 e^x \, dx$

Aplicamos el método de integración por partes: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$$\left| \begin{array}{l} u = x^2 \ \Rightarrow \ du = 2xdx \\ dv = e^x \, dx \ \Rightarrow \ v = e^x \end{array} \right| \Rightarrow \ f(x) = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x \cdot dx$$

Para calcular la nueva integral, aplicamos otra vez el método de integración por partes:

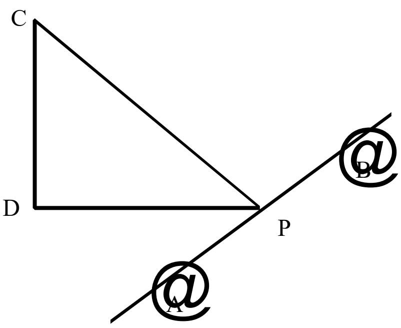
$$\left| \begin{array}{l} u = x \ \Rightarrow \ du = dx \\ dv = e^x \cdot dx \ \Rightarrow \ v = e^x \end{array} \right| \Rightarrow \int x \cdot e^x \cdot dx = x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx = x \cdot e^x - e^x \ \Rightarrow \ f(x) = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C =$$

$$= e^x \cdot \left(x^2 - 2x + 2\right) + C$$

Haciendo que pase por el punto $(0,\ 2)$: $f(0) = 2 + C = 2 \ \Rightarrow \ C = 0 \ \Rightarrow \ f(x) = e^x \cdot \left(x^2 - 2x + 2\right)$

4. *Dados los puntos A (1,1,1), B (!1,3,1), C (1,0,0) y D (0,2,0), se pide hallar el punto P perteneciente a la recta determinada por A y B tal que el triángulo CDP sea rectángulo con hipotenusa CP.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



La recta determinada por A y B tiene como vector direccional:

$\overline{AB} = (-2,\ 2,\ 0) \ \Rightarrow \ \overline{u} = (-1,\ 1,\ 0)$

y, por tanto, su ecuación en paramétricas es: $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{array} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \ P\,(1 - t,\ 1 + t,\ 1)$.

Los vectores $\overline{CD}$ y $\overline{DP}$ son: $\overline{CD} = (-1,\ 2,\ 0)$

$\overline{DP} = (1 - t,\ -1 + t,\ 1)$

y como deben ser perpendiculares: $\overline{CD} \cdot \overline{DP} = 0 \ \Rightarrow \ -1 + t - 2 + 2t = 0 \ \Rightarrow \ t = 1$

Por tanto, el punto P debe ser: $P\,(0,\ 2,\ 1)$

Septiembre 2001.

OPCIÓN B

1. *Dadas las matrices:* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, se pide:*

a) Calcular $A^2 - 4A + 4I_3$ [1 punto]
b) Calcular, si existe, la inversa de la matriz A [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 4A + 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

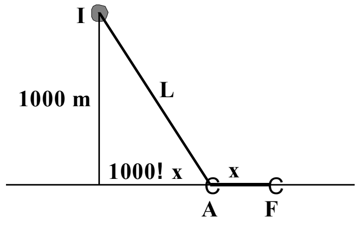
b) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. Para calcular la matriz inversa: $A \to A^t \to Adj(A^t) \to \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t) = A^{-1}$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. *Un pequeño islote dista 1 km de una costa rectilínea. Queremos instalar en dicho islote una señal luminosa que se ha de alimentar con un tendido eléctrico. La fuente de energía está situada en la costa en un punto distante 1 km del punto de la costa más próximo al islote. El coste del tendido submarino por unidad de longitud es* $\frac{5}{3}$ *del tendido en tierra. ¿A qué distancia de la fuente de energía debe empezar el tendido submarino para conseguir un coste mínimo?* [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.

Sea I el islote, F la fuente de energía y A el punto de la costa donde el cable debe sumergirse. Sea x la distancia desde F a A, es decir la longitud del cable terrestre (en metros). La longitud del cable sumergido es:



$$L = \sqrt{1000^2 + (1000 - x)^2} = \sqrt{10^6 + 10^6 - 2000x + x^2} = \sqrt{x^2 - 2000x + 2000000}$$

Si consideramos como 1 el coste del cable en tierra por unidad de longitud, el coste del cable submarino será de $\frac{5}{3}$ por unidad de longitud. El coste total será entonces: $C(x) = x + \frac{5}{3} \cdot \sqrt{x^2 - 2000x + 2000000}$ que debe ser mínimo.

$$C'(x) = 1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{2x - 2000}{2\sqrt{x^2 - 2000x + 2000000}} = 1 + \frac{5 \cdot (x - 1000)}{3\sqrt{x^2 - 2000x + 2000000}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{5 \cdot (x - 1000)}{3\sqrt{x^2 - 2000x + 2000000}} = -1 \;\Rightarrow$$

$$5 \cdot (x - 1000) = -3 \cdot \sqrt{x^2 - 2000x + 2000000} \;\Rightarrow\; 25x^2 - 50000x + 25000000 = 9x^2 - 18000x + 18000000 \;\Rightarrow$$

$$16x^2 - 32000x + 7000000 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{32000 \pm \sqrt{1024000000 - 448000000}}{32} = \frac{32000 \pm 24000}{32} = \begin{cases} 1750 \\ 250 \end{cases}$$

De las dos soluciones posibles, es evidente que la solución de nuestro problema es la segunda, es decir, el cable debe sumergirse a 250 metros de la fuente de energía.

3. *Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones* $y = 2 - x^4$ *e* $y = x^2$ [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.

Consideremos la función diferencia de las dos funciones dadas: $f(x) = 2 - x^4 - x^2 = -x^4 - x^2 + 2$. El área limitada por ambas funciones es el área del recinto limitado por f(x) y el eje OX.

Puntos de corte de f(x) con OX: $-x^4 - x^2 + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} -2 \;\Rightarrow\; \text{no existe } x \\ 1 \;\Rightarrow\; x = -1\ ,\ x = 1 \end{cases}$

Por tanto: $A = \int_{-1}^{1} \left(-x^4 - x^2 + 2\right)dx = \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{1} = \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 2\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 2\right) = \frac{22}{15} + \frac{22}{15} = \frac{44}{15}\ u^2$

4. *Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje OX en el punto (4 , 0) y pasa por el punto* $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ [1,5 puntos]. *Hallar la ecuación de la otra tangente a esta circunferencia que pasa por el origen de coordenadas* [1 punto].

SOLUCIÓN.

Si la circunferencia es tangente a OX en $(4,\ 0)$, su centro es el punto $C\,(4,\ b)$ y debe ocurrir:

$$d\left(C\,,\ \left(\frac{8}{5}\ ,\ \frac{6}{5}\right)\right) = b \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\left(4 - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(b - \frac{6}{5}\right)^2} = b \;\Leftrightarrow\; \frac{144}{25} + b^2 - \frac{12}{5}b + \frac{36}{25} = b^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{12}{5}b = \frac{180}{25} \;\Rightarrow\; b = 3$$

Se trata entonces de la circunferencia de centro $C\,(4,\ 3)$ y radio 3, es decir:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 9 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$$

Porque pasa por el origen de coordenadas, la recta tiene por ecuación $y = mx$ y el sistema $\begin{cases} y = mx \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0 \end{cases}$ tiene una única solución: $x^2 + m^2x^2 - 8x - 6mx + 16 = 0 \;\Rightarrow\; \left(1 + m^2\right)x^2 - (8 + 6m)x + 16 = 0$ y para que la ecuación tenga una sola solución: $(8 + 6m)^2 - 4 \cdot \left(1 + m^2\right) \cdot 16 = 0 \;\Rightarrow\; 64 + 96m + 36m^2 - 64 - 64m^2 = 0 \;\Rightarrow$

$-28m^2 + 96m = 0 \;\Rightarrow\; m \cdot (-28m + 96) = 0 \;\Rightarrow\; m = 0\ ,\ m = \frac{96}{28} = \frac{24}{7} \;\Rightarrow$ hay dos tangentes a la circunferencia que pasan por el origen de coordenadas: el propio eje de abscisas (como ya sabíamos) y la recta $y = \frac{24}{7}x \Leftrightarrow 24x - 7y = 0$

Junio 2002

OPCIÓN A

1. *a) Discute el sistema* $\begin{cases} (a^2-1)x+(a-1)y=0 \\ a^2y+z=0 \\ (a^2-1)x+ay+z=1 \end{cases}$ *según el valor del parámetro a.* [1,3 puntos]

b) Halla, si existe, la solución cuando a = 4. [1,2 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Comparemos los rangos de las matrices de los coeficientes A y ampliada B: $\left(\begin{array}{ccc|c} a^2-1 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 & 0 \\ a^2-1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$

En la matriz de los coeficientes, el máximo rango posible es 3:

$$\begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 \\ a^2-1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^4-a^2+a^3-a^2-a+1-a^3+a = a^4-2a^2+1=0 \;\Rightarrow\; a^2=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=1 \;\Rightarrow\; a=-1\ ,\ a=1$$

X Para $a \neq -1$ y 1: rg A = rg B = nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

X Para $a=-1$, las matrices son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Se tiene: rg A = 2, rg B = 3 $\Rightarrow$ el sistema es incompatible

X Para $a=1$, las matrices son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Se tiene: rg A =1 , rg B = 2 $\Rightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para a = 4, el sistema es compatible determinado: $\begin{cases} 15x+3y=0 \\ 16y+z=0 \\ 15x+4y+z=1 \end{cases}$. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 1 \\ 15 & 4 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{3}{240+45-60}=\frac{3}{225}=\frac{1}{75} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 15 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{225}=\frac{-15}{225}=-\frac{1}{15} \quad ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 15 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 15 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{225}=\frac{240}{225}=\frac{16}{15}$$

2. *Se sabe que la función* $f(x) = x^3 + ax + b$ *corta a su función derivada en x = 1 y que, además, en dicho punto f tiene un extremo.*

a) *Determina los valores de a y b.* [1 punto]
b) *Determina la naturaleza del extremo que f tiene en x = 1.* [0,5 puntos]
c) *¿Tiene f algún otro extremo?* [1 punto]

SOLUCIÓN.

$f(x) = x^3 + ax + b \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + a$

Como en x = 1 tiene un extremo relativo: $f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + a = 0 \;\Rightarrow\; a = -3$

Además: $f(1) = f'(1) \;\Rightarrow\; 1 - 3 + b = 0 \;\Rightarrow\; b = 2$

b) $f''(x) = 6x$ y como $f''(1) = 6 > 0$ en x = 1 la función tiene un mínimo relativo.

c) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = -1\ ,\ x = 1$ (puntos críticos)

Como $f''(-1) = -6 < 0 \;\Rightarrow\;$ en $x = -1$ la función tiene un máximo relativo.

3. Sean las funciones $f(x) = \log\ x - b$, $g(x) = a\sqrt{x} + b$. (*Nota: el logaritmo es neperiano*)

a) Determina a y b para que ambas funciones sean tangentes entre sí al pasar por x = 1. [1 punto]

b) Determina en qué puntos se anula cada una de estas funciones. [1 punto]

c) Determina cuál es el dominio de la función producto h(x)2 = f(x) g(x). [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Si las funciones son tangentes, tendrán una tangente común en x = 1, es decir $f'(1) = g'(1)$ y además $f(1) = g(1)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad g'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; 1 = \frac{a}{2} \;\Rightarrow\; a = 2\,. \qquad f(1) = g(1) \;\Rightarrow\; -b = 2 + b \;\Rightarrow\; b = -1$$

b) $f(x) = \log x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \log x = -1 \;\Rightarrow\; x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. $\quad g(x) = 2\sqrt{x} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 2\sqrt{x} = 1 \;\Rightarrow\; x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

c) $h(x) = (\log x + 1)\cdot\left(2\sqrt{x} - 1\right)$. La función producto tiene como dominio la intersección de los dominios de f y de g:

$$\text{Dom}(f) = (0,\ \infty) \text{ y } \text{Dom}(g) = [0,\ \infty) \;\Rightarrow\; \text{Dom}(h) = (0,\ \infty)$$

4. *La recta* $\begin{cases} x + y = 1 \\ \lambda y + z = 1 \end{cases}$ *corta en P y Q respectivamente a los pl2anos y = 0 y x = 0.*

a) Determina los puntos (si los hay) en el eje OZ que equidisten de P y Q. Naturalmente estos posibles puntos dependen del valor de λ. [1,3 puntos]

b) Determina λ *para que además los puntos del eje OZ formen con P y Q un triángulo equilátero*. [1,2 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Calculemos las coordenadas de P y de Q:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \lambda y + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow\; P\,(1\,,\,0\,,\,1) \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ \lambda y + z = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow\; Q\,(0\,,\,1,\,1-\lambda)$$

Un punto del eje OZ tiene por coordenadas $Z(0,\ 0,\ z)$. Debe ocurrir: $d\,(Z,\ P) = d\,(Z,\ Q)$, es decir:

$$\sqrt{1^2 + (1-z)^2} = \sqrt{1^2 + (1-\lambda-z)^2} \;\Rightarrow\; \sqrt{1 + 1 + z^2 - 2z} = \sqrt{1 + 1 + \lambda^2 + z^2 - 2\lambda - 2z + 2\lambda z} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2 + z^2 - 2z = 2 + \lambda^2 + z^2 - 2\lambda - 2z + 2\lambda z \;\Rightarrow\; \lambda^2 - 2\lambda + 2\lambda z = 0 \;\Rightarrow\; \lambda\cdot(\lambda - 2 + 2z) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 0,\ z = \frac{2-\lambda}{2}$$

X Si $\lambda = 0$: cualquier punto de OZ equidista de P y Q.

X Si $\lambda \neq 0$: los puntos de OZ que equidistan de P y Q son $Z\left(0,\ 0,\ \dfrac{2-\lambda}{2}\right)$

b) X Si $\lambda = 0$: $P(1, 0, 1)$, $Q(0, 1, 1)$, $Z(0, 0, z)$. Se tiene: $d(P, Q) = \sqrt{2}$ y $d(P, Z) = \sqrt{1 + (z-1)^2} \Rightarrow$

$1 + (z-1)^2 = 2 \Rightarrow (z-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} z - 1 = 1 \Rightarrow z = 2 \\ z - 1 = -1 \Rightarrow z = 0 \end{cases}$ luego los puntos $Z_1 = (0, 0, 2)$ y $Z_2 = (0, 0, 0)$ forman un triángulo equilátero con P y Q.

X Si $\lambda \neq 0$: $P(1, 0, 1)$, $Q(0, 1, 1-\lambda)$, $Z\left(0, 0, \dfrac{2-\lambda}{2}\right)$. Se tiene: $d(P, Q) = \sqrt{1 + 1 + \lambda^2}$ y

$d(P, Z) = \sqrt{1 + \left(1 - \dfrac{\lambda}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{1 + \dfrac{\lambda^2}{4}} \Rightarrow 2 + \lambda^2 = 1 + \dfrac{\lambda^2}{4} \Rightarrow 8 + 4\lambda^2 = 4 + \lambda^2 \Rightarrow 3\lambda^2 = -4 \Rightarrow \lambda = \sqrt{-\dfrac{4}{3}}$ luego ningún punto de OZ puede formar un triángulo equilátero con P y Q.

Junio 2002

OPCIÓN B

1. Sea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \Re \right\}$.

a) Prueba que si A, B 0 $\mathcal{M}$ también A+B y AB están en $\mathcal{M}$. [1 punto]

b) Determina las matrices C 0 $\mathcal{M}$ que verifican que $C^2 = 2C$. [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ dos matrices de $\mathcal{M}$.

X $A + B = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix} \in M$ X $A \cdot B = \begin{pmatrix} aa'+bb' & ab'+ba' \\ ba'+ab' & bb'+aa' \end{pmatrix} \in M$

b) Sea $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow C^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$; $2C = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}$.

$C^2 = 2C \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2a \\ 2ab = 2b \end{cases}$ $2ab = 2b \Rightarrow a = 1$ y sustituyendo en la primera ecuación:

$1 + b^2 = 2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$

Por lo tanto, hay dos matrices que satisfacen la igualdad: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. *Sea la integral* $\int e^{2x} \operatorname{sen} e^x \, dx$

a) Intégrala mediante el cambio $t = e^x$. [1,5 puntos]

b) *Calcula la constante de integración para que la función integral pase por el origen de coordenadas.* [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $t = e^x \Rightarrow dt = e^x\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{t}$; $e^{2x} = t^2\,2$

Se tiene: $\int e^{2x}\,\mathrm{sen}\,e^{x}\,dx = \int t^2 \cdot \mathrm{sen}\,t \cdot \frac{dt}{t} = \int t \cdot \mathrm{sen}\,t \cdot dt = (1)$ 2

Aplicando el método de integración por partes: $\begin{array}{l} u = t \;\Rightarrow\; du = dt \\ dv = \mathrm{sen}\,t \cdot dt \;\Rightarrow\; v = -\cos t \end{array}$

$$(1) = -t \cdot \cos t + \int \cos t \cdot dt = -t \cdot \cos t + \mathrm{sen}\,t + C = -e^{x} \cdot \cos e^{x} + \mathrm{sen}\,e^{x} + C$$

b) $-e^{0} \cdot \cos e^{0} + \mathrm{sen}\,e^{0} + C = 0 \;\Rightarrow\; -\cos 1 + \mathrm{sen}\,1 + C = 0 \;\Rightarrow\; C = \cos 1 - \mathrm{sen}\,1$

3. *Sea* $f(x) = x\left|x-1\right|^2$.

- *a) Halla los extremos y puntos de inflexión de la función f.* [2 puntos]
- b) *Calcula el límite de f en +4 y !4.* [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Como $\left|x-1\right|^2 = \begin{cases} \left[-(x-1)\right]^2 = x^2 - 2x + 1 & \text{para } x < 1 \\ (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$ la función es: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x \quad \forall x$

a) Los extremos relativos cumplen $f'(x) = 0$: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{3}, x = 1$

Los posibles extremos relativos de la función son los puntos de abscisas $x = \frac{1}{3}$ y $x = 1$:

$f''(x) = 6x - 4$: $f''\left(\frac{1}{3}\right) = 2 - 4 = -2 < 0 \;\Rightarrow$ En $x = \frac{1}{3}$ la función tiene un máximo relativo: $\left(\frac{1}{3}\,,\,\frac{4}{27}\right)$

$f''(1) = 6 - 4 = 2 > 0 \;\Rightarrow$ En $x = 1$ la función tiene un mínimo relativo: $(1\,,\,0)$

Los puntos de inflexión verifican $f''(x) = 0$: $f''(x) = 6x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{3}$ y como $f'''(x) = 6 \neq 0 \;\Rightarrow$ la función tiene un punto de inflexión en $x = \frac{2}{3}$: $\left(\frac{2}{3}\,,\,\frac{28}{27}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3 - 2x^2 + x\right) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3 - 2x^2 + x\right) = -\infty$

4. *Sabemos que en el plano el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de dos dados es una recta. Pues bien, ocurre que si en lugar de pedir que el cociente de las distancias sea 1, elegimos otro valor fijo, el lugar geométrico pasa a ser una circunferencia.*

a) Comprueba esta afirmación tomando como puntos (!1,0) y (1,0) y un parámetro λ *como cociente de las distancias.* [1 punto]

b) Da una expresión del centro y del radio de la circunferencia del apartado a) en función de λ. [1 punto]

c) Representa la figura para $\lambda = 2$. [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Sea $P(x\,,\,y)$ un punto cualquiera y sean $A(-1,\,0)$ y $B(1,\,0)$ los dos puntos dados. Se tiene:

$$\frac{d(A\,,\,P)}{d(B\,,\,P)} = \lambda \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \lambda \;\Rightarrow\; \frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = \lambda^2 \;\Rightarrow\; (x+1)^2 + y^2 = \lambda^2 \cdot \left[(x-1)^2 + y^2\right] \;\Rightarrow$$

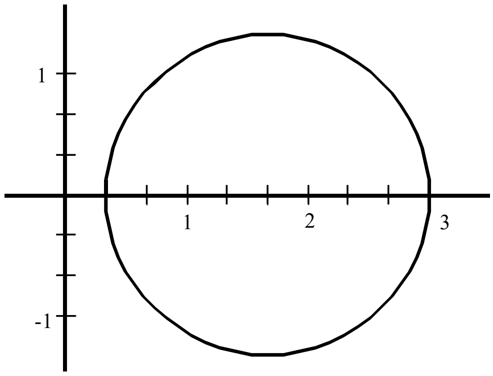
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = \lambda^2 \cdot \left(x^2 - 2x + 1 + y^2\right) \;\Rightarrow\; \left(1-\lambda^2\right)x^2 + \left(1-\lambda^2\right)y^2 + \left(2+2\lambda^2\right)x + 1 - \lambda^2 = 0 \;\Rightarrow$$

$x^2 + y^2 + \dfrac{2\cdot(1+\lambda^2)}{1-\lambda^2}\,x + 1 = 0$ que es, en efecto, la ecuación de una circunferencia (cuyo centro está en el eje OX).

b) Para una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ el centro es el punto $C\left(-\dfrac{A}{2}\ ,\ -\dfrac{B}{2}\right)$ y el radio $r = \sqrt{\left(\dfrac{A}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{B}{2}\right)^2 - C}$. En este caso: $C\left(-\dfrac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\ ,\ 0\right)$ y $r = \sqrt{\left(\dfrac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2 - 1}$

c) Para $\lambda = 2$, la circunferencia tiene su centro en $C\left(\dfrac{5}{3}\ ,\ 0\right)$ y su radio es $r = \sqrt{\dfrac{25}{9} - 1} = \sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3}$.

La circunferencia es:



Septiembre 2002

OPCIÓN A

1. *Sean A y B las matrices siguientes:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Es fácil comprobar que ambas tiene el máximo rango, que es 3. Pero ¿qué ocurre si las combinamos linealmente? En concreto, estudia el rango de la matriz A + 8B según los valores del parámetro 8. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

$A + \lambda B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1+\lambda \\ \lambda & 2+\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$. Veamos para qué valores de λ el rango es máximo, es decir 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1+\lambda \\ \lambda & 2+\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda + 2\lambda^2 + \lambda + \lambda^2 - 2 - 2\lambda - \lambda - \lambda^2 - 2\lambda^3 = -2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 2 \cdot \left(-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1\right) = 0 \;\Rightarrow$$

	!1	1	1	!1
1		!1	0	1
	!1	0	1	0

$$\Rightarrow\; -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda - 1)\left(-\lambda^2 + 1\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (\lambda - 1)(1 + \lambda)(1 - \lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1 \;,\; \lambda = -1$$

Se tiene:

X Para $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 1$: $\left|A + \lambda B\right| \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\left(A + \lambda B\right) = 3$

X Para $\lambda = -1$: $A + \lambda B = A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \text{rg}\left(A + \lambda B\right) = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

X Para $\lambda = 1$: $A + \lambda B = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \text{rg}\left(A + \lambda B\right) = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

2. *Sea la función* $f(x) = x \cos x$.

a) ¿Tiene límite en +4? (justifica tu respuesta). [1 punto]
b) Calcula la integral de f entre x = 0 y el primer cero positivo que tiene la función. [1,5 puntos]
Nota: Llamamos ceros de una función a aquellos puntos donde se anula.

SOLUCIÓN.

a) No existe $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \cdot \cos x\right)$ porque la función $g(x) = \cos x$ es periódica y oscila entre !1 y 1.

b) $f(x) = x \cos x = 0 \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ \cos x = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right.$

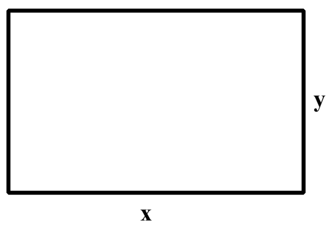
Calculemos una primitiva de $f(x)$ (utilizaremos el método de integración por partes):

$$\int (x \cdot \cos x)\, dx = \left| \begin{array}{c} u = x \ \Rightarrow \ du = dx \\ dv = \cos x\, dx \ \Rightarrow \ v = \operatorname{sen} x \end{array} \right| = x \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot dx = x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x$$

Por tanto: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cdot \cos x)\, dx = \left[\, x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x \,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - (0 \cdot \operatorname{sen} 0 + \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1$

3. *En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcula razonadamente la cuantía del máximo premio que se puede obtener en este concurso.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



Sean x e y las medidas del rectángulo de área máxima y, por tanto, con el que se consigue el premio máximo. Se tiene:

$$2x + 2y = 20 \ \Leftrightarrow \ x + y = 10 \ \Rightarrow \ y = 10 - x$$

El premio (en euros) es igual al área del rectángulo (en decímetros cuadrados):

$$P = x \cdot y = x \cdot (10 - x) = 10x - x^2 \ \Rightarrow \ P' = 10 - 2x = 0 \ \Rightarrow \ x = 5$$

$P'' = -2 < 0 \ \Rightarrow$ Para $x = 5$, P es máximo. Por tanto, las medidas del rectángulo que debe construirse para obtener el máximo premio son $x = 5$ e $y = 5$, es decir un cuadrado.

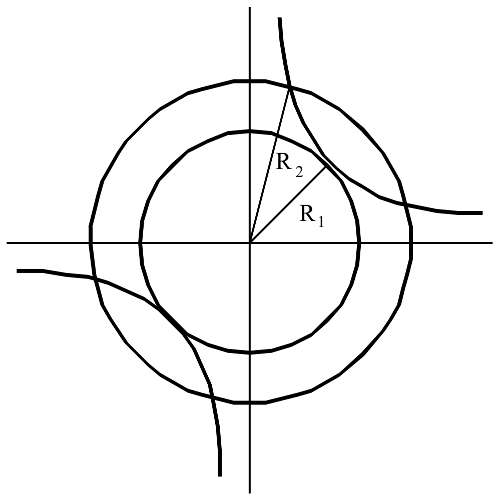
4. *Sea H la hipérbola de ecuación* $xy = 4$. *Sean C_1 y C_2 dos circunferencias, ambas con centro el origen de coordenadas y tales que*

a) C_1 es tangente a la hipérbola.

b) C_2 corta a la hipérbola H en un punto de abscisa 1.

Representa gráficamente las tres cónicas anteriores [1 punto] *y calcula el área de la corona circular encerrada entre las dos circunferencias* [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.



La hipérbola de ecuación $x \cdot y = 4 \ \Leftrightarrow \ y = \frac{4}{x}$ es simétrica respecto al origen de coordenadas. Tiene dos asíntotas: el eje OY $\left(\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \ , \ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \right)$ y el eje OX $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^- \ , \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+ \right)$. La rama situada en el cuadrante de abscisas y ordenadas positivas pasa por los puntos $(1,\ 4)$, $(2,\ 2)$ y $(4,\ 1)$ y la situada en el cuadrante de abscisas y ordenadas negativas pasa por los puntos $(-1,\ -4)$, $(-2, -2)$ y $(-4,\ -1)$.

La circunferencia C_1 está centrada en el origen y debe ser tangente a la hipérbola en los puntos $(-2,\ -2)$ y $(2,\ 2)$, por lo que su radio será: $R_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. La circunferencia C_2 está centrada en el origen y pasa por el punto $(1,\ 4)$ por lo que su radio será: $R_2 = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

El área de la corona circular es: $A = \pi \cdot {R_2}^2 - \pi \cdot {R_1}^2 = \pi \cdot \left({R_2}^2 - {R_1}^2\right) = \pi \cdot (17 - 8) = 9\pi \ u^2$

Septiembre 2002

OPCIÓN B

1. *a) Discute el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a - 1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{cases}$ *según el valor del parámetro a.* [1,5 puntos]

b) Halla, si existe, la solución cuando a = 0. [1 punto]

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ a & -1 & -1 & a-1 \\ 3 & 0 & -2a & a-1 \end{array}\right)$

a) El menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow$ el rango de ambas matrices es, como mínimo, 2. Estudiemos para qué valores de a el rango es 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{vmatrix} = 4a - 3 - 3 + 2a^2 = 2a^2 + 4a - 6 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

Se tiene: X Para $a \neq -3$ y $a \neq 1$: $\text{rg}\,A = \text{rg}\,M = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

X Para $a = -3$: $\text{rg}\,A = 2$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 12 - 12 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\,M = 3 \Rightarrow \text{rg}\,A \neq \text{rg}\,M \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

X Para $a = 1$: $\text{rg}\,A = 2$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}\,M = 2 \Rightarrow \text{rg}\,A = \text{rg}\,M < \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado: $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ \quad -y - z = -1 \\ 3x \qquad = -1 \end{cases}$.

La tercera ecuación facilita el valor de x: $x = -\frac{1}{3}$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación: $\begin{cases} y - z = \frac{2}{3} \\ y + z = 1 \end{cases}$ y sumando ambas ecuaciones: $2y = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{6}$. Sustituyendo en la segunda ecuación: $z = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

Las soluciones del sistema son, por tanto: $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{5}{6}$, $z = \frac{1}{6}$

2. *Sea la función f definida para todo número real x en la forma* $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+1 & \text{si } x<0 \\ \text{sen}\,\beta x+\cos\beta x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ *Se pide:*

a) *Determinar el valor de ∃ para que f sea derivable en x = 0.* [1,3 puntos]

b) *Calcular la integral de f sobre el intervalo* $\left(0\,,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$. [1,2 puntos]

Nota: Se entiende que la función f cuya integral se pide en la parte b) es la determinada previamente en la parte a). No obstante, si alguien no ha sabido calcular el valor de ∃, debe integrar f dejando ∃ como parámetro.

SOLUCIÓN.

a) Se tiene: $f'(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si } x<0 \\ \beta\cos\beta x-\beta\,\text{sen}\,\beta x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

Para que la función sea derivable en $x=0$: $f'\left(0^-\right)=f'\left(0^+\right)\ \Rightarrow\ 3=\beta$

b) $$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\text{sen}\,3x+\cos 3x\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(3\cdot\text{sen}\,3x+3\cdot\cos 3x\right)dx=\left[\frac{1}{3}\left(-\cos\,3x+\text{sen}\,3x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$\left[\frac{1}{3}\cdot\left(-\cos\pi+\text{sen}\,\pi\right)\right]-\left[\frac{1}{3}\cdot\left(-\cos\,0+\text{sen}\,0\right)\right]=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

3. *Sea la función* $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{x-1}$

a) *Determinar su dominio, es decir, el conjunto de puntos donde está definida.* [0,5 puntos]

b) *Estudiar sus máximos y mínimos (si los tiene) en el intervalo (!1 , 1), precisando si son absolutos o relativos respecto al intervalo indicado.* [2 puntos]

SOLUCIÓN.

$$f(x)=\frac{x-1-4x-4}{(x+1)\cdot(x-1)}=-\frac{3x+5}{x^2-1}$$

a) Por tratarse de una función racional, el dominio está formado por todos los valores de x que no anulen el denominador: $D(f)=|-\{-1\,,\,1\}$

b) $$f'(x)=-\frac{3\cdot\left(x^2-1\right)-\left(3x+5\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=-\frac{3x^2-3-6x^2-10x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{3x^2+10x+3}{\left(x^2-1\right)^2}=0\ \Rightarrow\ 3x^2+10x+3=0\ \Rightarrow$$

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\frac{-10\pm 8}{6}=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\\[2mm] -3\notin(-1,\,1)\end{cases}$$

Luego el único punto crítico de la función en el intervalo $(-1,\,1)$ es $x=-\dfrac{1}{3}$. Veamos si se trata de un máximo o de un mínimo:

$$f''(x)=\frac{(6x+10)\cdot\left(x^2-1\right)^2-\left(3x^2+10x+3\right)\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4}$$

Al sustituir x por $-\frac{1}{3}$ en $f''(x)$, el signo de la segunda derivada depende del signo del término $6x+10$ pues los otros términos o son positivos o nulos. Así: $f''\left(-\frac{1}{3}\right)>0 \Rightarrow$ La función tiene una mínimo relativo en $x=-\frac{1}{3}$.

Se trata, además, del mínimo absoluto en el intervalo $(-1,\ 1)$, pues en los extremos del intervalo la función tiene sendas asíntotas verticales y $\lim\limits_{x\to -1^+} -\frac{3x+5}{x^2-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} -\frac{3x+5}{x^2-1}=+\infty$

4. *a) Halla razonadamente la ecuación del lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por los puntos (2, 0) y (0, 1).* [1 punto]
b) Entre todas estas circunferencias halla la ecuación de aquélla o aquéllas cuyo centro equidista de los ejes coordenados. [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Sean $C(x,\ y)$ los centros de las circunferencias y sean $A(2,\ 0)$ y $B(0,\ 1)$ los puntos dados. Se tiene:

$$d(C,\ A)=d(C,\ B) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=x^2+y^2-2y+1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ 4x-2y-3=0$ es decir, se trata de una recta.

b) Si el centro equidista de los ejes coordenados: $x=y \Rightarrow 4x-2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\right)$

Además, $r=d(C,\ A)=\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+\left(0-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ con lo que la ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4} \Leftrightarrow x^2-3x+\frac{9}{4}+y^2-3y+\frac{9}{4}=\frac{10}{4} \Leftrightarrow x^2+y^2-3x-3y+2=0$$

Junio 2003

OPCIÓN A

1. *Luis, Juan y Óscar son tres amigos. Luis le dice a Juan: Si yo te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad. Calcular lo que tiene cada uno de ellos sabiendo que entre los tres reunen 60 euros.*
[2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sea x el dinero que tiene Luis, y el que tiene Juan y z el de Óscar. Escribimos un sistema de ecuaciones con las condiciones que indica el enunciado y lo resolveremos por el método de Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ x-\dfrac{x}{3}=y+\dfrac{x}{3} \\ x-\dfrac{x}{3}=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=60 \\ x-3y \qquad =0 \\ 2x \qquad -3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=60 \\ -4y-z=-60 \\ -2y-5z=-120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=60 \\ 4y+z=60 \\ 9z=180 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=30 \\ y=10 \\ z=20 \end{matrix}$$

Es decir, Luis tiene 30 euros, Juan 10 euros y Óscar 20 euros.

2. *Determinar un polinomio de tercer grado sabiendo que pasa por los puntos* $(0,0)$ *y* $(-1,1)$ *y que los dos son extremos* [1,5 puntos], *y analizar la naturaleza de ambos extremos, es decir si son máximos o mínimos* [1 punto].

SOLUCIÓN.

Sea $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ la función polinómica de tercer grado. Se trata de calcular sus coeficientes.

Se tiene: $f(0)=0 \Rightarrow d=0$ (*) , $f(-1)=1 \Rightarrow -a+b-c+d=1$ (*)
Además: $f'(0)=0$ y $f'(-1)=0$ por tratarse de extremos relativos. Como $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, se tiene:
$f'(0)=0 \Rightarrow c=0$ (*) , $f'(-1)=0 \Rightarrow 3a-2b+c=0$ (*)

De las igualdades (*), se sigue: $c=d=0$, $\begin{cases} -a+b=1 \\ 3a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+2b=2 \\ 3a-2b=0 \end{cases} \Rightarrow a=2$, $b=3$

Por tanto, el polinomio pedido es: $f(x)=2x^3+3x^2$

X Estudiemos la naturaleza de los extremos relativos: $f'(x)=6x^2+6x \Rightarrow f''(x)=12x+6$
$f''(0)=6>0 \Rightarrow$ el punto $(0,0)$ es un mínimo. $f''(-1)=-6<0 \Rightarrow$ el punto $(-1,1)$ es un máximo.

3. *Sean las parábolas* $y=x^2-4x+13$ *e* $y=2x^2-8x+16$.
a) Representar sus gráficas [0,5 puntos]
b) Calcular los puntos donde se cortan entre sí ambas parábolas [0,5 puntos]
c) Hallar la superficie encerrada entre las dos parábolas [1,5 puntos]

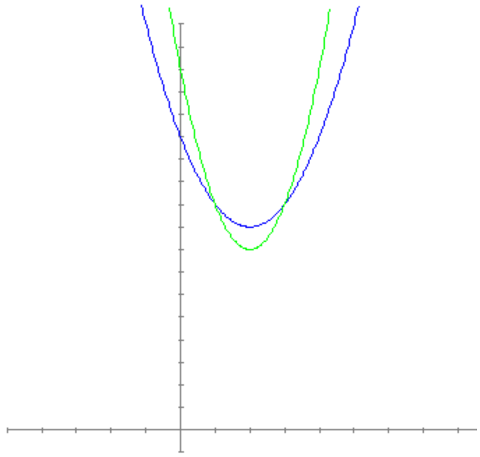
SOLUCIÓN.

a) Obtengamos sus vértices (puntos de máximo o mínimo):

- $y'=2x-4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow V(2,9)$. Como además $y''=2>0 \Rightarrow$ se trata de un mínimo.
  Otros puntos de la gráfica son: $(0, 13)$, $(1, 10)$, $(3, 10)$, $(4, 13)$

- $y' = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow V'(2,8)$. Como además $y'' = 4 > 0 \Rightarrow$ se trata de un mínimo.
  Otros puntos de la gráfica son: (0 , 16) , (1 , 10) , (3 , 10) , (4 , 16).

  Las gráficas son:



b) Los puntos comunes de ambas parábolas tienen iguales sus ordenadas, luego:

$$x^2 - 4x + 13 = 2x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x = 1 \ , \ x = 3$$

Por tanto, los puntos son: (1 , 10) y (3 , 10)

c) La superficie es: $\int_1^3 \left[\left(2x^2 - 8x + 16\right) - \left(x^2 - 4x + 13\right)\right] dx = \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x\right]_1^3 = -\frac{4}{3}$

luego: $S = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}\ \mathrm{u}^2$

4. *Sean los puntos* $A(3,2)$ *y* $B(5,3)$. *Calcular*
a) Ecuación general de la circunferencia que pasa por el punto B y tiene su centro en A [1 punto]
b) Ecuación de la tangente a esta circunferencia en B [1 punto]
c) Área del triángulo formado por la tangente anterior y los ejes coordenados [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) El radio es: $r = d(A, B) = \sqrt{(5-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$ y, por tanto, la ecuación general de la circunferencia es:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$$

b) La tangente es la recta perpendicular al radio AB que pasa por el punto B:

$\overline{AB} = (2,1) \Rightarrow$ la pendiente de la recta AB es $m = \frac{1}{2} \Rightarrow$ la pendiente de la tangente es -2. Como además pasa por el punto B, su ecuación es: $y - 3 = -2 \cdot (x-5) \Leftrightarrow y - 3 = -2x + 10 \Leftrightarrow 2x + y - 13 = 0$

c) Se trata de un triángulo rectángulo de base la abscisa del punto de corte de la recta con el eje OX y altura la ordenada del punto de corte con OY:

Corte con OX: $\begin{cases} 2x + y - 13 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{13}{2}$ Corte con OY: $\begin{cases} 2x + y - 13 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 13$

Por tanto: $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot 13 = \frac{169}{4}\ \mathrm{u}^2$

Junio 2003.

OPCIÓN B

1. *Buscar una matriz cuadrada X (pueden existir varias) cuyo primer elemento valga 2 y tal que la siguiente suma*

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$$

sea la matriz nula [2,5 puntos]

Nota: El primer elemento de una matriz es que el está en la primera fila y en la primera columna.

SOLUCIÓN.

La matriz X debe ser una matriz 2×2: sea $X = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$.

Debe ocurrir:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 11 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-2b & 2a-2c \\ 12 & 6a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2+11a & -2-a \\ -b+11c & -b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4-2b-2+11a=0 \\ 12-b+11c=0 \\ 2a-2c-2-a=0 \\ 6a-b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2b+11a=-2 \\ -b+11c=-12 \\ a-2c=2 \\ 6a-b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2b+11a=-2 \\ b=11c+12 \\ a=2+2c \\ 6(2+2c)-11c-12-c=0 \end{cases} \Rightarrow$$

Sustituyendo los valores de a y de b (2ª y 3ª ecuaciones) en la 1ª y 4ª ecuaciones:

$$-2(11c+12)+11(2+2c)=-2 \;\Rightarrow\; -22c-24+22+22c=-2 \;\Rightarrow\; 0=0$$
$$12+12c-11c-12-c=0 \;\Rightarrow\; 0=0$$

Las dos únicas ecuaciones independientes son la segunda y la tercera y por tanto los elementos a y b pueden escribirse en función de c que podemos considerar como un parámetro λ. Las matrices X son pues de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2+2\lambda \\ 11\lambda+12 & \lambda \end{pmatrix}$$

2. *Sea la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determinar sus coeficientes sabiendo que*

a) pasa por el origen de coordenadas tangencialmente a la bisectriz del primer cuadrante y

b) *tiene un extremo en $x = -0{,}5$* [1,5 puntos]

Determinar la naturaleza del extremo anterior [1 punto]

SOLUCIÓN.

Por pasar por el origen de coordenadas: $f(0) = 0 \;\Rightarrow\; c = 0$

La función derivada es: $f'(x) = 2ax + b\,x$

Por tener a la recta $y = x$ como tangente en el origen: $f'(0) = 1 \;\Rightarrow\; b = 1$

Por tener un extremo en $x = -0{,}5$: x

Por tanto, la parábola tiene por ecuación: $f(x) = x^2 + x$

Como $f''(x) = 2 > 0 \;\Rightarrow\;$ el extremo relativo es un mínimo.

3. *Sea la función* $f(x) = x e^{x}$

a) Calcular la ecuación de su tangente en el origen de coordenadas [0,5 puntos]

b) Determinar los extremos de la función f [1 punto]

c) Hallar el área encerrada entre la gráfica de esta curva, el eje de abscisas y la recta $x = 1$ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x (1 + x) \Rightarrow f'(0) = 1$ (pendiente de la recta tangente)

Además, pasa por el punto: $f(0) = 0$

Ecuación de la recta tangente: $y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = x$

b) Puntos críticos: $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x \cdot (1 + x) = 0 \Rightarrow x = -1$ pues $e^x \neq 0 \quad \forall x$

$2 f''(x) = e^x (1 + x) + e^x = e^x (2 + x) \Rightarrow f'(-1) = \frac{1}{e} \cdot 1 > 0 \Rightarrow$ en $x = -1$ la función tiene un mínimo: $\left(-1, -\frac{1}{e} \right)$

c) La función corta al eje de abscisas en $x = 0$. El área pedida es el valor de la integral $\int_0^1 x e^x \, dx$:

Calculemos una primitiva de la función (aplicaremos el método de partes):

Sean $\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x \, dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \Rightarrow \int x e^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x = e^x (x - 1)$

Por tanto: $A = \int_0^1 x e^x \, dx = \left[e^x (x - 1) \right]_0^1 = e \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1 \ u^2$

4. *Sean el plano* $\pi : x - 2y + 4z = 12$ *y el punto* $P(2, -1, 1)$.

a) Calcular la distancia δ *entre el plano* π *y el punto P* [0,5 puntos]

b) Hallar la ecuación de un plano paralelo a π *y distinto del mismo, que también diste de P la misma distancia* δ [1,5 puntos].

c) Calcular el volumen de la figura limitada por el plano π *y los tres planos coordenados* [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) $\delta = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{|2 + 2 + 4 - 12|}{\sqrt{1 + 4 + 16}} = \dfrac{4}{\sqrt{21}} = \dfrac{4\sqrt{21}}{21}$

b) Un plano paralelo a π tendrá por ecuación: $x - 2y + 4z + D = 0$. Se tiene:

$$\frac{|2 + 2 + 4 + D|}{\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}} \Rightarrow 8 + D = 4 \Rightarrow D = -4 \text{ luego el plano es: } x - 2y + 4z - 4 = 0$$

c) Obtengamos los vértices del tetraedro. Uno de ellos es el origen $O(0, 0, 0)$; los otros son:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 12 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 0, 3) \qquad \begin{cases} x - 2y + 4z - 12 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0, -6, 0)$$

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 12 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(12, 0, 0) \qquad V = \frac{1}{6} [OA, OB, OC] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 216 = 36 \ u^3$$

Septiembre 2003

OPCIÓN A

1. *Discutir el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y - az = 2 \\ -x + y - z = a - 1 \end{cases}$ *según los valores del parámetro a* [1,5 puntos]. *Entre los valores de a que hacen el sistema compatible elegir uno en particular y resolver el sistema que resulte al reemplazar a por el valor elegido* [1 punto].

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -a & 2 \\ -1 & 1 & -1 & a-1 \end{array}\right)$

Puesto que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ el rango de ambas matrices es 2 como mínimo.

Veamos para qué valores de a el rango es 3:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -a \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2a + a - 1 - 2 + 1 + a^2 = a^2 - a - 2 = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

X Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} M = 3 = \text{nº de incógnitas} \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

X Para $a = -1$: $\operatorname{rg} A = 2$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 2 + 2 + 2 + 2 = 9 \neq 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg} M = 3$ y como los rangos de ambas matrices son distintos, el sistema es incompatible.

X Para $a = 2$: $\operatorname{rg} A = 2$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg} M = 2 = \operatorname{rg} A < \text{nº de incógnitas} \;\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

< Para la segunda parte del ejercicio (resolución) puede optarse por dar al parámetro un valor distinto de -1 y 2 y resolverlo sabiendo que es compatible determinado, o bien resolverlo para $a = 2$ sabiendo que es compatible indeterminado. Nosotros lo resolveremos en ambos casos y en el primero optaremos por resolverlo sin sustituir a.

X Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$: resolvemos el sistema por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -a \\ a-1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{a^2 - a - 2} = \frac{-2 - a^2 + a - 2 + 2a - 2 + 2 + a}{(a+1)\cdot(a-2)} = \frac{-a^2 + 4a - 4}{(a+1)\cdot(a-2)} = \frac{-(a-2)^2}{(a+1)\cdot(a-2)} = -\frac{a-2}{a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -a \\ -1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}}{a^2 - a - 2} = \frac{-2a - a + 1 + a - 2 + 1 + a^3 - a^2}{(a+1)\cdot(a-2)} = \frac{a^3 - a^2 - 2a}{(a+1)\cdot(a-2)} = \frac{a\cdot(a+1)\cdot(a-2)}{(a+1)\cdot(a-2)} = a$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ -1 & 1 & a-1\end{vmatrix}}{(a+1)\cdot(a-2)}=\frac{2a^2-2a+1-2+2-a+1-2a}{(a+1)\cdot(a-2)}=\frac{2a^2-5a+2}{(a+1)\cdot(a-2)}=\frac{2\cdot\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot(a-2)}{(a+1)\cdot(a-2)}=\frac{2a-1}{a+1}$$

X Para $a=2$: puesto que el menor distinto de 0 en la matriz de los coeficientes es $\begin{vmatrix} 1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}$, las ecuaciones segunda y tercera son independientes en las incógnitas x e y. Considerando la incógnita z como parámetro ($z=\lambda$), el sistema a resolver es: $\begin{cases} x+2y=2+2\lambda\\ -x+y=1+\lambda\end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones: $3y=3+3\lambda \Rightarrow y=1+\lambda$ y sustituyendo en la primera ecuación: $x=2+2\lambda-2-2\lambda=0$, es decir las soluciones en este caso son: $x=0$, $y=1+\lambda$, $z=\lambda$

2. *Determinar el dominio* [0,5 puntos], *ceros* [0,5 puntos] *y extremos* [1,5 puntos] *de la función* $f(x)=x\ \ln\ x$.

SOLUCIÓN.

X $D(f)=\mathbb{R}^+$ pues la función $y=x$ tiene por dominio $\mathbb{R}$ y la función $y=\ln x$ tiene por dominio $(0,+\infty)$.

X $f(x)=0 \Leftrightarrow x\cdot\ln x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0\\ \ln x=0 \Rightarrow x=1\end{cases}$ luego la función se anula en $x=0$ y en $x=1$.

X $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1 \Rightarrow f''(x)=\frac{1}{x}$

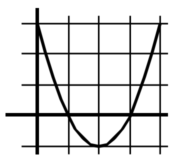
$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x=-1 \Rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$ y como $f''\left(\frac{1}{e}\right)=e>0 \Rightarrow$ en $x=\frac{1}{e}$ la función tiene un mínimo relativo

3. *Sea la parábola* $y=x^2-4x+3$.

a) Determinar los puntos de corte de la parábola con los dos ejes coordenados [0,5 puntos]
b) Calcular el área encerrada entre la parábola y el eje de abscisas [1 punto]
c) Calcular el área encerrada entre la parábola y el eje de ordenadas [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) X Con OX: $y=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} x=1 \Rightarrow (1,0)\\ x=3 \Rightarrow (3,0)\end{cases}$



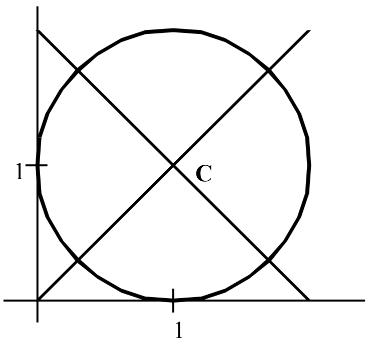
X Con OY: $x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow (0,3)$

b) $A=\left|\int_1^3 \left(x^2-4x+3\right)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3\right|=\left|(9-18+9)-\left(\frac{1}{3}-2+3\right)\right|=\left|-\frac{1}{3}-1\right|=\frac{4}{3}\ u^2$

c) $A=\int_0^1 \left(x^2-4x+3\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1=\frac{1}{3}-2+3=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}\ u^2$

4. *Sea C una circunferencia cuyo centro es el punto (1 , 1) y que es tangente a los dos ejes coordenados.*
a) Escribir su ecuación general [1 punto].
b) Determinar los puntos de C donde la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.



a) El centro es $C(1,\ 1)$ y el radio es $r = 1$, con lo que su ecuación es:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \iff x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

b) Los puntos serán los de intersección de la circunferencia con la recta perpendicular a $y = x$ que pasa por C:

pendiente de $y = x$: $m = 1 \Rightarrow$ pendiente de la perpendicular: $m' = -1$
La recta es: $y = -x + n$ y como pasa por $C(1,\ 1) \Rightarrow n = 2$ es decir $y = -x + 2$.

Cortando la recta y la circunferencia: $\begin{cases} y = -x + 2 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (-x+2)^2 - 2x - 2(-x+2) + 1 = 0 \Rightarrow$

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 - 2x + 2x - 4 + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\ 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Septiembre 2003

OPCIÓN B

1. *Sean las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. *Vemos que ambas tienen rango máximo, o sea 2. Determinar los valores de c tales que la matriz A + cB ya no tenga rango 2* [1,5 puntos]. *¿Cuál es el rango que tienen las respectivas matrices suma?* [1 punto]

SOLUCIÓN.

$A + cB = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{pmatrix}$. Para que el rango no sea 2, el único menor de orden 2 debe ser 0:

$$\begin{vmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{vmatrix} = 0 \iff 2 - c + 2c - c^2 + 4 + 4c = 0 \iff -c^2 + 5c + 6 = 0 \Rightarrow c = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{-2} = \frac{-5 \pm 7}{-2} =$$

$= -1\ ,\ 6$.

Por tanto, para $c = -1$ o $c = 6$: $\text{rg}(A + cB) = 1$. Para $c \neq -1$ y $c \neq 6$: $\text{rg}(A + cB) = 2$

2. *Sea la función* $f(x) = x\,\mathrm{sen}\,x$ *y sea T la recta tangente a su gráfica en* $x = \pi$ *. Determinar:*

a) La ecuación de T [1,5 puntos]
b) El área encerrada entre T y los ejes coordenados [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $\mathrm{f}(\pi) = 0 \;\Rightarrow$ El punto de tangencia es: $(\pi\,,\,0)$.

La pendiente de la recta tangente es $\mathrm{f}'(\pi)$ y como $\mathrm{f}'(x) = \mathrm{sen}\,x + x\,\cos x \;\Rightarrow\; m = \mathrm{f}'(\pi) = -\pi$

Por tanto, la ecuación de T es: $y - 0 = -\pi\cdot(x - \pi) \;\Leftrightarrow\; y = -\pi x + \pi^2$

b) Se trata de un triángulo de base: $\begin{cases} y = 0 \\ y = -\pi x + \pi^2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \pi x = \pi^2 \;\Rightarrow\; x = \pi$

y altura: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\pi x + \pi^2 \end{cases} \;\Rightarrow\; y = \pi^2$

Y, por tanto, su área es: $A = \dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot\pi^2 = \dfrac{\pi^3}{2}\ u^2$

3. *Sea la función* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) Definir su dominio [0,5 puntos]
b) Calcular su límite en el infinito [0,5 puntos]
c) Determinar sus extremos [0,5 puntos]
d) Calcular el área encerrada por la gráfica de f entre las abscisas 0 y 1 [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Se trata de una función racional en la que su denominador no se anula para ningún valor de x. Por tanto: $D(f) = \mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

c) $f'(x) = \dfrac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \;\Rightarrow\; x = -1\ ,\ x = 1$ (puntos críticos)

$f''(x) = \dfrac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)^2 - \left(-x^2+1\right)\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4} \;\Rightarrow$

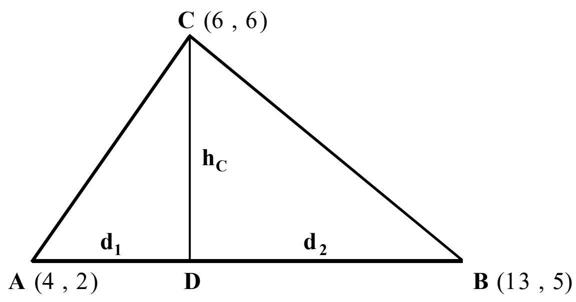
$f''(-1) > 0 \;\Rightarrow$ en $x = -1$ hay un mínimo relativo

$f''(1) < 0 \;\Rightarrow$ en $x = 1$ hay un máximo relativo

d) $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln 1\right) = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}\ u^2$

4. *Sea el triángulo de vértices A (4 , 2) , B (13 , 5) y C (6 , 6).*
a) Hallar la ecuación de la altura que pasa por el vértice C [1,5 puntos]
b) Calcular la longitud de los dos segmentos en que la altura anterior corta al lado AB [1 punto]

SOLUCIÓN.



a) La altura es la recta perpendicular a AB que pasa por C:

$$AB = (9\,,\ 3) \;\Rightarrow\; m = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; m' = -3$$

y su ecuación es: $y - 6 = -3 \cdot (x - 6) \;\Leftrightarrow\; y = -3x + 24$

b) Calculemos las coordenadas de D como intersección del lado AB y la altura h_C:

X Ecuación de AB: $y - 2 = \frac{1}{3} \cdot (x - 4) \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

X Coordenadas de D:

$$\begin{cases} y = -3x + 24 \\ y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3} \end{cases} \;\Rightarrow\; -3x + 24 = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; -9x + 72 = x + 2 \;\Rightarrow\; 10x = 70 \;\Rightarrow\; x = 7\ ,\ y = 3$$

X Por tanto: $d_1 = \sqrt{(7-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$, $d_2 = \sqrt{(13-7)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Junio 2004.

OPCIÓN A.

1. *Cuando el año 1800 Beethoven escribe su primera Sinfonía, su edad es diez veces mayor que la del jovencito Franz Schubert. Pasa el tiempo y es Schubert quien compone su célebre Sinfonía Incompleta. Entonces la suma de las edades de ambos músicos es igual a 77 años. Cinco años después muere Beethoven y en ese momento Schubert tiene los mismos años que tenía Beethoven cuando compuso su primera Sinfonía.*
Determinar el año de nacimiento de cada uno de estos dos compositores. [2,5 puntos]

Nota: Solamente se calificarán los resultados obtenidos matemáticamente, no los derivados de los conocimientos histórico-musicales del examinando.

SOLUCIÓN.

Organicemos temporalmente los datos:

X Año 1800 (Beethoven escribe su primera Sinfonía): Edad de Beethoven: 10x
Edad de Schubert: x

X Pasan y años (Schubert compone la Sinfonía Incompleta): Edad de Beethoven: $10x + y$
Edad de Schubert: $x + y$

Como la suma de las edades de ambos es de 77 años: $10x + y + x + y = 77 \iff 11x + 2y = 77$ (1)

X 5 años más tarde (muere Beethoven): Edad de Beethoven: $10x + y + 5$
Edad de Schubert: $x + y + 5$

Como Schubert tiene los mismos años que Beethoven en 1800: $x + y + 5 = 10x \iff 9x - y = 5$ (2)

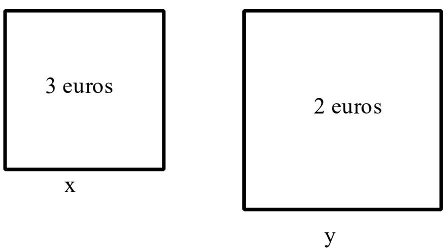
Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{cases} 11x + 2y = 77 \\ 9x - y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 11x + 2y = 77 \\ 18x - 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow 29x = 87 \Rightarrow x = 3$$

Es decir, en 1800 Beethoven tenía 30 años y por tanto nació en 1770 y Schubert tenía 3 años y nació en 1797.

2. *Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos distintos materiales. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado.*
¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro? [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.



La función coste es: $C = 3x^2 + 2y^2$

Además: $4x + 4y = 100 \Rightarrow x + y = 25 \Rightarrow y = 25 - x$ por lo que la función “coste” es:

$$C(x) = 3x^2 + 2(25 - x)^2 = 3x^2 + 1250 - 100x + 2x^2 = 5x^2 - 100x + 1250$$

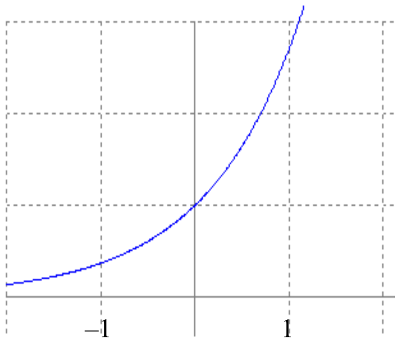
Veamos dónde alcanza esta función su valor mínimo:

$C'(x) = 10x - 100 = 0 \Rightarrow x = 10$ (valor crítico).

$C''(x) = 10 > 0 \Rightarrow$ Para x = 10, el coste es mínimo.

Por tanto, el lado de la chapa de 3 € debe ser de 10 cm y el de la chapa de 2 € debe medir 15 cm.

3. *Calcular el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x)=e^x$ y la cuerda a la misma que une los puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 1$* [2,5 puntos]



El recinto limitado por la cuerda, el eje de abscisas y las rectas $x=-1$ y $x=1$ es un trapecio rectángulo de base mayor e, base menor $\frac{1}{e}$ y altura 2, por lo que su área es: $S_1=\frac{1}{2}\cdot\left(e+\frac{1}{e}\right)\cdot 2=e+\frac{1}{e}$

El recinto limitado por la función $f(x)=e^x$, el eje de abscisas y las rectas $x=-1$ y $x=1$ tiene por área: $S_2=\int_{-1}^{1} e^x\,dx=\left[e^x\right]_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}$

El área pedida es: $S=S_1-S_2=e+\frac{1}{e}-e+\frac{1}{e}=\frac{2}{e}$ u^2

4. *Sean los puntos $A(2,3,0)$ y $B(-2,1,4)$. Determinar:*

a) Ecuación del plano π mediatriz del segmento AB [0,5 puntos].

b) El volumen del tetraedro formado por π y los tres planos coordenados [1 punto].

c) Ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el origen [1 punto]

Nota: El plano mediatriz de un segmento es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.

SOLUCIÓN.

a) El vector $\overline{AB}=(-4,\,-2,\,4)$ es un vector característico del plano. Su ecuación es por tanto: $-4x-2y+4z+D=0$.
Como pasa por el punto medio del segmento AB, $M(0,2,2)$: $-4+8+D=0 \Rightarrow D=-4$.
Por lo tanto, la ecuación del plano π es: $-4x-2y+4z-4=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z+2=0$

b) El tetraedro tiene por vértices el origen O y los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados:

- Con OX: $\begin{cases}2x+y-2z+2=0\\ y=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \mathrm{X}(-1,0,0) \Rightarrow \overline{\mathrm{OX}}=(-1,0,0)$
- Con OY: $\begin{cases}2x+y-2z+2=0\\ x=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \mathrm{Y}(0,-2,0) \Rightarrow \overline{\mathrm{OY}}=(0,-2,0)$
- Con OZ: $\begin{cases}2x+y-2z+2=0\\ x=0\\ y=0\end{cases} \Rightarrow \mathrm{Z}(0,0,1) \Rightarrow \overline{\mathrm{OZ}}=(0,0,1)$

Por tanto: $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overline{\mathrm{OX}},\overline{\mathrm{OY}},\overline{\mathrm{OZ}}\right]\right|=\left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot 2\right|=\frac{1}{3}$ u^3

c) La recta está caracterizada por el origen de coordenadas y el vector direccional $\overline{AB}$. Su ecuación continua es:

$$\frac{x}{-4}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$$

Junio 2004.

OPCIÓN B.

1. *Sea el sistema* $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ ax+2z=0 \\ ay+z=a \end{cases}$.

Se pide clasificarlo según los valores del parámetro a [1,5 puntos] *y resolverlo si en algún caso es compatible indeterminado* [1 punto]

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 & a \end{array}\right)$. Estudiemos los rangos de ambas matrices:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2-3a-2a=a^2-5a=0 \;\Rightarrow\; a=0\;,\; a=5$$

• Para $a \neq 0$ y $a \neq 5$: rg A = rg B = nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

• Para $a=0$, las matrices de los coeficientes y ampliada son $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ y según se observa la segunda y tercera filas son linealmente dependientes: rg A = rg B = 2 por lo que el sistema es compatible indeterminado.

La solución del mismo es: $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ 2z=0 \end{cases} \Rightarrow\; \mathrm{x}=5-3\lambda\;,\; y=\lambda\;,\; \mathrm{z}=0$

• Para $a=5$: el menor de la matriz de los coeficientes $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \Rightarrow$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2.

el menor de la matriz ampliada $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 50 \neq 0 \Rightarrow$ el rango de la matriz ampliada es 3.

Por consiguiente, los rangos de ambas matrices son distintos y el sistema es incompatible.

2. *Sea la función* $f(x)=x\,senx$. *Determinar:*
a) El área encerrada entre su gráfica y el eje de abscisas entre los valores x = 0 y x = π [1,5 puntos].
b) El área encerrada entre la tangente en x = π y los dos ejes coordenados [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $\int x\,senx\,dx = \begin{pmatrix} \mathrm{u=x} \Rightarrow \mathrm{du=dx} \\ dv=senx\,dx \Rightarrow v=-\cos x \end{pmatrix} = -x\,\cos x + \int \cos x\,dx = -x\,\cos x + senx$

Luego: $S=\int_0^\pi x\,senx\,dx = \left[-x\,\cos x + senx\right]_0^\pi = \pi\ \mathrm{u}^2$

b) Obtengamos la ecuación de la tangente. Su pendiente es $f'(\pi)=sen\pi+\pi\,\cos\pi=-\pi$ y pasa por el punto $(\pi\,,0)$, luego su ecuación es: $y-0=-\pi\cdot(x-\pi) \Leftrightarrow y=-\pi x+\pi^2$.

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: con OX: $0=-\pi x+\pi^2 \Rightarrow x=\pi \Rightarrow (\pi\,,0)$; con OY: $(0\,,\pi^2)$

Como se trata de un triángulo rectángulo de base π y altura π^2 su área es: $S=\frac{1}{2}\pi\cdot\pi^2=\frac{\pi^3}{2}$ u^2

3. *Sea la función* $f(x)=e^x\,\text{sen}x$ *. Determinar:*

a) El máximo de la función en el intervalo $(0\,,\pi)$ [1,5 puntos]

b) Ecuación de las tangentes a la gráfica en los extremos del intervalo anterior [1 punto].

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=e^x\text{sen}x+e^x\cos x=e^x(\text{sen}x+\cos x)=0 \Rightarrow \text{sen}x+\cos x=0 \Rightarrow \text{sen}x=-\cos x \Rightarrow \text{tag}x=-1 \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}$

$f''(x)=e^x(\text{sen}x+\cos x)+e^x(\cos x-\text{sen}x)=2\,e^x\cos x \Rightarrow f''\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\,e^{\frac{3\pi}{4}}\cos\frac{3\pi}{4}<0 \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}$ es un máximo relativo. Como $f(0)=f(\pi)=0$ y la función es continua, alcanza su máximo en $\frac{3\pi}{4}$ dentro del intervalo $(0\,,\pi)$

b) Tangente en x = 0: pasa por el punto $(0\,,0)$ y su pendiente es $f'(0)=1$, por lo que su ecuación es $y=x$.

Tangente en $x=\pi$: pasa por el punto $(\pi\,,0)$ y su pendiente es $f'(\pi)=-e^{\pi}$ luego su ecuación es: $y=-e^{\pi}(x-\pi)$

4. *Sea el plano* π *de ecuación x – 5y + z + 3 = 0 y sean r y s las rectas con ecuaciones*

$$r:\ x-3=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{3} \quad ; \quad s:\ \frac{x+1}{2}=y=z+2$$

Determinar:

a) Los puntos de intersección del plano π *con cada una de las rectas* [1 punto].

b) El área y perímetro del triángulo formado por los dos puntos anteriores y el origen de coordenadas [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) • $P=\pi \cap r$:

Las ecuaciones paramétricas de r son $\begin{cases} x=3+t \\ y=2+2t \\ z=4+3t \end{cases}$ por lo que un punto cualquiera de r tiene por coordenadas $(3+t\ ,\ 2+2t\ ,\ 4+3t)$. El punto común de la recta y el plano debe verificar la ecuación del plano, luego:

$$3+t-5(2+2t)+4+3t+3=0 \Rightarrow 3+t-10-10t+4+3t+3=0 \Rightarrow -6t=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow P(3\,,2\,,4)$$

• $Q=\pi \cap s$:

Las ecuaciones paramétricas de s son $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=-2+t \end{cases}$ por lo que un punto cualquiera de s es $(-1+2t\ ,\ t\ ,-2+t)$. El punto de intersección con el plano debe verificar: $-1+2t-5t-2+t+3=0 \Rightarrow -2t=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow Q(-1\,,0\,,-2)$

b) Sea el triángulo de vértices O, P y Q. Se tiene: $\overline{OP}=(3\,,2\,,4)$, $\overline{OQ}=(-1\,,0\,,-2)$, $\overline{QP}=(4\,,2\,,6)$.

• Perímetro: $\left|\overline{OP}\right|+\left|\overline{OQ}\right|+\left|\overline{QP}\right|=\sqrt{9+4+16}+\sqrt{1+0+4}+\sqrt{16+4+36}=\sqrt{29}+\sqrt{5}+\sqrt{56}$

• Área: $\frac{1}{2}\left|\overline{OP}\times\overline{OQ}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-4\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{16+4+4}=\frac{1}{2}\sqrt{24}=\sqrt{6}\ u^2$

Septiembre 2004

OPCIÓN A

1. *Sea el sistema homogéneo de ecuaciones* $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ x + 2ay - z = 0 \end{cases}$

a) Determinar el valor o valores del parámetro a para que el sistema tenga soluciones distintas de la nula [1,5 puntos]
b) Resolver el sistema para el valor o valores de a hallados en el apartado anterior [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Para que el sistema tenga soluciones distintas de la nula el rango de la matriz de los coeficientes debe ser menor que tres, y para ello el único menor de orden tres debe ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 2a & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 + 1 - 4a^2 - 2 + a - 2a = 0 \Leftrightarrow -4a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a \cdot (-4a - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

b) X Para $a = 0$, la matriz de los coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2. Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ las dos ecuaciones primeras son independientes respecto a las incógnitas x e y. Utilizando $z = \mu$ como parámetro, el sistema es:

$$\begin{cases} x + y = 2\mu \\ -y = -\mu \end{cases} \Rightarrow y = \mu \ , \ x = \mu \ , \ z = \mu$$

X Para $a = -\dfrac{1}{4}$, la matriz de los coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -\dfrac{1}{4} & -1 & 1 \\ 1 & -\dfrac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2 y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\dfrac{1}{4} & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ las dos primeras ecuaciones son independientes respecto a x e y. Utilizando $z = \lambda$ como parámetro, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y = 2\lambda \\ -\dfrac{1}{4}x - y = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2\lambda \\ x + 4y = 4\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 4\lambda & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{8\lambda - 4\lambda}{4 - 1} = \frac{4\lambda}{3} \ ; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda \\ 1 & 4\lambda \end{vmatrix}}{3} = \frac{4\lambda - 2\lambda}{3} = \frac{2\lambda}{3} \ ; \ z = \lambda$$

2. *Descomponer el número e en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los sumandos sea máxima* [1,5 puntos]. *Calcular dicha suma* [1 punto]

SOLUCIÓN.

Sean x e y los dos sumandos positivos: $e = x + y \Rightarrow y = e - x$

La función que debe ser máxima es: $S = \ln x + \ln (e - x)$. Veamos para que valor de x se maximiza la función:

$$S' = \frac{1}{x} - \frac{1}{e - x} = \frac{e - x - x}{x \cdot (e - x)} = \frac{e - 2x}{ex - x^2} = 0 \Rightarrow e - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{e}{2}$$

$$S''=\frac{-2\cdot\left(ex-x^2\right)-(e-2x)\cdot(e-2x)}{ex-x^2}=\frac{-2\cdot\left(ex-x^2\right)-(e-2x)^2}{ex-x^2}\;\Rightarrow\; f''\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{-2\cdot\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}\right)-(e-e)^2}{\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}}=-2<0$$

luego para $x=\frac{e}{2}$, $y=\frac{e}{2}$ la suma de los logaritmos neperianos es máxima.

La suma es: $S=\ln\frac{e}{2}+\ln\frac{e}{2}=2\cdot\ln\frac{e}{2}=2\cdot(\ln e-\ln 2)=2\cdot(1-\ln 2)=2-\ln 4$

3. *Calcular el área encerrada entre las gráficas de la recta* $y=x+2$ *y la parábola* $y=x^2$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Consideremos la función diferencia de las dos funciones dadas: $d(x)=x+2-x^2$. El área pedida es el área del recinto limitado por esta función diferencia y el eje de abscisas.

Los puntos de corte de d(x) y OX son: $-x^2+x+2=0\;\Rightarrow\; x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\frac{-1\pm 3}{-2}=\begin{cases}-1\\ 2\end{cases}$

Entonces: $A=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=-3+8-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\text{ u}^2$

4. *La recta* $x=\frac{1-y}{3}=\frac{2-z}{2}$ *corta a los tres planos coordenados en tres puntos.*
Determinar las coordenadas de estos puntos [0,5 puntos], *las distancias existentes entre cada par de ellos* [1 punto] *e indicar cuál es el que se encuentra en medio de los otros dos* [1 punto].

SOLUCIÓN.

Escribamos la recta como intersección de dos planos: $x=\frac{1-y}{3}=\frac{2-z}{2}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}3x=1-y\\ 2x=2-z\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}3x+y-1=0\\ 2x+z-2=0\end{cases}$

a) Puntos de corte con los planos coordenados:

X Punto de corte con $x=0$: $\begin{cases}3x+y-1=0\\ 2x+z-2=0\\ x=0\end{cases}\Rightarrow\; x=0\;,\; y=1\;,\; z=2\;\Rightarrow\; A\,(0,\,1,\,2)$

X Punto de corte con $y=0$: $\begin{cases}3x+y-1=0\\ 2x+z-2=0\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\; x=\frac{1}{3}\;,\; y=0\;,\; z=\frac{4}{3}\;\Rightarrow\; B\left(\frac{1}{3}\,,\,0,\,\frac{4}{3}\right)$

X Punto de corte con $z=0$: $\begin{cases}3x+y-1=0\\ 2x+z-2=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\; x=1\;,\; y=-2\;,\; z=0\;\Rightarrow\; C\,(1,\,-2,\,0)$

b) Distancias entre los puntos:

X $d(A,\,B)=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-0\right)^2+(0-1)^2+\left(\frac{4}{3}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+1+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{14}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{3}$

X $d(A,\ C)=\sqrt{(1-0)^2+(-2-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$

X $d(B,\ C)=\sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+(-2-0)^2+\left(0-\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+4+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{56}{9}}=\frac{2\sqrt{14}}{3}$

Puesto que $\frac{2\sqrt{14}}{3}+\frac{\sqrt{14}}{3}=\sqrt{14}\ \Rightarrow\ d(A,\ B)+d(B,\ C)=d(A,\ C)\ \Rightarrow$ el punto B se encuentra entre A y C.

Septiembre 2004

OPCIÓN B

1. *Determinar una matriz cuadrada X que verifique* $AX+XA=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ *siendo* $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ [2 puntos]. *Luego analizar si la matriz X es inversible, y en el caso de serlo calcular su matriz inversa* [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sea $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}a & b\\ a+c & b+d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a+b & b\\ c+d & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}2a+b & 2b\\ a+2c+d & b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{cases}2a+b=2\\ 2b=-2\\ a+2c+d=3\\ b+2d=3\end{cases}\ \Rightarrow\ b=-1\ ,\ a=\frac{3}{2}\ ,\ d=2\ ,\ c=-\frac{1}{4}$$

es decir: $X=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -1\\ -\frac{1}{4} & 2\end{pmatrix}$

X La matriz X es inversible pues: $|X|=\begin{vmatrix}\frac{3}{2} & -1\\ -\frac{1}{4} & 2\end{vmatrix}=3-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}\neq 0$. Calculemos X^{-1}:

$$X=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -1\\ -\frac{1}{4} & 2\end{pmatrix}\ \rightarrow\ X^t=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{4}\\ -1 & 2\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \mathrm{Adj}\left(X^t\right)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\ \rightarrow\ X^{-1}=\frac{\mathrm{Adj}\left(X^t\right)}{|X|}=\begin{pmatrix}\frac{8}{11} & \frac{4}{11}\\ \frac{1}{11} & \frac{6}{11}\end{pmatrix}$$

2. *Sea el polinomio* x^3+ax^2+bx+c.

a) Determinar los coeficientes a, b y c sabiendo que tiene extremos en $x=-1$ *y en* $x=1$ *y que pasa por el origen de coordenadas* [1,5 puntos]

b) Estudiar la naturaleza de ambos extremos [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c\ \Rightarrow\ f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=-1$ extremo relativo $\Rightarrow$ $f'(-1)=0$ $\Rightarrow$ $3-2a+b=0$ (*)
$x=1$ extremo relativo $\Rightarrow$ $f'(1)=0$ $\Rightarrow$ $3+2a+b=0$ (*)

Sumando las igualdades (*): $6+2b=0 \Rightarrow b=-3 \Rightarrow a=0$

Y como la función pasa por el origen de coordenadas: $f(0)=0 \Rightarrow c=0$

Por tanto, el polinomio es x^3-3x

b) La naturaleza de los extremos (máximo o mínimo) depende del signo de la segunda derivada: $f''(x)=6x$

$f''(-1)=-6<0 \Rightarrow$ en $x=-1$ la función tiene un máximo relativo
$f''(1)=6>0 \Rightarrow$ en $x=1$ la función tiene un mínimo relativo.

3. *Sea la parábola* $f(x)=x^2-6x+9$.

a) Probar que es tangente a uno de los ejes coordenados, indicando a cual [1 punto].
b) Calcular el área encerrada entre la gráfica de la parábola y los dos ejes coordenados [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Sólo puede serlo el eje OX. Probémoslo:

$f'(x)=2x-6=0 \Rightarrow x=3$
$f''(x)=2>0 \Rightarrow$ en $x=3$ la parábola tiene un mínimo (el vértice).
Además: $f(3)=9-18+9=0 \Rightarrow$ el punto $(3,\ 0)$ es un mínimo y pertenece al eje OX $\Rightarrow$ OX es tangente a la parábola en el punto $(3,\ 0)$

b) $A=\int_0^3\left(x^2-6x+9\right)dx=\left[\dfrac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_0^3=(9-27+27)-0=9\ u^2$

4. *Sea r la recta que pasa por los puntos* $(1,\ 2,\ 3)$ y $(-1,\ 0,\ 2)$.
a) Determinar las ecuaciones de los planos π *y* σ *que son perpendiculares a la recta r y que pasan respectivamente por los puntos* $(4,\ -2,\ -1)$ y $(2,\ -1,\ -3)$ [1,5 puntos]
b) Calcular la distancia que hay entre ambos planos π *y* σ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Un vector direccional de r es $\bar{u}=(2,\ 2,\ 1)$ y un plano perpendicular a r tendrá por ecuación: $2x+2y+z+D=0$

Como π pasa por $(4,\ -2,\ -1)$: $8-4-1+D=0 \Rightarrow D=-3$ y por tanto: $\pi \equiv 2x+2y+z-3=0$

Como σ pasa por $(2,\ -1,\ -3)$: $4-2-3+D=0 \Rightarrow D=1$ y por tanto: $\sigma \equiv 2x+2y+z+1=0$

b) Los planos π y σ son paralelos. La distancia entre ambos es:

$$d=\left|\frac{D-D'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=\left|\frac{-3-1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}\right|=\frac{4}{3}$$

Junio 2005.

OPCIÓN A

1. *Eva, Marta y Susana son tres jóvenes amigas que se comprometen a leer el Quijote este verano. Cada una por separado y en función del tiempo del que dispone, decide leer un mismo número de páginas cada día hasta terminar la obra. Eva leerá diariamente 5 páginas más que Marta y ésta 6 páginas más que Susana. Por ello Eva terminará la obra dos semanas antes que Marta y ésta 30 días antes que Susana. Se pregunta cuál es el total de páginas que tiene la versión de la inmortal obra cervantina que leen estas amigas.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sea x el total de páginas de la obra e y el número de páginas diarias que lee Eva. El número de páginas diarias que lee Marta es $y-5$ y el de Susana es $y-11$.

$\frac{x}{y}$ es el número de días que tarda Eva en leer la obra completa, $\frac{x}{y-5}$ son los días que tarda Marta y $\frac{x}{y-11}$ los que tarda Susana. Se tiene:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{x}{y-5}-14 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{x}{y-11}-44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\,(y-5)=xy-14y\,(y-5) \\ x\,(y-11)=xy-44y\,(y-11) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy-5x=xy-14y^2+70y \\ xy-11x=xy-44y^2+484y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=14y^2-70y \\ 11x=44y^2-484y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{14y^2-70y}{5}=\frac{44y^2-484y}{11} \Rightarrow 154y^2-770y=220y^2-484y \Rightarrow 66y^2-1650y=0 \Rightarrow y\,(66y-1650)=0$$

$\Rightarrow y=0$, $y=\frac{1650}{66}=25$ la solución y = 0 se desecha por absurda y nos queda y = 25, y por tanto: x = 1400

Es decir, la versión elegida de *el Quijote* tiene 1400 páginas.

2. *Sea la función* $f\,(x)=\dfrac{4x+sen\,2x}{sen\,3x}$. *Determinar el dominio de f* [1 punto] *e indicar si f tiene límite finito en algún punto que no sea del dominio.* [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

X El dominio es $D\,(f)=\Re-\{x\in\Re\ /\ sen\,3x=0\}$. $sen\,3x=0 \Rightarrow 3x=0+K\pi \Rightarrow x=K\cdot\frac{\pi}{3}$ y por tanto:

$$D\,(f)=\Re-\frac{K\pi}{3} \quad \text{con } K=0\,,1\,,\ 2\,,...$$

X Para $K=0\Rightarrow x=0$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x+sen\,2x}{sen\,3x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4+2\cos\,2x}{3\cos 3x}=2$

Para los restantes valores de K, el denominador se anula y el numerador no, por lo que la función tiende a infinito.

3. *Calcular los extremos y los puntos de inflexión de la función* $f\,(x) = e^x\, sen\,x$ *en el intervalo* $[0\,,2\pi]$. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Se tiene: $f'(x) = e^x\, sen\,x + e^x \cos x = e^x\,(sen\,x + \cos x) \Rightarrow f''(x) = e^x(sen\,x + \cos x) + e^x(\cos x - sen\,x) = 2\,e^x \cos x$

X Los extremos relativos anulan la primera derivada: $e^x\,(sen\,x + \cos x) = 0 \Rightarrow sen\,x + \cos x = 0 \Rightarrow sen\,x = -\cos x \Rightarrow$
$\Rightarrow tag\,x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}\ ,\ x = \dfrac{7\pi}{4}$.

Comprobemos si se trata de máximos o mínimos:

$f''\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2\,e^{\frac{3\pi}{4}} \cos\dfrac{3\pi}{4} < 0 \Rightarrow$ se trata de un punto de máximo relativo.

$f''\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = 2\,e^{\frac{7\pi}{4}} \cos\dfrac{7\pi}{4} > 0 \Rightarrow$ se trata de un punto de mínimo relativo

X Los puntos de inflexión anulan la segunda derivada: $2\,e^x \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}\ ,\ x = \dfrac{3\pi}{2}$

Comprobemos que no anulan la tercera derivada: $f'''(x) = 2\left[e^x \cos x - e^x\, sen\,x\right] = 2\,e^x\,(\cos x - sen\,x) \Rightarrow$

$f'''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\,e^{\frac{\pi}{2}}\,(0-1) \neq 0 \Rightarrow$ la función tiene un punto de inflexión en $x = \dfrac{\pi}{2}$

$f'''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 2\,e^{\frac{3\pi}{2}}\,(0+1) \neq 0 \Rightarrow$ la función tiene un punto de inflexión en $x = \dfrac{3\pi}{2}$

4. *Escribir la ecuación de la circunferencia con centro* $(2\,,-1)$ *y cuyo radio es 3, y luego determinar los puntos de esta circunferencia que equidistan de los ejes.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Nota: Las cónicas no forman parte de los contenidos para este examen. Este problema ha sido propuesto por error.

La ecuación de la circunferencia es: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

Los puntos que equidistan de los ejes están en las rectas $y = x$ o $y = -x$. Por tanto:

X Cortes con $y = x$: $x^2 + x^2 - 4x + 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$ $x = -1\ ,\ x = 2$ luego los puntos son: $(-1\,,-1)$ y $(2\,,2)$.

X Cortes con $y = -x$: $x^2 + x^2 - 4x - 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

luego los puntos son: $\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$

Junio 2005.

OPCIÓN B

1. *La terna* $(0,0,0)$ *es siempre solución del sistema* $\begin{cases} x+2y-az=0 \\ ax-y+z=0 \\ 2ax+y-z=0 \end{cases}$ *independientemente del valor del parámetro a.*

a) Indicar para qué valores del parámetro la citada terna es la única solución del sistema. [1,5 puntos]
b) Indicar algún valor del parámetro, si existe, para el cual el sistema tenga algunas soluciones distintas de la nula y mostrar estas soluciones. (Nota: si se encuentran varios valores del parámetro cumpliendo la condición pedida, para responder a esta cuestión basta tomar uno solo de ellos). [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & -1 & 1 \\ 2a & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes.

El sistema tiene una solución única (la solución trivial) cuando $rg\ A=3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & -1 & 1 \\ 2a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1-a^2+4a-2a^2+2a-1=-3a^2+6a=0 \Rightarrow 3a(-a+2)=0 \Rightarrow a=0\ ,\ a=2$$ es decir, cuando $a\neq 0$ y $a\neq 2$ el rango de A es 3 y por tanto el sistema tiene como única solución $x=y=z=0$

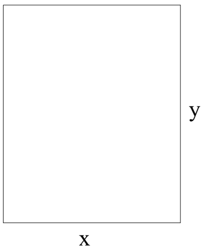
b) Para que el sistema tenga otras soluciones (compatible indeterminado) debe ser $rg\ A<3$ y esto ocurre cuando $a=0$ y $a=2$:

X Para a = 0: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}$

X Para a = 2: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-2z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}$

2. *Queremos construir un marco rectangular que encierre una superficie de un metro cuadrado. Sabemos que el coste de cada centímetro en los lados horizontales es de 2 euros, mientras que en los lados verticales es de 8 euros. Determinar las dimensiones que hemos de elegir para que el marco nos resulte lo más barato posible.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



Se tiene: $x\cdot y=1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{x}$

La función que debe ser mínima es la función "Precio" :

$$P=2x\cdot 200+2y\cdot 800=400x+1600y \Leftrightarrow P=400x+\frac{1600}{x}$$

$$P'=400-\frac{1600}{x^2}=0 \Rightarrow 400x^2-1600=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2 \quad \text{(valor crítico)}$$

Comprobemos que el valor crítico obtenido minimiza la función:

$P''=\dfrac{3200x}{x^4} \;\Rightarrow\; P''(2)>0 \;\Rightarrow$ x = 2 minimiza la función "Precio". Por tanto, las dimensiones del marco más barato es de 2 metros de ancho y 0,5 metros de alto.

3. *Sea la función* $f(x)=x\ sen\,2x$. *Calcular la integral de esta función entre x = 0 y su primer cero positivo. (Nota: Llamamos ceros de una función a aquellos puntos donde se anula).* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Obtengamos los ceros de la función: $x\cdot sen\,2x=0 \;\Rightarrow\; x=0 \;,\; sen\,2x=0 \;\Rightarrow\; 2x=\pi \;\Rightarrow\; x=\dfrac{\pi}{2}$

$$\int x\cdot sen\,2x\cdot dx=(1)\quad \left\{ \mathrm{u}=x \Rightarrow \mathrm{du}=\mathrm{dx}\ ;\ \mathrm{dv}=\mathrm{sen}\ 2\mathrm{x}\cdot\mathrm{dx} \Rightarrow \mathrm{v}=-\frac{1}{2}\cos 2x \right\}\ (1)=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\cdot dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}sen\,2x \;\Rightarrow\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot sen\,2x\cdot dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}sen\,2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

4. *Sea el plano* $\pi: 2x-3y+z=1$ *y el punto* $A=(5,-5,4)$.
a) Determinar el punto simétrico de A respecto de π. [1,5 puntos]
b) Volumen de la figura del espacio limitada por el plano π *y los tres planos cartesianos.* [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) X Obtengamos la ecuación de la recta *r* perpendicular al plano π que pasa por A:
El vector $\overline{u}=(2,-3,1)$ es normal al plano y, por tanto, es un vector direccional de la recta. Las ecuaciones paramétricas de la recta son: $r\equiv\begin{cases} x=5+2t \\ y=-5-3t \\ z=4+t\end{cases}$

X Obtengamos ahora las coordenadas del punto M, intersección de π y *r*:

$$2\cdot(5+2t)-3\cdot(-5-3t)+4+t=1 \;\Rightarrow\; 10+4t+15+9t+4+t=1 \;\Rightarrow\; 14t=-28 \;\Rightarrow\; t=-2$$

luego el punto M es el de coordenadas: $M\,(1,1,2)$

X El punto M es el punto medio del segmento AA' donde A' es el punto simétrico de A respecto a π:

$1=\dfrac{5+x}{2} \Rightarrow x=-3 \;;\; 1=\dfrac{-5+y}{2} \Rightarrow y=7 \;;\; 2=\dfrac{4+z}{2} \Rightarrow z=0$ es decir, el punto simétrico de A es $(-3,7,0)$.

b) El tetraedro tiene por vértices el origen de coordenadas O y los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados:

con OX: $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ y=0 \\ z=0\end{cases} \;\Rightarrow\; X\left(\dfrac{1}{2},0,0\right) \Rightarrow \overline{OX}=\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$

con OY: $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x=0 \\ z=0\end{cases} \;\Rightarrow\; Y\left(0,-\dfrac{1}{3},0\right) \Rightarrow \overline{OY}=\left(0,-\dfrac{1}{3},0\right)$

con OZ: $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Z}(0,0,1) \Rightarrow \overline{\mathrm{OZ}}=(0,0,1)$

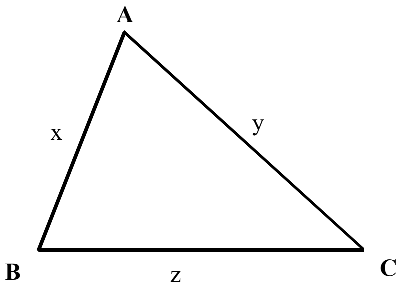
Por tanto: $V = \left| \dfrac{1}{6} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \dfrac{1}{6} \cdot \left(-\dfrac{1}{6}\right) \right| = \dfrac{1}{36} u^3$

Septiembre 2005

OPCIÓN A

1. *A, B y C son tres ciudades que forman un triángulo de manera que entre cada dos de ellas hay una carretera recta que las une. Se sabe que si se va de A a B dando la vuelta por C se hace un recorrido tres veces mayor que si se va directamente de A a B. Asimismo si para ir de A a C se da la vuelta por B el recorrido es el doble que si se va directamente de A a C.*
Calcular las distancias entre las tres ciudades sabiendo que la suma de las tres distancias es igual a 120 kilómetros. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



$$\begin{cases} y+z=3x \\ x+z=2y \\ x+y+z=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y-z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y+z=120 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 120 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-120-240}{-6-1-1-2+1-3}=\frac{-360}{-12}=30$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 120 & 1 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{-120-360}{-12}=\frac{-480}{-12}=40 \quad ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 120 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{-720+120}{-12}=\frac{-600}{-12}=50$$

Por tanto: $\quad d(A,\ B)=30\text{ kms}\ ,\ \ d(A,\ C)=40\text{ kms}\ ,\ \ d(B,\ C)=50\text{ kms}$

2. *Sea la función* $f(x)=e^x\,\text{sen}\,x$. *Determinar sus extremos* [1,5 puntos] *y sus puntos de inflexión* [1 punto] *en el intervalo* $[-\pi\ ,\ \pi\ ]$.

SOLUCIÓN.

X Los extremos relativos satisfacen la ecuación $f'(x)=0$:

$$f'(x)=e^x\cdot\text{sen}\,x+e^x\cdot\cos x=0\ \Rightarrow\ e^x(\text{sen}\,x+\cos x)=0\quad \text{y como } e^x\neq 0\ \forall x:\ \ \text{sen}\,x+\cos x=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \text{sen}\,x=-\cos x\ \Rightarrow\ \text{tg}\,x=-1\ \Rightarrow\ \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{4} \\ x=\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Veamos si se trata de máximos o de mínimos:

$$f''(x) = e^x \cdot (\operatorname{sen} x + \cos x) + e^x \cdot (\cos x - \operatorname{sen} x) = e^x \cdot (\operatorname{sen} x + \cos x + \cos x - \operatorname{sen} x) = 2\, e^x \cos x$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) > 0 \;\Rightarrow\; \text{en } x = -\frac{\pi}{4} \text{ la función tiene un mínimo relativo.}$$

$$f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \cos\frac{3\pi}{4} < 0 \;\Rightarrow\; \text{en } x = \frac{3\pi}{4} \text{ la función tiene un máximo relativo.}$$

X Los puntos de inflexión verifican $f''(x) = 0$: $\quad 2 \cdot e^x \cdot \cos x = 0 \;\Rightarrow\; \cos x = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{2}$, $\; x = \frac{\pi}{2}$

$$f'''(x) = 2 \cdot \left(e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \operatorname{sen} x\right) = 2 \cdot e^x \cdot (\cos x - \operatorname{sen} x)$$

$$f'''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot (0 + 1) \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{en } x = -\frac{\pi}{2} \text{ la función tiene un punto de inflexión.}$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{2}} \cdot (0 - 1) \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{en } x = \frac{\pi}{2} \text{ la función tiene un punto de inflexión.}$$

3. *Sea Ω la región acotada encerrada entre las parábolas $f(x) = x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = 2x^2 - x + 6$.*

a) Hallar la superficie de Ω [1,5 puntos].

b) Razonar (no valen comprobaciones con la calculadora) cuál de las dos parábolas está en la parte inferior de la región Ω [1 punto].

SOLUCIÓN.

a) Consideremos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2x^2 + x - 6 = -x^2 + 3x - 2$

El área de la región encerrada entre las dos parábolas es la misma que la encerrada entre la nueva función y el eje OX.

Calculemos los puntos de corte de $h(x)$ con OX : $\; -x^2 + 3x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2} =$ 1, 2

El área será entonces: $\displaystyle \int_1^2 \left(-x^2 + 3x - 2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \left(-\frac{8}{3} + 6 - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2\right) =$

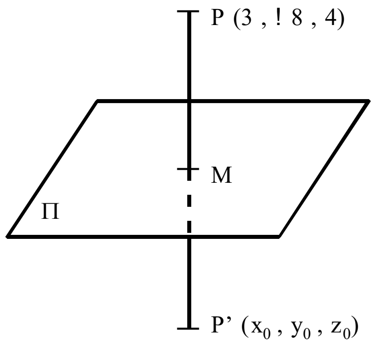
$$= -\frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = 4 - \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{24 - 14 - 9}{6} = \frac{1}{6} \quad \text{y por tanto:} \quad S(\Omega) = \frac{1}{6}\ u^2$$

b) En la parte inferior está la función $g(x)$ pues, según el apartado anterior, la función $f(x) - g(x)$ produce una región situada en el semiplano positivo.

4. *Determinar el punto simétrico del $(3, -8, 4)$ respecto del plano $x - 3y + 2z = 7$* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

X El vector $\overline{n} = (1, -3, 2)$ es un vector normal al plano dado. Por tanto, podemos obtener la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto dado $(3, -8, 4)$:



$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -8 - 3t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$ es la ecuación paramétrica de dicha recta

X Podemos ahora obtener las coordenadas del punto M, intersección de la recta y el plano:

$$3 + t + 24 + 9t + 8 + 4t = 7 \Rightarrow 14t = -28 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(1, -2, 0)$$

X Puesto que M es el punto medio del segmento que tiene por extremos el punto dado y su simétrico:

$$1 = \frac{3 + x_0}{2} \Rightarrow x_0 = -1 \quad ; \quad -2 = \frac{-8 + y_0}{2} \Rightarrow y_0 = 4 \quad ; \quad 0 = \frac{4 + z_0}{2} \Rightarrow z_0 = -4$$

Luego el punto simétrico del dado es: $P'\ (-1, 4, -4)$

Septiembre 2005

OPCIÓN B

1. *Estudiar según el valor del parámetro* λ *, el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + z = \lambda^2 \end{cases}$ *y resolverlo si en algún caso es compatible indeterminado.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

La matriz de los coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & \lambda^2 \end{array}\right)$

Estudiemos sus rangos, según los valores de λ :

El único menor de orden 3 en la matriz de los coeficientes es: $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 + 1 - \lambda - \lambda - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1$$

Se tiene: X Si $\lambda \neq 1$: rg A = rg M = nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado

X Si $\lambda = 1$, las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ cuyos rangos respectivos son iguales a 1 y el sistema es compatible indeterminado.

En este caso sólo una de las ecuaciones es independiente: $x + y + z = 1$. Considerando las incógnitas $y = t$ y $z = s$ como parámetros, las soluciones del sistema son: $x = 1 - t - s$, $y = t$, $z = s$.

2. *Calcular razonadamente el límite de la sucesión* $\dfrac{(n-2)^2}{(n+1)^3-(n-1)^3}$

SOLUCIÓN.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^2}{(n+1)^3-(n-1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4n+4}{n^3+3n^2+3n+1-n^3+3n^2-3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4n+4}{6n^2+2} = \frac{1}{6}$$

3. *Determinar el área encerrada por la gráfica de la función* $f(x)=x^2\, senx$ *y el eje de abscisas entre el origen y el primer punto positivo donde f se anula* [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.

$$f(x)=x^2\cdot \operatorname{sen} x = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ \operatorname{sen} x = 0 \;\Rightarrow\; x=\pi \end{cases}$$

Calculemos una primitiva de la función. Utilizaremos por dos veces el método de integración por partes:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

$$\int x^2\cdot \operatorname{sen} x\cdot dx = \left| \begin{matrix} x^2=u \;\Rightarrow\; 2x\,dx=du \\ \operatorname{sen} x\,dx=dv \;\Rightarrow\; -\cos x = v \end{matrix} \right| = -x^2\cdot\cos x + 2\left[x\cdot \operatorname{sen} x - \int x\cdot \cos x\cdot dx\right] =$$

$$\left| \begin{matrix} x=u \;\Rightarrow\; dx=du \\ \cos x\cdot dx=dv \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} x = v \end{matrix} \right| = -x^2\cdot \cos x + 2x\cdot \operatorname{sen} x + 2\cos x = \left(-x^2+2\right)\cdot\cos x + 2x\cdot \operatorname{sen} x$$

Por tanto: $A=\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \left[\left(-x^2+2\right)\cdot \cos x + 2x\cdot \operatorname{sen} x\right]_0^{\pi} = \left(-\pi^2+2\right)\cdot(-1)+2\pi\cdot 0 - 2\cdot 1 - 0 = \left(\pi^2-4\right)\,u^2$

4. *Sea r la recta intersección de los dos planos* $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$

a) Determinar el plano π *que contiene a la recta r y que pasa por el origen de coordenadas* [1,5 puntos]

b) Escribir la ecuación de la recta perpendicular a π *y que pasa por el punto* $(1,\,0,\,1)$ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Ecuación del haz de planos que pasan por r: $x+2y-z-3+\lambda\,(2x-y+z-1)=0$

El plano del haz que pasa por el origen de coordenadas es: $-3-\lambda=0 \;\Rightarrow\; \lambda=-3 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x+2y-z-3-6x+3y-3z+3=0 \;\Leftrightarrow\; -5x+5y-4z=0$ que es la ecuación del plano π

b) La recta perpendicular al plano tiene por vector direccional un vector normal al plano: $\overline{n}=(-5,\,5,\,-4)$. Su ecuación normal es: $\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{-4}$

Junio 2006.

OPCIÓN A

1. *Se consideran las matrices* $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ *donde* λ *es un número real.*

a) Encontrar los valores de λ *para los que la matriz AB tiene inversa.* [1,5 puntos]

b) Dados a y b números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ *compatible determinado con A la matriz del enunciado?.* [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\lambda & 3+2\lambda\\ 1-\lambda & 1\end{pmatrix}$.

$A\cdot B$ tiene inversa cuando $|A\cdot B|\neq 0$: $\begin{vmatrix}1+2\lambda & 3+2\lambda\\ 1-\lambda & 1\end{vmatrix}=1+2\lambda-3-2\lambda+3\lambda+2\lambda^2=2\lambda^2+3\lambda-2=0\ \Rightarrow$

$\lambda=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\dfrac{-3\pm 5}{4}\ \Rightarrow\ \lambda=\dfrac{1}{2}$, $\lambda=-2$. Luego la matriz $A\cdot B$ tiene inversa para $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ y -2

b) No puede serlo. La matriz A tiene un rango máximo de 2 y el número de incógnitas es de 3.

2. *Calcular los valores de a y b para que la función* $f(x)=\dfrac{bx}{x-a}$ *tenga como asíntota vertical la recta* $x=2$ *y como asíntota horizontal la recta* $y=3$*. Razonar si para* $a=2$ *y* $b=3$ *la función* $f(x)$ *tiene algún mínimo relativo.*

[2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

X Para que $x=2$ sea una asíntota vertical de la función, debe ser $a=2$ pues $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{bx}{x-2}=\infty$

Para que $y=3$ sea una asíntota horizontal debe ser $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$ y eso ocurre cuando $b=3$ pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x-2}=3$

X $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}\ \Rightarrow\ f'(x)=\dfrac{3(x-2)-3x}{(x-2)^2}=\dfrac{-6}{(x-2)^2}\neq 0\ \forall x\ \Rightarrow$ La función no tiene extremos relativos.

3. *a) Utilizando el cambio de variable* $t = e^x$ *, calcular* $\int e^{x+e^x}\,dx$ [1,5 puntos]

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{7x^2}$ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $t = e^x \;\Rightarrow\; dt = e^x\,dx$. Se tiene: $\int e^{x+e^x}\,dx = \int e^x \cdot e^{e^x}\,dx = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{e^x} + C$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{7x^2} = \dfrac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{14x} = \dfrac{1}{0} = \infty$

4. *Calcular la distancia entre las rectas r y s, donde* $r: \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = 3 + k \end{cases}$ *y* $s: \begin{cases} x = -1 + k \\ y = -1 + 3k \\ z = 4 - 2k \end{cases}$

SOLUCIÓN.

Estudiemos la posición relativa de las dos rectas:

$\overline{u} = (2, -1, 1)$ es un vector direccional de r y $\overline{v} = (1, 3, -2)$ un vector direccional de s $\Rightarrow$ las rectas no son paralelas puesto que sus coordenadas no son proporcionales.

$A(2, 1, 3)$ es un punto de r y $B(-1, -1, 4)$ un punto de s $\Rightarrow AB = (-3, -2, 1)$

Veamos si los vectores $\overline{u}, \overline{v}$ y AB son o no linealmente independientes:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 6 + 9 + 1 - 8 = 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes $\Rightarrow$ las rectas están en un mismo plano y, por tanto, se cortan $\Rightarrow \; d(r, s) = 0$

Junio 2006

OPCIÓN B

1. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{pmatrix}$

a) Sin utilizar la regla de Sarrus, calcular el determinante de dicha matriz. [1,5 puntos]
b) Estudiar el rango de A en el caso en que $b = -a$. [1 punto]

SOLUCIÓN.

a)

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} a \begin{vmatrix} a & ab & ab \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} a^2 \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} a^2 \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a^2-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-b^2 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} a^2 \begin{vmatrix} a^2-b^2 & 0 \\ 0 & a^2-b^2 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=}$$

$$= a^2 \cdot \left(a^2 - b^2\right)^2$$

Propiedades aplicadas: (1) y (2) sacar factor común a "a" en la primera columna y en la primera fila. (3) $F_2 - b \cdot F_1$, $F_3 - b \cdot F_1$
(4) y (5) Desarrollo por los elementos de la primera columna

b) Para $b = -a$, la matriz A es: $\begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \end{pmatrix}$ y como los tres vectores fila son linealmente dependientes, el rango de la matriz es 1.

2. *La función* $f : [0, \infty) \to /$ *definida por* $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$ *es continua en* $[0, \infty)$.

a) Hallar el valor de a que hace que esta afirmación es cierta. [0,75 puntos]

b) Calcular $\int_0^{10} f(x)\, dx$ [1,75 puntos]

SOLUCIÓN.

a) El único punto de posible discontinuidad está en $x = 8$. Para que la función sea continua en él debe ser:

$$\lim_{x \to 8^-} f(x) = \lim_{x \to 8^+} f(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 8^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 8} \sqrt{ax} = \sqrt{8a} \\ \lim\limits_{x \to 8^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x^2 - 32}{x - 4} = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{8a} = 8 \Rightarrow 8a = 64 \Rightarrow a = 8$$

b) Puesto que hay un cambio de definición de la función en $x = 8$: $\int_0^{10} f(x)\, dx = \int_0^{8} f(x)\, dx + \int_8^{10} f(x)\, dx$

Calculemos las primitivas: $\int \sqrt{8x}\,dx = \sqrt{8}\int x^{1/2}\,dx = \sqrt{8}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}$

$$\int \frac{x^2-32}{x-4}\,dx = \int\left(x+4-\frac{16}{x-4}\right)dx = \frac{1}{2}x^2+4x-16\ln(x-4))$$

Se tiene: $\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 \sqrt{8x}\,dx + \int_8^{10}\frac{x^2-32}{x-4}dx = \left[\frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^8 + \left[\frac{1}{2}x^2+4x-16\ln(x-4)\right]_8^{10} =$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot 16\sqrt{2} + 50 + 40 - 16\ln 6 - 32 - 32 + 16\ln 4 = \frac{128}{3} + 26 + 16\ln\frac{4}{6} = \frac{206}{3} + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^{16}$$

3. *Descomponer el número 8 en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo sea mínima.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sean x y $8-x$ los dos sumandos. La función que debe ser mínima es: $f(x) = x^3 + (8-x)^2 = x^3 + x^2 - 16x + 64$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4+192}}{6} = \frac{-2\pm\sqrt{196}}{6} = \frac{-2\pm 14}{6} \Rightarrow x = 2\ ,\ x = -\frac{8}{3}$$

$f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'(2) > 0 \Rightarrow$ para $x = 2$ la función es mínima.

Los dos sumandos son: 2 y 6

4. *a) Estudiar si son linealmente independientes los vectores* $\vec{a} = (3,1,2)$, $\vec{b} = (0,1,1)$ y $\vec{c} = (1,1,1)$. *Expresar el vector* $\vec{v} = (0,0,1)$ *como combinación lineal de* $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. [1,5 puntos]

b) *¿Son el plano* $\pi: 2x+3y+z+1=0$ *y la recta* $r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-3} = -z$ *ortogonales?. Justificar la respuesta.*

[1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+1-2-3 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente independientes.

$$(0,\ 0,\ 1) = \alpha_1(3,\ 1,\ 2) + \alpha_2(0,\ 1,\ 1) + \alpha_3(1,\ 1,\ 1) = (3\alpha_1+\alpha_3\ ,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ ,\ 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1+\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1 \end{cases}$$

y resolviendo el sistema: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -3$ es decir: $\overline{v} = \overline{a} + 2\overline{b} - 3\overline{c}$

b) El plano y la recta serán perpendiculares si el vector normal al plano $\overline{n}$ y el vector direccional de la recta $\overline{u}$ son paralelos (tienen sus coordenadas proporcionales):

Se tiene: $\overline{n} = (2,\ 3,\ 1)$ y $\overline{u} = (-2,\ -3,\ -1)$ y como $\overline{n} = -\overline{u}$, son paralelos y, por tanto, el plano y la recta son perpendiculares.

Septiembre 2006

OPCIÓN A

1. *La liga de fútbol de un cierto país la juegan 21 equipos a doble vuelta. Este año, los partidos ganados valían 3 puntos, los empatados 1 punto y los perdidos 0 puntos. En estas condiciones, el equipo campeón de liga obtuvo 70 puntos. Hasta el año pasado los partidos ganados valían 2 puntos y el resto igual. Con el sistema antiguo, el actual campeón hubiera obtenido 50 puntos. ¿Cuántos partidos ganó, empató y perdió el equipo campeón?* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sean x el número de partidos ganados, y el número de partidos empatados y z el número de partidos perdidos. Se tiene:

$$\begin{cases} x + y + z = 40 \\ 3x + y = 70 \\ 2x + y = 50 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 1 & 1 \\ 70 & 1 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{70-50}{3-2} = \frac{20}{1} = 20 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 40 & 1 \\ 3 & 70 & 0 \\ 2 & 50 & 0 \end{vmatrix}}{1} = \frac{150-140}{1} = 10$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 40 \\ 3 & 1 & 70 \\ 2 & 1 & 50 \end{vmatrix}}{1} = 50 + 120 + 140 - 80 - 150 - 70 = 10$$

es decir, ganó 20 partidos, empató 10 y perdió otros 10 partidos.

2. *Dadas las funciones* $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = x^3$, *determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciones entre las rectas:*
a) $x = 0$ *y* $x = 1$. [1,25 puntos]
b) $x = 1$ *y* $x = 2$. [1,25 puntos]

SOLUCIÓN.

Consideremos la función diferencia de las dos funciones dadas: $h(x) = x^2 - x^3$.

Calculemos una primitiva de esta función: $\int \left(x^2 - x^3\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

a) $A_1 = \int_0^1 h(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\,u^2$

b) $A_2 = \left|\int_1^2 h(x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_1^2\right| = \left|\left(\frac{8}{3} - \frac{16}{4}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\right| = \left|\frac{7}{3} - \frac{15}{4}\right| = \left|-\frac{17}{12}\right| = \frac{17}{12}\,u^2$

3. *a) Comprobar si* $f(x)=\dfrac{e^x+\text{senx}}{e^x}$ *tiene un máximo relativo en* $x=\dfrac{\pi}{4}$ [1,25 puntos]

b) *Calcular* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}$ [1,25 puntos]

SOLUCIÓN.

a) En $x=\dfrac{\pi}{4}$ hay un máximo relativo si: $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ y $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)<0$

Se tiene:

$$f(x)=1+\frac{\text{senx}}{e^x}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{\cos x\cdot e^x-\text{sen}\,x\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x\cdot(\cos\ x-\text{sen}\,x)}{e^{2x}}=\frac{\cos x-\text{sen}\,x}{e^x}\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}}=0$$

Por otra parte:

$$f''(x)=\frac{(-\text{sen}\,x-\cos\ x)\cdot e^x-(\cos\ x-\text{sen}\,x)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x\cdot(-\text{sen}\,x-\cos\ x-\cos\ x+\text{sen}\,x)}{e^{2x}}=\frac{-2\cdot\cos\ x}{e^x}\ \Rightarrow$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}}=-\frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}}<0$$ luego $x=\dfrac{\pi}{4}$ cumple las condiciones necesaria y suficiente para ser un máximo relativo.

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}=1^\infty=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{6}}\right)^{\frac{x^2}{x+3}\cdot\frac{x-1}{6}\cdot\frac{6}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{6}}\right)^{\frac{x-1}{6}}\right]^{\frac{6x^2}{x^2+2x-3}}=e^6$$

4. *¿Para qué valores del parámetro m la recta* $x=y+1=\dfrac{11-mz}{3}$ *es paralela al plano* $2x+y+z=9$? *Determinar el punto de intersección de la recta y el plano para m = 2.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

X La ecuación continua de la recta es $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-\frac{11}{m}}{-\frac{3}{m}}$. Un vector direccional de la misma $\bar{u}=\left(1,\ 1,\ -\dfrac{3}{m}\right)$ debe ser perpendicular al vector $\bar{n}=(2,\ 1,\ 1)$ normal al plano dado y, por tanto, su producto escalar debe ser 0:

$$\bar{u}\cdot\bar{n}=0\ \Rightarrow\ 2+1-\frac{3}{m}=0\ \Rightarrow\ 3m-3=0\ \Rightarrow\ m=1$$

X Para $m=2$, la ecuación paramétrica de la recta es: $\begin{cases}x=t\\ y=-1+t\\ z=\dfrac{11}{2}-\dfrac{3}{2}t\end{cases}$. Haciendo que el punto $\left(t,\ -1+t,\ \dfrac{11}{2}-\dfrac{3}{2}t\right)$

esté en el plano, obtendremos el punto de intersección: $2t-1+t+\dfrac{11}{2}-\dfrac{3}{2}t=9\ \Rightarrow\ 4t-2+2t+11-3t=18\ \Rightarrow$

$3t = 9 \ \Rightarrow \ t = 3 \ \Rightarrow$ el punto buscado es: $(3, \ 2, \ 1)$

Septiembre 2006.

OPCIÓN B

1. *Teniendo en cuenta que* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$ *, calcular el valor del siguiente determinante, sin desarrollarlo,*

$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} \right) = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} \right) = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -3 \cdot 7 = -21$$

2. *a) La función* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ *no está definida para* $x = 0$. *Definir* $f(0)$ *de modo que* $f(x)$ *sea una función continua en ese punto.* [1,25 puntos]

b) Utilizando el cambio de variable $t = \ln x$ *, calcular* $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} \, dx$ [1,25 puntos]

SOLUCIÓN.

Para que la función sea continua en $x = 0$, debe ser: $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Se tiene: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+1} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{x+1} + 1\right)}{x \cdot \left(\sqrt{x+1} + 1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x + 1 - 1}{x \cdot \left(\sqrt{x+1} + 1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x \cdot \left(\sqrt{x+1} + 1\right)} =$

$\displaystyle = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$

Por tanto, debe ser $f(0) = \dfrac{1}{2}$, es decir, la función debe estar definida así: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

b) $t = \ln x \ \Rightarrow \ dt = \dfrac{dx}{x}$. Se tiene entonces:

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\, dx = \int \frac{\ln t}{t}\, dt = \int \ln t \cdot d(\ln t) = \frac{1}{2}\ln^2 t + C = \frac{1}{2}\ln^2 (\ln x) + C$$

3. *Sea* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función polinómica de grado menor o igual a tres que tiene un mínimo relativo en* $(0,\ 0)$ *y un máximo relativo en* $(2,\ 2)$. *Calcular la expresión de dicha función.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Se tiene: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Si la función tiene un mínimo relativo en $(0,\ 0)$, debe ser: $f(0) = 0$ (1) y $f'(0) = 0$ (2)
Si la función tiene un máximo relativo en $(2,\ 2)$, debe ser: $f(2) = 2$ (3) y $f'(2) = 0$ (4)

De la condición (1): $d = 0$
De la condición (2): $c = 0$
De la condición (3): $8a + 4b = 2$
De la condición (4): $12a + 4b = 0 \;\Rightarrow\; b = -3a$
y sustituyendo en la condición (3): $8a - 12a = 2 \;\Rightarrow\; a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{3}{2}$

Por tanto la función que se ajusta a las condiciones expresadas es: $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

4. *a) Estudiar la dependencia o independencia lineal de los vectores* $\vec{u} = (2,\ 0,\ 9)$, $\vec{v} = (3, -1,\ 2)$, $\vec{w} = (5,\ -1,\ 4)$. [0,75 puntos]

b) Dados los planos: $\pi_1:\ 3x - y + 2z + 1 = 0$ *y* $\pi_2:\ 2x + y - 5z - 1 = 0$, *determinar el ángulo que forman.* [1,75 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Puesto que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 27 + 45 + 4 = 14 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ los vectores son linealmente independientes.

b) Los vectores $\bar{n}_1 = (3,\ -1,\ 2)$ y $\bar{n}_2 = (2,\ 1,\ -5)$ son vectores normales a los planos π_1 y π_2, respectivamente. De los dos ángulos distintos que forman dos planos que se cortan, se define como ángulo de los planos al menor de ellos, es decir al agudo. Sea α el ángulo que forman los dos planos, que es el mismo que el que forman sus vectores normales. Se tiene:

$$|\,\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2\,| = |\bar{n}_1|\,|\bar{n}_2| \cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{|\,6 - 1 - 10\,|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{5}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{30}} = \frac{5}{\sqrt{420}} \cong 0{,}243975 \;\Rightarrow$$

$\alpha = 75^{\circ}\ 52'\ 43''$

Junio 2007.

OPCIÓN A

1. *Considerar el sistema lineal de ecuaciones en* x, y *y* z*:* $\left\{\begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ mx+2z=0 \\ my-z=m \end{array}\right.$

a) Determinar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene solución única. Calcular dicha solución para m = 1. [1 punto]

b) Determinar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene infinitas soluciones. Calcular dichas soluciones. [1 punto]

c) Estudiar si existe algún valor de m para el cual el sistema no tiene solución. [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) El sistema es compatible determinado (tiene una solución única) cuando $rg\,A = rg\,M = 3$ siendo A la matriz de los coeficientes y M la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \end{array}\right)$$

Veamos para qué valores del parámetro el rango es máximo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = m^2 + 3m - 2m = m^2 + m = 0 \quad \Rightarrow \quad m(m+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0 \ , \ m = -1$$

Por tanto, el sistema tiene una solución única para $m \neq 0$ y $m \neq -1$.

• Para m = 1, las soluciones las encontramos con la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{6-10}{1+3-2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1+5-2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

b) Para que el sistema sea compatible indeterminado (tenga infinitas soluciones) debe ser: $rg\,A = rg\,M < 3$ y esto sucederá para $m = 0$ o $m = -1$.

Para m = 0: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\,A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

Orlemos el menor de orden 2 con los términos independientes para comprobar cuál es el rango de M:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad rg\,M = 2$$

Por lo tanto, para m = 0: $rg\,A = rg\,M = 2 < 3 \quad \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor que da rango a las matrices, utilizamos las dos primeras ecuaciones y las incógnitas "y" y "z" como incógnitas principales y "x" como secundaria. Consideremos $x=\lambda$ como un parámetro:

$$\left.\begin{matrix} 3y+z=5-\lambda \\ 2z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad z=0 \quad , \quad y=\frac{5-\lambda}{3} \qquad \text{luego las soluciones son:} \quad x=\lambda \quad , \quad y=\frac{5-\lambda}{3} \quad , \quad z=0$$

c) El sistema sólo puede ser incompatible (no tiene solución) para $m=-1$ y lo será si para dicho valor: $rg\,A \neq rg\,M$

Comprobemos cuáles son los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rg\,A = 2$.

Orlando este menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5-3=2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rg\,M=3$

Por tanto, para $m=-1$ el sistema es incompatible.

2. *Calcular:* *a)* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$ [1,25 puntos] *b)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x$ [1,25 puntos]

SOLUCIÓN.

a) $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2-5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5-4}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2-5}+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x=1^\infty=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{x\cdot(-x)\cdot\frac{1}{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{-x^2}\right]^{-\frac{1}{x}}=e^0=1$$

3. *Sea* $F(x)=\int_1^{x^2}\ln t\,dt$, con $x\geq 1$. *Calcular F'(e). ¿Es F''(x) una función constante? Justificar la respuesta.*

[2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

• Calculemos $\int \ln t\,dt$. Aplicamos el método de integración por partes: $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$

Sean: $\begin{matrix} u=\ln t \ \Rightarrow \ du=\frac{1}{t}\cdot dt \\ dv=dt \ \Rightarrow \ v=t \end{matrix} \quad \Bigg| \quad \Rightarrow \int \ln t\cdot dt = t\cdot\ln t - \int t\cdot\frac{1}{t}\cdot dt = t\cdot\ln t - t = t\cdot(\ln t -1)$

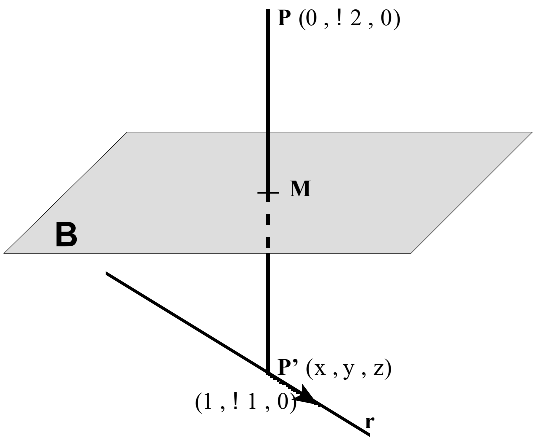
Por tanto: $F(x)=\int_1^{x^2}\ln t\cdot dt=\left[t\cdot(\ln t-1)\right]_1^{x^2}=\left[x^2\cdot\left(\ln x^2-1\right)\right]-\left[1\cdot(\ln 1-1)\right]=x^2\cdot(2\ln x-1)+1$

• $F'(x)=2x\cdot(2\ln x-1)+x^2\cdot\dfrac{2}{x}=2x\cdot(2\ln x-1)+2x=2x\cdot(2\ln x-1+1)=4x\cdot\ln x \quad \Rightarrow \quad F'(e)=4e$

• $F''(x)=4\cdot\ln x+4x\cdot\dfrac{1}{x}=4\cdot(\ln x+1) \quad \Rightarrow \quad F''(x)$ no es una función constante

4. *Escribir las ecuaciones implícitas de una recta con la dirección del vector* $(1,-1,0)$ *y que pasa por P' el simétrico de* $\mathrm{P}=(0,-2,0)$ *respecto al plano* $\pi: \mathrm{x}+3\mathrm{y}+\mathrm{z}=5$. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



• Calculemos el punto P' (simétrico de P respecto al plano B):

El vector $\vec{n}=(1\,,3\,,1)$ es normal al plano B.

Las ecuaciones paramétricas de la recta PP' (que pasa por P y tiene a $\vec{n}$ como vector direccional) son:

$$\left.\begin{array}{r} x=t \\ y=-2+3t \\ z=t \end{array}\right\}$$

El punto M, intersección de la recta y el plano, es:

$$t+3(-2+3t)+t=5 \;\Rightarrow\; t-6+9t+t=5 \;\Rightarrow\; 11t=11 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; t=1 \;\Rightarrow\; M\,(1,1,1)$$

Puesto que M es el punto medio del segmento PP':

$$1=\frac{0+x}{2} \;\Rightarrow\; x=2 \;\;;\;\; 1=\frac{-2+y}{2} \;\Rightarrow\; y=4 \;\;;\;\; 1=\frac{0+z}{2} \;\Rightarrow\; z=2 \;\text{ es decir el punto P' es: }\; P'(2,4,2)$$

• La ecuación continua de la recta que pasa por P' y tiene la dirección del vector $(1,-1,0)$ es: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$ y sus ecuaciones implícitas: $\left.\begin{array}{r} -x+2=y-4 \\ 0=z-2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=6 \\ z=2 \end{array}\right\}$

OPCIÓN B

1. *Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 euros y un total almacenado de 2000 euros. Si el número total de billetes de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20, averiguar cuántos billetes de cada tipo hay.*

SOLUCIÓN.

Sea "x" el nº de billetes de 10 €, "y" el de billetes de 20 € y "z" el de 50 €. Se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=95 \\ 10x+20y+50z=2000 \\ x=2y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=95 \\ x+2y+5z=200 \\ x-2y=0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 95 & 1 & 1 \\ 200 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-400+950}{-2+5-2+10}=\frac{550}{11}=50 \;\;;\;\; \text{de la tercera ecuación: }\; y=\frac{x}{2}=\frac{50}{2}=25 \;\;;\;\; z=95-50-25=20$$

Por tanto, hay 50 billetes de 10 €, 25 billetes de de 20 € y 20 billetes de 50 €.

2. *Sea la función* $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+1}$.

a) Calcular su dominio. [0,5 puntos]
b) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. [1 punto]
c) Analizar sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y determinar las que existan. [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Por tratarse de una función racional: $D(f) = \mathbb{R} - \{x / x+1=0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2\,(x+2)\,(x+1)-(x+2)^2}{(x+1)^2} = \frac{(x+2)\left[2\,(x+1)-(x+2)\right]}{(x+1)^2} = \frac{(x+2)\,x}{(x+1)^2}$$

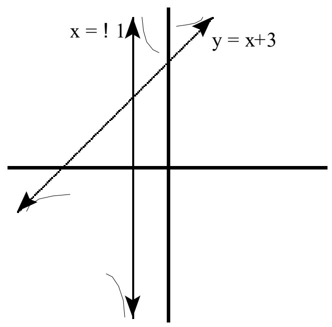
f' > 0		f' < 0		f' > 0
	−2		0	

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ y decreciente en $(-2, 0)$.

c) • Asíntotas verticales: $x = -1$ pues $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$.

Posición relativa de la curva respecto a la asíntota:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{(x+2)^2}{x+1} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{(x+2)^2}{x+1} = +\infty$$



• Asíntotas horizontales u oblicuas:

$$\frac{(x+2)^2}{x+1} = \frac{x^2+4x+4}{x+1} = x+3+\frac{1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad y = x+3 \text{ es una asíntota oblicua.}$$

Posición relativa de la curva respecto a la asíntota:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x+1} = 0^- \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0^+$$

3. *Calcular* $\int_{1/e}^{e} |\ln x|\, dx$. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

La función $|\ln x| = \begin{cases} -\ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x|\, dx = \int_{1/e}^{1} (-\ln x)\, dx + \int_{1}^{e} \ln x\, dx = -\int_{1/e}^{1} \ln x\, dx + \int_{1}^{e} \ln x\, dx = (1)$$

• Calculemos $\int \ln x\, dx$ por el método de integración por partes: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$.

Sean $\left| \begin{array}{l} u = \ln x \;\Rightarrow\; du = \dfrac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx \;\Rightarrow\; v = x \end{array} \right| \;\Rightarrow\; \int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot dx = x \cdot \ln x - x = x\,(\ln x - 1)$

Se tiene entonces: $(1) = -\left[x(\ln x - 1)\right]_{1/e}^{1} + \left[x(\ln x - 1)\right]_{1}^{e} = -\left[1 \cdot (0-1) - \dfrac{1}{e} \cdot (-1-1)\right] + \left[e \cdot (1-1) - 1 \cdot (0-1)\right] =$

$$= -\left[-1 + \frac{2}{e}\right] + 1 = 1 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e} = \frac{2e-2}{e} = \frac{2(e-1)}{e} \simeq 1{,}26$$

4. *a) Las componentes de* $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ *en una cierta base de* V_3 *son:* $\vec{u}=(2,0-1)$, $\vec{v}=(-3,1,2)$, $\vec{w}=(4,-2,7)$. *Hallar, en esa misma base, las componentes del vector* $2\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}$. [0,75 puntos]

b) Determinar la posición relativa de las siguientes rectas: $r_1:\begin{cases}7x+5y-7z-12=0\\2x+3z+11=0\end{cases}$ $\quad r_2:\begin{cases}5x-5y-z-16=0\\3x-2y-7=0\end{cases}$

[1,75 puntos]

SOLUCIÓN.

a) $2\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}=2\cdot(2,0,-1)-(-3,1,2)+\frac{1}{3}\cdot(4,-2,7)=(4,0,-2)+(3,-1,-2)+\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)=\left(\frac{25}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$

b) • Obtengamos dos puntos de r_1:

$$\left.\begin{array}{r}7x+5y=12+7z\\2x=11-3z\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z=1:\quad x=4 \quad y=-\frac{9}{5} \Rightarrow A\left(4,-\frac{9}{5},1\right)\\ z=3:\quad x=1\quad y=\frac{26}{5} \Rightarrow B\left(1,\frac{26}{5},3\right)\end{array} \Rightarrow \vec{AB}=(-3,7,2)$$

• Obtengamos dos puntos de r_2:

$$\left.\begin{array}{r}5x-z=16+5y\\3x=7+2y\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=1:\quad x=3\quad z=-6 \Rightarrow P(3,1,-6)\\ y=-2:\quad x=1\quad z=-1 \Rightarrow Q(1,-2,-1)\end{array} \Rightarrow \vec{PQ}=(-2,-3,5)$$

Puesto que las coordenadas de $\vec{AB}$ y $\vec{PQ}$ no son proporcionales, los vectores no tienen la misma dirección $\Rightarrow$ las dos rectas se cortan o se cruzan.

• Consideremos ahora un vector de origen un punto de r_1 y extremo un punto de r_2: $\vec{AP}=\left(-1,\frac{14}{5},-7\right)$.

Estudiemos el rango del conjunto de vectores $\vec{AB}$, $\vec{PQ}$ y $\vec{AP}$:

$$\begin{vmatrix}-3 & 7 & 2\\-2 & -3 & 5\\-1 & \frac{14}{5} & -7\end{vmatrix}=-63-35-\frac{56}{5}-6-98+42\neq 0 \Rightarrow \text{ las rectas } r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan.}$$

Septiembre 2007.

OPCIÓN A

1. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) *Comprobar que* $\det\left(A^2\right) = \left(\det(A)\right)^2$ [0,5 puntos]

b) *Estudiar si para cualquier matriz* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *de orden 2 se cumple que* $\det\left(M^2\right) = \left(\det(M)\right)^2$ [1 punto]

c) *Encontrar la relación entre los elementos de las matrices* M *cuadradas de orden 2 que satisfacen:*
$\det(M+I) = \det(M) + \det(I)$ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A^2\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Por otra parte: $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1 \Rightarrow \left(\det(A)\right)^2 = (-1)^2 = 1$

Luego, en efecto: $\det\left(A^2\right) = \left(\det(A)\right)^2$

b) $M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(M^2\right) = \begin{vmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{vmatrix} =$

$= \left(a^2+bc\right)\cdot\left(bc+d^2\right) - (ab+bd)\cdot(ac+dc) = a^2bc + a^2d^2 + b^2c^2 + bcd^2 - a^2bc - abcd - abcd - bcd^2 =$

$= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = (ad-bc)^2$

$\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \Rightarrow \left(\det(M)\right)^2 = (ad-bc)^2$ luego en efecto: $\det\left(M^2\right) = \left(\det(M)\right)^2 \quad \forall\, M$

c) $M + I = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M+I) = (a+1)\cdot(d+1) - bc = ad + a + d + 1 - bc \quad (*)$

$\left.\begin{array}{r} \det(M) = ad - bc \\ \det(I) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \det(M) + \det(I) = ad - bc + 1 \quad (*)$

Como las igualdades (*) han de ser iguales: $ad + a + d + 1 - bc = ad - bc + 1 \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow d = -a$

luego las matrices M que satisfacen la relación fijada son de la forma: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

2. *Sea* $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a\cos(x) & \text{si } 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \ge \pi \end{cases}$

a) *Estudiar los valores de a y b para los que la función f(x) es continua para todo valor de x.* [1 punto]

b) *Determinar la derivada de f(x) en el intervalo* $(0, \pi)$ [0,5 puntos]

c) *Calcular* $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) La función debe ser continua en $x = 0$ y en $x = \pi$ y para ello, deben ser:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} f(x)$$

X $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \iff \lim\limits_{x\to 0}(3x+2) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+2a\cos(x)\right) \iff 2 = 2a \Rightarrow a = 1$

X $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi^+} f(x) \iff \lim\limits_{x\to \pi}\left(x^2+2a\cos(x)\right) = \lim\limits_{x\to \pi}\left(ax^2+b\right) \iff \pi^2-2 = \pi^2+b \Rightarrow b = -2$

b) En $(0,\pi)$: $f(x) = x^2+2\cos(x) \Rightarrow f'(x) = 2x - 2\,\text{sen}(x)$

c) $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi}\left(x^2+2\cos x\right)dx + \int_{\pi}^{2\pi}\left(x^2-2\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+2\,\text{sen}\,x\right]_0^{\pi} + \left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_{\pi}^{2\pi} =$

$$= \left(\frac{\pi^3}{3}-0\right)+\left(\frac{8\pi^3}{3}-4\pi-\frac{\pi^3}{3}+2\pi\right) = \frac{\pi^3}{3}+\frac{8\pi^3}{3}-4\pi-\frac{\pi^3}{3}+2\pi = \frac{8\pi^3}{3}-2\pi$$

3. *Calcular un polinomio de tercer grado* $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ *que satisface:*

i) $p(0) = 1$

ii) Tiene un máximo relativo en $x = 1$ *y un punto de inflexión en* $x = 0$

iii) $\int_0^1 p(x)\,dx = \frac{9}{4}$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

X Si $p(0) = 1 \Rightarrow d = 1$

X $p'(x) = 3ax^2+2bx+c$ $\quad p''(x) = 6ax+2b$

Como en $x = 1$ hay un máximo relativo: $p'(1) = 0 \Rightarrow 3a+2b+c = 0$ (*)

Como en $x = 0$ hay un punto de inflexión: $p''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$ y sustituyendo en (*): $c = -3a$

X $\int_0^1\left(ax^3-3ax+1\right)dx = \left[\frac{ax^4}{4}-\frac{3ax^2}{2}+x\right]_0^1 = \frac{a}{4}-\frac{3a}{2}+1 = \frac{9}{4} \Rightarrow a-6a+4 = 9 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow c = 3$

Por tanto: $p(x) = -x^3+3x+1$

4. *Dadas las rectas* $r \equiv \begin{cases} x+y+z = 0 \\ x-z+4 = 0 \end{cases}$, $s \equiv x = y+4 = 2z-8$

a) Comprobar que se cortan. [1,5 puntos]

b) Hallar el ángulo que forman. [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Obtendremos un vector $\bar{u}$ direccional de r y un vector $\bar{v}$ direccional de s que deben ser linealmente independientes (sus coordenadas no deben ser proporcionales). Asimismo, un vector $\overrightarrow{AB}$ cuyo origen sea un punto de r y cuyo extremo sea un punto de s que deberá ser linealmente dependiente de $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

X Dos puntos de r son: $\begin{cases} z = 4: \; x = 0 \;,\; y = -4 \Rightarrow A(0,-4,4) \\ z = 0: \; x = -4 \;,\; y = 4 \Rightarrow P(-4,4,0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = (-4,8,-4) \approx \bar{u} = (1,-2,1)$

X La ecuación de s viene dada en forma continua: $\frac{x-0}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-4}{1/2}$ por lo que un punto es $B(0,-4,4)$ y un vector direccional $\bar{v} = (2,2,1)$

Puesto que las coordenadas de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ no son proporcionales, los vectores no tienen la misma dirección $\Rightarrow$ las rectas se cortan o se cruzan. Como además tienen un punto común: $A \equiv B$, las rectas se cortan.

b) El ángulo que forman las rectas es el ángulo agudo que forman sus vectores direccionales. Se tiene:

$$\cos\alpha = \left| \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} \right| = \left| \frac{2-4+1}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+4+1}} \right| = \left| \frac{-1}{\sqrt{6}\cdot 3} \right| = \frac{1}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{18} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{arc cos}\,\frac{\sqrt{6}}{18}\ ;\ 82^{\text{o}}\,10'\,44''$$

OPCIÓN B

1. *Sean* $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudiar para qué valores de α y β la matriz A tiene inversa. [0,5 puntos]

b) Calcular A^5. [1 punto]

c) Hallar la matriz inversa de B. [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Puesto que $|A| = 0 \quad \forall\, \alpha, \beta$ por tener una columna nula $\Rightarrow$ A no tiene inversa

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

y, por lo tanto, A^5 es la matriz nula.

c) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, B^{-1}$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ t & k & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Adj}\left(B^t\right) = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2-t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \frac{\text{Adj}\left(B^t\right)}{|B|} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2-t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

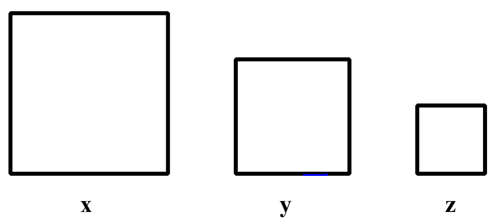
2. *Obtener las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que:*

i) El perímetro del primero de ellos es el triple del perímetro del tercero.

ii) Se necesitan exactamente 1664 metros de valla para vallar los tres campos.

iii) La suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



Sean x, y, z los lados de los tres campos.

Por i): $4x = 12z \quad \Rightarrow \quad x = 3z$

Por ii): $4x + 4y + 4z = 1664 \quad \Rightarrow \quad x + y + z = 416 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y + 4z = 416 \quad \Rightarrow \quad y = 416 - 4z$

Por iii): $f\,(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ debe ser mínima $\Leftrightarrow$

$$f\,(z) = 9z^2 + \left(416 - 4z\right)^2 + z^2 = 9z^2 + 416^2 + 16z^2 - 3328z + z^2 = 26z^2 - 3328z + 416^2 \longrightarrow \text{mínima}$$

$f\,'(z) = 52z - 3328 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{3328}{52} = 64$ y como $f\,''(z) = 52 > 0$, el valor $z = 64$ hace mínima la función.

Por tanto, las dimensiones de los tres campos son: $x = 192$ m , $y = 160$ m , $z = 64$ m

3. *a) Utilizando el cambio de variable* $t=\ln x$ *calcular* $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\left(4-\ln x\right)}$ [1,5 puntos]

b) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)\operatorname{sen}(5x)}{\left(x-x^2\right)^2}$ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $t=\ln x \;\Rightarrow\; dt=\dfrac{dx}{x}$. Además: si $x=e \;\Rightarrow\; t=\ln e=1$ y si $x=e^2 \;\Rightarrow\; t=\ln e^2=2$

Se tiene: $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\left(4-\ln x\right)}=\int_1^2\frac{dt}{4-t}=\Big[-\ln(4-t)\Big]_1^2=-\ln 2+\ln 3=\ln\frac{3}{2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)\operatorname{sen}(5x)}{\left(x-x^2\right)^2}=\frac{0}{0}=$ aplicando la regla de L'Hôpital:

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos(4x)\cdot\operatorname{sen}(5x)+5\operatorname{sen}(4x)\cdot\cos(5x)}{2\left(x-x^2\right)\left(1-2x\right)}=\frac{0}{0}=$ y aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-16\operatorname{sen}(4x)\cdot\operatorname{sen}(5x)+20\cos(4x)\cdot\cos(5x)+20\cos(4x)\cdot\cos(5x)-25\operatorname{sen}(4x)\cdot\operatorname{sen}(5x)}{2\left(1-2x\right)^2-4\left(x-x^2\right)}=\frac{20+20}{2}=20$$

4. *Se consideran la recta* $r\equiv\begin{cases}x+2y=7\\ y+2z=4\end{cases}$ *y el punto* $P\left(1,2,3\right)$.

a) Calcular la ecuación del plano π *que es perpendicular a la recta r y contiene al punto P.* [1,5 puntos]

b) Estudiar para qué valores de k los vectores $\left\{\left(1,-2,-1/2\right),\left(0,k,0\right),\left(0,0,2k\right)\right\}$ *son linealmente independientes* [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Un vector direccional de r será perpendicular al plano y sus coordenadas serán los coeficientes A, B y C de la ecuación general del plano. Obtengamos entonces dos puntos de la recta y con ellos un vector direccional de la misma:

$$r\equiv\begin{cases}x+2y=7\\ y+2z=4\end{cases}\;\Rightarrow\;\left.\begin{array}{l}\text{para } y=2:\;\; x=3\;,\; z=1\;\Rightarrow\; A\left(3,2,1\right)\\ \text{para } y=0:\;\; x=7\;,\; z=2\;\Rightarrow\; B\left(7,0,2\right)\end{array}\right|\;\Rightarrow\;\overrightarrow{AB}=\left(4,-2,1\right)$$

La ecuación del plano π es entonces: $4x-2y+z+D=0$ y como contiene al punto P: $4-4+3+D=0 \;\Rightarrow\; D=-3$ y por tanto: $\pi\equiv 4x-2y+z-3=0$

b) Para que los vectores sean linealmente independientes: $\begin{vmatrix}1 & -2 & -1/2\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 2k\end{vmatrix}\neq 0 \;\Leftrightarrow\; 2k^2\neq 0 \;\Rightarrow\; k\neq 0$ es decir, los vectores son linealmente independientes $\forall\, k\neq 0$.

1. ÁLGEBRA

Opción A

a) *(1,5 puntos)* Sean A, B, I las matrices: $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Estudiar si existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el cual se satisfaga $(A-\lambda I)^2 = B$.

b) *(1 punto)* Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&2\\1&1&3\end{vmatrix}=1$, determinar el valor de $\begin{vmatrix}x&1/4&4\\y&0&4\\z&1/2&12\end{vmatrix}$

SOLUCIÓN.

a) $$A-\lambda I=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda I)^2=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+2&-2\lambda+1&-2\lambda\\-2\lambda+1&\lambda^2-2\lambda+2&1\\-2\lambda&1&1+\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

Igualando, por ejemplo, los elementos a_{13}: $-2\lambda=-4 \Rightarrow \boxed{\lambda=2}$.

Ahora basta comprobar que para $\lambda=2$ los restantes valores de ambas matrices son iguales.

b) $$\begin{vmatrix}x&1/4&4\\y&0&4\\z&1/2&12\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}x&y&z\\1/4&0&1/2\\4&4&12\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}4\cdot\begin{vmatrix}x&y&z\\1/4&0&2/4\\1&1&3\end{vmatrix}\overset{(3)}{=}4\cdot\frac{1}{4}\cdot\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&2\\1&1&3\end{vmatrix}=\boxed{1}$$

Propiedades aplicadas: (1) $|A|=|A^t|$ (2) y (3) Extraer el factor común ¼ de la 2ª fila y 4 de la 3ª fila

Opción B

(2,5 puntos) Dado el sistema $\begin{cases}x+3y-az=4\\-ax+y+az=0\\-x+2ay=a+2\\2x-y-2z=0\end{cases}$

Discutirlo según los valores de a, y resolverlo cuando sea compatible.

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-a&4\\-a&1&a&0\\-1&2a&0&a+2\\2&-1&-2&0\end{array}\right)$.

La matriz de los coeficientes A tiene un rango máximo de 3 mientras que la matriz ampliada B puede tener rango 4. Empecemos estudiando para qué valores del parámetro *a* la matriz ampliada tiene rango 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ -a & 1 & a & 0 \\ -1 & 2a & 0 & a+2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ 0 & 1+3a & a-a^2 & 4a \\ 0 & 2a+3 & -a & a+6 \\ 0 & -7 & -2+2a & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+3a & a-a^2 & 4a \\ 2a+3 & -a & a+6 \\ -7 & 2a-2 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$\boxed{(1): \begin{matrix} F_2+aF_1 \\ F_3+F_1 \\ F_4-2F_1 \end{matrix}}$$

$$= 8a(1+3a)+4a(2a+3)(2a-2)-7(a-a^2)(a+6)-28a^2+8(2a+3)(a-a^2)-(1+3a)(2a-2)(a+6)=$$

$$= 8a+\cancel{24a^2}+\cancel{16a^3}-\cancel{16a^2}+24a^2-\cancel{24a}-7a^2-42a+7a^3+42a^2-28a^2+\cancel{16a^2}-\cancel{16a^3}+\cancel{24a}-\cancel{24a^2}-2a^2-10a+12-$$
$$-6a^3-3a^2+36a=a^3-a^2+8a+12=0 \quad\Rightarrow\quad a=2 \;,\; a=-3$$

	1	!1	!8	12
2		2	2	!12
	1	1	!6	0

$$a^2+a-6=0 \quad\Rightarrow\quad a=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

X Por tanto, para $a \neq 2$ y $a \neq -3$: $\text{rg } B = 4$ y $\text{rg } A \leq 3 \;\Rightarrow$ el sistema es incompatible.

X Para $a=2$: las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

Se observa que $F_4=-F_2$ por lo que la cuarta ecuación puede desecharse.

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=7\neq 0 \;\Rightarrow$ el rango de A y de B es como mínimo 2. Orlamos el menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}=16-6-2-8=0 \;\Rightarrow\; \text{rg } A=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix}=4-32+4+24=0 \;\Rightarrow\; \text{rg } B=2$$

$\Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } B = 2 <$ nº incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado

Para resolverlo consideremos solo las dos primeras ecuaciones (son linealmente independientes) y la incógnita $\boxed{z=\lambda}$ como un parámetro:

$$\left.\begin{matrix} x+3y=4+2\lambda \\ -2x+y=-2\lambda \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x+6y=8+4\lambda \\ -2x+y=-2\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7y=8+2\lambda \Rightarrow \boxed{y=\frac{8+2\lambda}{7}} \Rightarrow x=4+2\lambda-\frac{24+6\lambda}{7}=\boxed{\frac{4+8\lambda}{7}}$$

X Para $a=-3$: las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

Puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & 0 \end{vmatrix}=9-54+3-18=-60\neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg } A=\text{rg } B=3=$ nº incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Resolvamos el sistema $\left.\begin{array}{l} x+3y+3z=4 \\ 3x+y-3z=0 \\ -x-6y \quad =-1 \end{array}\right\}$ por la regla de Cramer: $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & 0 \end{vmatrix}}{-60}=\dfrac{9+3-72}{-60}=\boxed{1}$

$y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-60}=\dfrac{-9+12-3}{-60}=\boxed{0}$; $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & -1 \end{vmatrix}}{-60}=\dfrac{-1-72+4+9}{-60}=\dfrac{-60}{-60}=\boxed{1}$

2. GEOMETRÍA

Opción A

Considerar la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{-5}=\dfrac{z+3}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x+4y+4z=5$.

a) *(1 punto)* Estudiar la posición relativa de r y π .
b) *(1,5 puntos)* Calcular la ecuación implícita de un plano π_1 que es perpendicular a π y contiene a r.

SOLUCIÓN.

a) Vector direccional de la recta r : $\vec{u}=(2,-5,4)$. Vector normal al plano π : $\vec{n}=(2,4,4)$
Como $\vec{u}\cdot\vec{n}=4-20+16=0 \Rightarrow$ la recta es paralela al plano o está contenida en él.
Un punto de la recta es $P(1,-5,-3)$. Veamos si está también en el plano: $2-20-12\neq 5 \Rightarrow$ el punto no pertenece al plano y, por tanto, la recta y el plano son paralelos

b) El plano π_1 está determinado por un punto de r, por ejemplo $P(1,-5,-3)$, un vector direccional de r, por ejemplo $\vec{u}=(2,-5,4)$, y un vector normal a π, por ejemplo $\vec{n}=(2,4,4)\approx(1,2,2)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z+3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -18(x-1)+9(z+3)=0 \Leftrightarrow -18x+18+9z+27=0 \Leftrightarrow -18x+9z+45=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2x-z-5=0}$$

Opción B

a) *(1,25 puntos)* Calcular la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z=3$. Obtener el punto de corte de la recta con el plano π .

b) *(1,25 puntos)* Hallar el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ cuya distancia al punto $P(1,0,2)$ sea $\sqrt{5}$.

SOLUCIÓN.

a) La recta está determinada por el origen y por un vector normal al plano $\vec{n}=(1,1,1)$. Su ecuación continua es:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1} \Leftrightarrow \boxed{x=y=z}$$

El punto de corte de la recta y el plano es: $x+x+x=3 \;\Rightarrow\; x=1 \;\Rightarrow\; x=y=z=1$ es decir: $\boxed{Q\left(1\,,1\,,1\right)}$.

b) Un punto de la recta es $X\left(\lambda\,,3-\lambda\,,1+2\lambda\right)$.

$$d\left(P\,,X\right)=\sqrt{5} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\left(\lambda-1\right)^2+\left(3-\lambda\right)^2+\left(1+2\lambda-2\right)^2}=\sqrt{5} \;\Leftrightarrow\; \lambda^2-2\lambda+1+9-6\lambda+\lambda^2+1-4\lambda+4\lambda^2=5 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 6\lambda^2-12\lambda+6=0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2-2\lambda+1=0 \;\Leftrightarrow\; \left(\lambda-1\right)^2=0 \;\Rightarrow\; \lambda=1 \;\Rightarrow\; \text{el punto es: } \boxed{X\left(1\,,2\,,3\right)}$$

3. ANÁLISIS

Opción A

1. Sea

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \log \sqrt[x]{\frac{1+x}{1-x}} \end{aligned}$$

(a) *(0,75 puntos)* Calcular el dominio de $f(x)$.
(b) *(0,75 puntos)* Estudiar si $f(x)$ es una función par.
(c) *(1 punto)* Calcular las asíntotas de $f(x)$.

SOLUCIÓN.

Modifiquemos el aspecto de la función: $f(x)=\log\sqrt[x]{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{\log\left(1+x\right)-\log\left(1-x\right)}{x}$

(a) Las condiciones que deben verificarse para que $f(x)$ sea calculable son:

$$\left.\begin{array}{c} x\neq 0 \\ 1+x>0 \\ 1-x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x\neq 0 \\ x>-1 \\ x<1 \end{array}\right\} \Rightarrow\; D(f)=\left(-1\,,1\right)-\left\{\,0\,\right\}=\left(-1\,,0\right)\mathrm{U}\left(0\,,1\right)$$

(b) La función es par si se verifica: $f(-x)=f(x)$

$$f(-x)=\frac{\log\left(1-x\right)-\log\left(1+x\right)}{-x}=\frac{-\log\left(1-x\right)+\log\left(1+x\right)}{x}=\frac{\log\left(1+x\right)-\log\left(1-x\right)}{x}=f(x) \;\Rightarrow\; \text{la función es par}$$

(c) El dominio de la función imposibilita que pueda tener asíntotas horizontales ni oblicuas.
Las posibles asíntotas verticales estarán en $x=0$, $x=-1$, $x=1$. Comprobemos si lo son:

X $x=0$: $$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+x\right)-\log\left(1-x\right)}{x}=\frac{0}{0}\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{\ln 10}+\dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{1}{\ln 10}}{1}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln 10}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)\right]=$$

$$=\frac{2}{\ln 10}\simeq 0{,}87 \;\Rightarrow\; x=0 \text{ no es asíntota vertical de la función.}$$

X $x=-1$ (caso de ser asíntota vertical lo sería solo por la derecha): $\displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{\log\left(1+x\right)-\log\left(1-x\right)}{x}=$

$$=\frac{\log 0^+-\log 2}{-1^+}=+\infty \;\Rightarrow\; x=-1 \text{ es una asíntota vertical de la función}$$

X $x=1$ (caso de ser asíntota vertical lo sería solo por la izquierda): $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{\log\left(1+x\right)-\log\left(1-x\right)}{x}=$

$$=\frac{\log 2-\log 0^+}{1^-}=+\infty \;\Rightarrow\; x=1 \text{ es una asíntota vertical de la función.}$$

2. (a) *(1,25 puntos)* Dada $F(x)=\int_0^x t\,\text{sen}(t)\,dt$, estudiar si $x=\pi$ es una raíz de $F'(x)$.

(b) (1,25 puntos) Calcular el valor de $\alpha \in$ ¡ para el cual $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{n^2-2n+1}{n^2+n-2}\right)^{\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=1$

SOLUCIÓN.

(a) $F(x)=\int_0^x t\,\text{sen}(t)\,dt = \left|\begin{matrix} u=t & \Rightarrow & du=dt \\ dv=\text{sen}(t)\,dt & \Rightarrow & v=-\cos t\end{matrix}\right| = \left[-t\cdot\cos t+\int \cos t\,dt\right]_0^x =$

$$=\left[-t\cdot\cos t+\text{sen}\,t\right]_0^x=-x\cdot\cos x+\text{sen}\,x \quad\Rightarrow\quad F(x)=-x\cdot\cos x+\text{sen}\,x \quad\Rightarrow$$

$$F'(x)=\cancel{-\cos x}+x\cdot\text{sen}\,x+\cancel{\cos x}=x\cdot\text{sen}\,x \quad\Rightarrow\quad F'(\pi)=\pi\cdot\text{sen}\,\pi=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pi \text{ es una raíz de } F'(x).$$

(b) Si $\alpha=0$ el límite será $1^0=1$ lo que cumple la condición.

Si $\alpha\neq 0$ se trata de una indeterminación 1^∞ .Veamos si algún $\alpha\neq0$ también cumple la condición:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2+n-2}\right)^{\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=1^\infty=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{n^2-2n+1}{n^2+n-2}-1\right]\cdot\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-2n+1-n^2-n+2}{n^2+n-2}\right)\cdot\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+3}{n^2+n-2}\right)\cdot\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=$$

$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\alpha n^4+3\alpha n^3+3n+3}{n^4+n^3-3n^2-n+2}}$ y para que el límite sea igual a 1 el exponente debe tender a 0 y para ello $\alpha=0$.

Por lo tanto la única solución es $\boxed{\alpha=0}$.

Opción B

1. Sean las funciones $f:$ ¡ $\to$ ¡ , $x\to x^3$; $g:$ ¡ $\to$ ¡ , $x\to|x|$; $h:$ ¡ $\to$ ¡ , $x\to \text{sen}(x)$

(a) *(0,75 puntos)* Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de inflexión de $f(x)$

(b) *(0,75 puntos)* Calcular la derivada de $(f\,oh)(x)$.

(c) *(1 punto)* Obtener el área del recinto limitado por f y g entre $x=0$ y $x=1$.

SOLUCIÓN.

(a) $f(x)=x^3 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2 \quad\Rightarrow\quad f''(x)=6x$

X Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de $f'(x)$ y como $f'(x)>0\ \forall x \ \Rightarrow$ la función es creciente $\forall x$.

X $f''(x)=6x=0 \ \Rightarrow\ x=0$ (posible punto de inflexión). Como $f'''(x)=6\neq0 \ \Rightarrow$ En $x=0$ la función tiene un punto de inflexión: $(0,0)$.

(b) $(f\,oh)(x)=f[\,h(x)\,]=f[\,\text{sen}\,x\,]=\text{sen}^3 x \quad\Rightarrow\quad (f\,oh)'(x)=3\,\text{sen}^2x\cos x$

(c) En el intervalo $[0,1]$: $f(x)=x^3$ y $g(x)=x$.

$$S=\left|\int_0^1 \left(x^3-x\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right|=\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{4}\right|=\boxed{\frac{1}{4}u^2}$$

2. *(2,5 puntos)* Encontrar el valor de k para el cual la función $f(x)=\begin{cases}6-x/2, & x<2\\ x^2+kx, & x\geq 2\end{cases}$ es continua. Estudiar si su derivada es una función continua.

SOLUCIÓN.

X Puesto que las funciones definidas en los intervalos $(-\infty\,,2)$ y $(2\,,+\infty)$ son continuas por ser polinómicas, el único punto de posible discontinuidad sería $x=2$. Para que la función sea continua también en $x=2$ debe ocurrir:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \iff \lim_{x\to 2^-}\left(6-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to 2^+}\left(x^2+kx\right) \iff 5=4+2k \iff \boxed{k=\frac{1}{2}}$$

X Para $k=\frac{1}{2}$: $\quad f(x)=\begin{cases}6-\frac{1}{2}x, & x<2\\ x^2+\frac{1}{2}x, & x\geq 2\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2} & \text{si } x<2\\ 2x+\frac{1}{2} & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

$f'(x)$ es continua en $(-\infty\,,2)$ y $(2\,,+\infty)$. Veamos si lo es en $x=2$:

a) $\quad \exists\, f'(2)=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

b)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}\end{array}\right| \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f'(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f'(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f'(x) \Rightarrow \boxed{f'(x) \text{ es discontinua en } x=2}$$

1. ÁLGEBRA.

Opción A

(2,5 puntos) Hallar una matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de orden 2 tal que

$$A^{-1} X\, A = B \quad \text{siendo} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

$$A^{-1} X\, A = B \iff X\, A = A \cdot B \iff X = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

Calculemos A^{-1}: $\quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \left(\text{Adj}\, A^t\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{\left(\text{Adj}\, A^t\right)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}}$$

Opción B

a) *(1 punto)* Probar que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

b) *(1,5 puntos)* Hallar la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 4y + 9z = 2 \end{cases}$ que además satisface que la suma de los valores correspondientes a cada una de las incógnitas es 4.

SOLUCIÓN.

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(4)}{=} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b+a & c+\cancel{a}-b-\cancel{a} \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} (b-a)(c-a)(c-b)$$

Propiedades utilizadas:
(1) C2 – C1 , C3 – C1
(2) Desarrollo por los adjuntos de la primera fila
(3) Sacar factor común en ambas columnas
(4) C2 – C1
(5) Desarrollo por los adjuntos de la primera fila

b) Se debe añadir a las dos ecuaciones dadas la ecuación $x + y + z = 4$: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 4y + 9z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$

Para resolverlo, aplicamos la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0&2&3\\2&4&9\\4&1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&3\\1&4&9\\1&1&1\end{vmatrix}}=\frac{6+72-48-4}{4+3+18-12-2-9}=\frac{26}{2}=13 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&0&3\\1&2&9\\1&4&1\end{vmatrix}}{2}=\frac{2+12-6-36}{2}=\frac{-28}{2}=-14$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&0\\1&4&2\\1&1&4\end{vmatrix}}{2}=\frac{16+4-2-8}{2}=\frac{10}{2}=5$$

Por tanto: $\boxed{x=13\ ,\ y=-14\ ,\ z=5}$

2. GEOMETRÍA

Opción A

Se consideran la recta r y los planos π_1 y π_2 siguientes: $r\equiv\begin{cases}x=2-3\lambda\\y=1+2\lambda\\z=4-\lambda\end{cases}$, $\begin{matrix}\pi_1\equiv 2-3x+2y-z=0\\ \pi_2\equiv 3+2x+2y-2z=0\end{matrix}$

a) *(1,25 puntos)* Determinar la posición relativa de los dos planos.
b) *(1,25 puntos)* Calcular la distancia de r a π_2.

SOLUCIÓN.

a) $\vec{n_1}=(-3\,,2\,,-1)$ es un vector perpendicular a π_1. $\vec{n_2}=(1\,,1\,,-1)$ es un vector perpendicular a π_2.

Como las coordenadas de $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$ no son proporcionales, tienen distinta dirección $\Rightarrow$ π_1 y π_2 se cortan en una recta

Como además: $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=-3+2+1=0 \Rightarrow$ los planos son perpendiculares.

b) Un vector direccional de la recta r es: $\vec{u}=(-3\,,2\,,-1)$ que coincide con $\vec{n_1}$. Por tanto: $\vec{u}\perp\vec{n_2} \Rightarrow$ la recta es paralela al plano.

Un punto de la recta es $P\,(2\,,1\,,4)$ por lo que:

$$d\,(r\,,\pi_2)=d\,(P\,,\pi_2)=\left|\frac{3+2\cdot2+2\cdot1-2\cdot4}{\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{12}}\right|=\frac{\sqrt{12}}{12}=\frac{2\sqrt{3}}{12}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

Opción B

a) *(1 punto)* Obtener los valores de α y β para los cuales el vector de componentes $(\alpha\,,\beta\,,0)$ tiene módulo $\sqrt{2}$ y es perpendicular a la recta $r\equiv\begin{cases}x=2-\lambda\\y=1-\lambda\\z=-1\end{cases}$.

b) *(0,75 puntos)* Estudiar si los vectores $\vec{a}=(3\,,1\,,2)$, $\vec{b}=(0\,,1\,,1)$, $\vec{c}=(0\,,1\,,-1)$ son linealmente independientes.

c) *(0,75 puntos)* Calcular el ángulo que forman dos rectas cuyos vectores direccionales son $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respectivamente.

SOLUCIÓN

a) $\left|(\alpha, \beta, 0)\right| = \sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \alpha^2+\beta^2 = 2 \quad (*)$

Vector direccional de la recta: $\vec{u} = (-1, -1, 0) \,//\, (1, 1, 0)$.

$(\alpha, \beta, 0) \perp \vec{u} \;\Rightarrow\; (\alpha, \beta, 0)\cdot(1, 1, 0) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha+\beta = 0 \quad (*)$

De las igualdades (*): $\alpha = -\beta \;\Rightarrow\; (-\beta)^2+\beta^2 = 2 \;\Rightarrow\; 2\beta^2 = 2 \;\Rightarrow\; \beta^2 = 1 \;\Rightarrow\; \beta = \pm 1 \;\Rightarrow\; \alpha = \mp 1$

Por tanto: $\boxed{\alpha = -1\ ,\ \beta = 1}$ o $\boxed{\alpha = 1\ ,\ \beta = -1}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3-3 = -6 \neq 0 \;\Rightarrow\; \vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes

c) $\cos\gamma = \left| \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\,|\vec{c}|} \right| = \left| \dfrac{1-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} \right| = 0 \;\Rightarrow\; \gamma = 90^{\circ}$ es decir, las rectas son perpendiculares.

3. ANÁLISIS

Opción A

1. Sea $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

(a) *(1 punto)* Calcular el máximo y el mínimo absolutos de $f(x)$.

(b) *(0,5 puntos)* Estudiar si $f(x)$ es una función simétrica respecto al eje OY.

(c) *(1 punto)* Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$.

SOLUCIÓN.

(a) Se trata de una función continua $\forall x$ por lo que su máximo y su mínimo absolutos lo tendrán en alguno de sus máximos o mínimos relativos o cuando $x \to \pm\infty$.

Estudiemos, en primer lugar las tendencias de la función: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^2-4x+1}{4x^2+1} = 1$

Estudiemos ahora los máximos y mínimos relativos y el valor de la función en ellos:

$$f'(x) = \frac{2\,(2x-1)\cdot 2\cdot\left(4x^2+1\right)-(2x-1)^2\cdot 8x}{\left(4x^2+1\right)^2} = \frac{4(2x-1)\left[4x^2+1-(2x-1)\cdot 2x\right]}{\left(4x^2+1\right)^2} = \frac{4\,(2x-1)\left(\cancel{4x^2}+1-\cancel{4x^2}+2x\right)}{\left(4x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{4\,(2x-1)\,(2x+1)}{\left(4x^2+1\right)^2} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\[2mm] x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{(Puntos críticos)}$$

$$f''(x) = \frac{\left[4\cdot\left[2\,(2x+1)+2\,(2x-1)\right]\cdot\left(4x^2+1\right)^2\right]-4\,(2x-1)\,(2x+1)\,2\left(4x^2+1\right)8x}{\left(4x^2+1\right)^4} \;\Rightarrow\; \begin{cases} f''\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0 \\[2mm] f''\left(-\dfrac{1}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Luego en $x=\frac{1}{2}$ la función tiene un mínimo relativo de valor $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ y en $x=-\frac{1}{2}$ tiene un máximo relativo de valor $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2$.

Por consiguiente, el máximo absoluto de la función se alcanza en $x=-\frac{1}{2}$ y es igual a 2 y el mínimo absoluto se tiene en $x=\frac{1}{2}$ y es igual a 0.

(b) La función es simétrica respecto a OY si $f(-x)=f(x)$:

$$f(-x)=\frac{[2(-x)-1]^2}{4(-x)^2+1}=\frac{(-2x-1)^2}{4x^2+1}=\frac{(2x+1)^2}{4x^2+1}\neq f(x)\quad\Rightarrow\quad \text{la función no es simétrica respecto a OY}$$

(c) $$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx=[x]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{8x}{4x^2+1}\,dx=1-\frac{1}{2}\left[\ln\left(4x^2+1\right)\right]_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\ln 5-\ln 1\right)=1-\ln\sqrt{5}=\ln e-\ln\sqrt{5}=\ln\frac{e}{\sqrt{5}}=\boxed{\ln\frac{e\sqrt{5}}{5}}$$

2. (a) *(1,5 puntos)* Razonar si para $F(x)=\dfrac{\int_0^{x^2} t^2\,dt}{x^4}$ se satisface que $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}F'(x)$

(b) *(1 punto)* Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right)$

SOLUCIÓN.

(a) Calculemos $$F(x)=\frac{\int_0^{x^2} t^2\,dt}{x^4}=\frac{\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{x^2}}{x^4}=\frac{\frac{1}{3}x^6}{x^4}=\frac{1}{3}x^2\quad\Rightarrow\quad F'(x)=\frac{2}{3}x$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}x^2\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 0}F'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}x\right)=0\end{array}\right|\quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}F'(x)$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}\right)}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4x^2}+1-\cancel{4x^2}+3x-2}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x+2x}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

Opción B

1. Sea $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

(a) *(1,75 puntos)* Estudiar su dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas.

(b) *(0,75 puntos)* Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^2 f(x+1) - f(x) \right]$

SOLUCIÓN.

(a) X Por tratarse de una función racional: $D(f) = ¡ - \{ -1 \}$

X Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de $f'(x)$:

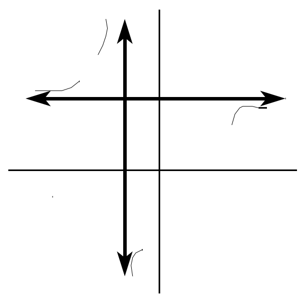
$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{2x} + 2 - \cancel{2x}}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow$$ La función es creciente en todo su dominio

X Asíntotas verticales: $x = -1$ es una asíntota vertical de la función pues $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x}{x+1} = \infty$.

Además: $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x}{x+1} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x}{x+1} = -\infty$

X Como $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{x+1} = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2$ es una asíntota horizontal de la función.

Se tiene:



(b) $$\lim_{x \to +\infty} \left[x^2 f(x+1) - f(x) \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x^2 \cdot \frac{2(x+1)}{x+1+1} - \frac{2x}{x+1} \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^3 + 2x^2}{x+2} - \frac{2x}{x+1} \right] = \infty - 2 = \infty$$

2. *(2,5 puntos)* Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que, dada la estructura de la empresa, sólo puede optar por alarmas de dos tipos, A ó B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas del tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. Estudiar cuántas alarmas de cada tipo deben instalar en la empresa para maximizar la seguridad.

SOLUCIÓN.

Sean x el número de alarmas del tipo B y $9 - x$ el número de alarmas del tipo A que conviene instalar.

La función "seguridad" es: $S(x) = \dfrac{1}{10}(9 - x)\, x^2 = \dfrac{1}{10}\left(9x^2 - x^3\right)$. Veamos para qué valor de x alcanza su máximo:

$$S'(x) = \frac{1}{10}\left(18x - 3x^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x\,(18 - 3x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$S''(x) = \frac{1}{10}(18 - 6x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S''(0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{la seguridad es mínima} \\ S''(6) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{la seguridad es máxima} \end{cases}$$

Por lo tanto, deben instalarse 3 alarmas del tipo A y 6 del tipo B.

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS - JUNIO DE 2009

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

Se valorará el buen uso del vocabulario y la adecuada notación científica, que los correctores podrán bonificar con un máximo de un punto. Por los errores ortográficos, la falta de limpieza en la presentación y la redacción defectuosa podrá bajarse la calificación hasta un punto; en casos extremadamente graves, podrá penalizarse la puntuación hasta con dos puntos.

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En cada uno de los apartados (Álgebra, Geometría y Análisis) elegir una de las dos opciones.

1 ÁLGEBRA

Opción A

a) (1.5 puntos) Discutir y resolver en función de los valores del parámetro m el sistema lineal

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + m^2 y + m^2 z = 1 \\ mx + my + m^2 z = 1 \end{cases}$$

b) (1 punto) Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, determinar el valor del determinante $\begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix}$.

Opción B

a) (1.25 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la inversa de la matriz A^n.

b) (1.25 puntos) Estudiar para qué valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un único polinomio $P(x) = a + bx + cx^2$ que satisface $P(0) = \alpha$, $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$.

2 GEOMETRÍA

Opción A

Sean los vectores $\vec{u} = (1,-1,3)$, $\vec{v} = (-2,2,1)$, $\vec{w} = (3,-2,5)$; calcular:

a) (0.5 puntos) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$.

b) (0.5 puntos) $\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{w})$.

c) (0.75 puntos) La ecuación del plano que pasa por el punto $P(0,0,1)$ y es perpendicular al vector $\vec{u}$.

d) (0.75 puntos) El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Opción B

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x - 2y - z = 3$.

b) (1.5 puntos) Considerar la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ x - 3y + z = 5 \end{cases}$. Analizar si el punto $P(6,2,2)$ se halla o no sobre la recta paralela a la anterior que pasa por el origen.

SIGUE AL DORSO

3 ANÁLISIS

Opción A

1. a) (1.25 puntos) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{12x^2\sqrt{x^2-7x}}{\sqrt{9x^6+5x}}\right), \qquad \lim_{x\to 0}(\cos x+senx)^{1/x}.$$

b) (1.25 puntos) Obtener $\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)dx$.

2. Sea $f(x)=2x+sen(2x)$

a) (0.75 puntos) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.

b) (1.25 puntos) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de extremos relativos.

c) (0.5 puntos) ¿Son los puntos $x=\pi/2+k\pi$ con $k\in\mathbb{R}$, puntos de inflexión de $f(x)$?.

Opción B

1. Sea $f(x)=\dfrac{1}{x-x^2}$

a) (0.5 puntos) Determinar su dominio.

b) (0.75 puntos) Estudiar si $f(x)$ es una función simétrica respecto al origen de coordenadas.

c) (1.25 puntos) Obtener el área encerrada por $f(x)$ y el eje OX entre $x=1/4$ y $x=3/4$.

2. a) (1.25 puntos) Queremos vallar un campo rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 5 euros /m y la de los otros tres lados, 0.625 euros/m. Hallar el área del campo de mayor superficie que podemos cercar con 1800 euros.

b) (1.25 puntos) Calcular para qué valores de a y b la función $\begin{cases} x+1 & x\le -1 \\ a+x^2 & -1<x<1 \\ (b-x)^2 & x\ge 1 \end{cases}$

es continua.

En todo el ejercicio se tendrá en cuenta la claridad, el orden y el rigor matemático.

Álgebra

Opción A

a) Por realizar correctamente la discursión se dará 0.75 puntos.

b) Aplicar la propiedad adecuada de los determinanates se valorará con 0.5 puntos.

Opción B

a) El cálculo de A^n valdrá 0.5 puntos.

b) Por el plantemamiento correcto del problema se adjudicará 0.5 puntos.

Geometría

Opción A

Se tendrá en cuenta la utilización correcta de las definiciones adecuadas a cada apartado.

Opción B

a) El planteamiento correcto se valorará con 0.5 puntos.

b) El cálculo de la recta paralela valdrá 1 punto.

Análisis

Opción A

1.a) El primer límite vale 0.5 puntos y el segundo 0.75 puntos.

b) Se tendrá en cuenta los pasos intermedios.

2.a) El análisis de la existencia de asíntotas oblícuas valdrá 0.5 puntos.

b) Por el cálculo de las raices de $f'(x)$ se dará 0.75 puntos.

c) La obtención de $f''(x)$ y $f'''(x)$ será evaluada con 0.25 puntos.

Opción B

1.a) Si no se dan las raices correctas NO se adjudicará nada de puntuación.

b) Por conocer la definición a aplicar se concederá 0.25 puntos.

c) La descomposición en fracciones simples se valorará con 0.5 puntos.

2.a) Se asignará 0.5 puntos por el planteamiento del problema.

b) Se concederá 0.25 puntos por el cálculo de cada límite lateral.

1. ÁLGEBRA

Opción A

a) *[1,5 puntos]* Discutir y resolver en función de los valores del parámetro *m* el sistema lineal $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ mx+m^2y+m^2z=1 \\ mx+my+m^2z=1 \end{array}\right.$

b) *[1 punto]* Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2$, determinar el valor del determinante $\begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix}$.

SOLUCIÓN.

a) Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 & 1 \\ m & m & m^2 & 1 \end{array}\right)$

Estudiemos los valores del parámetro para los que el rango de A es el máximo posible:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix}=m^4+m^3+m^2-m^3-m^3-m^3=m^4-2m^3+m^2=0 \;\Rightarrow\; m^2\left(m^2-2m+1\right)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; m^2\left(m-1\right)^2=0 \;\Rightarrow\; m=0\;,\; m=1$$

▪ Para $m\neq 0$ y $m\neq 1$: $\text{rg } A=\text{rg } B=3=\text{n}^\text{o}$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

Para resolverlo, utilizamos la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & m & m^2 \end{vmatrix}}{m^2\left(m-1\right)^2}=\frac{m^4+m^2+m-m^2-m^2-m^3}{m^2\left(m-1\right)^2}=\frac{m^4-m^3-m^2+m}{m^2\left(m-1\right)^2}=\frac{m\left(m^3-m^2-m+1\right)}{m^2\left(m-1\right)^2}=\frac{\left(m+1\right)\left(m-1\right)^2}{m\left(m-1\right)^2}=\frac{m+1}{m}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow\; m^3-m^2-m+1=\left(m-1\right)\left(m^2-1\right)=\left(m+1\right)\left(m-1\right)^2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m^2 \\ m & 1 & m^2 \end{vmatrix}}{m^2\left(m-1\right)^2}=\frac{0}{m^2\left(m-1\right)^2}=0$$ (en el determinante del numerador la segunda y tercera filas son iguales)

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m & m & 1 \end{vmatrix}}{m^2\left(m-1\right)^2}=\frac{m^2+m^2+m-m^3-m-m}{m^2\left(m-1\right)^2}=\frac{-m^3+2m^2-m}{m^2\left(m-1\right)^2}=\frac{m\left(-m^2+2m-1\right)}{m^2\left(m-1\right)^2}=\frac{-\left(m-1\right)^2}{m\left(m-1\right)^2}=-\frac{1}{m}$$

▪ Para $m=0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rg } A = 1 \\ \text{rg } B = 2 \end{array} \Rightarrow \text{rg } A \neq \text{rg } B \Rightarrow$ el sistema es incompatible

▪ Para $m=1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } B = 1 \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado

Resolución: utilizando las incógnitas "y" y "z" como parámetros: $x = 1-\lambda-\mu \; ; \; y=\lambda \; ; \; z=\mu$

b) $$\begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/a & 0 & 1 \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/a & 1/a & 0 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

La propiedad utilizada ha sido la de sacar factor común en alguna de las líneas del determinante.

Opción B

a) *[1,25 puntos]* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la inversa de la matriz A^n.

b) [1,25 puntos] Estudiar para qué valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un único polinomio $P(x) = a + bx + cx^2$ que satisface $P(0) = \alpha$, $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$.

SOLUCIÓN.

a) Calculemos A^n:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observa que: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculemos la matriz inversa de A^n: $\left| A^n \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists \left(A^n\right)^{-1}$

$$\left(\text{Adj } A^n\right) = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\text{Adj } A^n\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(A^n\right)^{-1} = \frac{\left(\text{Adj } A^n\right)^t}{\left| A^n \right|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $P(0) = \alpha \Rightarrow a = \alpha$
$P(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$
$P(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$

Para que haya un único polinomio, el sistema tiene que ser compatible determinado y no ser homogéneo (pues en este caso se tendrá $a = b = c = 0$)

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \alpha \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$. Puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0 \Rightarrow$ rg $A = 3 \Rightarrow$ rg $B = 3 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado $\forall \alpha$.

Y para que el sistema no sea homogéneo, debe ser $\alpha \neq 0$.

Es decir, existe un único polinomio $P(x)$, $\forall \alpha \neq 0$.

2. GEOMETRÍA

Opción A

Sean los vectores $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (-2, 2, 1)$, $\vec{w} = (3, -2, 5)$; calcular:

a) *[0,5 puntos]* $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$.
b) *[0,5 puntos]* $\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{w})$.
c) *[0,75 puntos]* La ecuación del plano que pasa por el punto $P(0, 0, 1)$ y es perpendicular al vector $\vec{u}$.
d) *[0,75 puntos]* El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

SOLUCIÓN.

a) $\vec{v} + \vec{w} = (1, 0, 6) \Rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 1 + 0 + 18 = 19$

b) $\vec{v} - \vec{w} = (-5, 4, -4) \Rightarrow \vec{u} \times (\vec{v} - \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 15\vec{j} + 4\vec{k} - 5\vec{k} + 4\vec{j} - 12\vec{i} = (-8, -11, -1)$

c) Si el vector $\vec{u}$ es normal al plano, la ecuación de éste es $x - y + 3z + D = 0$ y como contiene al punto P:

$0 - 0 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow$ la ecuación del plano es: $x - y + 3z - 3 = 0$

d) De la definición del producto escalar de dos vectores, se obtiene: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} =$

$$= \frac{-2-2+3}{\sqrt{1+1+9} \cdot \sqrt{4+4+1}} = -\frac{1}{\sqrt{99}} = -\frac{1}{3\sqrt{11}} = -\frac{\sqrt{11}}{33} \Rightarrow \alpha = 95^\circ\ 46'\ 5.45''$$

Opción B

a) *[1 punto]* Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x - 2y - z = 3$.

b) *[1,5 puntos]* Considerar la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ x - 3y + z = 5 \end{cases}$. Analizar si el punto $P(6, 2, 2)$ se halla o no sobre la recta paralela a la anterior que pasa por el origen.

SOLUCIÓN.

a) Puesto que los coeficientes no son proporcionales: $\dfrac{1}{1} = \dfrac{-2}{-2} \neq \dfrac{1}{-1} \Rightarrow$ los planos son secantes (tienen por intersección una recta)

b) Obtengamos dos puntos de r:

$$\begin{cases} x-y=1+3z \\ x-3y=5-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1+3z \\ -x+3y=-5+z \end{cases} \Rightarrow 2y=-4+4z \Rightarrow y=-2+2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x=1+3z+y=1+3z-2+2z=-1+5z$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Para } z=0: \quad y=-2 \quad , \quad x=-1 \Rightarrow Q(-1,-2,0) \\ \text{Para } z=1: \quad y=0 \quad , \quad x=4 \Rightarrow R(4,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{QR}=(5,2,1)$$

Puesto que $\overrightarrow{QR}=(5,2,1)$ y $\overrightarrow{OP}=(6,2,2)$ no tienen la misma dirección (sus coordenadas no son proporcionales), el punto P no está en una recta paralela a r que pase por O.

3. ANÁLISIS

Opción A

1. a) *[1,25 puntos]* Calcular los siguientes límites: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{12x^2\sqrt{x^2-7x}}{\sqrt{9x^6+5x}}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\operatorname{sen} x\right)^{1/x}$.

b) *[1,25 puntos]* Obtener $\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{x}} x\cos(x^2)\,dx$

SOLUCIÓN.

a) ▪ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{12x^2\sqrt{x^2-7x}}{\sqrt{9x^6+5x}}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{12x^2\sqrt{x^2}}{\sqrt{9x^6}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{12x^3}{3x^3}\right)=4$

▪ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\operatorname{sen} x\right)^{1/x}=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\operatorname{sen} x-1)\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+\operatorname{sen} x-1}{x}}=(1)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\operatorname{sen} x-1}{x}=\dfrac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\operatorname{sen} x+\cos x}{1}=1$ y, por tanto: (1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\operatorname{sen} x\right)^{1/x}=e$

b) $\displaystyle\int x\cos(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x^2\right)$

$$\int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{x}} x\cos(x^2)\,dx=\left[\frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{2}\right]_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{x}}=\frac{\operatorname{sen} x}{2}-\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2}=\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2}=\frac{2\cos\frac{3x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2}=\cos\frac{3x}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

2. Sea $f(x)=2x+\operatorname{sen}(2x)$

a) *[0,75 puntos]* Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.
b) *[1,25 puntos]* Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de extremos relativos.
c) *[0,5 puntos]* ¿Son los puntos $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in\mathbb{R}$, puntos de inflexión de $f(x)$?

SOLUCIÓN.

a) ▪ La función es continua por ser suma de dos funciones continuas $\Rightarrow$ No tiene asíntotas verticales

- Asíntotas horizontales u oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+\operatorname{sen}(2x)}{x} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}}{1} = 2$

NOTA: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = 0$ pues $\left|\operatorname{sen}(2x)\right| \le 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$n = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[2x+\operatorname{sen}(2x)-2x\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\operatorname{sen}(2x)\right]$ que no existe.

Por lo tanto, la función no tiene asíntotas.

b) $f'(x) = 2+2\cos(2x) = 0 \quad\Rightarrow\quad \cos(2x) = -1 \quad\Rightarrow\quad 2x = \pi+2k\pi \quad\Rightarrow\quad x = \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ (puntos críticos)

f ' > 0		**f ' > 0**		**f ' > 0**		**f ' > 0**		**f ' > 0**
	! B/2		B/2		3B/2		5B/2	

Entre cada dos puntos críticos, la derivada es siempre positiva por lo que la función es siempre creciente y no tiene máximos ni mínimos.

c) $f''(x) = -4\operatorname{sen}(2x) \quad\Rightarrow\quad f''\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right) = -4\operatorname{sen}(\pi+2k\pi) = 0$ (anulan a la segunda derivada)

$f'''(x) = -8\cos(2x) \quad\Rightarrow\quad f'''\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right) = -8\cdot\cos(\pi+2k\pi) = 8 \ne 0 \quad\Rightarrow\quad x = \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ son puntos de inflexión

Opción B

1. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-x^2}$

a) *[0,5 puntos]* Determinar su dominio.
b) *[0,75 puntos]* Estudiar si $f(x)$ es una función simétrica respecto al origen de coordenadas.
c) *[1,25 puntos]* Obtener el área encerrada por $f(x)$ y el eje OX entre $x = \dfrac{1}{4}$ y $x = \dfrac{3}{4}$.

SOLUCIÓN.

a) $x - x^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad x(1-x) = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 0\ ,\ x = 1 \quad\Rightarrow\quad D(f) = \mathbb{R} - \{\,0\,,1\,\}$

b) $f(-x) = \dfrac{1}{-x-x^2} \ne -f(x) \quad\Rightarrow$ no es simétrica respecto al origen de coordenadas

c) La función no se anula por lo que no corta al eje OX. Por tanto: $S = \displaystyle\int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{x-x^2}\,dx = (1)$

$$\frac{1}{x-x^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{1-x} = \frac{A-Ax+Bx}{x(1-x)} = \frac{(-A+B)x+A}{x-x^2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} -A+B = 0 \quad\Rightarrow\quad B = 1 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x-x^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{1-x}\,dx = \ln x - \ln(1-x) = \ln\frac{x}{1-x}$$

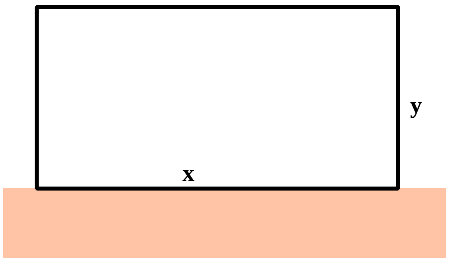
$$(1) = \left[\ln\frac{x}{1-x}\right]_{1/4}^{3/4} = \ln\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} - \ln\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \ln 3 - \ln\frac{1}{3} = \ln 3 - \ln 1 + \ln 3 = 2\ln 3 = \ln 9 \simeq 2{,}197\ u^2$$

2. a) *[1,25 puntos]* Queremos vallar un campo rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 5 euros/m y la de los otros tres lados, 0,625 euros/m. Hallar el área del campo de mayor superficie que podemos cercar con 1800 euros.

b) *[1,25 puntos]* Calcular para qué valores de *a* y *b* la función $\begin{cases} x+1 & x \le -1 \\ a+x^2 & -1 < x < 1 \\ (b-x)^2 & x \ge 1 \end{cases}$ es continua.

SOLUCIÓN.

a) Se tiene: $5x + 0,625(x+2y) = 1800 \;\Rightarrow\; 5,625x + 1,25y = 1800 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{1800 - 5,625x}{1,25} = 1440 - 4,5x$



La función que debe ser máxima es: $f(x) = x \cdot y = 1440x - 4,5x^2$

$f'(x) = 1440 - 9x = 0 \;\Rightarrow\; x = 160$ (valor crítico)

y como $f''(x) = -9 < 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ es máxima.

Por tanto: $x = 160$ m , $y = 720$ m $\;\Rightarrow\; S = 115200$ m^2

b) Como las funciones que están definidas en cada uno de los trozos son polinómicas, son continuas. Habrá que exigir la continuidad en $x = -1$ y en $x = 1$:

- Para que la función sea continua en $x = -1$: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to -1} (x+1) = \lim\limits_{x\to -1} (a+x^2) \;\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow\; 0 = a+1 \;\Rightarrow\; a = -1$

- Para que la función sea continua en $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to 1} (-1+x^2) = \lim\limits_{x\to 1} (b-x)^2 \;\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow\; 0 = (b-1)^2 \;\Rightarrow\; b-1 = 0 \;\Rightarrow\; b = 1$

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS - SEPTIEMBRE DE 2009

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

Se valorará el buen uso del vocabulario y la adecuada notación científica, que los correctores podrán bonificar con un máximo de un punto. Por los errores ortográficos, la falta de limpieza en la presentación y la redacción defectuosa podrá bajarse la calificación hasta un punto; en casos extremadamente graves, podrá penalizarse la puntuación hasta con dos puntos.

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En cada uno de los apartados (álgebra, Geometría y Análisis) elegir una de las dos opciones.

1 ÁLGEBRA

Opción A

a) (1.5 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de orden 2. Hallar la relación entre los parámetros a, b, c para que se verifique que $A^{-1} = 2I - A$.

b) (1 punto) Calcular, en función de los valores del parámetro k, el rango de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{pmatrix}$.

Opción B

a) (1.25 puntos) Resolver el siguiente determinante sin utilizar la regla de Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a+c & -b-a & -c+b \\ a+c & b-a & c+b \end{vmatrix}.$$

b) (1.25 puntos) Para $M = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$, calcular M^n con $n \in \mathbb{N}$.

2 GEOMETRÍA

Opción A

a) (1.5 puntos) Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(5,0,1)$; $B(4,1,0)$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$.

b) (1 punto) Estudiar si los vectores $\vec{u} = (1,-1,1)$; $\vec{v} = (1,0,0)$; y $\vec{w} = (2,-2,1)$, son linealmente independientes.

Opción B

a) (1.5 puntos) Hallar el punto simétrico de $A(2,0,1)$ respecto del plano $\pi \equiv x + 2y + z = 2$.

b) (1 punto) Obtener las ecuaciones de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$ en forma paramétrica y en forma continua.

3 ANÁLISIS

Opción A

1. Sean $f(x)=\cos(3x-1)$ y $h(x)=sen^2(x)$.
   a) (0.5 puntos) Calcular $g(x)=(h\circ f)(x)$
   b) (0.5 puntos) Comprobar si $g(x)$ es una función par.
   c) (1.5 puntos) Obtener $g'(x)$ y estudiar si es cierto que $g'(1/3)=0$.

2. Sea $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{x+2}}$
   a) (0.5 puntos) Calcular su dominio.
   b) (0.75 puntos) Encontrar los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX y estudiar si la función es creciente en el intervalo $(0,1)$.
   c) (0.5 puntos) Obtener $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x+2}$.
   d) (0.75 puntos) Hallar $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Opción B

1. a) (1.25 puntos) Calcular $\int_0^{\pi/2}\cos^3(x)dx$.
   b) (1.25 puntos) Sea $f(x)=e^{ax}$, con $a\in\mathbb{R}$. Calcular $f^{(n)}(x)-a^n f(x)$, siendo $f^{(n)}(x)$ la derivada n-ésima de $f(x)$.

2. a) (1.25 puntos) Sea $f(x)=\begin{cases}\left(x^2+1\right)^{1/x} & x<0\\ \dfrac{x^4+2x+a}{x+1} & x\geq 0\end{cases}$. Estudiar para qué valores del parámetro a esta función es continua en $x=0$.
   b) (1.25 puntos) Entre los números, cuya suma es 36, encontrar aquellos números positivos cuya suma de cuadrados sea mínima.

En todo el ejercicio se tendrá en cuenta la claridad, el orden y el rigor matemático.

Algebra

Opción A

En ambos apartados, independientemente de la forma elegida para resolverlos, se tendrán en cuenta los pasos intermedios.

Opción B

a) Las personas que usen Sarrus tendrán un cero en el ejercicio.

b) El cálculo de algunas potencias correctas se podrá valorar hasta con 0.5 puntos.

Geometría

Opción A

Conocer las definiciones necesarias en cada apartado se tendrá en cuenta.

Opción B

a) Por la aplicación de definición de punto simétrico se dará 0.5 puntos.

b) Se adjudicará 0.5 puntos a la forma paramétrica y 0.5 puntos a la forma continua.

Análisis

Opción A

1. Por conocer la definición de función par se dará 0.25 puntos y por el cálculo de $g'(x)$ se concederá un punto.

2.a) Se tendrá en cuenta la correcta simplificación de las expresiones.

b) Se dará 0.25 puntos por la obtención del punto de corte.

c) La elección correcta de la definición de $f(x)$ será valorada con 0.25 puntos.

d) La descomposición de la integral se valorará hasta con 0.5 puntos atendiendo al uso correcto de la definición de la función módulo.

Opción B

1.a) Se dará hasta un punto por el cálculo de la primitiva.

b) Se valorará 0.75 puntos el cálculo de la derivada n-ésima.

2.a) El cálculo de los límites laterales valdrá un punto.

b) Por el planteamiento del problema se darán 0.5 puntos.

1. ÁLGEBRA.

Opción A

a) *[1,5 puntos]* Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & a\\ b & c\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ de orden 2. Hallar la relación entre los parámetros *a*, *b* y *c* para que se verifique que $A^{-1}=2I-A$.

b) *[1 punto]* Calcular, en función de los valores del parámetro *k*, el rango de la matriz $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 5 & -1 & k\end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN.

a) $A^{-1}=2I-A \quad\Leftrightarrow\quad A^{-1}\cdot A=2I\cdot A-A^2 \quad\Leftrightarrow\quad I=2A-A^2$

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & a\\ b & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & a\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+ab & 2a+ac\\ 2b+bc & ab+c^2\end{pmatrix}$$

Se tiene: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2a\\ 2b & 2c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4+ab & 2a+ac\\ 2b+bc & ab+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-ab & -ac\\ -bc & 2c-ab-c^2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ab=-1\\ ac=0\\ bc=0\\ 2c-ab-c^2=1\end{cases}$

De la primera condición se sigue que a y b son distintos de cero, luego $c=0$ (segunda y tercera condiciones). Para $c=0$, la cuarta condición vuelve a ser $ab=-1$.

Por tanto, deben ser: $ab=-1$, $c=0$.

b) Estudiemos el orden del mayor menor no nulo: $\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 5 & -1 & k\end{vmatrix}=k-1-30-5+3+2k=3k-33=0 \quad\Rightarrow\quad k=11$

Por tanto:

- Si $k\neq 11$: $\quad \text{rg } B=3$
- Si $k=11$: $\quad \text{rg } B=2$ pues el menor $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1+2\neq 0$

Opción B

a) *[1,25 puntos]* Resolver el siguiente determinante sin utilizar la regla de Sarrus: $\begin{vmatrix}a & b & c\\ -a+c & -b-a & -c+b\\ a+c & b-a & c+b\end{vmatrix}$.

b) *[1,25 puntos]* Para $M=\begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}$, calcular M^n con $n\in\mathbb{N}$.

SOLUCIÓN.

a) $\begin{vmatrix}a & b & c\\ -a+c & -b-a & -c+b\\ a+c & b-a & c+b\end{vmatrix}\overset{\substack{F_2+F_1\\ F_3-F_1}}{=}\begin{vmatrix}a & b & c\\ c & -a & b\\ c & -a & b\end{vmatrix}=0$ pues tiene dos filas iguales

b) $M^2=\begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I \quad\Rightarrow\quad M^3=M^2\cdot M=M \quad\Rightarrow\quad M^4=M^2\cdot M^2=I \quad\Rightarrow\quad \ldots$

Por tanto: $\quad M^n = \begin{cases} I & \text{si n es par} \\ M & \text{si n es impar} \end{cases}$

2. GEOMETRÍA

Opción A

a) *[1,5 puntos]* Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(5,0,1)$ y $B(4,1,0)$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=5 \end{cases}$.

b) *[1 punto]* Estudiar si los vectores $\vec{u}=(1,-1,1)$, $\vec{v}=(1,0,0)$ y $\vec{w}=(2,-2,1)$ son linealmente independientes.

SOLUCIÓN.

a) Para calcular la ecuación del plano necesitamos un punto (por ejemplo, el A) y dos vectores (el $\overrightarrow{AB}$ y el vector direccional de la recta r).

C Obtengamos dos puntos P y Q de r para obtener un vector direccional de la recta: $\overrightarrow{PQ}$

$$\begin{cases} x-2y=-3z \\ 2x+y=5+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-3z \\ 4x+2y=10+2z \end{cases} \Rightarrow 5x=10-z \Rightarrow x=2-\frac{z}{5} \quad , \quad y=5+z-2x=5+z-4+\frac{2z}{5}=1+\frac{7z}{5}$$

Elijamos dos valores para z: $\left.\begin{array}{l} \text{para } z=0: \quad x=2 \ , \ y=1 \Rightarrow P(2,1,0) \\ \text{para } z=5: \quad x=1 \ , \ y=8 \Rightarrow Q(1,8,5) \end{array}\right| \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(-1,7,5)$

C La ecuación del plano es: $\begin{vmatrix} x-5 & y & z-1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x-25-7z+7+y+z-1+5y+7x-35=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 12x+6y-6z-54=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+y-z-9=0$

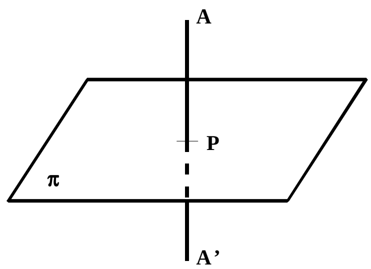
b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2+1=-1 \neq 0 \quad \Rightarrow$ los vectores son linealmente independientes.

Opción B

a) *[1,5 puntos]* Hallar el punto simétrico de $A(2,0,1)$ respecto del plano $\pi \equiv x+2y+z=2$.

b) *[1 punto]* Obtener las ecuaciones de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y-2z=1 \end{cases}$ en forma paramétrica y en forma continua.

SOLUCIÓN



a) C Calculamos la ecuación de la recta AA' perpendicular a π que pasa por A:

Un vector direccional de la recta es el vector normal al plano $\vec{n}=(1,2,1)$

Por tanto, la ecuación paramétrica de la recta es: $\begin{cases} x=2+t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$

C Obtengamos las coordenadas del punto P de intersección de la recta y el plano:

$$2+t+4t+1+t=2 \quad\Rightarrow\quad 6t=-1 \quad\Rightarrow\quad t=-\frac{1}{6} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{11}{6}\ ,\ y=-\frac{1}{3}\ ,\ z=\frac{5}{6} \quad \text{es decir:} \quad P\left(\frac{11}{6},-\frac{1}{3},\frac{5}{6}\right)$$

C Y como P es el punto medio del segmento AA':

$$\frac{11}{6}=\frac{2+x}{2} \Rightarrow x=\frac{5}{3} \ ;\ -\frac{1}{3}=\frac{0+y}{2} \Rightarrow y=-\frac{2}{3} \ ;\ \frac{5}{6}=\frac{1+z}{2} \Rightarrow z=\frac{2}{3} \quad \text{luego:} \quad A'\left(\frac{5}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

b) Para hacerlo, obtengamos un punto y un vector direccional o lo que es equivalente, dos puntos de la recta:

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y-2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3-z \\ x-y=1+2z \end{cases} \overset{\text{sumando}}{\Rightarrow} 3x=4+z \Rightarrow x=\frac{4+z}{3} \ ;\ y=x-1-2z=\frac{4+z}{3}-1-2z=\frac{1-5z}{3}$$

y dando valores a z: Para $z=-1$: $x=1$, $y=2$ es decir $P(1,2,-1)$

Para $z=2$: $x=2$, $y=-3$ es decir $Q(2,-3,2)$

Como punto, utilizaremos $P(1,2,-1)$; y como vector direccional $\overrightarrow{PQ}=(1,-5,3)$.

C La ecuación paramétrica es: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-5t \\ z=-1+3t \end{cases}$ y la ecuación continua: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z+1}{3}$

3. ANÁLISIS

Opción A

1. Sean $f(x)=\cos(3x-1)$ y $h(x)=\text{sen}^2(x)$.

a) *[0,5 puntos]* Calcular $g(x)=(h\circ f)(x)$.

b) *[0,5 puntos]* Comprobar si $g(x)$ es una función par.

c) *[1,5 puntos]* Obtener $g'(x)$ y estudiar si es cierto que $g'(1/3)=0$.

SOLUCIÓN.

a) $g(x)=(h\circ f)(x)=h[f(x)]=h[\cos(3x-1)]=\text{sen}^2[\cos(3x-1)]$

b) $g(-x)=\text{sen}^2[\cos(-3x-1)]=\text{sen}^2[\cos(3x+1)]\neq g(x) \quad\Rightarrow\quad$ la función no es par

c) $g'(x)=2\cdot\text{sen}[\cos(3x-1)]\cdot\cos[\cos(3x-1)]\cdot[-\text{sen}(3x-1)]\cdot 3=$

$=-6\cdot\text{sen}[\cos(3x-1)]\cdot\cos[\cos(3x-1)]\cdot[\text{sen}(3x-1)]$

$g'(1/3)=-6\cdot\text{sen}[\cos(1-1)]\cdot\cos[\cos(1-1)]\cdot[\text{sen}(1-1)]=0$ puesto que $\text{sen}\ 0=0$

2. Sea $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{x+2}}$

a) *[0,5 puntos]* Calcular su dominio.

b) *[0,75 puntos]* Encontrar los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX y estudiar si la función es creciente en el intervalo $(0,1)$.

c) *[0,5 puntos]* Obtener $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x+2}$

d) *[0,75 puntos]* Hallar $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

SOLUCIÓN.

a) $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\; / \;\; \dfrac{x^3 + 2x^2}{x+2} \geq 0 \right\}$

$\dfrac{x^3 + 2x^2}{x+2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2 (x+2)}{x+2} \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ luego $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

b) C $\begin{cases} y = \sqrt{\dfrac{x^3 + 2x^2}{x+2}} \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\dfrac{x^3 + 2x^2}{x+2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 (x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \;\;,\;\; x = -2$

Y como $x = -2$ no forma parte del dominio, el único punto de corte es el $(0\,,0)$.

C $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3 + 2x^2}{x+2}}} \cdot \dfrac{(3x^2 + 4x)(x+2) - (x^3 + 2x^2)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3 + 2x^2}{x+2}}} \cdot \dfrac{3x^3 + 6x^2 + 4x^2 + 8x - x^3 - 2x^2}{(x+2)^2} =$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3 + 2x^2}{x+2}}} \cdot \dfrac{2x^3 + 8x^2 + 8x}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^3 + 2x^2}{x+2}}} \cdot \dfrac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)^2}$

En el intervalo $(0\,,1)$: $\quad x^3 + 2x^2 > 0$

$x + 2 > 0 \qquad \Rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad \Rightarrow$ la función es creciente.

$x^3 + 4x^2 + 4x > 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3 + 2x^2}{x+2}}}{x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3 + 2x^2}{(x+2)^3}} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3}{x^3}} = 1$

d) Calculemos una primitiva de $f(x)$:

$$\int \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+2}}\, dx = \int \sqrt{\frac{x^2 (x+2)}{x+2}}\, dx = \int \sqrt{x^2}\, dx = \begin{cases} \int (-x)\, dx = -\dfrac{x^2}{2} & \text{para } x < 0 \\ \int x\, dx = \dfrac{x^2}{2} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto: $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)\, dx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0}^{1} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 1$

Opción B

1. a) *[1,25 puntos]* Calcular $\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\,dx$

b) *[1,25 puntos]* Sea $f(x) = e^{ax}$, con $a \in \mathbb{R}$. Calcular $f^{(n)}(x) - a^n f(x)$, siendo $f^{(n)}(x)$ la derivada n-ésima de $f(x)$.

SOLUCIÓN.

a) Obtengamos una primitiva: $\int \cos^3(x)\,dx = \int \cos^2(x)\cdot\cos(x)\cdot dx = \int \left(1-\operatorname{sen}^2(x)\right)\cdot\cos(x)\cdot dx =$

$= \int \cos(x)\,dx - \int \operatorname{sen}^2(x)\cdot d\left(\operatorname{sen}(x)\right) = \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x)$. Como la función no se anula en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\,dx = \left[\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x)\right]_0^{\pi/2} = \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\frac{\pi}{2}\right) - \left(\operatorname{sen}0 - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 0\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}$$

b) Tenemos: $f'(x) = a\cdot e^{ax}$; $f''(x) = a^2\cdot e^{ax}$; ... ; $f^{(n)}(x) = a^n\cdot e^{ax}$.

Y por tanto: $f^{(n)}(x) - a^n f(x) = a^n\cdot e^{ax} - a^n\cdot e^{ax} = 0$

2. a) *[1,25 puntos]* Sea $f(x) = \begin{cases} \left(x^2+1\right)^{1/x} & x < 0 \\ \dfrac{x^4+2x+a}{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$. Estudiar para qué valores del parámetro *a* esta función es continua en $x = 0$.

b) *[1,25 puntos]* Entre los números cuya suma es 36, encontrar aquellos números positivos cuya suma de cuadrados sea mínima.

SOLUCIÓN.

a) Puesto que la función está definida en $x = 0$, para que sea continua debe ocurrir que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \iff \lim_{x\to 0}\left(x^2+1\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4+2x+a}{x+1} \iff (1)$$

Calculemos $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+1\right)^{1/x} = 1^\infty = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+1-1\right)\cdot\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x} = e^0 = 1$ y por tanto: (1) $\iff$ $1 = a$

b) Sean los números: x y $36 - x$. La función $f(x) = x^2 + \left(36-x\right)^2$ debe ser mínima:

$$f(x) = x^2 + 1296 - 72x + x^2 = 2x^2 - 72x + 1296 \Rightarrow f'(x) = 4x - 72 = 0 \Rightarrow x = 18$$

Y como $f''(x) = 4 > 0 \Rightarrow$ la función es mínima para $x = 18$.

Por tanto, los números buscados son: 18 y 18.

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Hay que elegir una de las opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

OPCIÓN A

A1. **a**) Estudiar para qué valores de a el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$, es no nulo.

Para $a=3$ obtener el determinante de la matriz $2A$. *(1,5 puntos)*

b) Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular el rango de $(AB)^T$. *(1 punto)*

A2. Sea $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & -\infty < x \le 0 \\ sen(ax) & 0 < x < \pi \\ (x-\pi)^2+1 & \pi \le x < +\infty \end{cases}$

a) Calcular los valores de a para los cuales $f(x)$ es una función continua. *(1 punto)*

b) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para cada uno de esos valores. *(1 punto)*

c) Obtener $\int_{-1}^{0} f(x)dx$. *(0,5 puntos)*

A3. Encontrar el polinomio de grado dos $p(x)=ax^2+bx+c$ sabiendo que satisface: en $x=0$ el polinomio vale 2, su primera derivada vale 4 para $x=1$ y su segunda derivada vale 2 en $x=0$. Estudiar si el polinomio obtenido es una función par. ¿Tiene en $x=0$ un punto de inflexión? *(2,5 puntos)*

A4. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases}, \qquad s \equiv x-1=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}$$

a) Justificar si son o no perpendiculares. *(1 punto)*

b) Calcular la distancia del punto $P(16,0,0)$ a la recta r. *(1,5 puntos)*

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

B1. **a**) Estudiar para qué valores de x, la matriz inversa de $\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ coincide con su opuesta. (1,5 puntos)

b) Dos hermanos de tercero y cuarto de primaria iban camino del colegio con sus mochilas cargadas de libros todos del mismo peso. Uno de ellos se lamentaba del peso que transportaba y el otro le dijo: "*¿De qué te quejas? Si yo te cogiera un libro, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio si te diera un libro, tu carga igualaría a la mía.*"

¿Cuántos libros llevaba cada hermano? *(1 punto)*

B2. Sea $f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{x^2 - x^3}$

a) Calcular el dominio $f(x)$. *(0,5 puntos)*

b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. *(1 punto)*

c) Analizar las asíntotas de $f(x)$ y calcular las que existan. *(1 punto)*

B3. **a**) Hallar el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 3x$ y la recta $y = x$. *(1,25 puntos)*

b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2\ln n}{\ln(7n^2)} \right)^{\ln n}$. *(1,25 puntos)*

B4. **a**) Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1,1,1)$, $(3,-2,2)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y - z = 0$. *(1,75 puntos)*

b) Estudiar si los vectores $\vec{a} = (1,-1,-1)$, $\vec{b} = (0,1,1)$, $\vec{c} = (0,0,1)$ son linealmente independientes. *(0,75 puntos)*

OPCIÓN A

En todo el ejercicio se tendrá en cuenta la claridad, el orden y el rigor matemático.

A 1.

a) Se valorará positivamente el uso de las propiedades de los determinantes.

b) Por el cálculo de AB se dará 0.5 puntos.

A 2.

a) Por calcular correctamente los límites laterales en $x = 0$ se adjudicará 0.5 puntos.

b) No se tendrá en cuenta si no se ha sustituido el valor de a.

c) No se adjudicará más de 0.25 puntos si el resultado final no es totalmente correcto.

A 3.

Se dará 1.25 puntos por el cálculo del polinomio.

A 4.

a) Por identificar los vectores correspondientes se adjudicará 0.5 puntos.

b) Se dará hasta 0.5 puntos por seleccionar adecuadamente la fórmula a utilizar.

OPCIÓN B

B 1.

a) Se valorará con 0.25 puntos aplicar correctamente las definiciones de matriz opuesta e inversa.

b) Se asignará 0.5 puntos por el planteamiento del problema.

B 2.

a) Simplificar la función valdrá 0.25 puntos.

b) Por calcular correctamente la primera derivada se dará 0.25 puntos.

c) Se concederá hasta 0.25 puntos por conocer las definiciones a utilizar.

B 3.

a) El planteamiento correcto de la integral a resolver valdrá 0.75 puntos.

b) Se considerará positivamente el conocer cómo resolver la indeterminación y el manejo de los logaritmos.

B 4.

Se tendrá en cuenta el conocimiento de las fórmulas adecuadas para los cálculos solicitados.

Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Hay que elegir una de las dos opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

<u>OPCIÓN A</u>

A1. **a)** Estudiar para qué valores de a el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$ es no nulo. Para $a=3$, obtener el determinante de la matriz $2A$. *(1,5 puntos)*

b) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular el rango de $(AB)^T$. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) Veamos para qué valores de a el determinante es nulo:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{vmatrix}=-a^2(a-1)+2a^2(a-1)=a^2(a-1)=0 \quad \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases} \qquad \text{luego } |A|\neq 0 \ \ \forall a\neq 0 \text{ y } 1.$$

Para $a=3$: $|2A|\overset{(1)}{=}2\cdot 2\cdot 2\cdot|A|=8\cdot 9\cdot 2=144$

(1) Si multiplicamos por un número todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada, su determinante queda multiplicado por ese número. Al calcular la matriz $2A$, los elementos de las tres líneas (filas o columnas) se multiplican por 2. De ahí que el determinante quede multiplicado tres veces por 2.

b) $rg\left(A\cdot B\right)^T=rg\left(A\cdot B\right)$ pues la traspuesta de una matriz se obtiene intercambiando las filas por las columnas y el rango de filas y de columnas de una matriz es el mismo.

Calculemos $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}$ y obtengamos su rango:

El único menor de orden tres es: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 9 & -3 \end{vmatrix}=-12-6+18=0 \ \Rightarrow \ rg(A)<3$

y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=4+2=6\neq 0 \ \Rightarrow \ rg\left(AB\right)^T=rg\left(AB\right)=2$

A2. Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & -\infty<x\leq 0 \\ sen(ax) & 0<x<\pi \\ (x-\pi)^2+1 & \pi\leq x<+\infty \end{cases}$

a) Calcular los valores de a para los cuales $f(x)$ es una función continua. *(1 punto)*

b) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para cada uno de esos valores. *(1 punto)*

c) Obtener $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$. *(0,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Para que $f\,(x)$ sea continua $\forall\, x$ debe serlo en $x=0$ y en $x=\pi$.

Para que lo sea en $x=0$ debe ser: $\lim\limits_{x\to 0^-} f\,(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f\,(x) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+2x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[sen\,(ax)\right] \;\Leftrightarrow\; 0=0 \;\Rightarrow$ la función es continua en $x=0 \quad \forall\, a$ porque además $f\,(0)=0$.

Para que lo sea en $x=\pi$ debe ser: $\lim\limits_{x\to \pi^-} f\,(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+} f\,(x) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to \pi}\left[sen\,(ax)\right]=\lim\limits_{x\to \pi}\left[\left(x-\pi\right)^2+1\right] \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad sen\,(\pi a)=1 \quad \Rightarrow \quad \pi a=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{2}+2k \qquad k=0\,,1\,,2\,,...$$

b) Para los valores de a encontrados, la función es $f\,(x)=\begin{cases} x^2+2x & -\infty<x\le 0 \\ sen\left(\dfrac{x}{2}+2kx\right) & 0<x<\pi \\ (x-\pi)^2+1 & \pi\le x<+\infty \end{cases}$ y la función derivada:

$$f\,'(x)=\begin{cases} 2x+2 & si\ -\infty<x\le 0 \\ \cos\left(\dfrac{x}{2}+2kx\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}+2k\right) & si\ 0<x<\pi \\ 2\left(x-\pi\right) & si\ \pi\le x<+\infty \end{cases} \; .$$

Derivabilidad en $x=0$: $\left.\begin{array}{l} f\,'\left(0^-\right)=2 \\ f\,'\left(0^+\right)=\dfrac{1}{2}+2k \end{array}\right| \;\Rightarrow\; 2\ne\dfrac{1}{2}+2k$ para $k\in\mathbb{Z} \;\Rightarrow\; f\,(x)$ no es derivable en $x=0$.

Derivabilidad en $x=\pi$: $\left.\begin{array}{l} f\,'\left(\pi^-\right)=0 \\ f\,'\left(\pi^+\right)=0 \end{array}\right| \;\Rightarrow\; f\,(x)$ es derivable en $x=\pi$

c) $$\int_{-1}^{0} f\,(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=0-\left(-\frac{1}{3}+1\right)=-\frac{2}{3}$$

A3. Encontrar el polinomio de grado dos $p\,(x)=ax^2+bx+c$ sabiendo que satisface: en $x=0$ el polinomio vale 2, su primera derivada vale 4 para $x=1$ y su segunda derivada vale 2 en $x=0$.
Estudiar si el polinomio obtenido es una función par. ¿Tiene en $x=0$ un punto de inflexión? *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

- $p\,(0)=2 \quad \Rightarrow \quad c=2$

  $p\,'(x)=2ax+b \quad \Rightarrow \quad p\,''(x)=2a \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} p\,''(0)=2 \quad \Rightarrow \quad 2a=2 \quad \Rightarrow \quad a=1 \\ p\,'(1)=4 \quad \Rightarrow \quad 2+b=4 \quad \Rightarrow \quad b=2 \end{array}\right.$

  Por tanto: $p\,(x)=x^2+2x+2$

- $p\,(-x)=(-x)^2+2\,(-x)+2=x^2-2x+2\ne p\,(x) \quad \Rightarrow$ no es una función par

- No, pues $p\,''(x)=2 \quad \forall\, x \quad \Rightarrow$ no tiene puntos de inflexión (por otra parte, se trata de una parábola que no los tiene)

A4. Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases}$ y $s \equiv x-1=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{2}$

a) Justificar si son o no perpendiculares. *(1 punto)*
b) Calcular la distancia del punto $P\,(16\,,0\,,0)$ a la recta *r*. *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Obtengamos un vector direccional de cada una de las rectas:

De r: dos puntos de la recta son, por ejemplo $A(3\,,2\,,1)$ y $B(7\,,0\,,2)$ $\Rightarrow$ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(4\,,-2\,,1)$
De s: $\vec{v}=(1\,,3\,,2)$
$\vec{u}\cdot\vec{v}=4-6+2=0 \;\Rightarrow\; \vec{u}\perp\vec{v} \;\Rightarrow\; r\perp s$

b) $$d\,(P\,,r)=\frac{|\,\overrightarrow{AP}\times\vec{u}\,|}{|\,\vec{u}\,|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 13 & -2 & -1\\ 4 & -2 & 1\end{matrix}\right\|}{\sqrt{16+4+1}}=\frac{|-2\vec{i}-4\vec{j}-26\vec{k}+8\vec{k}-13\vec{j}-2\vec{i}\,|}{\sqrt{21}}=\frac{|(-4\,,-17\,,-18)|}{\sqrt{21}}=$$

$$=\frac{\sqrt{16+289+324}}{\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{629}}{\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{629}{21}}\to 5,47 \text{ u}$$

OPCIÓN B

B1. **a)** Estudiar para qué valores de *x*, la matriz inversa de $\begin{pmatrix} x & -2\\ 5 & -x\end{pmatrix}$ coincide con su opuesta. *(1,5 puntos)*

b) Dos hermanos de tercero y cuarto de primaria iban camino del colegio con sus mochilas cargadas de libros todos del mismo peso. Uno de ellos se lamentaba del peso que transportaba y el otro le dijo: *“¿De qué te quejas? Si yo te cogiera un libro, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio si te diera un libro, tu carga igualaría a la mía”*
¿Cuántos libros llevaba cada hermano? *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) Sea $A=\begin{pmatrix} x & -2\\ 5 & -x\end{pmatrix}$ la matriz dada. Su opuesta es: $-A=\begin{pmatrix} -x & 2\\ -5 & x\end{pmatrix}$.

Calculemos su matriz inversa. El determinante de la matriz es: $|\,A\,|=\begin{vmatrix} x & -2\\ 5 & -x\end{vmatrix}=-x^2+10$

$$A=\begin{pmatrix} x & -2\\ 5 & -x\end{pmatrix}\xrightarrow{(Adj\ A)}\begin{pmatrix} -x & -5\\ 2 & x\end{pmatrix}\xrightarrow{(Adj\ A)^T}\begin{pmatrix} -x & 2\\ -5 & x\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{(Adj\ A)^T}{|A|}}A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{-x}{-x^2+10} & \dfrac{2}{-x^2+10}\\ \dfrac{-5}{-x^2+10} & \dfrac{x}{-x^2+10}\end{pmatrix}$$

Para que $A^{-1}=-A \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} \dfrac{-x}{-x^2+10} & \dfrac{2}{-x^2+10}\\ \dfrac{-5}{-x^2+10} & \dfrac{x}{-x^2+10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x & 2\\ -5 & x\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; -x^2+10=1 \;\Rightarrow\; x^2=9 \;\Rightarrow\; x=\pm 3$

b) Sea *x* el número de libros que lleva el primero de ellos e *y* los que lleva el segundo. Se tiene:

$$\begin{cases} x+1=2(y-1) \\ x-1=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-3 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y=3 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow \quad y=5 \;\; ; \;\; x=7$$

luego el primero lleva 7 libros y el segundo 5.

B2. Sea $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3}$

a) Calcular el dominio de $f(x)$. *(0,5 puntos)*

b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. *(1 punto)*

c) Analizar las asíntotas de $f(x)$ y calcular las que existan. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) Por tratarse de una función racional:

$$D(f)=\mathbb{R}-\left\{ x\in\mathbb{R} \;/\; x^2-x^3=0 \right\}=\mathbb{R}-\left\{ x\in\mathbb{R} \;/\; x^2(1-x)=0 \right\}=\mathbb{R}-\{0\,,1\}$$

b) El crecimiento y decrecimiento de una función depende del signo de $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(4x-1)\left(x^2-x^3\right)-\left(2x^2-x\right)\left(2x-3x^2\right)}{\left(x^2-x^3\right)^2}=\frac{x^2\left[(4x-1)(1-x)-(2x-1)(2-3x)\right]}{x^4(1-x)^2}=$$

$$=\frac{4x-4x^2-1+x-4x+6x^2+2-3x}{x^2(1-x)^2}=\frac{2x^2-2x+1}{x^2(1-x)^2}$$

El denominador es positivo $\forall x$. Estudiemos el signo del numerador: $2x^2-2x+1=0 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-8}}{4}$.

Observamos que el numerador no cambia de signo y que $2x^2-2x+1>0$

Por tanto, la función es creciente.

c) C Asíntotas verticales: pueden serlo $x=0$ y $x=1$.

$x=0$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(2x-1)}{x^2(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{x(1-x)}=\infty \quad\Rightarrow\; x=0$ es una asíntota vertical de la función.

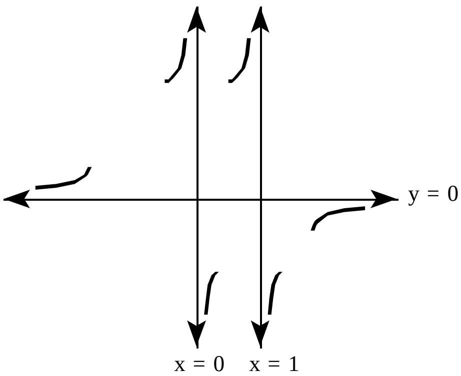
Estudiemos la posición de la gráfica respecto a la asíntota:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2-x}{x^2-x^3}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x-1}{x(1-x)}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^2-x}{x^2-x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-1}{x(1-x)}=-\infty$$

$x=1$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3}=\infty \quad\Rightarrow\; x=1$ es una asíntota vertical de la función

Estudiemos la posición relativa de la gráfica respecto a la asíntota:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-x}{x^2-x^3}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-x}{x^2-x^3}=-\infty$$



C Asíntotas horizontales u oblicuas:

$f(x)=\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3}=0+\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3} \quad\Rightarrow\; y=0$ es una asíntota horizontal.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-x^3}=0^+ \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-x^3}=0^-$$

B3. **a)** Hallar el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 3x$ y la recta $y = x$. *(1,25 puntos)*

b) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2\ln n}{\ln(7n^2)}\right)^{\ln n}$. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Construimos la función diferencia de ambas funciones $f(x) = x^3 - 4x$ y calculamos el área limitada por esta función y el eje OX:

$x^3 - 4x = 0 \;\Rightarrow\; x\left(x^2 - 4\right) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0\;,\; x = -2\;,\; x = 2$ (puntos de corte de $f(x)$ y el eje de abscisas). Se tiene:

$$S = \left| \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x\right) dx \right| + \left| \int_{0}^{2} \left(x^3 - 4x\right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{0}^{2} \right| = \left| 0 - 4 + 8 \right| + \left| 4 - 8 - 0 \right| = 8 \text{ u}^2$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\ln n}{\ln(7n^2)}\right)^{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\ln n}{\ln 7 + 2\ln n}\right)^{\ln n} = 1^\infty = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2\ln n}{\ln 7 + 2\ln n} - 1\right)\cdot \ln n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2\ln n - \ln 7 - 2\ln n}{\ln 7 + 2\ln n}\right)\cdot \ln n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-\ln 7\cdot \ln n}{\ln 7 + 2\ln n}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-\ln 7\cdot \ln n}{2\ln n}\right)} = e^{\frac{-\ln 7}{2}} = e^{-\ln\sqrt{7}} = \frac{1}{e^{\ln\sqrt{7}}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

B4. **a)** Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1,1,1)$, $(3,-2,2)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y - z = 0$. *(1,75 puntos)*

b) Estudiar si los vectores $\vec{a} = (1,-1,-1)$, $\vec{b} = (0,1,1)$, $\vec{c} = (0,0,1)$ son linealmente independientes.
(0,75 puntos)

SOLUCIÓN.

a) El plano está definido por el punto $(1,1,1)$ y los vectores $\vec{u} = (2,-3,1)$ y $\vec{v} = (2,-1,-1)$ normal al plano π:

La ecuación del plano es: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x - 3 - 2z + 2 + 2y - 2 + 6z - 6 + 2y - 2 + x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; 4x + 4y + 4z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; x + y + z - 3 = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\Rightarrow$ los vectores son linealmente independientes.

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Hay que elegir una de las opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

OPCIÓN A

A1. **a**) Discutir y resolver cuando sea posible el siguiente sistema lineal: *(1,75 puntos)*

$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ -2x + y + az = 1 \\ y + az = 1 \end{cases}$$

b) ¿Existe algún valor del parámetro a para el cual el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema anterior?

(0,75 puntos)

A2. **a**) Utilizar el cambio de variable $t^3 = 1 - x$ para calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-x)^{1/3} - 1}{x}. \quad \textit{(1 punto)}$$

b) Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ 1 - x & x \geq 1 \end{cases}$ y obtener $\int_{-1/2}^{1/2} f(x)dx$. *(1,5 puntos)*

A3. Sea la función $f(x) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$ con $x \in (0,1)$.

a) Calcular sus extremos relativos. *(1,5 puntos)*

b) Estudiar su crecimiento y decrecimiento y razonar si posee algún punto de inflexión. *(1 punto)*

A4. **a**) Calcular el plano determinado por los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. *(1 punto)*

b) Determinar el ángulo que forman los planos

$$\pi_1 \equiv \sqrt{2}x + y + z = 2 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv z = 0$$ *(0,75 puntos)*

c) Obtener el producto vectorial de $\vec{a} = (2,0,1)$ y $\vec{b} = (1,-1,3)$. *(0,75 puntos)*

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

B1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

a) Estudiar si existen valores de α y β para los cuales la matriz A sea simétrica. ¿Será la matriz $B = A\,A^T$ igual a la matriz identidad en algún caso? *(1 punto)*

b) Razonar cuál es la relación entre el determinante de A y el de B. *(0,75 puntos)*

c) Discutir y resolver cuando sea posible el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(0,75 puntos)*

B2. El número de socios de una ONG viene dado por la función

$$n(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$$

donde x indica el número de años desde su fundación.

a) Calcular el número de socios iniciales en el momento fundacional y en el quinto año. *(0,5 puntos)*

b) ¿En qué año ha habido el menor número de socios? ¿Cuántos fueron? *(1 punto)*

c) El cuarto año se produjo un cambio en la junta directiva, ¿influyó en el ascenso o descenso del número de socios? *(1 punto)*

B3. Sea $f(x) = \dfrac{x}{1-\sqrt{1+x}}$ una función definida en $[-1,+\infty)$

a) ¿Cuánto debe valer $f(0)$ para asegurar que $f(x)$ es continua en su dominio? Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{1+\sqrt{1+x}}\,dx$. (1,5 puntos)

b) Para $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{1+\sqrt{1+t}}\,dt$ calcular $G'(x)$. *(1 punto)*

B4. Estudiar la posición relativa de la recta $r \equiv \dfrac{x+1}{3} = y-2 = \dfrac{z}{2}$ y el plano determinado por los puntos $A(1,3,2)$, $B(2,0,1)$ y $C(1,4,3)$. ¿Son perpendiculares? Hallar la distancia del punto $P(4/5, 13/5, 6/5)$ a la recta r. *(2,5 puntos)*

En todo el ejercicio se tendrá en cuenta la claridad, el orden y el rigor matemático.

OPCIÓN A

A 1.

a) Se adjudicará hasta un punto por la discursión del sistema en función del parámetro.

b) Por la sustitución correcta se dará hasta 0.5 puntos.

A 2.

a) Por la correcta realización del cambio de variable se asignará 0.5 puntos.

b) El cálculo de los límites laterales se valorará con 0.75 puntos y la elección correcta de la definición de $f(x)$ en el intervalo de integración con 0.25 puntos.

A 3.

a) El cálculo correcto de $f'(x)$ y $f''(x)$ valdrá 0.75 puntos.

b) Se dará 0.75 puntos por la escritura correcta de los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

A 4.

En todos los apartados se tendrá en cuenta el conocimiento de las fórmulas adecuadas para los cálculos solicitados.

OPCIÓN B

B 1.

a) Se adjudicará 0.75 puntos por el cálculo de α y β que hagan que A sea suma.

b) Se dará la máxima puntuación si el estudiante demuestra conocer la teoría adecuada.

c) Se valorará con 0.5 puntos la discursión del sistema.

B 2.

En este ejercicio se considerará de manera positiva la comprensión del enunciado.

Por el cálculo de $n'(x)$ y $n''(x)$ se dará 0.5 puntos.

B 3.

a) Cada una de las dos partes se valorará con 0.75 puntos.

b) Por la simplificación correcta del cociente de funciones se adjudicará 0.25 puntos.

El uso correcto de la teoría adecuada será tenido en cuenta.

B 4.

Por la obtención del plano que pasa por los puntos A, B, C se dará un punto y por el estudio de la posición relativa 0.75 puntos.

Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Hay que elegir una de las dos opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

OPCIÓN A

A1. a) Discutir y resolver cuando sea posible el siguiente sistema lineal: *(1,75 puntos)*

$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ -2x + y + az = 1 \\ y + az = 1 \end{cases}$$

b) ¿Existe algún valor del parámetro a para el cual el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema anterior? *(0,75 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$

Comparemos el rango de ambas matrices. El máximo rango posible de ambas matrices es 3:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 2a - a^2 = 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \Rightarrow$$

- Si $a \neq 0$: $\text{rg}\, A = \text{rg}\, M = 3 = \text{nº de incógnitas} \quad \Rightarrow$ Sistema compatible determinado
- Si $a = 0$: rg A = 2 pues el menor de la matriz de los coeficientes $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ y rg M = 3 pues el menor de la matriz ampliada $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow$ Sistema incompatible.

Soluciones para el caso $a \neq 0$: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{2a} = \dfrac{a-a}{2a} = 0$ $\qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}}{2a} = \dfrac{a^2 - a^2}{2a} = 0$

$$z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2a} = \dfrac{a + 2 - a}{2a} = \dfrac{1}{a}$$

b) No. Las soluciones obtenidas en el caso de compatibilidad exigen que $x = y = 0$.

A2. a) Utilizar el cambio de variable $t^3 = 1 - x$ para calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-x)^{1/3} - 1}{x}$ *(1 punto)*

b) Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ 1 - x & x \geq 1 \end{cases}$ y obtener $\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\, dx$. *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $t^3 = 1 - x \;\Rightarrow\; x = 1 - t^3$ y cuando $x \to 0 \;\Rightarrow\; t^3 \to 1 \;\Rightarrow\; t \to 1$

Se tiene: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-x)^{1/3} - 1}{x} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t-1}{1-t^3} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t-1}{-(t-1)(t^2+t+1)} = -\dfrac{1}{3}$

b) La función es continua en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$. Estudiemos la continuidad en $x = 1$:

- $\exists\, f(1) = 0$
- $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (x^2 + 1) = 2$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (1 - x) = 0 \;\Rightarrow\; \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

luego la función es discontinua en $x = 1$ (con una discontinuidad no evitable).

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\, dx = \int_{-1/2}^{1/2} (x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1/2}^{1/2} = \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24} + \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{2} = \frac{13}{12}$$

A3. Sea la función $f(x) = x \ln x + (1 - x)\ln(1 - x)$ con $x \in (0, 1)$.

a) Calcular sus extremos relativos. *(1,5 puntos)*

b) Estudiar su crecimiento y decrecimiento y razonar si posee algún punto de inflexión. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = \ln x + 1 - \ln(1-x) - 1 = \ln \dfrac{x}{1-x} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x}{1-x} = 1 \;\Rightarrow\; x = 1 - x \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$ (punto crítico)

$f''(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} \;\Rightarrow\; f''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 + 2 = 4 > 0 \;\Rightarrow\;$ En $x = \dfrac{1}{2}$ la función tiene un mínimo relativo

b) La función es continua en el intervalo $(0, 1)$ por ser producto y suma de funciones continuas. Como tiene en $x = \dfrac{1}{2}$ un mínimo relativo: la función es decreciente en $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

Veamos si tiene algún punto de inflexión:

$f''(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1 - x + x}{x(1-x)} = \dfrac{1}{x(1-x)} \neq 0 \;\; \forall x \;\Rightarrow\;$ la función no tiene puntos de inflexión.

A4. a) Calcular el plano determinado por los puntos $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$. *(1 punto)*

b) Determinar el ángulo que forman los planos $\pi_1 \equiv \sqrt{2}x + y + z = 2$ y $\pi_2 \equiv z = 0$. *(0,75 puntos)*

c) Obtener el producto vectorial de $\vec{a} = (2, 0, 1)$ y $\vec{b} = (1, -1, 3)$. *(0,75 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) El plano está determinado por el punto $P(1,0,0)$ y los vectores $\overrightarrow{PQ} = (-1,1,0)$ y $\overrightarrow{PR} = (-1,0,1)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-1+z+y=0 \quad \Leftrightarrow \quad x+y+z-1=0$$

b) El ángulo que forman los planos es el que forman los vectores normales a cada uno de ellos:

$$\overrightarrow{n_1} = \left(\sqrt{2},1,1\right) \ \text{ y } \ \overrightarrow{n_2} = (0,0,1).$$

Se tiene:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2+1+1}\,\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^{\text{o}}$$

c) $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{j} - 2\vec{k} - 6\vec{j} + \vec{i} = (1,-5,-2)$

OPCIÓN B

B1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

a) Estudiar si existen valores de α y β para los cuales la matriz A sea simétrica. ¿Será la matriz $B = A\,A^T$ igual a la matriz identidad en algún caso? *(1 punto)*

b) Razonar cuál es la relación entre el determinante de A y el de B. *(0,75 puntos)*

c) Discutir y resolver cuando sea posible el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(0,75 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Para que A sea simétrica debe ser: $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\alpha \ \Rightarrow \ 2\operatorname{sen}\alpha = 0 \ \Rightarrow \ \operatorname{sen}\alpha = 0 \ \Rightarrow \ \alpha = 0 + k\pi$

Para que $B = A\,A^T = I_3$:

$$B = A\,A^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \beta^2 = 1 \ \Rightarrow \ \beta = \pm 1$$

b) $|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} = \beta\cos^2\alpha + \beta\operatorname{sen}^2\alpha = \beta\left(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\right) = \beta$; $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{vmatrix} = \beta^2$

Por tanto: $|B| = |A|^2$

c) Las matrices de los coeficientes B y ampliada M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 1 \end{array}\right)$

El único menor de orden 3 de la matriz de los coeficientes es $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{vmatrix} = \beta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0$

Por tanto:

- Para $\beta \neq 0$: $\quad \text{rg}\, B = \text{rg}\, M = n^{\text{o}}$ de incógnitas $\quad \Rightarrow \quad$ el sistema es compatible determinado.
- Para $\beta = 0$: $\quad \text{rg}\, B = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y $\text{rg}\, M = 3$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ el sistema es incompatible.

Las soluciones para $\beta \neq 0$ las hallamos por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta^2 \end{vmatrix}}{\beta^2} = \frac{\beta^2}{\beta^2} = 1 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \beta^2 \end{vmatrix}}{\beta^2} = \frac{\beta^2}{\beta^2} = 1 \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}$$

B2. El número de socios de una ONG viene dado por la función $n(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$ donde x indica el número de años desde su fundación.

a) Calcular el número de socios iniciales en el momento fundacional y en el quinto año. *(0,5 puntos)*

b) ¿En qué año ha habido el menor número de socios? ¿Cuántos fueron?. *(1 punto)*

c) El cuarto año se produjo un cambio en la junta directiva, ¿influyó en el ascenso o descenso del número de socios?. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) - Para $x = 0$: $\quad n(0) = 26$ socios

- Para $x = 5$: $\quad n(5) = 21$ socios

b) Se debe obtener el mínimo de la función:

$$n'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 15x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{6} = \frac{15 \pm 9}{6} = \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$n''(x) = 12x - 30 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} n''(1) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ es un máximo relativo} \\ n''(4) > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \text{ es un mínimo relativo} \end{array} \right.$$

Por lo tanto, el menor número de socios se ha producido al cuarto año. Su número es: $n(4) = 10$ socios.

c) Como la función es continua y alcanza su mínimo relativo en $x = 4$, a partir del cuarto año el número de socios crecerá.

B3. Sea $f(x) = \dfrac{x}{1 - \sqrt{1 + x}}$ una función definida en $[-1, +\infty)$.

a) ¿Cuánto debe valer $f(0)$ para asegurar que $f(x)$ es continua en su dominio? Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{1 + \sqrt{1 + x}}\, dx$.

(1,5 puntos)

b) Para $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{1 + \sqrt{1 + t}}\, dt$ calcular $G'(x)$. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) Para que la función sea continua en $x = 0$, debe ser $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Por lo tanto:

$$f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1+x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1+\sqrt{1+x}\right)}{\left(1-\sqrt{1+x}\right)\left(1+\sqrt{1+x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1+\sqrt{1+x}\right)}{\cancel{1}-\cancel{1}-x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1+x}\right)}{-\cancel{x}} = -2$$

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{1+\sqrt{1+x}}\,dx = \int_1^2 \frac{\dfrac{x}{1-\sqrt{1+x}}}{1+\sqrt{1+x}}\,dx = \int_1^2 \frac{x}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(1-\sqrt{1+x}\right)}\,dx = \int_1^2 \frac{x}{\cancel{1}-\cancel{1}-x}\,dx =$$

$$= \int_1^2 (-dx) = \left[-x\right]_1^2 = -2+1 = -1$$

b) $G(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{1+\sqrt{1+t}}\,dt = \left[-t\right]_1^x = -x+1 \quad \Rightarrow \quad G'(x) = -1$

B4. Estudiar la posición relativa de la recta $r \equiv \frac{x+1}{3} = y-2 = \frac{z}{2}$ y el plano determinado por los puntos $A(1,3,2)$, $B(2,0,1)$ y $C(1,4,3)$. ¿Son perpendiculares?. Hallar la distancia del punto $P\left(\frac{4}{5},\frac{13}{5},\frac{6}{5}\right)$ a la recta r.

(2,5 puntos)

SOLUCIÓN.

- Un vector direccional de r es $\vec{u} = (3,1,2)$ y dos vectores del plano son $\overrightarrow{AB} = (1,-3,-1)$ y $\overrightarrow{AC} = (0,1,1)$. Veamos si son o no linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9+2-1+3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{los vectores son linealmente independientes} \quad \Rightarrow \quad \text{la recta y el plano se cortan}$$

en un punto.

- La recta y el plano serán perpendiculares si lo son el vector direccional de la recta y alguno de los vectores del plano. Para averiguarlo, calculemos el producto escalar:
$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = (3,1,2)\cdot(1,-3,-1) = 3-3-2 \neq 0 \quad \Rightarrow$ los vectores no son perpendiculares $\Rightarrow$ la recta y el plano no son perpendiculares.

- Un punto de la recta es $Q(-1,2,0) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{QP} = \left(\frac{9}{5},\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$. La distancia entre P y r viene dada por:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{QP}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{9}{5} & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{\left|\frac{6}{5}\vec{i}+\frac{18}{5}\vec{j}+\frac{9}{5}\vec{k}-\frac{9}{5}\vec{k}-\frac{18}{5}\vec{j}-\frac{6}{5}\vec{i}\right|}{\sqrt{14}} = \frac{|\vec{o}|}{\sqrt{14}} = 0$$

es decir, el punto P pertenece a la recta r.

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2011

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Hay que elegir una de las opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

OPCIÓN A

A 1.

a) *(1,25 puntos)* Estudiar para qué valores de α la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & \alpha-2 \\ -1 & \alpha+1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango máximo.

b) *(1,25 puntos)* Siendo A^{-1} la inversa de la matriz A, calcular $(A^{-1})^2$ para $\alpha=-1$.

A 2.

a) *(1,75 puntos)* Utilizar el cambio de variable $t^6=1+x$ para calcular

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^{2/3}-\sqrt{x+1}}\,dx$$

b) *(0,75 puntos)* Para $f(x)=e^{-3x}$ calcular sus derivadas sucesivas y concluir cuál de las siguientes opciones es la correcta:

i) $f^{(n)}(x)=3^n e^{-3x}$ ii) $f^{(n)}(x)=(-3)^{(n+1)}e^{-3x}$ iii) $f^{(n)}(x)=(-3)^n e^{-3x}$.

A 3. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$.

a) *(0,5 puntos)* Calcular su dominio.

b) *(1 punto)* Obtener sus asíntotas.

c) *(1 punto)* Estudiar sus puntos de corte con los ejes y analizar si es una función par.

A 4.

a) *(1,5 puntos)* Hallar la ecuación del plano paralelo a las rectas de ecuaciones:

$$r\equiv 2-x=y=\frac{z+1}{2}, \qquad s\equiv\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ -x+y+3z=1 \end{cases}$$

y que pasa por el punto $A(1,1,2)$.

b) *(1 punto)* Calcular el ángulo que forman los vectores $u=(2,1,1)$ y $v=(-1,1,1)$. Obtener su producto vectorial.

OPCIÓN B AL DORSO

<u>OPCIÓN B</u>

B 1.

a) *(1 punto)* Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Estudiar qué valores de α y β hacen que sea cierta la igualdad

$$(\det(A))^2-2\det(A)\det(B)+1=0\,.$$

b) *(1,5 puntos)* Utilizar las propiedades de los determinantes para calcular el valor de $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$ con a, b, c, d $\in$ $\mathbb{R}$.

B 2.

a) *(1,25 puntos)* Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \ln x & 0<x<1 \\ ax^2+b & 1\le x<+\infty \end{cases}$. Si $f(2)=3$, obtener los valores de a y b que hacen que $f(x)$ sea continua.

b) *(1,25 puntos)* Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\log(x^2-9)$ y $\lim\limits_{x\to 3^+}\log(x^2-9)$.

B 3. Sea $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

a) *(0,5 puntos)* Determinar su dominio.

b) *(1 punto)* Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) *(1 punto)* Analizar sus puntos de inflexión.

B 4.

a) *(1,5 puntos)* Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,-2,4)$, $B(0,3,2)$ y es paralelo a la recta $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$.

b) *(1 punto)* En caso de que sea posible, escribir el vector $v=(1,2,4)$ como combinación lineal de los vectores $a=(1,0,1)$, $b=(1,1,0)$, $c=(0,1,1)$.

En todo el ejercicio se tendrá en cuenta la claridad, el orden y el rigor matemático.

OPCIÓN A

A 1.

a) Se valorarán por igual todas las formas de estudiar el rango.

b) Por el cálculo de la inversa de A se dará 0.75 puntos.

A 2.

a) Por la correcta realización del cambio de variable se asignará 0.75 puntos.

b) Se adjudicará hasta 0.5 puntos por la obtención de algunas derivadas sucesivas.

A 3. En todos los apartados se tendrá en cuenta el conocimiento de las definiciones adecuadas para los cálculos solicitados.

A 4.

a) Obtener el vector direccional de s valdrá 0.5 puntos.

b) Se dará 0.5 puntos a cada parte.

OPCIÓN B

B 1.

a) Se adjudicará 0.5 puntos por el cálculo de $\det(A)^2$, $\det(A)$ $\det(B)$. No se dará la máxima puntuación si no están especificados los valores de los dos parámetros.

b) Si no se utilizan las propiedades de los determinantes sólo se asignará 0.25 puntos aunque el resultado final sea el correcto.

B 2.

a) El cálculo de los límite laterales valdrá 0.5 puntos.

b) Si no están perfectamente justificados los cálculos no se adjudicará más de 0.75 puntos.

B 3.

Por la obtención de la primera y segunda derivada se dará hasta un punto.

B 4. En todos los apartados se valorará el conocimiento de las diferentes fórmulas necesarias.

Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Hay que elegir una de las dos opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

OPCIÓN A

A1.

a) *(1,25 puntos)* Estudiar para qué valores de α el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & \alpha-2 \\ -1 & \alpha+1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango máximo.

b) *(1,25 puntos)* Siendo A^{-1} la inversa de la matriz A, calcular $\left(A^{-1}\right)^2$ para $\alpha=-1$.

SOLUCIÓN.

a) $rg\,A=3\ \ \forall\alpha$ tal que $\left|A\right|\neq 0$: $\quad |A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & \alpha-2 \\ -1 & \alpha+1 & 2 \end{vmatrix}=2(\alpha+1)^2-(\alpha-2)-2-2(\alpha+1)=$

$$=2\alpha^2+4\alpha+2-\alpha+2-2-2\alpha-2=2\alpha^2+\alpha=0 \ \Rightarrow\ \alpha(2\alpha+1)=0 \ \Rightarrow\ \alpha=0\ ,\ \alpha=-\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el rango de A es máximo para $\forall\alpha\neq-\frac{1}{2}$ y 0.

b) Para $\alpha=-1$ es $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y además sabemos que $|A|\neq 0 \ \Rightarrow\ \exists\, A^{-1}$. Calculemos A^{-1}:

- Calculemos la matriz adjunta de A: $\quad A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2$; $A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3$; $A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-1$

  $A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2$; $A_{22}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2$; $A_{23}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-1$; $A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-1$

  $A_{32}=-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=0$; $A_{33}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=0$ $\qquad$ luego: $\quad (Adj\,A)=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- La matriz traspuesta de la adjunta: $\quad (Adj\,A)^t=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- El determinante de A es: $\quad |A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=3-2=1$

- Luego la matriz inversa es: $\quad A^{-1}=\dfrac{(Adj\,A)^t}{|A|}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculemos ahora $\left(A^{-1}\right)^2=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A2.

a) *(1,75 puntos)* Utilizar el cambio de variable $t^6 = 1+x$ para calcular $\int \dfrac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^{2/3}-\sqrt{x+1}}\,dx$

b) *(0,75 puntos)* Para $f(x) = e^{-3x}$ calcular sus derivadas sucesivas y concluir cuál de las siguientes opciones es la correcta:

i) $f^{(n)}(x) = 3^n e^{-3x}$ ii) $f^{(n)}(x) = (-3)^{(n+1)} e^{-3x}$ iii) $f^{(n)}(x) = (-3)^n e^{-3x}$

SOLUCIÓN.

a) $t^6 = 1+x \;\Rightarrow\; 6t^5\,dt = dx$

Se tiene entonces:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^{2/3}-\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{t^3+2}{t^4-t^3}\cdot 6t^5\,dt = 6\int \frac{t^3+2}{t^3(t-1)}\cdot t^5\,dt = 6\int \frac{t^3+2}{t-1}\cdot t^2\,dt = 6\int \frac{t^5+2t^2}{t-1}\,dt$$

Dividiendo t^5+2t^2 entre $t-1$: $\dfrac{t^5+2t^2}{t-1} = t^4+t^3+t^2+3t+3+\dfrac{3}{t-1}$ y por consiguiente:

$$6\int \frac{t^5+2t^2}{t-1}\,dt = 6\left[\int\left(t^4+t^3+t^2+3t+3+\frac{3}{t-1}\right)dt\right] = 6\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+3t+3\ln|t-1|\right)+k =$$

$$= \frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4+2t^3+9t^2+18t+18\ln|t-1|+k$$ y deshaciendo el cambio de variable:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^{2/3}-\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{6}{5}(x+1)^{5/6}+\frac{3}{2}(x+1)^{2/3}+2(x+1)^{1/2}+9(x+1)^{1/3}+18(x+1)^{1/6}+18\ln\left|(x+1)^{1/6}-1\right|+k$$

b) $f(x) = e^{-3x} \;\Rightarrow\; f'(x) = -3e^{-3x} \;\Rightarrow\; f''(x) = (-3)^2 e^{-3x} \;\Rightarrow\; f'''(x) = (-3)^3 e^{-3x}$

Por lo tanto, la expresión de la derivada n-ésima es la iii): $f^{(n)}(x) = (-3)^n e^{-3x}$

A3. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$

a) *(0,5 puntos)* Calcular su dominio.
b) *(1 punto)* Obtener sus asíntotas.
c) *(1 punto)* Estudiar sus puntos de corte con los ejes y analizar si es función par.

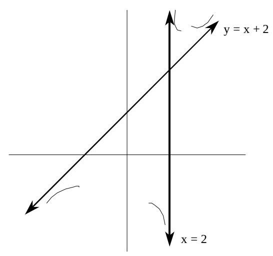
SOLUCIÓN.

a) Se trata de una función racional cuyo dominio es: $D(f) = \mathbb{R} - \{\, x \,/\, x-2=0 \,\} = \mathbb{R} - \{2\}$

b) - Asíntotas verticales: $x=2$ pues $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2}{x-2} = \infty$. Además: $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+2}{x-2} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+2}{x-2} = +\infty$

- Asíntotas oblicuas: $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2} = x+2+\dfrac{6}{x-2} \;\Rightarrow\; y = x+2$ es una asíntota oblicua de la función.

Además: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6}{x-2} = 0^-$ y $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6}{x-2} = 0^+$



c) - Puntos de corte con OX: No tiene pues $x^2+2 \neq 0 \quad \forall x$

- Puntos de corte con OY: $x=0 \;\Rightarrow\; y=-1 \;\Rightarrow\; (0,-1)$

- $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+2}{-x-2} = \dfrac{x^2+2}{-x-2} \neq f(x) \;\Rightarrow\;$ la función no es par.

A4.

a) *(1,5 puntos)* Hallar la ecuación del plano paralelo a las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv 2 - x = y = \frac{z+1}{2} \quad , \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

y que pasa por el punto $A(1, 1, 2)$

b) *(1 punto)* Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (2, 1, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 1)$. Obtener su producto vectorial.

SOLUCIÓN.

a) Por ser paralelas al plano, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ direccionales de las rectas están contenidos en el plano. Como además conocemos un punto del mismo, disponemos de los elementos necesarios para escribir la ecuación del plano.

$$r \equiv 2 - x = y = \frac{z+1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = (-1, 1, 2)$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (2, -1, 1) \\ \vec{n}_2 = (-1, 1, 3) \end{array} \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} - \vec{k} - 6\vec{j} - \vec{i} = (-4, -7, 1)$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 - 8y + 8 + 7z - 14 + 4z - 8 + y - 1 + 14x - 14 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 15x - 7y + 11z - 30 = 0$$

-Otra forma-

Una vez obtenidos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ direccionales de las rectas, el vector

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 8\vec{j} + 7\vec{k} + 4\vec{k} + \vec{j} + 14\vec{i} = (15, -7, 11)$ es un vector normal al plano.

La ecuación del plano es: $15x - 7y + 11z + D = 0$ y haciendo que contenga al punto A:

$15 - 7 + 22 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -30 \quad \Rightarrow \quad 15x - 7y + 11z - 30 = 0$ es la ecuación del plano.

b) $$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{-2+1+1}{\sqrt{6}\,\sqrt{3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^{\circ}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} + \vec{k} - 2\vec{j} - \vec{i} = (0, -3, 3)$$

OPCIÓN B

B1.

a) *(1 punto)* Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} cos\,\alpha & sen\,\alpha \\ -sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} cos\,\alpha & 0 & sen\,\alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ -sen\,\alpha & 0 & cos\,\alpha \end{pmatrix}$. Estudiar qué valores de α y β hacen que sea cierta la igualdad: $\left(det(A)\right)^2-2\,det(A)\,det(B)+1=0$

b) *(1,5 puntos)* Utilizar las propiedades de los determinantes para calcular el valor de

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$ con a, b, c, d $\in \mathbb{R}$

SOLUCIÓN.

a) $det(A)=\begin{vmatrix} cos\,\alpha & sen\,\alpha \\ -sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{vmatrix}=cos^2\alpha+sen^2\alpha=1$ $\qquad det(B)=\begin{vmatrix} cos\,\alpha & 0 & sen\,\alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ -sen\,\alpha & 0 & cos\,\alpha \end{vmatrix}=\beta\,cos^2\alpha+\beta\,sen^2\alpha=\beta$

$\left(det(A)\right)^2-2\,det(A)\,det(B)+1=0 \;\Rightarrow\; 1-2\beta+1=0 \;\Rightarrow\; 2\beta=2 \;\Rightarrow\; \beta=1$

Por lo tanto, la igualdad se cumple para todo valor de α y para $\beta=1$.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a+3 & b+4 \\ 1 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}\overset{(1)}{=}2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=2(ad-bc)$ $\qquad (1):\ F2-F1\ ,\ F3-F1$

B2.

a) *(1,25 puntos)* Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ln\,x & 0<x<1 \\ ax^2+b & 1\le x<+\infty \end{cases}$. Si $f(2)=3$, obtener los valores de a y b que hacen que $f(x)$ sea continua.

b) *(1,25 puntos)* Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\log\left(x^2-9\right)$ y $\lim\limits_{x\to 3^+}\log\left(x^2-9\right)$

SOLUCIÓN.

a) - $f(2)=3 \;\Rightarrow\; 4a+b=3 \quad (*)$

- $f(x)$ debe ser continua en $x=1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x) \;\Rightarrow\; \ln 1=a+b \;\Rightarrow\; a+b=0 \quad (*)$

De las igualdades (*): $\begin{cases} 4a+b=3 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+b=3 \\ -a-b=0 \end{cases} \Rightarrow\; 3a=3 \;\Rightarrow\; a=1\ ,\ b=-1$

b) **-** Puesto que la función $f(x)=x^2-9$ tiende a $+\infty$ cuando $x\to+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\log\left(x^2-9\right)=+\infty$

- Cuando $x\to3^+$, $f(x)=x^2-9$ tiende a 0^+ y por tanto: $\lim\limits_{x\to3^+}\log\left(x^2-9\right)=-\infty$

B3. Sea $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

a) *(0,5 puntos)* Determinar su dominio
b) *(1 punto)* Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento
c) *(1 punto)* Analizar sus puntos de inflexión

SOLUCIÓN.

a) Por tratarse de una función racional: $D(f)=\mathbb{R}-\left\{x\,/\,(x-1)^2=0\right\}=\mathbb{R}-\{1\}$

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{3x^2\,(x-1)^2-x^3\,2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\left(3x^3-3x^2-2x^3\right)}{(x-1)^4}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=0 \;\Rightarrow\; x^2\,(x-3)=0 \;\Rightarrow\; x=0\;,\; x=3$$

Tenemos:

f' > 0	f' > 0	f' < 0	f' > 0
$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$

(puntos: 0, 1, 3)

Creciente: $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$
Decreciente: $(1,3)$

c) Los puntos de inflexión deben verificar $f''(x)=0$:

$$f''(x)=\frac{\left(3x^2-6x\right)(x-1)^3-\left(x^3-3x^2\right)3(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{(x-1)^2\left(3x^3-3x^2-6x^2+6x-3x^3+9x^2\right)}{(x-1)^6}=\frac{6x}{(x-1)^4}=0 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\;\; x=0$ (posible punto de inflexión)

Como además: $f'''(x)=\dfrac{6(x-1)^4-6x\cdot 4(x-1)^3}{(x-1)^8} \;\Rightarrow\; f'''(0)\neq 0 \;\Rightarrow$ En $x=0$ hay un punto de inflexión: $(0\,,0)$

B4.

a) *(1,5 puntos)* Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A\,(1\,,-2\,,4)$, $B\,(0\,,3\,,2)$ y es paralelo a la recta $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$

b) *(1 punto)* En caso de que sea posible, escribir el vector $\vec v=(1\,,2\,,4)$ como combinación lineal de los vectores $\vec a=(1\,,0\,,1)$, $\vec b=(1\,,1\,,0)$, $\vec c=(0\,,1\,,1)$

SOLUCIÓN.

a) Necesitamos un punto y dos vectores linealmente independientes contenidos en el plano. El punto puede ser el $A(1\,,-2\,,4)$ y los vectores: $\overrightarrow{AB}=(-1\,,5\,,-2)$ y el direccional de la recta $\vec u=(4\,,1\,,2)$ que son linealmente independientes. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-4 \\ -1 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; 10x-10-8y-16-z+4-20z+80+2y+4+2x-2=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 12x-6y-21z+60=0 \;\Leftrightarrow\; 4x-2y-7z+20=0$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+1\neq 0 \;\Rightarrow\; \vec a\,,\vec b\,,\vec c$ linealmente independientes $\Rightarrow$ constituyen una base del espacio vectorial y cualquier vector puede ser escrito como combinación lineal de los mismos.

$$\vec v=\lambda_1\vec a+\lambda_2\vec b+\lambda_3\vec c \;\Leftrightarrow\; (1\,,2\,,4)=\lambda_1(1\,,0\,,1)+\lambda_2(1\,,1\,,0)+\lambda_3(0\,,1\,,1) \;\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1+\lambda_2 \qquad =1 \\ \qquad \lambda_2+\lambda_3=2 \\ \lambda_1 \qquad +\lambda_3=4 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \lambda_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1+4-2}{1+1}=\frac{3}{2}\;\;;\;\; \lambda_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{2+1-4}{2}=-\frac{1}{2}\;\;;$$

$$\lambda_3=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2}=\frac{4+2-1}{2}=\frac{5}{2}$$

Por lo tanto: $\vec v=\dfrac{3}{2}\vec a-\dfrac{1}{2}\vec b+\dfrac{5}{2}\vec c$

Universidad Zaragoza
1542

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2011

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Hay que elegir una de las opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

OPCIÓN A

A 1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$.

a) *(0,75 puntos)* Calcular el determinante de la matriz $(A\,A^T)$ con A^T la traspuesta de A.

b) *(0,75 puntos)* Estudiar para qué valores del parámetro α se satisface la ecuación

$$4|A|^2 - 2|A^T| + 2\alpha^2 = 0 \text{ con } |A| = \det(A).$$

c) *(1 punto)* Obtener la inversa de A cuando sea posible.

A 2. Para la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

a) *(1 punto)* Estudiar su continuidad.

b) *(0,75 puntos)* Razonar si $g(x) = (x^2-1)f(x)$ es una función derivable.

c) *(0,75 puntos)* Calcular $\int_2^3 f(x)dx$.

A 3. *(2,5 puntos)* En un campo hay plantados 50 manzanos. En este momento cada manzano produce 800 manzanas. Está estudiado que por cada manzano que se añade al campo, los manzanos producen 10 manzanas menos cada uno. Determinar el número de manzanos que se deben añadir para maximizar la producción de manzanas de dicho campo.

A 4.

a) *(0,75 puntos)* Obtener la ecuación del plano que pasa por el punto $A(-1,-1,1)$ y es perpendicular al vector $v = (1,-2,-1)$.

b) *(1 punto)* Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta r que se obtiene como intersección de los planos $\begin{cases} \pi_1 \equiv x - 2y - z = 0 \\ \pi_2 \equiv z - 1 = 0 \end{cases}$.

c) *(0,75 puntos)* Estudiar si son linealmente independientes los vectores $v_1(2,1,0)$, $v_2(0,-2,0)$, $v_3(0,1,1)$.

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

B 1. *(2,5 puntos)* Utilizar las propiedades de los determinantes para obtener los valores de a y b que satisfacen simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{vmatrix} a+b & 1 & 2 \\ a-b & 0 & 1 \\ a+2b & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & a \\ a^2 & ba^2 \end{vmatrix} = 0$$

B 2. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4-x}$. Determinar:

a) *(0,5 puntos)* Su dominio de definición.

b) *(0,5 puntos)* Sus asíntotas.

c) *(0,75 puntos)* Máximos y mínimos.

d) *(0,75 puntos)* Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

B 3.

a) *(1,5 puntos)* Calcular

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{x+1}{x^2}\right), \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-4}\right)^x, \qquad \lim_{x\to+0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}.$$

b) *(1 punto)* Utilizar el cambio de variable $t^2 = 1+x^2$ para calcular $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

B 4. *(2,5 puntos)* Hallar el punto D de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ que esté a la misma distancia de los puntos $C = (1,-1,2)$ y $B = (1,1,2)$. Razonar si la recta r es perpendicular o no al plano $\pi \equiv -x+2y+z=0$.

En todo el ejercicio se tendrá en cuenta la claridad, el orden y el rigor matemático.

OPCIÓN A

A 1.

a) Se valorará positivamente el conocer que el determinante de un producto es el producto de los determinantes, no obstante los estudiantes que calculen AA^T obtendrán 0.25 puntos.

b) No se dará la máxima puntuación si no se especifican todos los valores posibles de a.

c) Se adjudicará 0.25 puntos por la obtención del valor del parámetro que asegura la existencia de inversa.

A 2.

Se tendrá en cuenta que el estudiante demuestre conocer los resultados teóricos necesarios.

A 3.

Se valorará con un punto el planteamiento correcto de la función de producción y con 0.75 puntos el cálculo correcto de su primera y segunda derivadas.

A 4. En todos los apartados se tendrá en cuenta el conocimiento de las fórmulas adecuadas para los cálculos solicitados.

OPCIÓN B

B 1.

El estudiante que no utilice las propiedades de los determinantes NO tendrá mas de un punto aunque el resultado final sea el correcto.

B 2.

Los cálculos intermedios serán tenidos en cuenta. Por la obtención correcta de $f'(x)$ y $f''(x)$ se dará 0.5 puntos.

B 3.

a) Los dos primeros límites se valorarán con 0.25 puntos cada uno y los otros dos con 0.5 puntos cada uno.

b) Por la realización correcta del cambio de variable se dará hasta 0.75 puntos.

B 4. Se tendrá en cuenta el conocimiento de las fórmulas adecuadas para los cálculos solicitados.

Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Hay que elegir una de las dos opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

OPCIÓN A

A1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$.

a) *(0,75 puntos)* Calcular el determinante de la matriz $\left(A\ A^T\right)$ con A^T la traspuesta de A.

b) *(0,75 puntos)* Estudiar para qué valores del parámetro α se satisface la ecuación

$$4|A|^2 - 2|A^T| + 2\alpha^2 = 0 \quad \text{con } |A| = \det(A)$$

c) *(1 punto)* Obtener la inversa de A cuando sea posible.

SOLUCIÓN.

a) $A^T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2+1 & -\alpha \\ -\alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| A \cdot A^T \right| = \begin{vmatrix} \alpha^2+1 & -\alpha \\ -\alpha & \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^4 + \alpha^2 - \alpha^2 = \alpha^4$$

b) $|A| = -\alpha^2 \quad ; \quad |A^T| = -\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad 4\alpha^4 + 2\alpha^2 + 2\alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\alpha^2\left(\alpha^2+1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$

c) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0: \quad |A| = -\alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ luego $\exists A^{-1} \ \forall \alpha \neq 0$. Calculemos A^{-1}:

$$(\text{Adj } A) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow (\text{Adj } A)^T = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{(\text{Adj } A)^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 1/\alpha^2 \\ 0 & -1/\alpha \end{pmatrix}$$

A2. Para la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

a) *(1 punto)* Estudiar su continuidad.

b) *(0,75 puntos)* Razonar si $g(x) = \left(x^2-1\right) f(x)$ es una función derivable.

c) *(0,75 puntos)* Calcular $\int_2^3 f(x)\, dx$

SOLUCIÓN.

a) Por tratarse de una función racional, la función es continua excepto en los puntos cuyas abscisas anulan el denominador. En este caso, $f(x)$ tiene un único punto de discontinuidad en $x = 1$ (discontinuidad no evitable con asíntota vertical)

b) $g(x) = \left(x^2-1\right) f(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)(2x+1)}{x-1}$ que no es derivable en $x = 1$ porque es discontinua. $\forall x \neq 1$, $g(x)$ es derivable.

c) Obtengamos una primitiva de $f(x)$: $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1} = 2 + \dfrac{3}{x-1} \quad \Rightarrow \quad \int f(x)dx = \int \left(2 + \dfrac{3}{x-1}\right) dx = 2x + 3\ln|x-1|$

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -2x+2 & 2 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Por tanto:

$$\int_2^3 f(x)\, dx = \left[2x + 3\ln|x-1|\right]_2^3 = (6 + 3\ln 2) - (4 + 3\ln 1) = 2 + 3\ln 2 = 2 + \ln 8$$

A3. *(2,5 puntos)* En un campo hay plantados 50 manzanos. En este momento cada manzano produce 800 manzanas. Está estudiado que por cada manzano que se añade al campo, los manzanos producen 10 manzanas menos cada uno. Determinar el número de manzanos que se deben añadir para maximizar la producción de manzanas de dicho campo.

SOLUCIÓN.

Sea x el número de manzanos que se añaden a los 50 ya existentes. Cuando haya $(50+x)$ manzanos, cada uno dará $(800-10x)$ manzanas y la producción del campo será:

$$P=(50+x)\cdot(800-10x)=40000-500x+800x-10x^2=-10x^2+300x+40000$$

Veamos cuándo es máxima la producción: $P'=-20x+300=0 \quad \Rightarrow \quad x=15$ (punto crítico)
Y como $P''=-20<0$: $x=15$ maximiza la producción.

Por lo tanto, deben añadirse 15 manzanos para conseguir una producción máxima.

A4.
a) *(0,75 puntos)* Obtener la ecuación del plano que pasa por el punto $A(-1,-1,1)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}=(1,-2,-1)$.
b) *(1 punto)* Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta r que se obtiene como intersección de los planos $\begin{cases} \pi_1 \equiv x-2y-z=0 \\ \pi_2 \equiv z-1=0 \end{cases}$
c) *(0,75 puntos)* Estudiar si son linealmente independientes los vectores $\vec{v}_1\,(2,1,0)$, $\vec{v}_2\,(0,-2,0)$, $\vec{v}_3\,(0,1,1)$.

SOLUCIÓN.

a) Sea π el plano buscado. Como $\vec{v}=(1,-2,-1)\perp\pi$: $\pi\equiv x-2y-z+D=0$
Y como $A\in\pi$: $-1+2-1+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=0 \quad \Rightarrow \quad \pi\equiv x-2y-z=0$

b) Para escribir las ecuaciones paramétricas de la recta, necesitamos un punto de la misma, $P(x_0, y_0, z_0)$, y un vector direccional, $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$:

$$\begin{cases} x=x_0+tu_1 \\ y=y_0+tu_2 \\ z=z_0+tu_3 \end{cases}$$

Obtengamos dos puntos de la recta: $\begin{cases} \pi_1 \equiv x-2y-z=0 \\ \pi_2 \equiv z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \quad z=1 \;,\; x=2y+1 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \text{Para } y=0:\ P(1,0,1) \\ \text{Para } y=1:\ Q(3,1,1) \end{array} \right.$

Tenemos entonces: $P(1,0,1) \quad \vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(2,1,0)$ y por tanto: $r\equiv\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$

c) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4\neq 0 \quad \Rightarrow$$ los vectores son linealmente independientes.

OPCIÓN B

B1. *(2,5 puntos)* Utilizar las propiedades de los determinantes para obtener los valores de a y b que satisfacen simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{vmatrix} a+b & 1 & 2 \\ a-b & 0 & 1 \\ a+2b & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & a \\ a^2 & ba^2 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN.

$$\begin{vmatrix} a+b & 1 & 2 \\ a-b & 0 & 1 \\ a+2b & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ a & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 1 & 2 \\ -b & 0 & 1 \\ 2b & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff 2a-5b=0 \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} a & a \\ a^2 & ba^2 \end{vmatrix} = 0 \iff a^3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = 0 \iff a^3\left(b-1\right) = 0 \quad (2)$$

De la igualdad (2): $a=0$; $b=1$. Sustituyendo en la igualdad (1): $\left|\begin{array}{l} a=0 \Rightarrow b=0 \\ b=1 \Rightarrow a=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

B2. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4-x}$. Determinar:

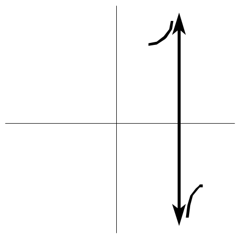
a) *(0,5 puntos)* Su dominio de definición.
b) *(0,5 puntos)* Sus asíntotas.
c) *(0,75 puntos)* Máximos y mínimos.
d) *(0,75 puntos)* Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

SOLUCIÓN.

a) $f(x)$ es una función racional. Su dominio es el conjunto de los números reales excepto los valores que anulen el denominador. Por tanto: $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

b) - Asíntotas verticales: $x=4$ pues $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \infty$.

Además: $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x^2}{4-x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x^2}{4-x} = -\infty$

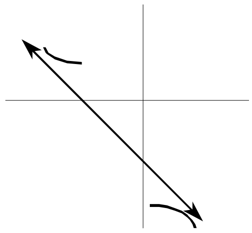


- Asíntotas horizontales u oblicuas:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -x+4 \\ \hline -x^2+4x & -x-4 \\ \hline 4x & \\ -4x+16 & \\ \hline 16 & \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{x^2}{4-x} = -x-4+\dfrac{16}{4-x} \Rightarrow y=-x-4$ es una asíntota oblicua de la función.

Además: $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{16}{4-x} = 0^+$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{16}{4-x} = 0^-$



c) $f'(x) = \dfrac{2x\left(4-x\right)+x^2}{\left(4-x\right)^2} = \dfrac{-x^2+8x}{\left(4-x\right)^2} = 0 \Rightarrow x\left(-x+8\right) = 0 \Rightarrow x=0$; $x=8$ (puntos críticos)

$f''(x) = \dfrac{\left(-2x+8\right)\left(4-x\right)^2 + \left(-x^2+8x\right)2\left(4-x\right)}{\left(4-x\right)^4}$ y como: $\left|\begin{array}{l} f''(0)>0 \Rightarrow \text{en } x=0 \text{ hay un mínimo relativo} \\ f''(8)<0 \Rightarrow \text{en } x=8 \text{ hay un máximo relativo} \end{array}\right.$

Por tanto, la función tiene un mínimo relativo en $\left(0,0\right)$ y un máximo relativo en $\left(8,-16\right)$.

d)

$f'<0$		$f'>0$		$f'>0$		$f'<0$
$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	8	$\searrow$

Creciente: $(0\,,4)\cup(4\,,8)$

Decreciente: $(-\infty\,,0)\cup(8\,,+\infty)$

B3.

a) *(1,5 puntos)* Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-4}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

b) *(1 punto)* Utilizar el cambio de variable $t^2=1+x^2$ para calcular $\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

SOLUCIÓN.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)=\cos 0=1$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}=\frac{1+\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\pi}=\frac{2}{2}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-4}\right)^x=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-4}-1\right)\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x}{x-4}\right)}=e^8$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to+0}\frac{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{1}{2}$$

b) $t^2=1+x^2 \;\Rightarrow\; 2t\,dt=2x\,dx \;\Rightarrow\; t\,dt=x\,dx$

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\int\frac{x^2\,.\,x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\left(t^2-1\right)t\,dt}{t}=\int\left(t^2-1\right)dt=\frac{1}{3}t^3-t+K=\frac{1}{3}\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}-\sqrt{1+x^2}+K$$

B4. *(2,5 puntos)* Hallar el punto D de la recta $r\equiv\begin{cases}x=1+2t\\ y=t\\ z=1\end{cases}$ que esté a la misma distancia de los puntos $C=(1,-1,2)$ y $B\,(1,1,2)$. Razonar si la recta r es perpendicular o no al plano $\pi\equiv -x+2y+z=0$.

SOLUCIÓN.

$D\in r \;\Rightarrow\; D(1+2t\,,t\,,1)$

$$d\,(C\,,D)=d\,(B\,,D)\;\Rightarrow\;\sqrt{(1+2t-1)^2+(t+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{(1+2t-1)^2+(t-1)^2+(1-2)^2}\;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 4t^2+t^2+2t+1+1=4t^2+t^2-2t+1+1\;\Rightarrow\;4t=0\;\Rightarrow\;t=0\;\Rightarrow\;D(1\,,0\,,1)$$

Un vector direccional de la recta es $\vec{u}=(2\,,1\,,0)$ y un vector normal al plano es $\vec{n}=(-1\,,2\,,1)$. Como las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{n}$ no son proporcionales, $\vec{u}$ y $\vec{n}$ no tienen la misma dirección y la recta no es perpendicular al plano.

El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

A.1 Sean a un número real y el sistema lineal

$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = a, \\ x + y + az = a^2. \end{cases}$$

a) *(1,5 puntos)* Calcule el determinante de la matriz de los coeficientes y determine para qué valores de a el sistema anterior es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado.

b) *(1 punto)* Resuelva el sistema anterior en el caso $a = 0$.

A.2 *(2,5 puntos)* Calcule la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{x^2 + 11x}{x^3 - 2x^2 - 2x + 12} dx .$$

A.3 **a)** *(0,75 puntos)* Descomponer el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

b) *(1 punto)* Hallar el valor de k para que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} + kx}{x - sen(x)} = 2 .$$

c) *(0,75 puntos)* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, continua y derivable en la recta real. Supongamos que $f(0) \neq 0$ y $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo número real x, y. Demostrar que $f(0) = 1$; $f(x) \neq 0$; $f(x) > 0$ y $f'(x) = f'(0)f(x)$ para todo número real x.

A.4 **a)** *(1 punto)* Hallar el plano que contiene a la recta v de ecuación paramétrica

$$v: \quad (2,1,3) + t(2,1,0),$$

y es perpendicular al plano de ecuación $x + z = 2$.

b) *(1,5 puntos)* Probar que los vectores $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ y dar las coordenadas del vector $(1,-2,0)$ en la base anterior.

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

B.1 a) *(1,5 puntos)* Compruebe que la matriz M es inversible y calcule su inversa, donde

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

b) *(1 punto)* Encuentre las matrices A y B que cumplen las siguientes ecuaciones

$$8A-5B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}, \qquad 2A-B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

B.2 a) *(1,5 puntos)* Calcule la siguiente integral indefinida

$$\int \cos(\ln(x))dx .$$

(Ayuda: realice un cambio de variable adecuado para esta integral).

b) *(1 punto)* Calcule el límite siguiente

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}\right)\ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right).$$

B.3 Sea f la función de variable real definida mediante la expresión

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1} .$$

a) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de continuidad, simetrías, corte con los ejes, y asíntotas de la función f.

b) (1 puntos) Calcule, si existen, los extremos relativos y absolutos, e intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) *(0,5 puntos)* Calcule, si existen, los puntos de inflexión de f.

d) *(0,5 puntos)* Dibuje la gráfica de f.

B.4 Sea el haz de planos de ecuación

$$(1+\lambda)x-y-\lambda z=0 ,$$

con parámetro real λ.

a) *(0,5 puntos)* Hallar los planos del haz que pasan por el punto $P=(1,1,1)$.

b) *(1 punto)* Hallar los planos del haz cuya distancia al punto $Q=(3,-2,1)$ es $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

c) *(1 punto)* Hallar los planos del haz que cumplen, que el ángulo que forman con el eje OY tiene por seno el valor $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

1) Se corregirán todas las preguntas, puntuando según los criterios siguientes y siempre favoreciendo al alumnado.
2) Opción A, ejercicio 3. Si no se ha resuelto, el apartado A3(c), se duplicara la puntuación conseguida del apartado A3(a). Si se ha resuelto el apartado A3(c) y no el A3(a), se duplicara la puntuación del A3(c). Si se han resuelto dos de los tres aparatados de A3, se conseguirá la puntuación máxima de A3.
3) Opción A y Opción B. La nota del alumno sobre 10 se obtiene con la suma de las tres mejores notas de las preguntas A1, A2, A3, A4 o B1, B2, B3, B4 y dividiendo por 7,5.

Normas generales

Se sugiere una corrección acumulativa de puntos, sumando puntos por las aciertos que el alumno vaya obteniendo.

Se valorará la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas, así como su comprobación si esta es posible.

Si al operar el alumno comete un error numérico, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se prestara especial atención, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial.

A continuación se señala una puntuación orientativa de cada apartado, señalando las puntuaciones máximas de cada apartado.

OPCION A

A.1

a) (1,5 puntos) Calculo del determinante (**0,25**); calculo de las raíces (**0,25**); discusión de los casos: argumentación teórica (**0,25**)+ comprobación en cada caso (**0,25+ 0,25+ 0,25**).

b) (1 punto) Planteamiento (**0,25**); resolución (**0,75**). Se valorará positivamente si se comprueba el resultado.

A.2

(2,5 puntos) Factorización del denominador (**0,5**); descomposición en fracciones simples (**0,5**); cálculo de las 3 integrales ((**0,25**)+ (**0,5**)+(**0,5**)); constante de integración (**0,25**).

A.3

a) (0,75 puntos) Planteamiento (**0,25**); resolución (**0,5**). Se valorará positivamente si se comprueba el resultado.

b) (1 punto) Si aplican L'Hôpital, ((**0,5**)+(**0,5**)); si aplican equivalencias, ((**0,5**), numerador+(**0,5**), denominador).

c) (0,75 puntos) Probar que $f(0)=1$ (**0,25**); $f(x)\neq 0$; $f(x)>0$ (**0,25**); $f'(x)=f'(0)f(x)$ (**0,25**).

A.4

a) (1 punto) Planteamiento teórico (**0,25**); identificar elementos de la recta v y del plano dado (**0,25**); resolución (**0,5**).

b) (1,5 punto) Planteamiento teórico (**0,25**), sistema libre o generador (**0,5**). Coordenadas (**0,75**).

OPCION B

B.1

a) (1,5 puntos) Cálculo de $|M|$ (**0,5**); cálculo de M^{-1}, (1). Se valorará positivamente si se comprueba el resultado.

b) (1 punto) Cálculo de A, (**0,5**); cálculo de B, (**0,5**). Se valorará positivamente si se comprueba el resultado.

B.2

a) (1,5 puntos) Planteamiento del cambio de variable adecuado (**0,5**); aplicación de partes (**0,75**); deshacer cambio de variable y constante de integración (**0,25**).

b) Identificación del límite tipo número e (**0,25**); Resolución (**0,75**).

B.3

a) (0,5 puntos) Dominio de continuidad y simetrías (**0,25**); corte con los ejes, y asíntotas de la función (**0,25**).

b) (1 puntos) Discusión de extremos relativos (**0,5**); absolutos (**0,25**), e intervalos de crecimiento y decrecimiento (**0,25**).

c) (0,5 puntos) Calculo de f'' (**0,25**); identificación de puntos de inflexión (**0,25**).

d) (0,5 puntos) Por cada dos fallos, se descuenta (**0,25**).

B.4

a) (0,5 puntos) Se califica con (**0**) ó (**0,5**).

b) (1 punto) Planteamiento ó formula (**0,25**); resolución (**0,75**).

c) (1 punto) Planteamiento ó formula (**0,25**); resolución (**0,75**).

El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

A1. Sean *a* un número real y el sistema lineal $\left\{\begin{array}{r} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{array}\right.$

a) *(1,5 puntos)* Calcule el determinante de la matriz de los coeficientes y determine para qué valores de *a* el sistema anterior es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado.

b) *(1 punto)* Resuelva el sistema anterior en el caso $a=0$

SOLUCIÓN.

a) Sea A la matriz de los coeficientes y B la matriz ampliada. $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3+1+1-a-a-a = a^3-3a+2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$a^2+a-2=0 \;\Rightarrow\; a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}= \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$a^3-3a+2=0 \;\Leftrightarrow\; (a-1)^2(a+2)=0 \;\Rightarrow\; a=1 \;,\; a=-2$

- Para $a\neq 1$ y $a\neq -2$: $\text{rg } A = \text{rg } B = 3 \;\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado
- Para $a=1$: las matrices de los coeficientes y ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ tienen ambas rango 1. El sistema es compatible indeterminado.
- Para $a=-2$: la matriz de los coeficientes tiene rango 2 pues el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ y la matriz ampliada tiene rango 3 pues el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16-2+1+2-4-4\neq 0$. El sistema es incompatible.

b) El sistema es compatible determinado. Lo resolvemos por la regla de Cramer.

$$\left\{\begin{array}{l} y+z=1 \\ x+\quad z=0 \\ x+y\quad =0 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2}=-\frac{1}{2} \;;\; y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2}=\frac{1}{2} \;;\; z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2}=\frac{1}{2}$$

A2. *(2,5 puntos)* Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}\,dx$

SOLUCIÓN.

Descomponemos la función racional en suma de fracciones simples:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -2 & 12 \\ -2 & & -2 & 8 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^2-4x+6=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{4\pm\sqrt{16-24}}{2}$$

$$\Rightarrow\; x^3-2x^2-2x+12=(x+2)(x^2-4x+6)$$

$$\frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+6}=\frac{Ax^2-4Ax+6A+Bx^2+Cx+2Bx+2C}{(x+2)(x^2-4x+6)}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-4A+2B+C)x+(6A+2C)}{x^3-2x^2-2x+12} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 & B=1-A & \Rightarrow & B=2 \\ -4A+2B+C=11 & \Rightarrow -4A+2-2A-3A=11 & \Rightarrow & A=-1 \\ 6A+2C=0 & C=-3A & \Rightarrow & C=3 \end{cases}$$

Se tiene entonces: $\displaystyle\int \frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}\,dx = \int \frac{-1}{x+2}\,dx + \int \frac{2x+3}{x^2-4x+6}\,dx = (1)$

Calculemos cada una de las integrales:

$$\int \frac{-1}{x+2}\,dx = -\ln|x+2|$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2-4x+6}\,dx = \int \frac{2x-4+7}{x^2-4x+6}\,dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+6}\,dx + \int \frac{7}{x^2-4x+6}\,dx = \ln\left|x^2-4x+6\right| + 7\int \frac{1}{x^2-4x+6}\,dx = (2)$$

$$\int \frac{1}{x^2-4x+6}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{2}}$$

Por tanto: $\displaystyle (2) = \ln\left|x^2-4x+6\right| + \frac{7\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{2}} \Rightarrow (1) = -\ln|x+2| + \ln\left|x^2-4x+6\right| + \frac{7\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{2}} + C$

Es decir: $\displaystyle \int \frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}\,dx = \ln\left|\frac{x^2-4x+6}{x+2}\right| + \frac{7\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{2}} + C$

A3. a) *(0,75 puntos)* Descomponer el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

b) *(1 punto)* Hallar el valor de k para que $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}+kx}{x-\mathrm{sen}\,x} = 2$

c) *(0,75 puntos)* Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función real de variable real, continua y derivable en la recta real. Supongamos que $f(0)\neq 0$ y $f(x+y)=f(x)f(y)$ para todo número real x, y. Demostrar que $f(0)=1$; $f(x)\neq 0$; $f(x)>0$ y $f'(x)=f'(0)f(x)$ para todo número real x.

SOLUCIÓN.

a) Sean $12-x$ y x los dos sumandos positivos. La función $f(x)=(12-x)\cdot x^2=12x^2-x^3$ debe ser máxima.

$f'(x)=24x-3x^2=0 \Rightarrow 3x(8-x)=0 \Rightarrow x=0$, $x=8$ (valores críticos)

$f''(x)=24-6x$: $f''(0)=24>0 \Rightarrow x=0$ mínimo ; $f''(8)=-24<0 \Rightarrow x=8$ máximo

Por tanto, los dos sumandos deben ser 4 y 8.

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}+kx}{x-\mathrm{sen}\,x} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}+k}{1-\cos x} = \frac{2+k}{0} = (1)$

Para que el límite sea 2, k debe ser igual a -2 para que (1) sea una indeterminación $\frac{0}{0}$ (en caso contrario el límite es ∞). Comprobemos el valor del límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\mathrm{sen}\,x} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\mathrm{sen}\,x} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = 2$$

c)
- $f(0)=f(0+0)=f(0)\cdot f(0)=[f(0)]^2 \Rightarrow f(0)[f(0)-1]=0 \Rightarrow f(0)=1$ pues $f(0)\neq 0$
- $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2>0$
- $\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot f(h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)[f(h)-1]}{h}=(1)$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0)\cdot f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0)\left[f(h)-1\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$ y sustituyendo en (1):

$$(1)=f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x)\cdot f'(0)\quad\Rightarrow\quad f'(x)=f(x)\cdot f'(0)$$

A4. a) *(1 punto)* Hallar el plano que contiene a la recta v de ecuación paramétrica $v:\ (2,1,3)+t(2,1,0)$ y es perpendicular al plano de ecuación $x+z=2$

b) *(1,5 puntos)* Probar que los vectores $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ y dar las coordenadas del vector $(1,-2,0)$ en la base anterior.

SOLUCIÓN.

a) Un plano queda determinado por un punto y dos vectores con distinta dirección. El plano que buscamos contiene a la recta v, luego contiene al punto $P(2,1,3)$ y al vector direccional $\vec{v}=(2,1,0)$. También contiene al vector normal al plano $x+z=2$, $\vec{n}=(1,0,1)$, que es perpendicular a él. Por tanto, el plano buscado es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\ \Leftrightarrow\ x-2-z+3-2y+2=0\ \Leftrightarrow\ x-2y-z+3=0$$

b) Basta comprobar que los tres vectores son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0\quad\Rightarrow$$ son linealmente independientes y forman una base de $\mathbb{R}^3$.

$$(1,-2,0)=x(1,1,1)+y(1,1,0)+z(1,00)=(x+y+z,x+y,x)\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1\\ x+y\quad\ =-2\\ x\qquad\quad =0\end{array}\right.\ \Rightarrow\ \begin{array}{l} x=0\\ y=-2\\ z=3\end{array}$$

OPCIÓN B

B1. a) *(1,5 puntos)* Comprueba que la matriz M es inversible y calcule su inversa, donde $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

b) *(1 punto)* Encuentre las matrices A y B que cumplen las siguientes ecuaciones

$$8A-5B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}\quad,\quad 2A-B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) M es inversible si $|M|\neq 0$: $\quad |M|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=2+4+1-2=5\neq 0\quad\Rightarrow$ M tiene inversa.

- Calculemos la matriz adjunta $(\mathrm{Adj}M)$ y después la traspuesta de la adjunta $(\mathrm{Adj}M)^t$:

$$a_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0\ ;\ a_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-5\ ;\ a_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=5\ ;\ a_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2\ ;\ a_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3$$

$$a_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-2\ ;\ a_{31}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\ ;\ a_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\ ;\ a_{33}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1$$

Luego $(\mathrm{Adj}M)=\begin{pmatrix}0 & -5 & 5\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad(\mathrm{Adj}M)^t=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -5 & 3 & 1\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}$

- Por último: $M^{-1} = \dfrac{(\text{Adj}\,M)^t}{|M|} = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 & -1/5 \\ -1 & 3/5 & 1/5 \\ 1 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

b) Sean P y Q las matrices conocidas. Se tiene:

$$\begin{cases} 8A-5B=P \\ 2A-B=Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8A+5B=-P \\ 8A-4B=4Q \end{cases} \Rightarrow \text{Sumando: } B=4Q-P \Rightarrow A=\frac{1}{2}(5Q-P) \text{ es decir:}$$

$$A=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 5 & -20 & 0 \\ 10 & -5 & 15 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -16 & 0 \\ 8 & -4 & 12 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -18 & 0 \\ 10 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

B2. a) *(1,5 puntos)* Calcule la siguiente integral indefinida $\int \cos(\ln x)\,dx$

(Ayuda: realice un cambio de variable adecuado para esta integral)

b) *(1 punto)* Calcule el límite siguiente $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{x^2}{x+3}\right)\ln\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)\right]$

SOLUCIÓN.

a) Realizamos el cambio de variable $\ln x = t \Rightarrow \dfrac{1}{x}dx = dt \Rightarrow dx = x\,dt = e^t\,dt$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \int \cos t\cdot e^t\cdot dt = \left| \begin{matrix} u=\cos t \Rightarrow du=-\text{sen}\,t\,dt \\ dv=e^t\,dt \Rightarrow v=e^t \end{matrix} \right| = e^t\cdot\cos t + \int e^t\cdot \text{sen}\,t\cdot dt =$$

$$\left| \begin{matrix} u=\text{sen}\,t \Rightarrow du=\cos t\,dt \\ dv=e^t\,dt \Rightarrow v=e^t \end{matrix} \right| = e^t\cdot\cos t + e^t\cdot\text{sen}\,t - \int e^t\cdot\cos t\cdot dt \Rightarrow 2I = e^t(\cos t+\text{sen}\,t) \Rightarrow$$

$$I=\frac{1}{2}e^t(\cos t+\text{sen}\,t)+K \Rightarrow \int\cos(\ln x)\,dx=\frac{1}{2}e^{\ln x}\left[\cos(\ln x)+\text{sen}(\ln x)\right]+K=\frac{1}{2}x\left[\cos(\ln x)+\text{sen}(\ln x)\right]+K$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x^2}{x+3}\right)\ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)\right]=\infty\cdot 0=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}\right]=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}\right]=(1)$$

Calculemos $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{6}}\right)^{\frac{x^2}{x+3}\cdot\frac{x-1}{6}\cdot\frac{6}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{6}}\right)^{\frac{x-1}{6}}\right]^{\frac{x^2}{x+3}\cdot\frac{6}{x-1}}=e^6$$

Por tanto: $(1)=\ln\left(e^6\right)=6$

B3. Sea f la función de variable real definida mediante la expresión $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

a) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de continuidad, simetrías, corte con los ejes y asíntotas de la función.

b) *(1 punto)* Calcule, si existen, los extremos relativos y absolutos, e intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) *(0,5 puntos)* Calcule, si existen, los puntos de inflexión de f.

d) *(0,5 puntos)* Dibuje la gráfica de f.

SOLUCIÓN.

a)
- $D(f)=\mathbb{R}$. La función es continua $\forall\, x$.
- $f(-x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}=-f(x) \Rightarrow$ la función es impar (simétrica respecto al origen de coordenadas)
- Corte con OX: $2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$. El origen de coordenadas también es el punto de corte con OY.
- La función no tiene asíntotas verticales pues no hay valores de x para los que la función tienda a infinito.

$y=0$ es una asíntota horizontal de la función pues: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}=0^-$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}=0^+$.

b) $f'(x)=\dfrac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1\ ,\ x=1$

$f'<0$		$f'>0$		$f'<0$
	-1		1	

Por tanto: la función es decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y creciente en $(-1,1)$.

Como la función es continua, en $x=-1$, $(-1,-1)$, tiene un mínimo relativo y en $x=1$, $(1,1)$, un máximo relativo.

c) $f''(x)=\dfrac{-4x\left(x^2+1\right)^2-2\left(1-x^2\right)2\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\dfrac{-4x\left(x^2+1\right)\left(x^2+1+2-2x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=\dfrac{-4x\left(x^2+1\right)\left(-x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=$

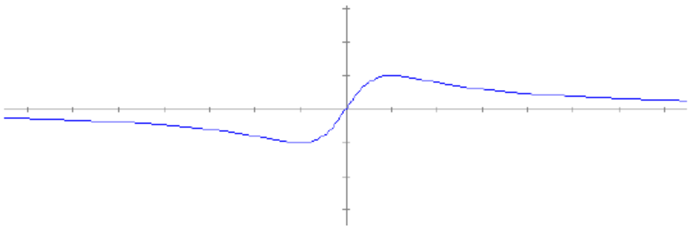
$$=\frac{-4x\left(-x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^3} \quad\Rightarrow\quad x=0 \quad,\quad x=-\sqrt{3} \quad,\quad x=\sqrt{3} \qquad \text{(posibles puntos de inflexión)}$$

$$f'''(x)=\frac{\left(12x^2-12\right)\left(x^2+1\right)^3+4x\left(-x^2+3\right)3\left(x^2+1\right)^2 2x}{\left(x^2+1\right)^6}=\frac{\left(12x^2-12\right)\left(x^2+1\right)+24x^2\left(-x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$$

y como $f'''(0)\neq 0$, $f'''(-\sqrt{3})\neq 0$, $f'''(\sqrt{3})\neq 0$: $x=0$, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$ son puntos de inflexión:

$$(0,0)\ ,\ \left(-\sqrt{3}\,,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\simeq(-1{,}73\ ,\ -0{,}87),\ \left(\sqrt{3}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\simeq(1{,}73\ ,\ 0{,}87)$$

d)



B4. Sea el haz de planos de ecuación $(1+\lambda)x-y-\lambda z=0$ con parámetro real λ.

a) *(0,5 puntos)* Hallar los planos del haz que pasan por el punto $P=(1,1,1)$.

b) *(1 punto)* Hallar los planos del haz cuya distancia al punto $Q(3,-2,1)$ es $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

c) *(1 punto)* Hallar los planos del haz que cumplen que el ángulo que forman con el eje OY tiene por seno el valor $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

SOLUCIÓN.

a) Sustituimos las coordenadas del punto: $1+\lambda-1-\lambda=0 \;\Leftrightarrow\; 0=0 \;\Rightarrow$ Todos los planos del haz pasan por P (P pertenece a la recta común del haz).

b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\left|(1+\lambda)3+2-\lambda\right|}{\sqrt{(1+\lambda)^2+1+\lambda^2}}=\dfrac{\left|2\lambda+5\right|}{\sqrt{2+2\lambda+2\lambda^2}} \;\Rightarrow\; 2\left|2\lambda+5\right|=3\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda+\lambda^2} \;\Rightarrow\; \left|2\lambda+5\right|=3\sqrt{1+\lambda+\lambda^2}$

$\Rightarrow\; \left(\left|2\lambda+5\right|\right)^2=9\left(1+\lambda+\lambda^2\right) \;\Rightarrow\; 4\lambda^2+20\lambda+25=9+9\lambda+9\lambda^2 \;\Rightarrow\; 5\lambda^2-11\lambda-16=0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \lambda=\dfrac{11\pm\sqrt{121+320}}{10}=\dfrac{11\pm 21}{10}=$

- $\lambda=-1 \;\Rightarrow\; -y+z=0$
- $\lambda=\dfrac{16}{5} \;\Rightarrow\; \dfrac{21}{5}x-y-\dfrac{16}{5}z=0 \;\Rightarrow\; 21x-5y-16z=0$

c) Un vector direccional de OY es $\vec{e}_2=(0,1,0)$ y un vector normal al plano $\vec{n}=(1+\lambda,-1,-\lambda)$.

Si es α el ángulo que forman la recta y el plano, se tiene:

$$\cos(90^o-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha=\frac{|\vec{e}_2\cdot\vec{n}|}{|\vec{e}_2||\vec{n}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{|-1|}{\sqrt{1+2\lambda+\lambda^2+1+\lambda^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{1}{\sqrt{2\lambda^2+2\lambda+2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{12}\sqrt{\lambda^2+\lambda+1}=6 \Rightarrow \lambda^2+\lambda+1=3 \Rightarrow \lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases}1\\-2\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_1\equiv 2x-y-z=0 \quad ; \quad \pi_2\equiv -x-y+2z=0$$

Universidad Zaragoza 1542

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2012

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Debe elegirse una y contestar a sus cuestiones. La puntuación de cada cuestión aparece en la misma. Deben justificarse los pasos que se dan para obtener las respuestas. La simple escritura de un resultado correcto no garantiza que se obtengan los puntos del apartado.

OPCIÓN A

A.1 a) *(0,5 puntos)* El determinante de la matriz A que aparece a continuación es 2

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Sin utilizar la regla de Sarrus, determine cuanto vale el determinante de la matriz B siguiente (enuncie las propiedades que utilice):

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

b) *(2 puntos)* Sea C la siguiente matriz:

$$C=\begin{pmatrix}sen(x) & -\cos(x) & 0\\ \cos(x) & sen(x) & 0\\ 1 & sen(x) & x\end{pmatrix}$$

Determine los valores de x para los que la matriz C tiene inversa y calcularla cuando sea posible.

A.2 Dado el punto $P=(1,0,6)$ y la recta:

$$r:\begin{cases}x & =1+\lambda\\ y & =-2-6\lambda\\ z & =2\lambda\end{cases}$$

a) *(1 punto)* Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por P y corta a la recta r.

b) *(1,5 puntos)* Encuentre la ecuación general (Ax+By+Cz+D=0) del plano que contiene a la recta r anterior y a la recta

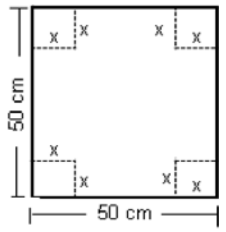
$$r':\begin{cases}x-z & =0\\ 2x-y-z & =10\end{cases}$$

A.3 Considere las funciones $f(x)=e^{x+1}$ y $g(x)=e^{-x+5}$.

a) *(0,5 puntos)* Determine los posibles puntos de corte de esas dos funciones.

b) *(2 puntos)* Calcule el área encerrada entre esas dos funciones y las rectas $x=1$ y $x=3$.

A.4 *(2,5 puntos)* Se dispone de una cartulina cuadrada como la del dibujo, cuyo lado mide 50 cm. En cada una de las esquinas se corta un cuadrado de lado x con el fin de poder doblar la cartulina y formar una caja, sin tape. ¿Cuál debe ser el lado x del cuadrado a cortar para que el volumen de la caja sea máximo?



OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

B.1 a) *(1,5 puntos)* Determine para qué valores de m el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} mx + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + my + 4z &= 2 \\ 2x + my + 6z &= m - 1 \end{aligned}$$

es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) *(1 punto)* Se sabe que una matriz simétrica B de dimensión 3 x 3 tiene como determinante -3. Determine el determinante de la matriz $B + B^t$ donde B^t denota la traspuesta de B.

B.2 a) *(1 punto)* Encuentre la ecuación general ($Ax + By + Cz + D = 0$) del plano que es paralelo a la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-3}{4}$$

y que contiene los puntos $P = (1,1,1)$ y $Q = (3,5,0)$.

b) *(1,5 puntos)* Calcule el ángulo que forman las dos rectas siguientes:

$$r : \begin{cases} 2x - y & = -1 \\ 2x - z & = -4 \end{cases}$$

$$r' : \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+5}{2}$$

B.3 a) *(1 punto)* Calcule el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+6}{x+2} \right)^{3x}$$

b) *(1,5 puntos)* Calcule la integral

$$\int_0^{\pi/2} e^{sen(x)} sen(x) \cos(x)\, dx$$

usando el cambio de variable $sen(x) = t$.

B.4 Sea la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$$

a) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de $f(x)$.

b) *(0,5 puntos)* Estudie si la función $f(x)$ es continua. Si no lo es, determine los puntos de discontinuidad.

c) *(1,5 puntos)* Determine los posibles máximos y mínimos, así como las asíntotas de $f(x)$.

1. Como norma general, se valorarán positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.
2. Si en el desarrollo de una cuestión se detecta un error numérico que no sea inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se prestará especial atención al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con la cuestión a resolver.
3. La comisión de un grave error en una cuestión no debe penalizar la corrección del resto de las cuestiones.

A continuación se señalan unas indicaciones específicas para la corrección de algunas cuestiones.

OPCIÓN A

A.1 a) (0,5 puntos) Si no se enumeran la propiedad o propiedades a usar, o se calcula el determinante usando la regla de Sarrus, deberá reducirse la calificación, otorgando como máximo 0.25 puntos.

b) (2 puntos) El cálculo de los valores de x se valorará con 0.5 puntos y el cálculo de la inversa con 1.5 puntos.

Si se calcula la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan, el proceso es algo más largo que si se calcula mediante determinantes y los errores numéricos pueden ser más habituales. En ese caso deberá valorarse más el proceso que los cálculos, siempre que éstos tengan sentido.

A.2 a) (1 punto) Se podrá dar la ecuación de la recta en cualquiera de sus formas, vectorial, paramétrica, continua o implícita.

b) (1,5 puntos) Si en lugar de la ecuación general del plano se proporciona la ecuación del plano en otra forma, paramétrica u otra, se calificará la cuestión con un máximo de 0.75 puntos.

A.3 a) (0,5 puntos) El cálculo del punto de corte se valora con 0.5 puntos.

b) (2 puntos) Los pasos en el cálculo del área deben estar claros y la valoración de la cuestión debe tenerlo en cuenta.

A.4 (2,5 puntos) Deberá prestarse atención al proceso, si bien los cálculos numéricos son suficientemente sencillos como para que puedan realizarse sin dificultad.

OPCIÓN B

B.1 a) (1,5 puntos) La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles y los razonamientos empleados para la clasificación del sistema.

b) (1 puntos) Se tendrá en cuenta que se describan los razonamientos o enuncien las propiedades que se utilicen.

B.2 a) (1 punto) Si no se proporciona la ecuación general, sino que se proporciona la ecuación del plano en otra forma, paramétrica u otra, se calificará la cuestión con un máximo de 0.5 puntos.

b) (1,5 puntos) Se podrá dar el valor del ángulo o el de su coseno, ambas formas son válidas.

B.3 a) (1 punto) Los pasos en el cálculo del límite deben estar claros y la valoración de la cuestión debe tenerlo en cuenta.

b) (1,5 puntos) Los pasos en el cálculo de la integral deben estar claros y la valoración de la cuestión debe tenerlo en cuenta.

B.4 a) (0,5 puntos) y b) (0,5 puntos) Además de los correspondientes conjuntos de puntos, deberán valorarse los argumentos que se usen.

c) (1,5 puntos) La valoración de la cuestión deberá tener en cuenta si se estudian todas las características solicitadas.

Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Debe elegirse una y contestar a sus cuestiones. La puntuación de cada cuestión aparece en la misma. Deben justificarse los pasos que se dan para obtener las respuestas. La simple escritura de un resultado correcto no garantiza que se obtengan los puntos del apartado.

OPCIÓN A

A1. a) *(0,5 puntos)* El determinante de la matriz A que aparece a continuación es 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Sin utilizar la regla de Sarrus, determine cuánto vale el determinante de la matriz B siguiente (enuncie las propiedades que utilice):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) *(2 puntos)* Sea C la siguiente matriz: $C = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ 1 & \operatorname{sen} x & x \end{pmatrix}$

Determine los valores de x para los que la matriz C tiene inversa y calcularla cuando sea posible.

SOLUCIÓN.

a) El determinante de la matriz B es igual a 2. Si en una matriz se suma a una línea una combinación lineal de las paralelas, su determinante no varía. En nuestro caso, si a la tercera columna de A le sumamos la primera y la segunda columnas se obtiene la matriz B, cuyo determinante será igual que el de A, es decir 2.

b) La matriz C tiene inversa cuando $|C| \neq 0$.

$$|C| = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ 1 & \operatorname{sen} x & x \end{vmatrix} = x \operatorname{sen}^2 x + x \cos^2 x = x\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right) = x \quad \Rightarrow \quad \exists\, C^{-1}\ \forall x \neq 0$$

Calculemos C^{-1}:

· Calculamos la matriz adjunta de C:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x & x \end{vmatrix} = x \operatorname{sen} x \quad , \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} \operatorname{cox} & 0 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -x\cos x \quad , \quad A_{13} = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ 1 & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = \operatorname{sen} x\left(\cos x - 1\right)$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -\cos x & 0 \\ \operatorname{sen} x & x \end{vmatrix} = x\cos x \quad , \quad A_{22} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 0 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x \operatorname{sen} x \quad , \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x \\ 1 & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2 x - \cos x$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -\cos x & 0 \\ \operatorname{sen} x & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 0 \\ \cos x & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad A_{33} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Por tanto: $$A_{ij} = \begin{pmatrix} x \operatorname{sen} x & -x\cos x & \operatorname{sen} x\left(\cos x - 1\right) \\ x\cos x & x \operatorname{sen} x & -\operatorname{sen}^2 x - \cos x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

· Calculamos la matriz traspuesta de la adjunta: $$\left(A_{ij}\right)^t = A_{ji} = \begin{pmatrix} x \operatorname{sen} x & x\cos x & 0 \\ -x\cos x & x \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x\left(\cos x - 1\right) & -\operatorname{sen}^2 x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$$

· Dividimos por el determinante de C: $$C^{-1}=\frac{Aji}{|C|}=\begin{pmatrix} \operatorname{sen}x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \operatorname{sen}x & 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}x(\cos x-1)}{x} & \dfrac{-\operatorname{sen}^2x-\cos x}{x} & \dfrac{1}{x}\end{pmatrix}$$

A2. Dado el punto $P(1,0,6)$ y la recta $r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2-6\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$

a) *(1 punto)* Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por P y corte a la recta r.

b) *(1,5 puntos)* Encuentre la ecuación general $(Ax+By+Cz+D=0)$ del plano que contiene a la recta r anterior y a la recta $r':\begin{cases} x-z=0 \\ 2x-y-z=10 \end{cases}$

SOLUCIÓN.

a) La recta buscada es la intersección del plano π perpendicular a r y que contiene a P y el plano π' que contiene a r y a P.

· Ecuación de π: $x-6y+2z+D=0 \Rightarrow 1+12+D=0 \Rightarrow D=-13 \Rightarrow \pi: x-6y+2z-13=0$

· Ecuación de π': está determinado por los vectores $\vec{u}=(1,-6,2)$ y $\overrightarrow{PQ}=(1-1,0+2,6-0)=(0,2,6)\,||\,(0,1,3)$ y el punto $P(1,0,6)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & -6 & 1 \\ z-6 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -18x+18+z-6-3y-2x+2=0 \Leftrightarrow \pi': 20x+3y-z-14=0$$

Por tanto, la recta que buscamos es: $\begin{cases} x-6y+2z-13=0 \\ 20x+3y-z-14=0 \end{cases}$

b) Estudiemos la posición relativa de r y r':

· La recta r está determinada por el punto $A(1,-2,0)$ y el vector direccional $\vec{u}=(1,-6,2)$.

· $r':\begin{cases} x-z=0 \\ 2x-y-z=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=2x-z-10=z-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\mu \\ y=-10+\mu \\ z=\mu \end{cases} \Rightarrow B(0,-10,0) \quad \vec{v}=(1,1,1)$

y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=16-6-2-8=0 \Rightarrow$ r y r' son coplanarias y tienen distinta dirección.

El plano que las contiene está determinado por los vectores $\vec{u}=(1,-6,2)$ y $\vec{v}=(1,1,1)$ y el punto $A(1,-2,0)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+2 & -6 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -6x+6+2y+4+z+6z-y-2-2x+2=0 \Leftrightarrow 8x-y-7z-10=0$$

A3. Considere las funciones $f(x)=e^{x+1}$ y $g(x)=e^{-x+5}$.

a) *(0,5 puntos)* Determine los posibles puntos de corte de esas dos funciones.

b) *(2 puntos)* Calcule el área encerrada entre esas dos funciones y las rectas $x=1$ y $x=3$.

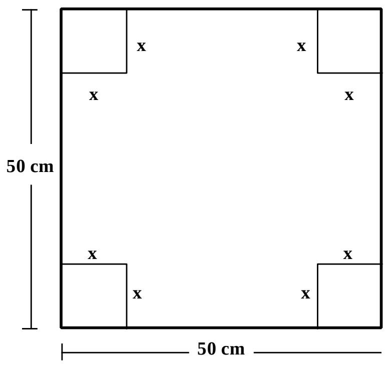
SOLUCIÓN.

a) $\begin{cases} y = e^{x+1} \\ y = e^{-x+5} \end{cases} \Rightarrow \; e^{x+1} = e^{-x+5} \;\Rightarrow\; x+1 = -x+5 \;\Rightarrow\; x = 2\;,\; y = e^3 \;\Rightarrow\; \left(2\,,e^3\right)$

b) $A = \left| \int_1^2 \left(e^{x+1} - e^{-x+5}\right) dx \right| + \left| \int_2^3 \left(e^{x+1} - e^{-x+5}\right) dx \right| = \left| \left[e^{x+1} + e^{-x+5}\right]_1^2 \right| + \left| \left[e^{x+1} + e^{-x+5}\right]_2^3 \right| =$

$= \left| e^3 + e^3 - e^2 - e^4 \right| + \left| e^4 + e^2 - e^3 - e^3 \right| \simeq \left| -21{,}8 \right| + \left| 21{,}8 \right| \simeq 43{,}6 \text{ u}^2$

A4. *(2,5 puntos)* Se dispone de una cartulina cuadrada como la del dibujo, cuyo lado mide 50 cm. En cada una de las esquinas se corta un cuadrado de lado x con el fin de poder doblar la cartulina y formar una caja, sin tapa. ¿Cuál debe ser el lado x del cuadrado a cortar para que el volumen de la caja sea máximo?



SOLUCIÓN.

La función volumen es: $V(x) = (50-2x)^2 \cdot x = 2500x - 200x^2 + 4x^3$

$V'(x) = 2500 - 400x + 12x^2 = 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \; x = \dfrac{400 \pm \sqrt{160000 - 120000}}{24} = \dfrac{400 \pm 200}{24} = \begin{cases} 25 \\ \dfrac{25}{3} \end{cases}$

$V''(x) = -400 + 24x \qquad \left| \begin{array}{l} V''(25) > 0 \;\Rightarrow\; \text{mínimo} \\ V''(25/3) < 0 \;\Rightarrow\; \text{máximo} \end{array} \right|$

luego para que el volumen de la caja sea máximo, deben cortarse cuadrados de $\dfrac{25}{3} \simeq 8{,}3$ cm en cada esquina.

OPCIÓN B

B1. a) *(1,5 puntos)* Determine para qué valores de m el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} mx + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + my + 4z &= 2 \\ 2x + my + 6z &= m - 1 \end{aligned}$$

es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) *(1 punto)* Se sabe que una matriz simétrica B de dimensión 3×3 tiene como determinante -3. Determine el determinante de la matriz $B + B^t$ donde B^t denota la traspuesta de B.

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 6 & 0 \\ 2 & m & 4 & 2 \\ 2 & m & 6 & m-1 \end{array} \right)$. Comparemos sus rangos:

$$\begin{vmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{vmatrix} = 6m^2 + 12m + 16 - 12m - 4m^2 - 24 = 2m^2 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 2$$

· Para $m \neq \pm 2$: $\quad \mathrm{rg}\,A = \mathrm{rg}\,B = 3 = \text{nº de incógnitas} \quad \Rightarrow \quad$ el sistema es compatible determinado

· Para $m = -2$: $\quad \mathrm{rg}\,A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$.

Orlamos este menor con la columna de los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 24 + 24 + 36 + 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rg}\,B = 3 \quad \text{y como } \mathrm{rg}\,A \neq \mathrm{rg}\,B \quad \Rightarrow \quad \text{el sistema es incompatible}$$

· Para $m = 2$: $\quad \mathrm{rg}\,A = 2$ y $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 24 - 12 - 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rg}\,B = 3 \neq \mathrm{rg}\,A \quad \Rightarrow \quad$ el sistema es incompatible

b) Si B es simétrica: $B = B^t$. Por tanto: $\left| B + B^t \right| = \left| 2B \right| = 8 \cdot \left| B \right| = -24$

B2. a) *(1 punto)* Encuentre la ecuación general $(Ax + By + Cz + D = 0)$ del plano que es paralelo a la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z-3}{4}$ y que contiene los puntos $P = (1,1,1)$ y $Q = (3,5,0)$.

b) *(1,5 puntos)* Calcule el ángulo que forman las dos rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2x - z = -4 \end{cases} \qquad r': \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+5}{2}$$

SOLUCIÓN.

a) El vector direccional de la recta es uno de los que determina el plano: $\vec{u} = (2,1,4)$. También el vector $\overrightarrow{PQ} = (2,4,-1)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y-1 & 1 & 4 \\ z-1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x + 1 + 8y - 8 + 8z - 8 - 2z + 2 - 16x + 16 + 2y - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 17x - 10y - 6z - 1 = 0$$

b) Obtengamos las coordenadas de los vectores direccionales de ambas rectas:

$$\cdot\ r: \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2x - z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = 2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{u} = (1,2,2) \qquad\qquad \cdot\ r': \ \vec{v} = (2,-1,2)$$

$$\cos\alpha = \frac{|\,\vec{u}\cdot\vec{v}\,|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{|\,2 - 2 + 4\,|}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{4+1+4}} = \frac{4}{3\cdot 3} = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{4}{9} \simeq 63^\circ\, 36'\, 44''$$

B3.

a) *(1 punto)* Calcule el límite: $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+6}{x+2} \right)^{3x}$

b) *(1,5 puntos)* Calcule la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ usando el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$

SOLUCIÓN.

a) Se trata de una indeterminación 1^{∞} .

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+6}{x+2}\right)^{3x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x+6}{x+2}-1\right)^{3x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x+6-x-2}{x+2}\right)^{3x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x+2}\right)^{3x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{4}}\right)^{3x\cdot\frac{x+2}{4}\cdot\frac{4}{x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{4}}\right)^{\frac{x+2}{4}}\right]^{\frac{12x}{x+2}}=e^{12}$$

b) $\operatorname{sen} x=t \;\Rightarrow\; \cos x\,dx=dt \;\Rightarrow\; \int e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x\cos x\,dx=\int e^{t}\cdot t\cdot dt=\left|\begin{matrix} u=t & \Rightarrow & du=dt \\ dv=e^{t}\,dt & \Rightarrow & v=e^{t}\end{matrix}\right|=$

$$=t\cdot e^{t}-\int e^{t}\,dt=t\cdot e^{t}-e^{t}=e^{t}\left(t-1\right)=e^{\operatorname{sen} x}\left(\operatorname{sen} x-1\right)$$

Por lo tanto: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x\cos x\,dx=\left[e^{\operatorname{sen} x}\left(\operatorname{sen} x-1\right)\right]_0^{\pi/2}=e\left(1-1\right)-e^{0}\left(0-1\right)=1$

B4. Sea la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}$

- **a)** *(0,5 puntos)* Determine el dominio de $f(x)$
- **b)** *(0,5 puntos)* Estudie si la función $f(x)$ es continua. Si no lo es, determine los puntos de discontinuidad.
- **c)** *(1,5 puntos)* Determine los posibles máximos y mínimos, así como las asíntotas de $f(x)$.

SOLUCIÓN.

a) $x^2-x-6=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{1\pm 5}{2}=\begin{cases}-2\\ 3\end{cases} \;\Rightarrow\; D(f)=\mathbb{R}-\{-2\,,3\}$

b) La función tiene dos puntos de discontinuidad (con asíntota vertical) en $x=-2$ y en $x=3$.

c) · Máximos y mínimos:

$$f'(x)=\frac{-2x+1}{\left(x^2-x-6\right)^2}=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=\frac{-2\left(x^2-x-6\right)^2-\left(-2x+1\right)2\left(x^2-x-6\right)\left(2x-1\right)}{\left(x^2-x-6\right)^4} \;\Rightarrow\; f''\left(\frac{1}{2}\right)<0 \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{2} \text{ es un máximo de la función.}$$

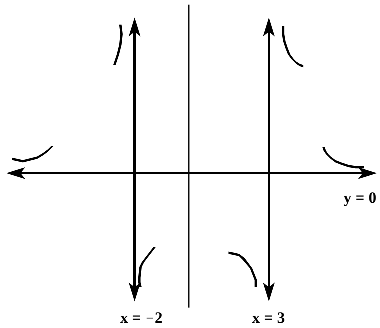
· Asíntotas:

$x=-2$ y $x=3$ son dos asíntotas verticales de la función pues $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{1}{x^2-x-6}=\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{1}{x^2-x-6}=\infty$.

Estudiemos la posición de la curva respecto a sus asíntotas:

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{1}{x^2-x-6}=+\infty \quad;\quad \lim_{x\to-2^+}\frac{1}{x^2-x-6}=-\infty$$

$$\lim_{x\to3^-}\frac{1}{x^2-x-6}=-\infty \quad;\quad \lim_{x\to3^+}\frac{1}{x^2-x-6}=+\infty$$



$y=0$ es una asíntota horizontal de la función pues $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-x-6}=0$:

Posición relativa: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-x-6}=0^{+} \quad;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-x-6}=0^{+}$

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2013

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

A. 1. Sea $\mathbf{A}$ la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -m & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

a) *(1,5 puntos)* Discuta el sistema que aparece a continuación, para cada uno de los valores de m y resuélvalo para los valores de m siguientes: $m = -1$ y $m = 2$.

$$\mathbf{A\,X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

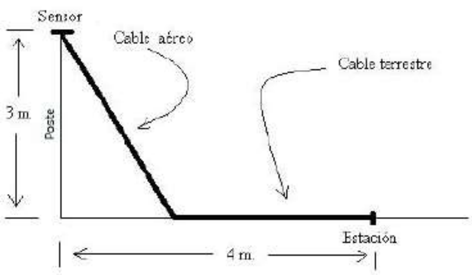
b) *(1 punto)* Determine la inversa de la matriz $\mathbf{A}$ cuando $m = 0$.

A. 2. a) *(1 punto)* ¿Pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 3$ y $\vec{u}.\,\vec{v} = 8$? **Justifique la respuesta.**

b) *(1,5 puntos)* Determine todos los posibles vectores $\vec{u} = (a, 0, b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares a la recta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

A. 3. *(2,5 puntos)* Un poste de 3 metros de altura tiene en su punta un sensor que recoge datos meteorológicos. Dichos datos deben transmitirse a través de un cable a una estación de almacenamiento situada a 4 metros de la base del poste. El cable puede ser aéreo o terrestre, según vaya por el aire o por el suelo (véase figura).
El coste del cable es distinto según sea aéreo o terrestre. El metro de cable aéreo cuesta 3000 euros y el metro de cable terrestre cuesta 1000 euros. ¿Qué parte del cable debe ser aéreo y qué parte terrestre para que su coste sea mínimo?



A. 4. a) *(1,25 puntos)* Determine la función $f(x)$ cuya derivada es $f'(x) = 2xe^{5x}$ y que verifica que $f(0) = 2$.

b) *(1,25 puntos)* Calcule:

$$\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{1}{3 - x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}$$

OPCIÓN B

B. 1. a) *(1 punto)* Determine el rango de la matriz $\boldsymbol{A}$, que aparece a continuación, según los diferentes valores de a:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

b) *(1,5 puntos)* Determine, si existe, una matriz A, 2×2, que verifique la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{A} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el rango de la matriz A?

B. 2. Dadas las rectas:

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine su posición relativa.

b) *(1 punto)* Calcule la distancia del punto $P = (2, 3, 1)$ a la recta s.

B. 3. a) *(1,25 puntos)* Sea la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. Determine el dominio y las asíntotas de $f(x)$, si existen.

b) *(1,25 puntos)* Determine el área del recinto encerrado por las funciones:

$$f(x) = -x^2 + 3 \quad \text{y} \quad g(x) = 1$$

B. 4. a) *(1 punto)* Determine qué valor debe tomar k para que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + kx - 5} \right) = 1$$

b) *(1,5 puntos)* Calcule:

$$\int 2x[\ln(x)]^2 \, dx$$

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

OPCIÓN A

A. 1. a) *(1,5 puntos)* Discutir el sistema: 0,5 puntos. La discusión debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles y los razonamientos empleados para la clasificación del sistema.

Resolverlo para $m = -1$ (sistema compatible determinado): 0,5 puntos.

Resolverlo para $m=2$ (sistema compatible indeterminado): 0,5 puntos.

b) *(1 punto)* Si se calcula la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan, el proceso es más largo que si se calcula mediante determinantes y los errores numéricos pueden ser más habituales. En ese caso deberá valorarse más el proceso que los cálculos, siempre que éstos tengan sentido.

A. 2. a) *(1 punto)* No se valorarán respuestas de SI o NO sin ninguna justificación.

b) *(1,5 puntos)* La dificultad de los cálculos es ínfima. Al realizar los cálculos se obtienen dos soluciones que corresponden a un vector y a su opuesto. Si sólo se plantease la condición sobre el módulo, se calificará con un máximo de 0,25 puntos y si sólo se plantea la de perpendicularidad se calificará con un máximo de 0,5 puntos.

A. 3. *(2,5 puntos)* Deberá prestarse especial atención al planteamiento del problema que se calificará hasta 1,5 puntos. La determinación del mínimo se calificará hasta 1 punto.

A. 4. a) *(1,25 puntos)* Si no se determina la constante con la condición $f(0) = 2$, se calificará como máximo con 0,5 puntos.

b) *(1,25 puntos)* Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta.

OPCIÓN B

B. 1. a) *(1 punto)* La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles y los razonamientos empleados para la obtención del rango de la matriz.

b) *(1,5 puntos)* La calificación debe tener en cuenta los razonamientos empleados en la resolución de la ecuación.

La ecuación se puede resolver mediante el cálculo de las matrices inversas o mediante el planteamiento de un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Si se resuelve planteando las cuatro ecuaciones y se resuelve mediante métodos elementales (los cálculos son simples) no es necesario penalizar la calificación ya que la propia resolución es más costosa, lo que conlleva una cierta penalización en el tiempo necesario para su resolución que repercutirá en la realización del examen global.

B. 2. a) *(1,5 puntos)* Debe precisarse la posición relativa de las rectas para poder obtener la calificación máxima. Si sólo se dice que no son paralelas, es decir que se cortan o se cruzan, sin mayor precisión, se calificará con un máximo de 0,5 puntos.

b) *(1 punto)* Cálculo de la distancia a la recta: 1 punto.

B. 3. a) *(1,25 puntos)* Dominio: 0,5 puntos. Asíntotas: 0,75 puntos.

b) *(1,25 puntos)* Los pasos en el cálculo del área deben estar claros y la calificación deberá tenerlos en cuenta.

B. 4. a) *(1 punto)* Los pasos en el cálculo del límite para obtener el valor de la constante k deben estar claros y la calificación deberá tenerlos en cuenta.

b) *(1,5 puntos)* Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlos en cuenta. Si se realiza un mismo proceso varias veces no debe exigirse una reiteración de los argumentos o explicaciones todas las veces.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

A.1. Sea A la matriz: $A=\begin{pmatrix}5 & -m & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}$

a) *(1,5 puntos)* Discuta el sistema que aparece a continuación, para cada uno de los valores de m y resuélvalo para los valores de m siguientes: $m=-1$ y $m=2$.

$$A\,X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{donde} \quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

b) *(1 punto)* Determine la inversa de la matriz A cuando $m=0$.

SOLUCIÓN.

a) Se trata de un sistema homogéneo. Su discusión (compatible determinado o compatible indeterminado) depende del rango de la matriz de los coeficientes A.

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & -m & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}=-5m+3+3+m^2=m^2-5m+6=0 \Rightarrow m=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}= \begin{cases} m=2\\ m=3\end{cases}$$

Se tiene: • $\boxed{\text{Si } m\neq 2 \text{ y } m\neq 3:\quad \text{rg}\,A=3}$ $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado (una única solución: $x=y=z=0$)

• Si $\boxed{m=2 \text{ o } m=3:\quad \text{rg}\,A=2}$ pues el menor $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$ $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado

- Para $m=-1$: el sistema tiene como única solución la trivial $\boxed{x=y=z=0}$
- Para $m=2$: el sistema es compatible indeterminado. El sistema dado es equivalente a:

$$\begin{cases}x-y=0\\ x+y+2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=0\\ x+y=-2\lambda\end{cases} \Rightarrow 2x=-2\lambda \Rightarrow x=-\lambda \;;\; y=x=-\lambda \text{ luego las soluciones son:}$$

$$\boxed{x=y=-\lambda\ ,\ z=\lambda}$$

b) Para $m=0$: $|A|=6$.

Tenemos: $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow A^t=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \text{adj}\left(A^t\right)=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 0 & -3 & 3\\ 2 & -5 & -5\end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & -1/2 & 1/2\\ 1/3 & -5/6 & -5/6\end{pmatrix}}$

A.2. a) *(1 punto)* ¿Pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$? **Justifique la respuesta**.

b) *(1,5 puntos)* Determine todos los posibles vectores $\vec{u}=(a,0,b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares a la recta $r:\begin{cases}x+y+z=0\\ x-y+z-2=0\end{cases}$

SOLUCIÓN.

a) No, pues: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})=2\cdot 3\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})=8 \Rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{8}{6}$ que es imposible.

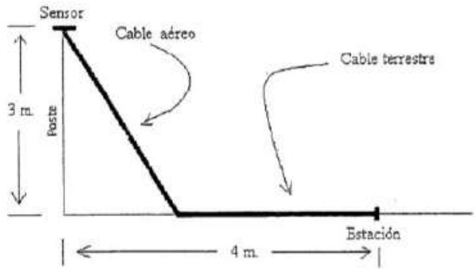
b) Obtengamos un vector direccional de r. Dos puntos de la recta son: $\begin{cases}x+y+z=0\\ x-y+z-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=-z\\ x-y=-z+2\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x=-2z+2 \Rightarrow x=-z+1\ ,\ y=-1 \Rightarrow A(0,-1,1)\ ,\ B(1,-1,0)$ y un vector direccional: $\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)$.

Se tiene: $\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2} = 8 \;\Rightarrow\; a^2+b^2=64 \\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \;\Rightarrow\; a-b=0 \end{array}\right| \Rightarrow a=b \;\Rightarrow\; 2a^2=64 \;\Rightarrow\; a^2=32 \;\Rightarrow\; a=b=\pm\sqrt{32}=\pm4\sqrt{2}$

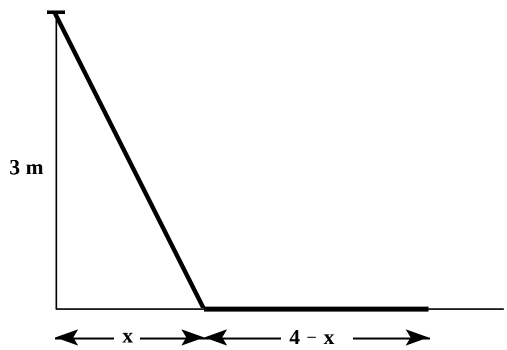
Es decir: $\boxed{\vec{u}=\left(4\sqrt{2}\,,0\,,4\sqrt{2}\right)}$ y $\boxed{\vec{u}=\left(-4\sqrt{2}\,,0\,,-4\sqrt{2}\right)}$

A.3. *(2,5 puntos)* Un poste de 3 metros de altura tiene en su punta un sensor que recoge datos meteorológicos. Dichos datos deben transmitirse a través de un cable a una estación de almacenamiento situada a 4 metros de la base del poste. El cable puede ser aéreo o terrestre, según vaya por el aire o por el suelo (véase figura).
El coste del cable es distinto según sea aéreo o terrestre. El metro de cable aéreo cuesta 3000 euros y el metro de cable terrestre cuesta 1000 euros. ¿Qué parte del cable debe ser aéreo y qué parte terrestre para que su coste sea mínimo?



SOLUCIÓN.

Sea x la distancia del poste al punto en que el cable aéreo llega a tierra (ver dibujo). La longitud del cable aéreo es:



$$L=\sqrt{3^2+x^2}=\sqrt{9+x^2}$$

El coste del cable es: $C=3000\sqrt{9+x^2}+1000\,(4-x)$ que debe ser mínimo:

$$C'=3000\,\frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}-1000=\frac{3000\,x}{\sqrt{9+x^2}}-1000=0 \;\Rightarrow$$

$$3000\,x=1000\sqrt{9+x^2}=0 \;\Rightarrow\; 9x^2=9+x^2 \;\Rightarrow\; x=\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\simeq 1{,}06$$

Veamos que este valor crítico hace mínimo el coste:

$$C''=\frac{3000\sqrt{9+x^2}-3000x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}}{9+x^2}=\frac{3000\left(9+x^2\right)-3000x^2}{\left(9+x^2\right)\sqrt{9+x^2}}=$$

$$=\frac{27000}{\left(9+x^2\right)\sqrt{9+x^2}}>0 \;\Rightarrow\;$$ la función coste es mínima.

Por lo tanto, la longitud del cable aéreo debe ser: $L=\sqrt{9+\frac{9}{8}}=\sqrt{\frac{81}{8}}=\frac{9}{2\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{4}\simeq\boxed{3{,}18\text{ m}\,.}$ El cable aéreo debe llegar a tierra a 1,06 metros del poste. El cable terrestre debe medir $\boxed{2{,}94 \text{ metros.}}$

A.4. a) *(1,25 puntos)* Determine la función $f(x)$ cuya derivada es $f'(x)=2xe^{5x}$ y que verifica que $f(0)=2$.

b) *(1,25 puntos)* Calcule: $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}$

SOLUCIÓN.

a) La función $f(x)$ es una primitiva de $f'(x)$:

$$f(x)=\int 2xe^{5x}\,dx=\left|\begin{array}{l} u=2x \;\Rightarrow\; du=2dx \\ dv=e^{5x}\,dx \;\Rightarrow\; v=\frac{1}{5}e^{5x}\end{array}\right|=\frac{2}{5}\,x\,e^{5x}-\frac{2}{5}\int e^{5x}\,dx=\frac{2}{5}\,x\,e^{5x}-\frac{2}{25}e^{5x}+C=\frac{2}{5}e^{5x}\left(x-\frac{1}{5}\right)+C$$

Calculemos ahora la constante de integración con la condición $f(0)=2$:

$$f(0)=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+C=2 \;\Rightarrow\; C=2+\frac{2}{25}=\frac{52}{25} \;\Rightarrow\; \boxed{f(x)=\frac{2}{5}e^{5x}\left(x-\frac{1}{5}\right)+\frac{52}{25}}$$

b) $$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{3-x}-1\right)\frac{1}{(2-x)^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{1-3+x}{3-x}\right)\frac{1}{(2-x)^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{x-2}{3-x}\right)\frac{1}{(x-2)^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{(3-x)(x-2)}\right)}=e^{+\infty}=\boxed{+\infty}$$

También podríamos haber realizado el cambio de variable: $x-2=\frac{1}{t} \;\Rightarrow\; t=\frac{1}{x-2}$ y cuando $x\to 2^+ \Rightarrow t\to+\infty$:

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{3-2-\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{1}{t^2}\right)}}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{t}{t-1}-1\right)^{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{(t-1)}\right]^{\frac{t^2}{t-1}}=e^{+\infty}=\boxed{+\infty}$$

OPCIÓN B

B.1. a) *(1 punto)* Determine el rango de la matriz A, que aparece a continuación, según los diferentes valores de a:

$$A=\begin{pmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

b) *(1,5 puntos)* Determine, si existe, una matriz A, 2×2, que verifique la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el rango de la matriz A?

SOLUCIÓN.

a) Estudiemos los valores de a para los que el rango es 3:

$$\begin{vmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{vmatrix}=20a-60-4a(a+2)+12(a+2)+20a-20a=-4a^2+24a-36=4(-a^2+6a-9)=0 \;\Rightarrow\; -a^2+6a-9=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{-2}=3$$

Tenemos entonces:

- $\boxed{\text{Para } a\neq 3: \quad \text{rg}A=3}$
- $\boxed{\text{Para } a=3: \quad \text{rg}A=2}$ pues el menor $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -10 \end{vmatrix}=20+20\neq 0$

b) Sea $A=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$.

Se tiene: $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 2x_{11}+x_{21} & 2x_{12}+x_{22} \\ x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 2x_{11}+x_{21} & -2x_{11}-x_{21}+2x_{12}+x_{22} \\ x_{11}+x_{21} & -x_{11}-x_{21}+x_{12}+x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{r} 2x_{11}+x_{21}=-3 \\ x_{11}+x_{21}=3 \\ -2x_{11}-x_{21}+2x_{12}+x_{22}=-3 \\ -x_{11}-x_{21}+x_{12}+x_{22}=3 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{r} 2x_{11}+x_{21}=-3 \\ x_{11}+x_{21}=3 \\ 2x_{12}+x_{22}=-6 \\ x_{12}+x_{22}=6 \end{array}\right. \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{11}=-6 \\ x_{21}=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{12}=-12 \\ x_{22}=18 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A=\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}}$$

$\operatorname{rg} A = 1$ porque $F2=-1{,}5\cdot F1$ (las dos filas son proporcionales)

- Otra forma: calculemos las matrices inversas de los dos factores:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{la traspuesta}]{\text{adjunta de}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{determinante}]{\text{Dividir por}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{la traspuesta}]{\text{adjunta de}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{determinante}]{\text{Dividir por}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y ahora: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}}$

B.2. Dadas las rectas: $r: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{1}$ y $s: \begin{cases} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$

a) *(1,5 puntos)* Determine su posición relativa

b) *(1 punto)* Calcule la distancia del punto $P=(2,3,1)$ a la recta s.

SOLUCIÓN.

a) $\vec{u}=(2,3,1)$ es un vector direccional de r. $\vec{v}=(-1,2,2)$ lo es de s. Como las coordenadas no son proporcionales, las rectas se cortan o se cruzan

$A(0,0,0)$ es un punto de r**.** $B(0,1,-2)$ es un punto de s. $\overrightarrow{AB}=(0,1,-2)$ es un vector con origen en r y extremo en s.

Puesto que $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-8-1-6-4=-19\neq 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{r y s se cruzan}}$

b) • Calculemos la ecuación del plano π perpendicular a s que pasa por P:

El vector $\vec{v}=(-1,2,2)$ direccional de s, es normal al plano π: $\pi: -x+2y+2z+D=0$.

Como $P\in\pi$: $-2+6+2+D=0 \Rightarrow D=-6 \Rightarrow \pi: -x+2y+2z-6=0$

- Calculemos el punto de corte de π y s:

$$\lambda+2(1+2\lambda)+2(-2+2\lambda)-6=0 \Rightarrow \lambda+2+4\lambda-4+4\lambda-6=0 \Rightarrow 9\lambda=8 \Rightarrow \lambda=\frac{8}{9} \Rightarrow Q\left(-\frac{8}{9},\frac{25}{9},-\frac{2}{9}\right)$$

- La distancia entre P y s es la distancia entre P y Q:

$$d(P,s)=d(P,Q)=\sqrt{\left(2+\frac{8}{9}\right)^2+\left(3-\frac{25}{9}\right)^2+\left(1+\frac{2}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{676}{81}+\frac{4}{81}+\frac{121}{81}}=\sqrt{\frac{801}{81}}=\frac{3\sqrt{89}}{9}=\boxed{\frac{\sqrt{89}}{3}\text{ u}}$$

• Otra forma: $d(P,s)=\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$ donde $Q\in s$ y $\vec{v}$ es un vector direccional de s.

$$\left.\begin{matrix} P(2,3,1) \\ Q(0,1,-2) \end{matrix}\right| \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(-2,-2,-3)$$

$$\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-4\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}+6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}=(2,7,-6) \Rightarrow |\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}|=\sqrt{4+49+36}=\sqrt{89}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$$

Y por tanto: $d(P, s) = \boxed{\dfrac{\sqrt{89}}{3}\ u}$

B.3. a) *(1,25 puntos)* Sea la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. Determine el dominio y las asíntotas de $f(x)$, si existen.

b) *(1,25 puntos)* Determine el área del recinto encerrado por las funciones $f(x) = -x^2 + 3$ y $g(x) = 1$.

SOLUCIÓN.

a) • Dominio: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• Asíntotas verticales: $\boxed{x = -1}$ y $\boxed{x = 1}$ pues $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = \infty$ y $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = \infty$

• Asíntota oblicua: $\dfrac{x^3}{x^2 - 1} = x + \dfrac{x}{x^2 - 1} \Rightarrow \boxed{y = x}$ es una asíntota oblicua de la función

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^3 + x & x \\ \hline x & \end{array}$$

b) Consideremos la función diferencia $d(x) = f(x) - g(x) = -x^2 + 2$ y calculemos el área del recinto limitado por esta función y el eje OX.

Los puntos de corte de la función $d(x)$ y el eje de abscisas son: $-x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Tenemos: $$A = \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \left(-x^2 + 2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} \right) - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} \right) =$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \boxed{\frac{8\sqrt{2}}{3}\ u^2}$$

B.4. a) *(1 punto)* Determine qué valor debe tomar k para que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + kx - 5} \right) = 1$

b) *(1,5 puntos)* Calcule: $\int 2x[\ln(x)]^2\, dx$

SOLUCIÓN.

a) $$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + kx - 5} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2x - \sqrt{4x^2 + kx - 5} \right)\left(2x + \sqrt{4x^2 + kx - 5} \right)}{2x + \sqrt{4x^2 + kx - 5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - kx + 5}{2x + \sqrt{4x^2 + kx - 5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-kx}{2x + 2x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-kx}{4x} = -\frac{k}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{k = -4}$$

b) $$\int 2x[\ln(x)]^2\, dx = \left| \begin{array}{l} u = [\ln(x)]^2 \Rightarrow du = 2 \ln x \dfrac{1}{x} dx \\ dv = 2x\, dx \Rightarrow v = x^2 \end{array} \right| = x^2 [\ln(x)]^2 - \int 2x^2 \frac{1}{x} \ln x\, dx = x^2 [\ln(x)]^2 - \int 2x \ln x\, dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = 2x\, dx \Rightarrow v = x^2 \end{array} \right| = x^2 [\ln(x)]^2 - \left[x^2 \ln x - \int x^2 \frac{1}{x} dx \right] = x^2 [\ln(x)]^2 - x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} + C = \boxed{x^2 \left[\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2} \right] + C}$$

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

A. 1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} \lambda x + 4\,y + 12\,z = 0 \\ 2x\ +\ y +\ \ 4\,z = \lambda \\ \lambda x\ +\ y + \ 6\,z = \ 0 \end{array}$$

a) *(1 punto)* Determine los valores de λ para los que el sistema de ecuaciones tiene solución única.

b) *(1,5 puntos)* Resuelva el sistema, si es posible, cuando $\lambda = 4$ y cuando $\lambda = 0$.

A. 2. a) *(1,25 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi: 2x + 3y - z = 1$$

$$\pi': \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = -1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$

b) *(1,25 puntos)* Encuentre la recta que pasa por el punto $P = (0, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π'. Escriba la ecuación de la recta como intersección de dos planos.

A. 3. Sea la función:

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 4x + 3}$$

a) *(0,5 puntos)* Determine su dominio de definición.

b) *(1 punto)* Encuentre las asíntotas que tenga esa función.

c) *(1 punto)* Considere ahora la función:

$$g(x) = \frac{(x+2)^2}{x+3}$$

Encuentre sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos, si existen.

A. 4. a) *(1,25 puntos)* Calcule:

$$\int_2^3 \frac{1}{2x^2 - 4x + 2}\,dx$$

b) *(1,25 puntos)* Determine el límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + 2\ln(x) + [\ln(x)]^2}{x[1 + \ln(x)]}$$

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

B. 1. Sean A y B las dos matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* ¿Para qué valores de a existe la inversa de AB? ¿Y la de BA?

b) *(1,5 puntos)* Encuentre la inversa de la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Compruebe que cuando la matriz encontrada se multiplica por la izquierda por C, se obtiene la identidad.

B. 2. Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{k} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}, \quad \text{con} \quad k \neq 0$$

$$s: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

a) *(2 puntos)* Estudie las posiciones relativas de las rectas según los diferentes valores de k .

b) *(0,5 puntos)* ¿Existen valores de k para los que las rectas son perpendiculares?

B. 3. a) Considere las funciones:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = 3 - x.$$

(0,5 puntos) Determine los puntos de corte de esas dos funciones.

(1 punto) Determine el área encerrada entre esas dos funciones.

b) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$h(x) = x^6 + 2.$$

B. 4. a) *(1,25 puntos)* Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule:

$$\int \frac{e^x}{1 - e^{-x}} dx$$

b) *(1,25 puntos)* Calcule:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\sqrt{x}}$$

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

OPCIÓN A

A. 1. a) *(1 punto)* La calificación debe tener en cuenta los razonamientos usados.

b) *(1,5 puntos)* La resolución del sistema para $\lambda = 0$ se calificará hasta 0,5 puntos y el estudio del sistema para $\lambda = 4$ (es incompatible) se calificará hasta 1 punto.

A. 2. a) *(1,25 puntos)* La determinación de que los planos se cortan se calificará hasta 1,25 puntos.

b) *(1,25 puntos)* Si la ecuación de la recta no se proporciona como intersección de dos planos se calificará con un máximo de 0,75 puntos.

A. 3. a) *(0,5 puntos)* Dominio: 0,5 puntos.

b) *(1 punto)* La puntuación máxima se otorgará si se estudian todos los tipos de asíntotas. En los casos en que no existan, se deberá decir explícitamente.

c) *(1 punto)* La determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento se calificará hasta 0,5 puntos y la de los extremos relativos también hasta 0,5 puntos.

A. 4. a) *(1,25 puntos)* Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta.

b) *(1,25 puntos)* Los pasos para el cálculo del límite deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta. Si se realiza un mismo proceso varias veces no debe exigirse una reiteración de los argumentos o explicaciones todas las veces.

OPCIÓN B

B. 1. a) *(1 punto)* Cada uno de los dos casos debe calificarse hasta 0,5 puntos.

b) *(1,5 puntos)* Si se calcula la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan, el proceso es más largo que si se calcula mediante determinantes y los errores numéricos pueden ser más habituales. En ese caso deberá valorarse más el proceso que los cálculos, siempre que éstos tengan sentido. La comprobación de que es inversa a izquierda se calificará hasta 0,25 puntos.

B. 2. a) *(2 puntos)* La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles.

b) *(0,5 puntos)* Estudio de la perpendicularidad: 0,5 puntos.

B. 3. a) *(1,5 puntos)* Puntos de corte: 0,5 puntos. Cálculo del área: 1 punto. Los pasos para el cálculo del área debe estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta.

b) *(1 punto)* La calificación debe tener en cuenta que se sabe como distinguir entre extremos relativos y puntos de inflexión.

B. 4. a) *(1,25 puntos)* Si sólo se efectúa el cambio de variable pero no se termina la integral, se otorgará un máximo de 0,5 puntos. Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta.

b) *(1,25 puntos)* Los pasos para el cálculo del límite deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

A. 1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda x + 4y + 12z &= 0 \\ 2x + y + 4z &= \lambda \\ \lambda x + y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

a) *(1 punto)* Determine los valores de λ para los que el sistema de ecuaciones tiene solución única.

b) *(1,5 puntos)* Resuelva el sistema, si es posible, cuando $\lambda = 4$ y cuando $\lambda = 0$.

SOLUCIÓN.

a) Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 4 & 12 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & \lambda \\ \lambda & 1 & 6 & 0 \end{array}\right)$

El sistema tiene solución única cuando $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 3$. Estudiemos el rango de A para los distintos valores del parámetro:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 4 & 12 \\ 2 & 1 & 4 \\ \lambda & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6\lambda + 16\lambda + 24 - 12\lambda - 4\lambda - 48 = 6\lambda - 24 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = 4 \ \Rightarrow \ \text{el sistema tiene solución única } \forall\, \lambda \neq 4.$$

b) · Para $\lambda = 4$: $\operatorname{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Orlemos este menor con los términos independientes para ver cuál es el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 48 - 96 \neq 0 \ \Rightarrow \ \operatorname{rg} B = 3 \ \Rightarrow \ \operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg} B \ \Rightarrow \ \text{el sistema es incompatible, no tiene solución}$$

· Para $\lambda = 0$, el sistema es compatible determinado. Puesto que se trata ahora de un sistema homogéneo, la única solución es la trivial: $x = y = z = 0$

A. 2. a) *(1,25 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi: 2x + 3y - z = 1$$

$$\pi': \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = -1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$

b) *(1,25 puntos)* Encuentre la recta que pasa por el punto $P = (0, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π'. Escriba la ecuación de la recta como intersección de dos planos.

SOLUCIÓN.

a) Escribamos el plano π' en forma general: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-1 \\ 2 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = -z - 1 + 2y - 2 + 2x - y + 1 = 2x + y - z - 2 = 0$

En el sistema formado por las ecuaciones de ambos planos $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$ se tiene: $\text{rg}\,A=\text{rg}\,B=2 \;\Rightarrow$ los planos se cortan en una recta.

b) La recta queda determinada por el punto $P(0,1,1)$ y un vector normal al plano π': $\vec{n}=(2,1,-1)$.

Su ecuación continua es: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=2y-2 \\ -x=2z-2 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x-2y+2=0 \\ x+2z-2=0 \end{cases}$

A. 3. Sea la función:

$$f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}$$

a) *(0,5 puntos)* Determine su dominio de definición.

b) *(1 punto)* Encuentre las asíntotas que tenga esa función.

c) *(1 punto)* Considere ahora la función:

$$g(x)=\frac{(x+2)^2}{x+3}$$

Encuentre sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN.

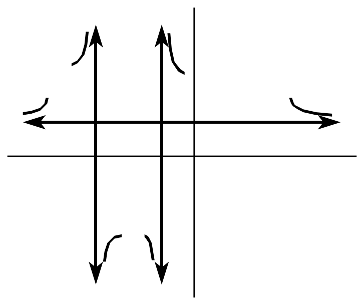
a) $f(x)$ es una función racional: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Su dominio es $D(f)=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R} \,/\, Q(x)=0\}$.

Tenemos: $x^2+4x+3=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{-4\pm 2}{2}= \begin{cases} x=-3 \\ x=-1 \end{cases} \;\Rightarrow\; D(f)=\mathbb{R}-\{-3,-1\}$

b) · Asíntotas verticales: $x=-3$ y $x=-1$ pues $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}=\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}=\infty$

Además: $\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}=+\infty$



· Asíntota horizontal: $y=1$ pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}=1$

Además: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}=1^+$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}=1^+$

c) $g'(x)=\dfrac{2(x+2)(x+3)-(x+2)^2}{(x+3)^2}=\dfrac{(x+2)[2x+6-x-2]}{(x+3)^2}=\dfrac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}=0 \;\Rightarrow\; x=-2\;,\; x=-4$

Se tiene:

	-4		-3		-2	
g ' > 0		**g ' < 0**		**g ' < 0**		**g ' > 0**

Es decir: la función es creciente en $(-\infty,-4)\cup(-2,+\infty)$ y decreciente en $(-4,-3)\cup(-3,-2)$

· Los posibles puntos de máximo o de mínimo relativos son los de abscisas $x=-4$ y $x=-2$. En $x=-4$ la función tiene un máximo relativo puesto que es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha y en $x=-2$ un mínimo relativo porque es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha.

A. 4. a) *(1,25 puntos)* Calcule:

$$\int_2^3 \frac{1}{2x^2-4x+2}\,dx$$

b) *(1,25 puntos)* Determine el límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+2\ln(x)+[\ln(x)]^2}{x[1+\ln(x)]}$$

SOLUCIÓN.

a) $2x^2-4x+2=2\left(x-1\right)^2$.

Obtengamos una primitiva de la función: $\int \frac{1}{2x^2-4x+2}\,dx=\int \frac{1}{2\left(x-1\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int \left(x-1\right)^{-2}\,dx=\frac{1}{2}\frac{\left(x-1\right)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{2\left(x-1\right)}$

Se tiene entonces: $\int_2^3 \frac{1}{2x^2-4x+2}\,dx=\left[-\frac{1}{2\left(x-1\right)}\right]_2^3=\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+2\ln(x)+\left[\ln(x)\right]^2}{x\left[1+\ln(x)\right]}=\frac{\infty}{\infty}$. Apliquemos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2\ln(x)+\left[\ln(x)\right]^2}{x\left[1+\ln(x)\right]}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}+2\ln(x)\frac{1}{x}}{\left[1+\ln(x)\right]+x\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\left[1+\ln(x)\right]}{x}}{2+\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left[1+\ln(x)\right]}{x\left[2+\ln(x)\right]}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\frac{1}{x}}{\left[2+\ln(x)\right]+x\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{3+\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x\left[3+\ln(x)\right]}=\frac{2}{\infty}=0$$

OPCIÓN B

B. 1. Sean A y B las dos matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -2 & 1\\ 0 & -1\\ 3 & a\end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* ¿Para qué valores de a existe la inversa de AB? ¿Y la de BA?

b) *(1,5 puntos)* Encuentre la inversa de la matriz:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

Compruebe que cuando la matriz encontrada se multiplica por la izquierda por C, se obtiene la identidad.

SOLUCIÓN.

a) $AB=\begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1\\ 0 & -1\\ 3 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2a & a-1\\ 3 & a-1\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix} -2 & 1\\ 0 & -1\\ 3 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2a & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 3a & a+3 & a\end{pmatrix}$

$\cdot\ \begin{vmatrix} -2a & a-1 \\ 3 & a-1 \end{vmatrix} = -2a^2+2a-3a+3=-2a^2-a+3=0 \;\Rightarrow\; a=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{-4}=\frac{1\pm 5}{-4} \begin{cases} a=-\frac{3}{2} \\ a=1 \end{cases}$

Por tanto, $\exists (AB)^{-1}\ \ \forall a \neq -\frac{3}{2}$ y 1

$\cdot\ \begin{vmatrix} -2a & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3a & a+3 & a \end{vmatrix} = 2a^2+3a+3a-2a^2-6a=0\quad \forall a \;\Rightarrow$ No existe la matriz inversa de BA para ningún valor de a.

b) $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 32+18+18-24-24-18=2$

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjunta}} (\text{Adj}\,C)=\begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} (\text{Adj}\,C)^t=\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} C^{-1}=\frac{(\text{Adj}\,C)^t}{|C|}=$$

$$=\begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 & -3/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C\cdot C^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 & -3/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ luego, en efecto, se cumple.

B. 2. Dadas las rectas:

$$r:\ \frac{x-1}{k}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1},\quad \text{con}\quad k\neq 0$$

$$s:\ \begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

a) *(2 puntos)* Estudie las posiciones relativas de las rectas según los diferentes valores de k .

b) *(0,5 puntos)* ¿Existen valores de k para los que las rectas son perpendiculares?

SOLUCIÓN.

a) $\vec{u}=(k,2,-1)$ es un vector direccional de r y $P(1,2,0)$ un punto de la misma.

Busquemos un vector direccional de s:

$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x-y \\ y=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x-2x+1=-x+1 \\ y=2x-1 \end{cases} \Rightarrow$ dos puntos de s: $\left| \begin{matrix} A(0,-1,1) \\ B(1,1,0) \end{matrix} \right. \Rightarrow \vec{v}=\overrightarrow{AB}=(1,2,-1)$

· Si $k=1$: $\vec{u}\,||\,\vec{v} \Rightarrow$ r y s son coincidentes o paralelas. Como $P\notin s$ pues sus coordenadas no verifican las ecuaciones de s, las dos rectas son paralelas.

· Si $k\neq 1$: las rectas se cruzan o se cortan. Consideremos un vector de origen en r y extremo en s: $\overrightarrow{PB}=(0,-1,0)$ y veamos si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PB}$ son linealmente dependientes (las rectas se cortan) o independientes (las rectas se cruzan):

$\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1-k\neq 0\quad \forall k\neq 1 \;\Rightarrow$ los vectores son independientes y por tanto las rectas se cruzan.

b) Las rectas son perpendiculares si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \;\Leftrightarrow\; k+4+1=0 \;\Rightarrow\; k=-5$

B. 3. a) Considere las funciones:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = 3 - x.$$

(0,5 puntos) Determine los puntos de corte de esas dos funciones.

(1 punto) Determine el área encerrada entre esas dos funciones.

b) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$h(x) = x^6 + 2.$$

SOLUCIÓN.

a) · Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones de ambas funciones:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow \; 3 - x = x^2 + 1 \;\Rightarrow\; x^2 + x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = -2 \;\Rightarrow\; (-2, 5) \\ x = 1 \;\Rightarrow\; (1, 2) \end{cases}$$

· Consideremos la función diferencia: $d(x) = g(x) - f(x) = 3 - x - x^2 - 1 = -x^2 - x + 2$

Tenemos: $A = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = -3 - \frac{1}{2} + 8 = \frac{9}{2}\, u^2$

b) · Máximos y mínimos relativos: $h'(x) = 6x^5 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ (posible punto de máximo o de mínimo)

$h''(x) = 30x^4 : \; h''(0) = 0$; $h'''(x) = 120x^3 : \; h'''(0) = 0$; $h^{IV}(x) = 360x^2 : \; h^{IV}(0) = 0$

$h^{V}(x) = 720x : \; h^{V}(0) = 0$; $h^{VI}(x) = 720 > 0$

Como la primera derivada que no se anula es de orden par y es positiva, en $x = 0$ $h(x)$ tiene un mínimo relativo.

· La función no tiene puntos de inflexión pues en $x = 0$ que anula la segunda derivada, ya sabemos que hay un mínimo relativo.

B. 4. a) *(1,25 puntos)* Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule:

$$\int \frac{e^x}{1 - e^{-x}}\, dx$$

b) *(1,25 puntos)* Calcule:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\sqrt{x}}$$

SOLUCIÓN.

a) $t = e^x \;\Rightarrow\; dt = e^x\, dx$

$$\int \frac{e^x}{1 - e^{-x}}\, dx = \int \frac{dt}{1 - \frac{1}{t}} = \int \frac{t}{t-1}\, dt = \int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = t + \ln\left|t - 1\right| + K = e^x + \ln\left|e^x - 1\right| + K$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\sqrt{x}} = 1^{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x-1}{x+1} - 1\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x-1-x-1}{x+1}\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{-2}{x+1}\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\sqrt{x} \cdot \frac{x+1}{-2} \cdot \frac{-2}{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{-2\sqrt{x}}{x+1}} = e^0 = 1$$

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

<u>OPCIÓN A</u>

1. *(2,5 puntos)* Sea m un número real y considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Determine todos los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

b) *(1 punto)* Determine, si existe, la inversa de A cuando $m = 0$.

c) *(0,5 puntos)* Determine, si existe, la inversa de A^2cuando $m = 0$.

2. *(2,5 puntos)* Dados el punto $P \equiv (1, -1, 0)$, y la recta:

$$s : \begin{cases} -2x \quad\quad + z - 1 = 0 \\ 3x - y \quad\quad - 3 = 0 \end{cases}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine la ecuación general del plano $(Ax + By + Cz + D = 0)$ que contiene al punto P y a la recta s.

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman el plano $\pi : 2x + y - z + 1 = 0$ y la recta s.

3. *(2,5 puntos)* Considere la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine las asíntotas, horizontales, verticales y oblicuas, que tenga la función $f(x)$.

b) *(1 punto)* Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. ¿Tiene la función $f(x)$ algún máximo o mínimo relativo?

4. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Usando el cambio de variable $t = ln(x)$, determine el valor de la integral:

$$\int \frac{1 + 3\ln(x) + (\ln(x))^3}{x(1 - (\ln(x))^2)} dx$$

b) *(1,25 puntos)* Determine el límite:

$$\lim_{x \to 0} \left(cos(x)\right)^{\left(\frac{1}{sen(x)}\right)^2}$$

OPCIÓN B

1. *(2,5 puntos)* Considere las matrices de orden 2 x 2 siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine dos matrices M y N de orden 2 x 2 tales que:

$$\begin{cases} AM + BN & = D \\ AM & = N \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Se considera una matriz G de orden 3 x 3, cuyas columnas se representan por C_1, C_2, C_3 y cuyo determinante vale 2. Considere ahora la matriz H cuyas columnas son C_3, $C_3 + C_2$, $3C_1$, ¿cuál es el determinante de esta nueva matriz H?

2. *(2,5 puntos)* Considere las rectas:

$$r: \begin{cases} 2x - 4z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad s: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{a} = \frac{z-(1/2)}{1}$$

a) *(2 puntos)* Determine la posición relativa de dichas rectas, según los diferentes valores de a.

b) *(0,5 puntos)* Si $a = 2$, determine el ángulo que forman las rectas r y s.

3. *(2,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$g(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

b) *(1 punto)* Determine:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x^2 + x}$$

4. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Determine la integral:

$$\int x^2\, sen(2x) dx$$

b) *(1,25 puntos)* Determine el área máxima que puede tener un rectángulo cuya diagonal mide 8 metros. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima?

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

OPCIÓN A

A. 1. *(2,5 puntos)*

- **a)** *(1 punto)* Determinación de todos los valores m: 1 punto.
- **b)** *(1 punto)* La determinación de la matriz inversa puede hacerse por cualquier método. Si se realiza por el método de Gauss-Jordan, el proceso es más largo que si se calcula mediante determinantes y los errores numéricos pueden ser más habituales. En ese caso deberá valorarse más el proceso que los cálculos, siempre que éstos tengan sentido.
- **c)** *(0,5 puntos)* Se considera válido cualquier método para determinar la inversa.

A. 2. *(2,5 puntos)*

- **a)** *(1,5 puntos)* Si no se proporciona la ecuación general del plano sino que se da en forma vectorial o paramétrica, la calificación máxima será de 0,75 puntos.
- **b)** *(1 punto)* Se considera igual de correcto proporcionar el ángulo o alguna de sus razones trigonométricas.

A. 3. *(2,5 puntos)*

- **a)** *(1,5 puntos)* La calificación debe tener en cuenta que se analice la existencia de los tres tipos de asíntotas, aunque sea para razonar que no existen.
- **b)** *(1 punto)* Determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento: 0,5 puntos. Determinación de máximos y mínimos relativos: 0, 5 puntos.

A. 4. *(2,5 puntos)*

- **a)** *(1,25 puntos)* Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta. Si sólo se realiza el cambio de variable pero no se calcula la integral, la puntuación máxima será de 0,5 puntos. Si no se escribe la constante de integración, la calificación máxima será de 1 punto.
- **b)** *(1,25 puntos)* Los pasos para el cálculo del límite deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta. Si se realiza un mismo proceso varias veces no debe exigirse una reiteración de los argumentos o explicaciones todas las veces.

OPCIÓN B

B. 1. *(2,5 puntos)*

- **a)** *(1,5 puntos)* Los cálculos son muy sencillos como para que no haya dificultad en determinar las matrices buscadas. No se exige una comprobación final, pero si se hace puede ser valorada.
- **b)** *(1 punto)* La calificación debe tener en cuenta los razonamientos empleados para responder la cuestión.

B. 2. *(2,5 puntos)*

- **a)** *(2 puntos)* Debe precisarse la posición relativa de las rectas para obtener la calificación máxima.
- **b)** *(0,5 puntos)* Se considera igualmente correcto proporcionar el ángulo o alguna de sus razones trigonométricas.

B. 3. *(2,5 puntos)*

- **a)** *(1,5 puntos)* Estudio de máximos y mínimos relativos: 0,75 puntos. Estudio de puntos de inflexión: 0,75 puntos.
- **b)** *(1 punto)* Los pasos para la determinación del límite deben estar claros y la calificación deberá tenerlos en cuenta.

B. 4. *(2,5 puntos)*

- **a)** *(1,25 puntos)* Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación deberá tenerlos en cuenta. Si se realiza un mismo proceso varias veces no debe exigirse una reiteración de los argumentos o explicaciones todas las veces. Si no se escribe la constante de integración la calificación máxima será de 1 punto.
- **b)** *(1,25 puntos)* Los pasos para la determinación del rectángulo deben estar claros y la calificación deberá tenerlos en cuenta.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

<u>OPCIÓN A</u>

1. *(2,5 puntos)* Sea m un número real y considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Determine todos los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

b) *(1 punto)* Determine, si existe, la inversa de A cuando $m = 0$.

c) *(0,5 puntos)* Determine, si existe, la inversa de A^2 cuando $m = 0$.

SOLUCIÓN

a) $\exists A^{-1} \ \forall m$ tal que $|A| \neq 0$: $\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 - 1 \neq 0 \ \forall m \Rightarrow \exists A^{-1} \ \forall m$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos la matriz adjunta de A:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$; $A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ y por tanto: $(\text{Adj } A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculemos ahora la matriz traspuesta de la adjunta: $(\text{Adj } A)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Y como $|A| = -1$, la matriz inversa de A es: $A^{-1} = \dfrac{(\text{Adj } A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A^2 = A \cdot A \Rightarrow (A^2)^{-1} = (A \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. *(2,5 puntos)* Dados el punto $P \equiv (1, -1, 0)$, y la recta:

$$s : \begin{cases} -2x & + z - 1 = 0 \\ 3x - y & - 3 = 0 \end{cases}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine la ecuación general del plano $(Ax + By + Cz + D = 0)$ que contiene al punto P y a la recta s.

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman el plano $\pi : 2x + y - z + 1 = 0$ y la recta s.

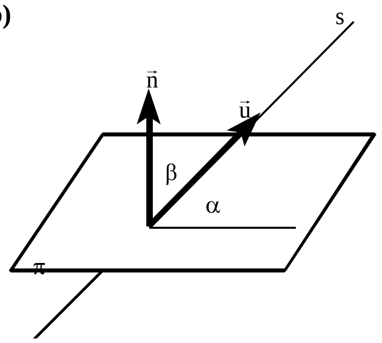
SOLUCIÓN.

a) La ecuación del haz de planos que contienen a la recta s es: $-2x + z - 1 + \lambda(3x - y - 3) = 0$.

Obtengamos la ecuación del plano que contiene al punto $P(1,-1,0)$:

$$-2-1+\lambda(3+1-3)=0 \;\Rightarrow\; \lambda=3 \;\Rightarrow\; -2x+z-1+9x-3y-9=0 \;\Rightarrow\; 7x-3y+z-10=0$$

b)



El ángulo α que forman el plano y la recta es el complementario del β que forman los vectores $\vec{u}$ (direccional de la recta) y $\vec{n}$ (normal al plano).

- Obtengamos dos puntos de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Para } x=0:\; y=-3\;,\; z=1 \;\Rightarrow\; A(0,-3,1) \\ \text{Para } x=1:\; y=0\;,\; z=3 \;\Rightarrow\; B(1,0,3) \end{array}\right| \quad \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,3,2)$$

- El vector normal al plano: $\vec{n}=(2,1,-1)$

Entonces: $\cos\beta=\left|\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{u}||\vec{n}|}\right|=\dfrac{2+3-2}{\sqrt{1+9+4}\,\sqrt{4+1+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{84}}\simeq 0{,}3273 \;\Rightarrow\; \beta=70^{\circ}53'36'' \;\Rightarrow\; \alpha=90^{\circ}-\beta=19^{\circ}\,6'\,24''$

3. *(2,5 puntos)* Considere la función:

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x^2+2}$$

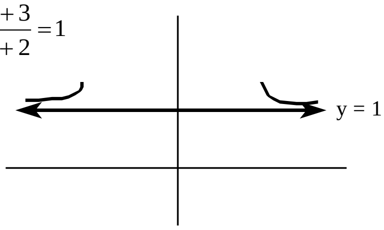
a) *(1,5 puntos)* Determine las asíntotas, horizontales, verticales y oblicuas, que tenga la función $f(x)$.

b) *(1 punto)* Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. ¿Tiene la función $f(x)$ algún máximo o mínimo relativo?

SOLUCIÓN.

a)
- Asíntotas verticales: no tiene
- Asíntotas horizontales: $y=1$ es una asíntota horizontal pues $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2+2}=1$

Además: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x^2+2}=1^{+}$ y $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x^2+2}=1^{+}$



b) $f'(x)=\dfrac{2x\left(x^2+2\right)-\left(x^2+3\right)2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\dfrac{-2x}{\left(x^2+2\right)^2}=0 \;\Rightarrow\; x=0$. Se tiene:

f' > 0	0	f' < 0

es decir, la función es creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,+\infty)$.

Como la función es continua, en $x=0$ tiene un máximo relativo pues pasa de creciente a decreciente.

4. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Usando el cambio de variable $t = ln(x)$, determine el valor de la integral:

$$\int \frac{1 + 3\ln(x) + (\ln(x))^3}{x(1 - (\ln(x))^2)} dx$$

b) *(1,25 puntos)* Determine el límite:

$$\lim_{x\to 0}(cos(x))^{\left(\frac{1}{sen(x)}\right)^2}$$

SOLUCIÓN.

a) $t = \ln(x) \;\Rightarrow\; dt = \frac{1}{x}dx \;\Rightarrow\; dx = x\,dt$

$$\int \frac{1+3\ln(x)+(\ln(x))^3}{x\left(1-(\ln(x))^2\right)}dx = \int \frac{1+3t+t^3}{\cancel{x}(1-t^2)}\cancel{x}\,dt = \int \frac{t^3+3t+1}{-t^2+1}dt = \int\left(-t+\frac{4t+1}{1-t^2}\right)dt = -\frac{t^2}{2}+\int\frac{4t+1}{1-t^2}dt = (1)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} t^3 \quad +3t+1 & \underline{\left|\, -t^2+1\right.} \\ \underline{-t^3 \quad +t \qquad} & \quad -t \\ \qquad 4t\;+1 & \end{array}}$$

$$\frac{4t+1}{1-t^2} = \frac{A}{1+t}+\frac{B}{1-t} = \frac{A-At+B+Bt}{(1+t)(1-t)} = \frac{(-A+B)t+A+B}{1-t^2} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} -A+B=4 \\ A+B=1\end{array}\right. \;\Rightarrow\; 2B=5 \;\Rightarrow\; B=\frac{5}{2} \quad , \quad A=1-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$\int\frac{4t+1}{1-t^2}dt = -\frac{3}{2}\int\frac{dt}{1+t}+\frac{5}{2}\int\frac{dt}{1-t} = -\frac{3}{2}\ln(1+t)+\frac{5}{2}\ln(1-t)$$

$$(1) = -\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}\ln(1+t)+\frac{5}{2}\ln(1-t)+K = -\frac{1}{2}\ln^2(x)-\frac{3}{2}\ln(1+\ln(x))+\frac{5}{2}\ln(1-\ln(x))+K$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\left(\frac{1}{\text{sen}\,x}\right)^2} = 1^\infty$.

- Una forma: aplicamos logaritmos y tenemos en cuenta que $\ln \lim f(x) = \lim \ln f(x)$:

$$\ln \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\left(\frac{1}{\text{sen}\,x}\right)^2} = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{\text{sen}\,x}\right)^2\cdot\ln(\cos x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(\cos x)}{\text{sen}^2 x}\right] = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{-\text{sen}\,x}{\cos x}}{2\,\text{sen}\,x\cos x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{-\text{sen}\,x}{2\,\text{sen}\,x\cos^2 x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-1}{2\cos^2 x}\right] = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\left(\frac{1}{\text{sen}\,x}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}$$

- Otra forma: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\left(\frac{1}{\text{sen}\,x}\right)^2} = 1^\infty = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\left(\frac{1}{\text{sen}\,x}\right)^2} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\text{sen}^2 x}} \overset{L'H}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\text{sen}x}{2\,\text{sen}\,x\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos x}} = e^{-\frac{1}{2}}$

OPCIÓN B

1. *(2,5 puntos)* Considere las matrices de orden 2 x 2 siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -2 & -1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine dos matrices M y N de orden 2 x 2 tales que:

$$\begin{cases} AM+BN=D\\ AM=N\end{cases}$$

b) *(1 punto)* Se considera una matriz G de orden 3 x 3, cuyas columnas se representan por C_1, C_2, C_3 y cuyo determinante vale 2. Considere ahora la matriz H cuyas columnas son $C_3,\ C_3+C_2,\ 3C_1$, ¿cuál es el determinante de esta nueva matriz H?

SOLUCIÓN.

a) $\begin{cases} AM+BN=D\\ AM=N\end{cases} \Leftrightarrow\ N+BN=D\ \Leftrightarrow\ (I+B)N=D\ \Leftrightarrow\ N=(I+B)^{-1}\cdot D$

$$I+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Obtengamos $(I+B)^{-1}$:

$$(\mathrm{Adj}(I+B))=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\ ,\ (\mathrm{Adj}(I+B))^t=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\ ,\ (I+B)^{-1}=\frac{(\mathrm{Adj}(I+B))^t}{|I+B|}=\begin{pmatrix}1/4 & -1/2\\ 1/4 & 1/2\end{pmatrix} \text{ pues } |I+B|=\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=4$$

Por tanto: $N=(I+B)^{-1}\cdot D=\begin{pmatrix}1/4 & -1/2\\ 1/4 & 1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

De la segunda ecuación: $M=A^{-1}\cdot N$

Calculemos A^{-1}: $(\mathrm{Adj}\,A)=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}\ ,\ (\mathrm{Adj}\,A)^t=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\ ,\ A^{-1}=\frac{(\mathrm{Adj}\,A)^t}{|A|}=\begin{pmatrix}1/9 & -4/9\\ -2/9 & -1/9\end{pmatrix}$ pues $|A|=\begin{vmatrix}1 & -4\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-9$

Y por tanto: $M=A^{-1}\cdot N=\begin{pmatrix}1/9 & -4/9\\ -2/9 & -1/9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/9 & 2/3\\ -4/9 & -1/3\end{pmatrix}$

b) $|G|=|C_1\ \ C_2\ \ C_3|=2$

$$|H|=|C_3\ \ C_3+C_2\ \ 3C_1|\overset{(1)}{=}|C_3\ \ C_3\ \ 3C_1|+|C_3\ \ C_2\ \ 3C_1|\overset{(2)}{=}0-|3C_1\ \ C_2\ \ C_3|\overset{(3)}{=}-3|C_1\ \ C_2\ \ C_3|=-3|G|=-6$$

Propiedades aplicadas:

(1) Descomposición de un determinante en suma de otros dos por tener la segunda columna como una suma.

(2) Un determinante con dos columnas iguales es nulo. Al permutar dos columnas, el determinante cambia su signo.

(3) Cuando todos los elementos de una columna están multiplicados por un mismo número, su determinante queda multiplicado por ese número

2. *(2,5 puntos)* Considere las rectas:

$$r: \begin{cases} 2x - 4z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad s: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{a} = \frac{z-(1/2)}{1}$$

a) *(2 puntos)* Determine la posición relativa de dichas rectas, según los diferentes valores de a.

b) *(0,5 puntos)* Si $a = 2$, determine el ángulo que forman las rectas r y s.

SOLUCIÓN.

a) Obtengamos un vector direccional de la recta r:

$$\begin{cases} 2x - 4z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Para } z = 0: \ x = 1 \ , \ y = 0 \ \Rightarrow \ A(1,0,0) \\ \text{Para } z = 1: \ x = 3 \ , \ y = -3 \ \Rightarrow \ B(3,-3,1) \end{matrix} \Rightarrow \ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2,-3,1)$$

De la recta s, un punto es $P\left(0,-2,\frac{1}{2}\right)$ y un vector direccional $\vec{v} = (2, a, 1)$

• Si $a = -3$: $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección (sus coordenadas son proporcionales) y las rectas son paralelas o coinciden. Para decidir entre una posición u otra, consideramos un vector con origen en r y extremo en s:

$\overrightarrow{AP} = \left(-1,-2,\frac{1}{2}\right) \parallel \vec{w} = (2,4,-1)$ y como no tiene la misma dirección que $\vec{u}$ y $\vec{v}$, las rectas son paralelas.

• Si $a \neq -3$: $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distintas direcciones (sus coordenadas no son ahora proporcionales) y las rectas se cortan o se cruzan. Estudiemos la dependencia lineal de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & a & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2a - 6 + 8 - 2a - 6 - 8 = -4a - 12 \neq 0 \ \text{ para } a \neq -3 \quad \Rightarrow \quad \text{las dos rectas se cruzan.}$$

b) Sea α el ángulo que forman las dos rectas.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{|4-6+1|}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3\sqrt{14}} \simeq 0{,}0891 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 84^{\circ}\, 53'\, 20''$$

3. *(2,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$g(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

b) *(1 punto)* Determine:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x^2 + x}$$

SOLUCIÓN.

a) $g'(x) = \dfrac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \dfrac{x\,e^x}{(x+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ (punto crítico)

$$g''(x)=\frac{\left(e^x+xe^x\right)(x+1)^2-xe^x\,2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{e^x(x+1)\left[(x+1)^2-2x\right]}{(x+1)^4}=\frac{e^x\left(x^2+1\right)}{(x+1)^3}$$

$g''(0)>0 \;\Rightarrow\;$ En $x=0$ la función tiene un mínimo relativo: $(0\,,1)$

$g(x)$ no tiene puntos de inflexión pues $g''(x)\neq 0\;\; \forall x.$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x^2+x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x^2+x}\right)\left(\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}\right)}{\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x+2-3x^2-x}{\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{3x^2}+\sqrt{3x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

4. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Determine la integral:

$$\int x^2\,sen(2x)dx$$

b) *(1,25 puntos)* Determine el área máxima que puede tener un rectángulo cuya diagonal mide 8 metros. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima?

SOLUCIÓN.

a) Utilizamos el método de integración por partes: $\int u\,dv=u\,v-\int v\,du$

$u=x^2 \;\Rightarrow\; du=2x\,dx$

$dv=sen(2x)dx \;\Rightarrow\; v=\frac{1}{2}\int sen(2x)\cdot 2dx=-\frac{1}{2}\cos(2x)$

$\Rightarrow\; \int x^2 sen(2x)dx=-\frac{1}{2}x^2\cos(2x)+\frac{1}{2}2\int x\cos(2x)dx \;=(1)$

Resolvamos $\int x\cos(2x)dx$ también por partes:

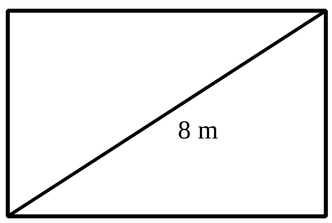
$u=x \;\Rightarrow\; du=dx$

$dv=\cos(2x)dx \;\Rightarrow\; v=\frac{1}{2}\int\cos(2x)2dx=\frac{1}{2}sen(2x)$

$\Rightarrow\; \int x\cos(2x)dx=\frac{1}{2}x\,sen(2x)-\frac{1}{2}\int sen(2x)dx=\frac{1}{2}x\,sen(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)$

Por tanto: $(1)=-\frac{x^2}{2}\cos(2x)+\frac{x}{2}sen(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+K$

b) La función que debe ser máxima es la superficie del rectángulo: $S=x\cdot y$



La relación entre las variables x e y: $x^2+y^2=64 \;\Rightarrow\; y=\sqrt{64-x^2}$

Por tanto: $S=x\cdot y=x\cdot\sqrt{64-x^2}=\sqrt{64x^2-x^4}$ máxima

$$S'=\frac{128x-4x^3}{2\sqrt{64x^2-x^4}}=\frac{64x-2x^3}{\sqrt{64x^2-x^4}}=0 \;\Rightarrow\; 2x\left(32-x^2\right)=0 \;\begin{cases} x=0\\ x=4\sqrt{2}\end{cases}$$

De los dos valores críticos, $x=0\;\;(y=8)$ hace la superficie del rectángulo mínima y $x=4\sqrt{2}\;\;\left(y=4\sqrt{2}\right)$, la hace máxima.

Se trata por tanto de un cuadrado de lado $4\sqrt{2}$ m y de área $32\ m^2$.

Universidad Zaragoza 1542

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2014
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(2,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Sean A y B matrices 2 x 2. Determine dichas matrices sabiendo que verifican las siguientes ecuaciones:

$$A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$
$$2A - B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) *(1 punto)* Sean C y D las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine el determinante: $|5(CD)^{-1}|$, donde $(C\,D)^{-1}$ es la matriz inversa de $(C\,D)$.

2. *(2,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine el valor o valores de m, si existen, para que la recta

$$r : \begin{cases} mx + y = 2 \\ x + mz = 3 \end{cases}$$

sea paralela al plano:

$$\pi : 2x - y - z + 6 = 0$$

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto $P = (2, 1, 1)$ a la recta r cuando $m = 2$.

3. *(2,5 puntos)* Considere la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{2x - 6}$$

a) *(1,25 puntos)* Determine el dominio y las asíntotas, si existen, de esa función.

b) *(1,25 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de esa función.

4. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* La derivada de una función $f(x)$ es:

$$(x-1)^3(x-3)$$

Determine la función $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 1$.

b) *(1,25 puntos)* Determine el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 + 2x + 2}{x^3 + 1} \right)^{3x^2 + x + 1}$$

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(2,5 puntos)* Determine para qué valores de a el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\begin{aligned} a\,x - 3\,y + 6\,z &= 3 \\ a\,x + 3\,y + a\,z &= 6 \\ -a\,x - 6\,y + 9\,z &= 0 \end{aligned}$$

2. *(2,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi : x - y - z = 0$$

$$\pi' : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda - \mu \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = \quad \mu \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto $P = (1, 0, 1)$. Escriba la ecuación de la recta como intersección de dos planos.

3. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 2 \\ 2x + a & si \quad 2 \leq x \leq 4 \\ -x^2 + 3x + b & si \quad x > 4 \end{cases}$$

Determine los valores de a y b para que la función sea continua.

b) *(1,25 puntos)* Supongamos ahora que $a = 0$. Usando la definición de derivada, estudie la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 2$.

4. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2$, determine el área encerrada entre ambas funciones.

b) *(1,25 puntos)* Calcule la integral:

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}\,dx$$

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

OPCIÓN A

A. 1. *(2,5 puntos)*

- **a)** *(1,5 puntos)* Los cálculos son sencillos para que se puedan determinar sin dificultad las matrices A y B.
- **b)** *(1 punto)* La calificación debe tener en cuenta los cálculos y propiedades usadas, si se hace referencia a alguna. No obstante, si no se usa ninguna propiedad y se realizan todos los cálculos directamente, no debe efectuarse ninguna penalización ya que ésta irá implícita en el consumo de tiempo necesario para efectuar todos los cálculos.

A. 2. *(2,5 puntos)*

- **a)** *(1,5 puntos)* La calificación debe tener en cuenta si se determinan todos los posibles valores de m.
- **b)** *(1 punto)* Distancia: 1 punto.

A. 3. *(2,5 puntos)*

- **a)** *(1,25 puntos)* Dominio: 0,25 puntos. Asíntotas: 1 punto; la calificación debe tener en cuenta que se analice la existencia de los tres tipos de asíntotas, aunque sea para decir que no existen.
- **b)** *(1,25 puntos)* Determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento: 0,75 puntos. Análisis de máximos y mínimos relativos: 0, 5 puntos.

A. 4. *(2,5 puntos)*

- **a)** *(1,25 puntos)* Los cálculos son suficientemente sencillos como para que no haya dificultad en determinar la función. Si no se determina la constante la calificación máxima será de 0,75 puntos.
- **b)** *(1,25 puntos)* Los pasos para el cálculo del límite deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta.

OPCIÓN B

B. 1. *(2,5 puntos)* La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles y los razonamientos empleados para la clasificación del sistema.

B. 2. *(2,5 puntos)*

- **a)** *(1,5 puntos)* Determinación de que los planos se cortan: 1,5 puntos.

b) *(1 punto)* Si no se proporciona la recta como intersección de dos planos la calificación máxima será de 0,5 puntos.

B. 3. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* La determinación de las constantes no ofrece especial dificultad y los pasos en la determinación de las mismas deben estar claros y la calificación debe tenerlo en cuenta.

b) *(1,25 puntos)* El uso de la definición de derivada a través de los límites debe estar claro.

B. 4. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Los pasos y razonamientos para el cálculo del área deben estar claros y la calificación debe tenerlo en cuenta.

b) *(1,25 puntos)* Los pasos y razonamientos para el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación debe tenerlo en cuenta.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(2,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Sean A y B matrices 2×2. Determine dichas matrices sabiendo que verifican las siguientes ecuaciones:

$$A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$
$$2A - B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) *(1 punto)* Sean C y D las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine el determinante: $|5(CD)^{-1}|$, donde $(C\,D)^{-1}$ es la matriz inversa de $(C\,D)$.

SOLUCIÓN.

a) Multiplicamos por 3 la segunda ecuación: $6A - 3B = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

Sumamos ahora ambas ecuaciones: $7A = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Para calcular B, sustituimos A en la segunda ecuación y despejamos B:

$$B = 2A - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $C\,D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Calculemos la inversa de $C\,D$: $|C\,D| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

$$C\,D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adjunta}} \mathrm{Adj}(CD) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta}} (\mathrm{Adj}(CD))^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}} (CD)^{-1} = \frac{(\mathrm{Adj}(CD))^t}{|CD|} = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $5(CD)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 15/2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |5(CD)^{-1}| = \begin{vmatrix} -5 & 15/2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 25 - \frac{75}{2} = -\frac{25}{2}$

2. *(2,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine el valor o valores de m, si existen, para que la recta

$$r : \begin{cases} mx + y = 2 \\ x + mz = 3 \end{cases}$$

sea paralela al plano:

$$\pi : 2x - y - z + 6 = 0$$

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto $P = (2, 1, 1)$ a la recta r cuando $m = 2$.

SOLUCIÓN.

a) La recta será paralela al plano cuando un vector direccional de la recta sea perpendicular a un vector normal al plano.

Para obtener un vector direccional de la recta, obtengamos dos puntos de la misma:

$$\left|\begin{array}{c} \text{Para } z=0: \quad x=3 \ , \ y=2-3m \ \Rightarrow \ A\left(3\,,\,2-3m\,,\,0\right) \\ \text{Para } z=1: \quad x=3-m \ , \ y=2-3m+m^2 \ \Rightarrow \ B\left(3-m\,,\,2-3m+m^2\,,\,1\right) \end{array}\right| \ \Rightarrow \ \overrightarrow{AB}=\left(-m\,,\,m^2\,,\,1\right)$$

Un vector normal al plano es $\vec{n}=\left(2\,,-1\,,-1\right)$

$$r \parallel \pi \ \Leftrightarrow \ \overrightarrow{AB}\perp\vec{n} \ \Leftrightarrow \ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0 \ \Rightarrow \ -2m-m^2-1=0 \ \Rightarrow \ m=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{-2}=-1$$

b) Para $m=2$, la recta r es $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+2z=3 \end{cases}$ y un vector direccional de la misma es $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\left(-2\,,4\,,1\right)$.

Hallamos el plano π' perpendicular a r que pasa por P. Su vector normal es el direccional de la recta luego su ecuación es $-2x+4y+z+D=0$ y como contiene al punto P: $\quad -4+4+1+D=0 \ \Rightarrow \ D=-1 \ \Rightarrow \ \pi'\equiv -2x+4y+z-1=0$.

El punto Q de intersección de la recta r y el plano π' (proyección de P sobre r):

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+2z=3 \\ -2x+4y+z=1 \end{cases} \ \Rightarrow \ -2\left(3-2z\right)+4\left[2-2\left(3-2z\right)\right]+z=1 \ \Rightarrow \ -6+4z+8-24+16z+z=1 \ \Rightarrow \ 21z=23 \ \Rightarrow \ z=\frac{23}{21} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ x=3-2z=3-\frac{46}{21}=\frac{17}{21} \ , \ y=2-2x=2-\frac{34}{21}=\frac{8}{21} \ \Rightarrow \ Q\left(\frac{17}{21},\frac{8}{21},\frac{23}{21}\right)$$

La distancia entre el punto y la recta es la distancia entre los puntos P y Q:

$$d\left(P\,,r\right)=d\left(P\,,Q\right)=\sqrt{\left(2-\frac{17}{21}\right)^2+\left(1-\frac{8}{21}\right)^2+\left(1-\frac{23}{21}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{25}{21}\right)^2+\left(\frac{13}{21}\right)^2+\left(\frac{-2}{21}\right)^2}=\sqrt{\frac{798}{441}}=\sqrt{\frac{38}{21}}$$

– **Otra forma** –

Un punto de la recta es $A\left(3\,,-4\,,0\right)$ y su vector direccional $\vec{u}=\left(-2\,,4\,,1\right)$. Además, el vector $\overrightarrow{AP}=\left(-1\,,5\,,1\right)$.

Se tiene: $\quad d\left(P\,,r\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+16+1}}=\dfrac{\left|5\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}+10\vec{k}+\vec{j}-4\vec{i}\right|}{\sqrt{21}}=\dfrac{\left|\left(1,-1,6\right)\right|}{\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{1+1+36}}{\sqrt{21}}=\sqrt{\dfrac{38}{21}}$

3. *(2,5 puntos)* Considere la función:

$$f(x)=\frac{x^2}{2x-6}$$

a) *(1,25 puntos)* Determine el dominio y las asíntotas, si existen, de esa función.

b) *(1,25 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de esa función.

SOLUCIÓN.

a) • Por tratarse de una función racional: $\quad \text{Dom}\left(f\right)=\mathbb{R}-\left\{3\right\}$

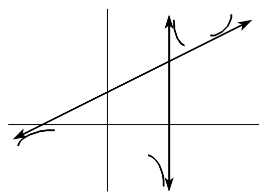
• Asíntotas verticales: $x=3$ pues $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2}{2x-6}=\infty$. Además: $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x^2}{2x-6}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x^2}{2x-6}=+\infty$

• Asíntota oblicua: $\quad f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{2x-6}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2x-6} \ \Rightarrow \ y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ es una asíntota oblicua de la función.

$$\begin{array}{rl|l} & x^2 & 2x-6 \\ \cline{3-3} & -x^2+3x & \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ \cline{2-2} & 3x & \\ & -3x+9 & \\ \cline{2-2} & 9 & \end{array}$$

Además, la posición de la gráfica respecto a la asíntota:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{2x-6}=0^- \quad y \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{9}{2x-6}=0^+$$



b) $f'(x)=\dfrac{2x(2x-6)-2x^2}{(2x-6)^2}=\dfrac{2x(2x-6-x)}{(2x-6)^2}=\dfrac{2x(x-6)}{(2x-6)^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}$

Se tiene:

f ' > 0	f ' < 0	f ' < 0	f ' > 0
	0	3	6

Luego la función es creciente en $(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$ y decreciente en $(0,6)-\{3\}$

• La función sólo es discontinua en $x=3$. En $x=0$ la función tiene un máximo relativo puesto que pasa de creciente a decreciente y en $x=6$ tiene un mínimo relativo puesto que pasa de decreciente a creciente.

4. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* La derivada de una función $f(x)$ es:

$$(x-1)^3(x-3)$$

Determine la función $f(x)$ sabiendo que $f(0)=1$.

b) *(1,25 puntos)* Determine el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1}$$

SOLUCIÓN.

a) $f(x)=\int (x-1)^3(x-3)\,dx = \left|\; x-1=t \Rightarrow x-3=t-2\ ,\ dx=dt \;\right| = \int t^3(t-2)\,dt=\int\left(t^4-2t^3\right)dt=\dfrac{t^5}{5}-2\dfrac{t^4}{4}+C=$

$=\dfrac{1}{5}(x-1)^5-\dfrac{1}{2}(x-1)^4+C$ y como $f(0)=1$: $-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{2}+C=1 \Rightarrow C=1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{17}{10}$

Por tanto: $f(x)=\dfrac{1}{5}(x-1)^5-\dfrac{1}{2}(x-1)^4+\dfrac{17}{10}$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1}=1^\infty=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x+1}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^3+1}{2x+1}}\right)^{(3x^2+x+1)\frac{x^3+1}{2x+1}\cdot\frac{2x+1}{x^3+1}}=$$

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & +2x+2 & x^3+1 \\ \cline{3-3} -x^3 & -1 & 1 \\ \hline & 2x+1 & \end{array}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^3+1}{2x+1}}\right)^{\frac{x^3+1}{2x+1}}\right]^{\frac{6x^3+5x^2+3x+1}{x^3+1}}=e^6$$

– Otra forma –

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1}=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2}{x^3+1}-1\right)\cdot\left(3x^2+x+1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2-x^3-1}{x^3+1}\right)\cdot\left(3x^2+x+1\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x^3+1}\right)\cdot\left(3x^2+x+1\right)}==e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^3+5x^2+3x+1}{x^3+1}\right)}=e^6$$

OPCIÓN B

1. *(2,5 puntos)* Determine para qué valores de a el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\begin{aligned} a\,x - 3\,y + 6\,z &= 3 \\ a\,x + 3\,y + a\,z &= 6 \\ -a\,x - 6\,y + 9\,z &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} a & -3 & 6 & 3 \\ a & 3 & a & 6 \\ -a & -6 & 9 & 0 \end{array}\right)$

El sistema es compatible determinado cuando $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 3$, es compatible indeterminado cuando $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B < 3$ y es incompatible cuando $\operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg} B$.

Estudiemos el rango de las matrices según los posibles valores del parámetro a:

$$\begin{vmatrix} a & -3 & 6 \\ a & 3 & a \\ -a & -6 & 9 \end{vmatrix} = 27a - 36a + 3a^2 + 18a + 27a + 6a^2 = 9a^2 + 36a = 0 \quad \Rightarrow \quad 9a\left(a+4\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \ , \ a = -4$$

- Si $a \neq -4$ y $a \neq 0$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 3 \quad \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.
- Si $a = -4$ las matrices A y B son ahora: $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -3 & 6 & 3 \\ -4 & 3 & -4 & 6 \\ 4 & -6 & 9 & 0 \end{array}\right)$

  El menor $\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -12 - 12 = -24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg} A = 2$

  Orlamos el menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} -4 & -3 & 3 \\ -4 & 3 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 72 - 72 - 36 - 0 - 144 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg} B = 3$

  Luego para $a = -4$ el sistema es incompatible.

- Si $a = 0$ las matrices de los coeficientes y ampliada son ahora: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 9 & 0 \end{array}\right)$

  El menor de la matriz de los coeficientes $\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg} A = 2$

  Orlamos el menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ -6 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 81 - 216 + 162 = 27 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg} B = 3$

  Luego para $a = 0$ el sistema es también incompatible.

- El sistema no es compatible indeterminado para ningún valor del parámetro.

2. *(2,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi : x - y - z = 0$$

$$\pi': \begin{cases} x = 3 + 2\lambda - \mu \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = \quad \mu \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto $P = (1, 0, 1)$. Escriba la ecuación de la recta como intersección de dos planos.

SOLUCIÓN.

a) Los planos pueden ser secantes, paralelos o coincidentes.

$\vec{n} = (1, -1, -1)$ es un vector normal al plano π. $A(3, 1, 0)$ es un punto y $\vec{u} = (2, 1, 0)$, $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ dos vectores de π'. Puesto que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 - 1 + 0 = 1 \neq 0$ descartamos la posibilidad de que coincidan o sean paralelos. Los planos se cortan.

b) El vector $\vec{n} = (1, -1, -1)$ perpendicular al plano π es un vector direccional de cualquier recta perpendicular al plano. Como la recta que buscamos debe pasar por el punto $P(1, 0, 1)$, la ecuación (en forma continua) es:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-1} \iff \text{Y como intersección de planos:} \quad \begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} \\ \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{-1} \end{cases} \iff \begin{cases} x + y \qquad -1 = 0 \\ \quad y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

3. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 2 \\ 2x + a & si \quad 2 \leq x \leq 4 \\ -x^2 + 3x + b & si \quad x > 4 \end{cases}$$

Determine los valores de a y b para que la función sea continua.

b) *(1,25 puntos)* Supongamos ahora que $a = 0$. Usando la definición de derivada, estudie la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 2$.

SOLUCIÓN.

a) Puesto que los tres trozos en que está definida la función corresponden a funciones continuas (polinómicas), debemos exigir que $f(x)$ sea continua en $x = 2$ y en $x = 4$.

Debe ser:
$$\begin{array}{|l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \iff \lim\limits_{x\to 2}\left(x^2\right) = \lim\limits_{x\to 2^+}(2x+a) \iff 4 = 4 + a \Rightarrow a = 0 \\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) \iff \lim\limits_{x\to 4}(2x+0) = \lim\limits_{x\to 4}\left(-x^2+3x+b\right) \iff 8 = -16 + 12 + b \Rightarrow b = 12 \end{array}$$

b) La función es derivable en $x = 2$ si $f'\left(2^-\right) = f'\left(2^+\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(2^-\right) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{4h + h^2}{h} = 4 \\ f'\left(2^+\right) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{2(2+h) - 4}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{4 + 2h - 4}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{2h}{h} = 2 \end{array}\right| \Rightarrow \text{No es derivable.}$$

4. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2$, determine el área encerrada entre ambas funciones.

b) *(1,25 puntos)* Calcule la integral:

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}\,dx$$

SOLUCIÓN.

a) Definimos la función diferencia de ambas funciones: $d(x) = x^2 + x^2 - 2 = 2x^2 - 2$

Los puntos de corte de esta función con OX son: $2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1\ ,\ x = 1$

Tenemos: $$A = \left| \int_{-1}^{1} \left(2x^2 - 2\right) dx \right| = \left| \left[\frac{2x^3}{3} - 2x \right]_{-1}^{1} \right| = \left| \left(\frac{2}{3} - 2\right) - \left(-\frac{2}{3} + 2\right) \right| = \left| \frac{2}{3} - 2 + \frac{2}{3} - 2 \right| = \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3}\ u^2$$

b) Calculemos una primitiva de la función:

$$\begin{array}{rl|l} x^3 & & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{3-3} -x^3 + 2x^2 - x & & x + 2 \\ \hline 2x^2 - x & & \\ -2x^2 + 4x - 2 & & \\ \hline 3x - 2 & & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}\,dx = \int \left(x + 2 + \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \int \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1}\,dx$$

Calculemos la nueva integral:

$$\frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} = \frac{Ax - A + B}{(x - 1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ -A + B = -2 \ \Rightarrow\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1}\,dx = \int \frac{3}{x - 1}\,dx + \int \frac{1}{(x - 1)^2}\,dx = 3\ln(x - 1) - \frac{1}{x - 1}$$

Así pues la integral inicial es $\int \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\ln(x - 1) - \frac{1}{x - 1}$ y tenemos:

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln(x - 1) - \frac{1}{x - 1} \right]_2^3 = \left(\frac{9}{2} + 6 + 3\ln 2 - \frac{1}{2} \right) - (2 + 4 + 0 - 1) = 5 + \ln 8$$

Universidad Zaragoza 1542

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2015
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$$

a) *(2 puntos)* Determine el rango de esa matriz según los valores de λ.

b) *(1 punto)* Determine para qué valores de λ existe la inversa de esa matriz y determine la inversa, si existe, cuando $\lambda = -2$.

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} -x-2y+12=0 \\ 3y-z-15=0 \end{cases} \qquad s: \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{3}$$

b) *(1 punto)* Calcule la distancia entre esas rectas.

3. *(5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Considere la función

$$f(x) = \frac{x^2-3}{e^x}$$

Determine los máximos relativos, los mínimos relativos y los puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable $t = cos(x)$, calcule:

$$\int \frac{cos^2(x)}{sen(x)} dx$$

c) *(2 puntos)*

1) *(1 punto)* Calcule los valores de a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2$ tenga un extremo relativo en el punto $(1,2)$.

2) *(1 punto)* Calcule el área encerrada por la curva $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ y la parte positiva del eje OX.

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde x, y y z son números reales.

Determine x , y y z para que el vector $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $\mathbf{M\,A} = \mathbf{B}$.

b) *(1,5 puntos)* Sean ahora la matriz y vectores siguientes:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde a, b y c son números reales que verifican que $a \neq 0,\ a + b = 0,\ c = a$.
Determine si el sistema $\mathbf{N\,X} = \mathbf{B}$ es compatible determinado.

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta paralela a la recta:

$$r : \begin{cases} 5x - 3y + 2z = 1 \\ x + 3y - 2z = -4 \end{cases}$$

que pasa por el punto $(0, 2, -4)$.

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto $P = (1, 1, 0)$ a la recta r anterior.

3. *(5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados que no tienen ningún lado común y que satisfacen que el perímetro de uno de ellos es triple que el de otro y, además, se necesitan 1248 metros de valla para vallar completamente los tres campos, de manera que la suma de las áreas es la mínima posible.

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^x - 2e^{-x}}\,dx$$

c) *(1,5 puntos)* Calcule:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$$

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

OPCIÓN A

A. 1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles y los razonamientos empleados.

b) *(1 punto)* Decir para qué valores existe la inversa: 0,25 puntos. Esta cuestión pretende ver si entienden la relación entre rango y existencia de inversa. Algunos estudiantes la han podido responder en el apartado previo de manera automática. En ese caso debe considerarse como respondida, aunque sea en el apartado anterior.

Determinación de la inversa: 0,75 puntos. La determinación de la matriz inversa puede hacerse por cualquier método. Si se realiza por el método de Gauss-Jordan, el proceso es más largo que si se calcula mediante determinantes y los errores numéricos pueden ser más habituales. En ese caso deberá valorarse más el proceso que los cálculos, siempre que éstos tengan sentido.

A. 2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Determinación de la posición: 1 punto.

b) *(1 punto)* Distancia: 1 punto.

A. 3. *(5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determinación de máximos: 0,5 puntos. Determinación de mínimos: 0,5 puntos. Determinación de puntos de inflexión: 0,5 puntos.

b) *(1,5 puntos)* Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta. Si al final de la integral no se deshace el cambio, podrá penalizarse el problema hasta 0,25 puntos. Si no se incluye la constante de integración, podrá penalizarse el problema hasta 0,25 puntos.

c) *(2 puntos)*

1) *(1 punto)* Los cálculos son suficientemente simples como para que no haya dificultades en determinar los valores de a y b. Si no justifican que los valores encontrados pertenecen a un extremo (es decir, no corresponden a un punto de inflexión), la puntuación máxima será de 0,6 puntos.

2) *(1 punto)* Los cálculos son suficientemente simples como para que no haya dificultades en determinar el valor del área.

OPCIÓN B

B. 1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Resolución del sistema: 1,5 puntos.

b) *(1,5 puntos)* Dado que en el enunciado se dice que $a \neq 0$, la respuesta es única y no ofrece dificultad. Determinación de que el sistema es compatible determinado: 1,5 puntos.

B. 2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Si no se proporciona la recta como intersección de dos planos la calificación máxima será de 0,5 puntos.

b) *(1 punto)* Cálculo de la distancia: 1 punto.

B. 3. *(5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Planteamiento correcto del problema: 1 punto. Resolución: 0,75 puntos. Comprobación o razonamiento de que la solución encontrada corresponde a un mínimo: 0,25 puntos.

b) *(1,5 puntos)* Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta. Si al final de la integral no se deshace el cambio, podrá penalizarse el problema hasta 0,25 puntos. Si no se incluye la constante de integración, podrá penalizarse el problema hasta 0,25 puntos.

c) *(1,5 puntos)* Los pasos para el cálculo del límite deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$$

a) *(2 puntos)* Determine el rango de esa matriz según los valores de λ.

b) *(1 punto)* Determine para qué valores de λ existe la inversa de esa matriz y determine la inversa, si existe, cuando $\lambda = -2$.

SOLUCIÓN

a) Sea A la matriz dada. El rango es el orden del mayor menor no nulo. Calculemos el determinante de la matriz:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+1) - \lambda(\lambda+1) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

▪ Si $\lambda \neq -1, 0, 1$: $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\, A = 3$.

▪ Si $\lambda = -1$: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\, A = 2$

▪ Si $\lambda = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\, A = 2$

▪ Si $\lambda = 1$: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\, A = 2$

b) A es una matriz cuadrada 3×3 que tiene inversa cuando su rango es el máximo, es decir cuando $\text{rg}\, A = 3 \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ para $\lambda \neq -1, 0, 1$. Por lo tanto, para $\lambda = -2$ existe A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6$$

▪ Calculemos la matriz adjunta de A:

$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$; $A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$; $A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$

Luego $\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

▪ La matriz traspuesta de la adjunta: $\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

▪ Por último: $A^{-1}=\dfrac{\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t}{|A|}=\begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix}$

Comprobemos que la matriz obtenida es, en efecto, la matriz inversa de la dada:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} -x-2y+12=0 \\ 3y-z-15=0 \end{cases} \qquad s:\ \frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{3}$$

b) *(1 punto)* Calcule la distancia entre esas rectas.

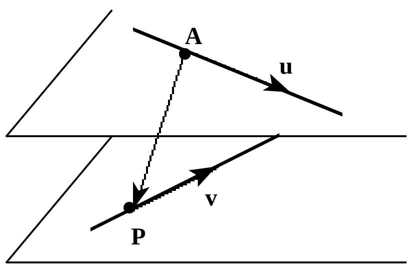
SOLUCIÓN

a) Obtengamos un punto y un vector de cada una de las rectas:

$$r:\begin{cases} x-2y+12=0 \\ 3y-z-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+12 \\ z=3y-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Para } y=0:\ x=12\ ,\ z=-15 \Rightarrow A(12,0,-15) \\ \text{Para } y=1:\ x=10\ ,\ z=-12 \Rightarrow B(10,1,-12) \end{matrix} \Rightarrow \left| \begin{matrix} A(12,0,-15) \\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-2,1,3) \end{matrix} \right.$$

$$s:\ \frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{3} \Rightarrow \left| \begin{matrix} P(2,-3,0) \\ \vec{v}=(5,2,3) \end{matrix} \right.$$

Puesto que las coordenadas de los vectores direccionales $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales, las rectas se cruzan o se cortan.



Consideremos el vector $\overrightarrow{AP}$ con origen en un punto de r y extremo en un punto de s: $\overrightarrow{AP}=(-10,-3,15)$.

Estudiemos la dependencia o independencia de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AP}$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ -10 & -3 & 15 \end{vmatrix}=-60-45-30+60-75-18\neq 0 \Rightarrow$$ los vectores son linealmente independientes $\Rightarrow$ las rectas se cruzan.

b) Hallemos el plano π que contiene a r y es paralelo a s.

El vector $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=3\vec{i}+15\vec{j}-4\vec{k}-5\vec{k}+6\vec{j}-6\vec{i}=-3\vec{i}+21\vec{j}-9\vec{k}=(-3,21,-9)\ ||\ (1,-7,3)$ es perpendicular al plano π. La ecuación de π es: $x-7y+3z+D=0$ y como el punto A pertenece al plano:

$$12-45+D=0 \Rightarrow D=33 \Rightarrow \pi:\ x-7y+3z+33=0$$

Por tanto: $d(r,s)=d(s,\pi)=d(P,\pi)=\left|\dfrac{2+21+33}{\sqrt{1+49+9}}\right|=\dfrac{56}{\sqrt{59}}$ u

3. *(5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Considere la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$$

Determine los máximos relativos, los mínimos relativos y los puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable $t = cos(x)$, calcule:

$$\int \frac{cos^2(x)}{sen(x)} dx$$

c) *(2 puntos)*

1) *(1 punto)* Calcule los valores de a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, 2)$.

2) *(1 punto)* Calcule el área encerrada por la curva $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ y la parte positiva del eje OX.

SOLUCIÓN

a) $f'(x) = \dfrac{2xe^x - (x^2 - 3)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x(2x - x^2 + 3)}{e^{2x}} = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{e^x} \Rightarrow$

$$f''(x) = \frac{(-2x + 2)e^x - (-x^2 + 2x + 3)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-2x + 2 + x^2 - 2x - 3)}{e^{2x}} = \frac{x^2 - 4x - 1}{e^x}$$

▪ Los puntos de máximo y de mínimo relativo están entre las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ (puntos críticos):

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} -1 \Rightarrow f(-1) = -2/e^{-1} = -2e \Rightarrow (-1, -2e) \\ 3 \Rightarrow f(3) = 6/e^3 \Rightarrow (3, 6/e^3) \end{cases}$$

Para discernir si los puntos críticos son máximos o mínimos relativos los sustituimos en $f''(x)$:

$f''(-1) = \dfrac{1 + 4 - 1}{e^{-1}} = 4e > 0 \Rightarrow$ el punto $(-1, -2e)$ es un mínimo relativo de la función.

$f''(3) = \dfrac{9 - 12 - 1}{e^3} = \dfrac{-4}{e^3} < 0 \Rightarrow$ el punto $\left(3, \dfrac{6}{e^3}\right)$ es un máximo relativo de $f(x)$.

▪ Los puntos de inflexión están entre las soluciones de la ecuación $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 2 - \sqrt{5} \simeq -0{,}236 \\ 2 + \sqrt{5} \simeq 4{,}236 \end{cases}$$

Se tiene:

$f'' > 0$	$2-\sqrt{5}$	$f'' < 0$	$2+\sqrt{5}$	$f'' > 0$

Como en $x = 2 - \sqrt{5}$ y en $x = 2 + \sqrt{5}$ la curva cambia su curvatura, son dos puntos de inflexión de la función.

b) $t = \cos x \Rightarrow dt = -\text{sen}x\, dx \Rightarrow dx = -\dfrac{dt}{\text{sen}x}$

$$I = \int \frac{\cos^2 x}{\text{sen}x} dx = -\int \frac{t^2}{\text{sen}x} \cdot \frac{dt}{\text{sen}x} = -\int \frac{t^2}{1 - \cos^2 x} dt = -\int \frac{t^2}{1 - t^2} dt = \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = (1)$$

$$\begin{array}{r|l} t^2 & t^2 - 1 \\ \hline -t^2 + 1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \frac{t^2}{t^2 - 1} = 1 + \frac{1}{t^2 - 1}$$

$$(1) = \int dt + \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = t + \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = (2)$$

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t - 1} = \frac{At - A + Bt + B}{(t + 1)(t - 1)} = \frac{(A + B)t - A + B}{t^2 - 1} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow B = \frac{1}{2}, \ A = -\frac{1}{2}$$

$$(2)=t-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t+1}\,dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t-1}\,dt=t-\frac{1}{2}\ln(t+1)+\frac{1}{2}\ln(t-1)+C=t+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}+C=t+\ln\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}+C=$$

$$=\cos x+\ln\sqrt{\frac{\cos x-1}{\cos x+1}}+C$$

c) 1) $f(x)=ax^3+bx^2 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=3ax^2+2bx$

$$(1\,,2)\text{ extremo relativo de } f(x)\Rightarrow \left|\begin{array}{l} f(1)=2 \;\Rightarrow\; a+b=2 \\ f'(1)=0 \;\Rightarrow\; 3a+2b=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{c} -2a-2b=-4 \\ 3a+2b=0 \end{array} \Rightarrow \quad a=-4\;,\; b=6$$

2) Puntos de corte de la función con OX: $2x^3-3x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2(2x-3)=0 \;\Rightarrow\; x=0\;,\; x=\frac{3}{2}$

Por tanto:

$$A=\left|\int_0^{3/2}\left(2x^3-3x^2\right)dx\right|=\left|\left[\frac{2x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}\right]_0^{3/2}\right|=\left|\left[\frac{x^4}{2}-x^3\right]_0^{3/2}\right|=\left|\frac{81}{32}-\frac{27}{8}-0\right|=\left|-\frac{27}{32}\right|=\frac{27}{32}\;u^2\simeq 0{,}84\;u^2$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix},\qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde x, y y z son números reales.

Determine x , y y z para que el vector $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $\mathbf{M\,A}=\mathbf{B}$.

b) *(1,5 puntos)* Sean ahora la matriz y vectores siguientes:

$$\mathbf{N}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix},\qquad \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde a, b y c son números reales que verifican que $a\neq 0,\; a+b=0,\; c=a$.
Determine si el sistema $\mathbf{N\,X}=\mathbf{B}$ es compatible determinado.

SOLUCIÓN

a) $$MA=B \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ y+2z+3x=0 \\ z+2x+3y=1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+y+2z=0 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$$

Utilizamos la regla de Cramer para resolver el sistema:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1+4-3-6}{1+27+8-6-6-6}=\frac{-4}{18}=-\frac{2}{9}\qquad;\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{18}=\frac{9+4-3-2}{18}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\3&1&0\\2&3&1\end{vmatrix}}{18}=\frac{1+9-2-6}{18}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$$

Por tanto: $x=-\frac{2}{9}\ ,\ y=\frac{4}{9}\ ,\ z=\frac{1}{9}$

b) $a+b=0 \Rightarrow b=-a\ ;\ c=a \Rightarrow$ la matriz de los coeficientes es: $\begin{pmatrix}a&-a&a\\-a&a&a\\a&a&-a\end{pmatrix}$. Veamos cuál es su rango:

$\begin{vmatrix}a&-a&a\\-a&a&a\\a&a&-a\end{vmatrix}=-a^3-a^3-a^3-a^3-a^3+a^3=-4a^3\neq 0$ pues $a\neq 0 \Rightarrow rg=3 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta paralela a la recta:

$$r:\begin{cases}5x-3y+2z=1\\x+3y-2z=-4\end{cases}$$

que pasa por el punto $(0,2,-4)$.

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto $P=(1,1,0)$ a la recta r anterior.

SOLUCIÓN

a) La recta r está dada como intersección de dos planos. El vector $\vec{n}=(5,-3,2)$ es normal al primer plano y el vector $\vec{n}'=(1,3,-2)$ es normal al segundo.

El vector $\vec{u}=\vec{n}\times\vec{n}'=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5&-3&2\\1&3&-2\end{vmatrix}=6\vec{i}+2\vec{j}+15\vec{k}+3\vec{k}+10\vec{j}-6\vec{i}=0\vec{i}+12\vec{j}+18\vec{k}=(0,12,18)\parallel(0,2,3)$ es un vector direccional de r y, por tanto, de cualquier recta paralela a r.

La ecuación de la recta buscada es: $\frac{x}{0}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=0\\3y-6=2z+8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\3y-2z=14\end{cases}$

b) ▪ Obtengamos la ecuación del plano π perpendicular a r que pasa por P:

El vector $(0,2,3)$ direccional de r es normal a π luego la ecuación del plano es: $\pi:\ 2y+3z+D=0$ y como contiene a P: $2+D=0 \Rightarrow D=-2 \Rightarrow \pi:\ 2y+3z-2=0$

▪ Calculemos las coordenadas del punto Q de intersección de π y r:

Sumando las dos primeras ecuaciones: $6x=-3 \Rightarrow x=-1/2$

$$\begin{cases}5x-3y+2z=1\\x+3y-2z=-4\\2y+3z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3y-2z=-7/2\\2y+3z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9y-6z=-21/2\\4y+6z=4\end{cases}\Rightarrow 13y=-13/2 \Rightarrow y=-1/2 \Rightarrow 3z=3 \Rightarrow z=1$$

Luego $Q\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$

▪ $d(P,r)=d(P,Q)=\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+(0-1)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+1}=\sqrt{\frac{22}{4}}=\frac{\sqrt{22}}{2}$ u.

3. *(5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados que no tienen ningún lado común y que satisfacen que el perímetro de uno de ellos es triple que el de otro y, además, se necesitan 1248 metros de valla para vallar completamente los tres campos, de manera que la suma de las áreas es la mínima posible.

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule

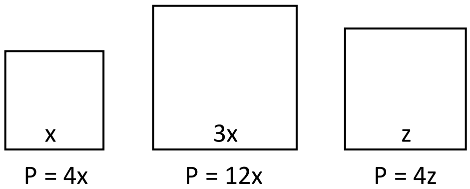
$$\int \frac{2e^{2x}}{e^x - 2e^{-x}}\,dx$$

c) *(1,5 puntos)* Calcule:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$$

SOLUCIÓN

a)



Tenemos:

$$4x + 12x + 4z = 1248 \;\Rightarrow\; z = \frac{1248-16x}{4} = 312 - 4x$$

La función que debe ser mínima es:

$$f(x) = x^2 + (3x)^2 + (312-4x)^2 = x^2 + 9x^2 + 97344 + 16x^2 - 2496x = 26x^2 - 2496x + 97344$$

$f'(x) = 52x - 2496 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{2496}{52} = 48$ y como $f''(x) = 52 > 0 \;\Rightarrow\;$ para $x = 48$ la suma de las áreas es mínima.

Por lo tanto, el lado del primer cuadrado debe ser de 48 metros, el del segundo 144 metros y el del tercero 120 m.

b) $t = e^x \;\Rightarrow\; dt = e^x\,dx \;\Rightarrow\; dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^x - 2e^{-x}}\,dx = 2\int \frac{e^{2x}}{e^x - \frac{2}{e^x}}\,dx = 2\int \frac{t^2}{t-\frac{2}{t}}\cdot\frac{dt}{t} = 2\int \frac{t^2}{t^2-2}\,dt = (1)$$

$$\boxed{\begin{array}{r|l} t^2 & t^2-2 \\ \cline{2-2} -t^2+2 & 1 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array} \qquad \frac{t^2}{t^2-2} = 1 + \frac{2}{t^2-2}}$$

$$(1) = 2\left[\int dt + 2\int \frac{1}{t^2-2}\,dt\right] = 2t + 4\int \frac{1}{t^2-2}\,dt = (2)$$

$$\boxed{\frac{1}{t^2-2} = \frac{A}{t+\sqrt{2}} + \frac{B}{t-\sqrt{2}} = \frac{At - \sqrt{2}A + Bt + \sqrt{2}B}{\left(t+\sqrt{2}\right)\left(t-\sqrt{2}\right)} = \frac{(A+B)t + \sqrt{2}(B-A)}{t^2-2} \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} A+B=0 \\ \sqrt{2}(B-A)=1 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} B=-A \\ B = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ ,\ A = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{array}}$$

$$(2) = 2t + 4\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dt}{t+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dt}{t-\sqrt{2}}\right] = 2t - \sqrt{2}\ln\left(t+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}\ln\left(t-\sqrt{2}\right) + C = 2t + \sqrt{2}\ln\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} + C =$$

$$= 2e^x + \sqrt{2}\ln\frac{e^x-\sqrt{2}}{e^x+\sqrt{2}} + C$$

c) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \frac{0}{0} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x\ln x + x - 1} = \frac{0}{0} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{-1}{\ln x + 1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera. Determine para qué valores de λ el sistema de ecuaciones que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} 2\lambda x - 2y - \lambda z = 2 \\ \lambda x - y + z = 5 \\ 3\lambda x + 4y + (\lambda - 1)z = \lambda - 5 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la inversa de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que satisfacen que $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 2$ y $u \,.\, v = 10$. Determine $\vec{u} \times \vec{v}$.

b) *(1 punto)* Considere las rectas siguientes:

$$r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + by = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

1) *(0,5 puntos)* Determine los valores de $a \neq 0$ y $b \neq 0$ para que las rectas sean paralelas.

2) *(0,5 puntos)* ¿Existen valores de $a \neq 0$ y $b \neq 0$ para que las rectas sean coincidentes?

3. *(5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$$

b) *(1,5 puntos)* Determine el límite siguiente:

$$\lim_{x \to \pi/2} \left(\frac{1}{1 - sen(x)} \right)^{\frac{cos(x)}{sen(x)}}$$

c) *(1,5 puntos)* Determine la ecuación de la curva $f(x)$ sabiendo que la recta tangente en $x = 3$ es $y = 9x - 13$ y la derivada segunda verifica que $f''(x) = 4$, para cualquier valor de x.

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera y considere la matriz y vector siguientes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & -\lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1) *(1 punto)* ¿Para qué valores de λ existe la matriz inversa $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$, siendo $\mathbf{I}$ la matriz identidad de orden 3?

2) *(1 punto)* Si $\lambda = 0$, encuentre los valores de x, y, y z que satisfacen la ecuación

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{2}\,\mathbf{X} + \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

b) *(1 punto)* Sean F_1, F_2 y F_3 la primera, segunda y tercera filas, respectivamente, de una matriz $\mathbf{M}$ de orden 3×3 cuyo determinante es -2.
Calcule el determinante de una matriz cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente: $5F_1 - F_3, 3F_3\ y\ F_2$.

2. *(2 puntos)*

a) *(0,75 puntos)* Sea a un parámetro real cualquiera. Dados los planos:

$$\pi : 3x + ay + 2z - 10 = 0, \qquad \text{y} \qquad \pi' : x - y + az - 5 = 0$$

¿Existen valores de a para los que los planos sean paralelos?

b) *(1,25 puntos)* Encuentre la ecuación de la recta paralela a la recta intersección de los planos:

$$\pi : 3x + 2y + z = 10, \quad \text{y} \quad \pi' : 4x - 2y - 8z = 10$$

que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

3. *(5 puntos)*

a) *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = x^2 e^{1/x^2}$$

1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de $f(x)$.

2) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, las asíntotas de $f(x)$.

3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

b) *(2 puntos)* Calcule:

$$\int \left(\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(x)}{x^2} \right) dx$$

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

OPCIÓN A

A. 1. *(3 puntos)*

- **a)** *(2 puntos)* La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles y los razonamientos empleados para la clasificación del sistema.
- **b)** *(1 punto)* La determinación de la matriz inversa puede hacerse por cualquier método. Si se calcula la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan, el proceso es más largo que si se calcula mediante determinantes y los errores numéricos pueden ser más habituales. En ese caso deberá valorarse más el proceso que los cálculos, siempre que éstos tengan sentido.

A. 2. *(2 puntos)*

- **a)** *(1 punto)* La calificación debe tener en cuenta tanto los razonamientos como las propiedades usadas.
- **b)** *(1 punto)*
  1) *(0,5 puntos)* Encontrar los valores de a y b: 0,5 puntos.
  2) *(0,5 puntos)* Responder correcta y razonadamente: 0,5 puntos.

A. 3. *(5 puntos)*

- **a)** *(2 puntos)* Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta. Si al final de la integral no se deshace el cambio, podrá penalizarse el problema hasta 0,25 puntos. Si no se incluye la constante de integración, podrá penalizarse el problema hasta 0,25 puntos.
- **b)** *(1,5 puntos)* Los pasos para el cálculo del límite deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta.
- **c)** *(1,5 puntos)* Los cálculos son suficientemente sencillos como para que no haya dificultad en encontrar la función solicitada.

OPCIÓN B

B. 1. *(3 puntos)*

- **a)** *(2 puntos)*
  1) *(1 punto)* Determinación de los valores de λ: 1 punto.
  2) *(1 punto)* Determinación de la solución: 1 punto.
- **b)** *(1 punto)* La calificación deberá tener en cuenta los razonamientos y propiedades que se usen.

B. 2. *(2 puntos)*

a) *(0,75 puntos)* Responder correcta y razonadamente: 0,75 puntos.

b) *(1,25 puntos)* Se considera correcto proporcionar la ecuación de la recta en cualquier forma (vectorial, paramétrica...)

B. 3. *(5 puntos)*

a) *(3 puntos)*

1) *(0,5 puntos)* Determinación del dominio: 0,5 puntos.

2) *(1,5 puntos)* La calificación debe tener en cuenta que se analice la existencia de los tres tipos de asíntotas, aunque sea para decir que no existen. El estudio de cada tipo de asíntota se valorará con 0,5 puntos.

3) *(1 punto)* Estudio de máximos: 0,5 puntos. Estudio de mínimos: 0,5 puntos.

b) *(2 puntos)* Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta. Si solo se integra uno de los sumandos la calificación máxima será de 1 punto (la mitad del ejercicio). Si no se incluye la constante de integración podrá penalizarse el problema hasta 0,25 puntos.

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2015

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera. Determine para qué valores de λ el sistema de ecuaciones que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} 2\lambda x - 2y - \lambda z = 2 \\ \lambda x - y + z = 5 \\ 3\lambda x + 4y + (\lambda - 1)z = \lambda - 5 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la inversa de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda & -2 & -\lambda & 2 \\ \lambda & -1 & 1 & 5 \\ 3\lambda & 4 & \lambda-1 & \lambda-5 \end{array}\right)$$

Veamos para qué valores del parámetro el rango es el máximo:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & -2 & -\lambda \\ \lambda & -1 & 1 \\ 3\lambda & 4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda - 4\lambda^2 - 6\lambda - 3\lambda^2 + 2\lambda^2 - 2\lambda - 8\lambda = -7\lambda^2 - 14\lambda = 0 \;\Rightarrow\; -7\lambda\left(\lambda+2\right) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

▪ Para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -2$: $\text{rg A} = \text{rg B} = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado.

▪ Para $\lambda = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \end{array}\right)$.

Como el menor $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg A} = 2$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 10 + 2 - 8 - 10 = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{rg B} = 3$

Puesto que $\text{rg A} \neq \text{rg B} \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

▪ Para $\lambda = -2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \\ -6 & 4 & -3 & -7 \end{array}\right)$.

Como el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg A} = 2$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 14 + 6 + 40 - 8 - 14 - 30 = 35 \neq 0$

$\Rightarrow \text{rg B} = 3$. Puesto que $\text{rg A} \neq \text{rg B} \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Como $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3 \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists M^{-1}$. Calculemos entonces M^{-1}:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adjunta}(*)} (\text{Adj}\,M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta}} (\text{Adj}\,M)^t = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}}$$

$$\longrightarrow M^{-1} = \frac{(\text{Adj}\,M)^t}{|M|} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;,\; M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;,\; M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \;,\; M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \;,\; M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \;,\; M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \;,\; M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \;,\; M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Comprobemos que, en efecto, M^{-1} es la matriz inversa de M:

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que satisfacen que $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 2$ y $u \,.\, v = 10$. Determine $\vec{u} \times \vec{v}$.

b) *(1 punto)* Considere las rectas siguientes:

$$r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + by = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

1) *(0,5 puntos)* Determine los valores de $a \neq 0$ y $b \neq 0$ para que las rectas sean paralelas.

2) *(0,5 puntos)* ¿Existen valores de $a \neq 0$ y $b \neq 0$ para que las rectas sean coincidentes?

SOLUCIÓN.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{10}{5 \cdot 2} = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = 0^\circ \;\Rightarrow\; \vec{u} \parallel \vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

b) 1) Obtengamos un vector direccional de cada recta. Para ello, obtengamos dos puntos de cada una de ellas:

$$r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = ax \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Para } x = 0:\; y = 0\,,\, z = 0 \;\Rightarrow\; O(0\,,0\,,0) \\ \text{Para } x = 1:\; y = 2\,,\, z = a \;\Rightarrow\; B(1\,,2\,,a) \end{matrix} \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{OB} = (1\,,2\,,a)$$

$$s: \begin{cases} x + by = 3 \\ y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - by \\ z = 3 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Para } y = 0:\; x = 3\,,\, z = 3 \;\Rightarrow\; P(3\,,0\,,3) \\ \text{Para } y = 1:\; x = 3 - b\,,\, z = 2 \;\Rightarrow\; Q(3 - b\,,1\,,2) \end{matrix} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (-b\,,1\,,-1)$$

$$r \parallel s \;\Leftrightarrow\; \vec{u} \parallel \vec{v} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{-b} = \frac{2}{1} = \frac{a}{-1} \;\Rightarrow\; a = -2\;,\; b = -\frac{1}{2}$$

2) No. Para que así fuera, todos sus puntos deberían ser comunes y, por ejemplo, el punto $O(0\,,0\,,0)$ que pertenece a r es evidente que no pertenece a s pues no verifica su ecuación.

3. *(5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$$

b) *(1,5 puntos)* Determine el límite siguiente:

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1}{1-sen(x)}\right)^{\frac{cos(x)}{sen(x)}}$$

c) *(1,5 puntos)* Determine la ecuación de la curva $f(x)$ sabiendo que la recta tangente en $x = 3$ es $y = 9x - 13$ y la derivada segunda verifica que $f''(x) = 4$, para cualquier valor de x.

SOLUCIÓN.

a) $e^x = t \;\Rightarrow\; e^x\,dx = dt \;\Rightarrow\; dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

Se tiene: $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx = \int \frac{t^3}{t^2+3t+2}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{t^3}{t^3+3t^2+2t}\,dt =$

$$\begin{array}{r|l} t^3 & t^3+3t^2+2t \\ \cline{2-2} -t^3-3t^2-2t & 1 \\ \hline -3t^2-2t & \end{array}$$

$$= \int\left(1-\frac{3t^2+2t}{t^3+3t^2+2t}\right)dt = t - \int \frac{3t^2+2t}{t^3+3t^2+2t}\,dt = (1)$$

Resolvamos la última integral:

$t^3+3t^2+2t = t\left(t^2+3t+2\right) = t(t+1)(t+2)$ / $t^2+3t+2=0 \Rightarrow t = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3\pm 1}{2} = \begin{cases} t=-1 \\ t=-2 \end{cases}$

$$\frac{3t^2+2t}{t^3+3t^2+2t} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t+2} = \frac{A(t+1)(t+2)+Bt(t+2)+Ct(t+1)}{t(t+1)(t+2)} = \frac{At^2+2At+At+2A+Bt^2+2Bt+Ct^2+Ct}{t^3+3t^2+2t} =$$

$$= \frac{(A+B+C)t^2+(3A+2B+C)t+2A}{t^3+3t^2+2t} \Rightarrow \begin{array}{c} A+B+C=3 \\ 3A+2B+C=2 \\ 2A=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A=0 \\ -B-C=-3 \\ 2B+C=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A=0 \\ B=-1 \\ C=4 \end{array} \Rightarrow \frac{3t^2+2t}{t^3+3t^2+2t} = \frac{-1}{t+1}+\frac{4}{t+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{3t^2+2t}{t^3+3t^2+2t}\,dt = -\int\frac{dt}{t+1}+4\int\frac{dt}{t+2} = -\ln|t+1|+4\ln|t+2| = \ln\left|\frac{(t+2)^4}{t+1}\right|$$

Por tanto: $(1) = t - \ln\left|\frac{(t+2)^4}{t+1}\right| = e^x - \ln\left(\frac{\left(e^x+2\right)^4}{e^x+1}\right) + C$

b) $L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}} = \left(\frac{1}{1-1}\right)^{\frac{0}{1}} = \infty^0$ que es una indeterminación.

Apliquemos logaritmos neperianos: $\ln L = \ln\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\ln\left(\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}\right] =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\cdot\ln\left(\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}\right)\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\cdot\left(\ln 1-\ln(1-\operatorname{sen}x)\right)\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{-\cos x\cdot\ln(1-\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{-\ln(1-\operatorname{sen}x)}{\operatorname{tag}x}\right] = \frac{\infty}{\infty} =$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital: $= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{1-\operatorname{sen}x} = \frac{0}{0} =$

Aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital: $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{3\cos^2 x\,(-\text{sen}x)}{-\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(3\cos x\cdot \text{sen}x\right)=0 \;\Rightarrow\; \ln L=0 \;\Rightarrow\; L=1$

c) $f''(x)=4 \;\Rightarrow\; f'(x)=\int 4\,dx=4x+C \;\Rightarrow\; f(x)=\int (4x+C)\,dx=2x^2+Cx+D$

La pendiente de la tangente $m=9$ es igual a $f'(3)$: $\quad 12+C=9 \;\Rightarrow\; C=-3 \;\Rightarrow\; f(x)=2x^2-3x+D$

El punto de tangencia es común a la curva y a la tangente:

$$x=3\ ,\ y=27-13=14 \;\Rightarrow\; (3,14)\in f(x) \;\Rightarrow\; f(3)=18-9+D=14 \;\Rightarrow\; D=5$$

La ecuación de la curva es entonces: $\quad f(x)=2x^2-3x+5$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera y considere la matriz y vector siguientes:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & -\lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1) *(1 punto)* ¿Para qué valores de λ existe la matriz inversa $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}$, siendo $\mathbf{I}$ la matriz identidad de orden 3?

2) *(1 punto)* Si $\lambda=0$, encuentre los valores de $x, y,$ y z que satisfacen la ecuación

$$\mathbf{A\,X}=\mathbf{2\,X}+\mathbf{b}$$

donde $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

b) *(1 punto)* Sean F_1, F_2 y F_3 la primera, segunda y tercera filas, respectivamente, de una matriz $\mathbf{M}$ de orden 3×3 cuyo determinante es -2.
Calcule el determinante de una matriz cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente: $5F_1-F_3, 3F_3\ y\ F_2$.

SOLUCIÓN.

a) 1) $A-2I=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & -\lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & -\lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|\,A-2I\,|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & -\lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\lambda-2-\lambda^2(-\lambda-2)=\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2=0 \;\Rightarrow\; \lambda=-2\ ,\ \lambda=-1\ ,\ \lambda=1$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \lfloor 0 \end{array}$$

$$\lambda^2+3\lambda+2=0 \;\Rightarrow\; \lambda=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2} \begin{cases} \lambda=-1 \\ \lambda=-2 \end{cases}$$

Por tanto, $\exists (A-2I)^{-1} \quad \forall\,\lambda\neq -2\,,-1\,,1.$

2) $AX = 2X + b \iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3x \\ -5x-5z \\ 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ 3y \\ 2z+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2x+1 \\ 5x+3y+5z=0 \\ 3z = 2z+1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x = 1 \ , \ z = 1 \ , \ y = -\dfrac{10}{3}$

b) Se tiene: $\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 2 \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 5F_1 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 30 \overset{(3)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 30$

Propiedades aplicadas:
(1) Si se permutan dos líneas, el determinante cambia de signo. En nuestro caso, se permutan las filas segunda y tercera.
(2) Si los elementos de una línea se multiplican por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número. En nuestro caso, la primera fila se multiplica por 5 y la segunda por 3 por lo que el determinante queda multiplicado por 15..
(3) Si a una línea se le suma una combinación lineal de las paralelas, el determinante no varía. En nuestro caso, a la primera fila se le suma la segunda multiplicada por $-1/3$.

2. *(2 puntos)*

a) *(0,75 puntos)* Sea a un parámetro real cualquiera. Dados los planos:

$$\pi : 3x + ay + 2z - 10 = 0, \qquad \text{y} \qquad \pi' : x - y + az - 5 = 0$$

¿Existen valores de a para los que los planos sean paralelos?

b) *(1,25 puntos)* Encuentre la ecuación de la recta paralela a la recta intersección de los planos:

$$\pi : 3x + 2y + z = 10, \quad \text{y} \quad \pi' : 4x - 2y - 8z = 10$$

que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

SOLUCIÓN.

a) Los planos son paralelos si sus vectores normales tienen la misma dirección.

$\vec{n} = (3, a, 2)$ es un vector normal al plano π y $\vec{n}' = (1, -1, a)$ lo es al plano π'.

$\pi \parallel \pi' \iff \vec{n} \parallel \vec{n}' \iff \dfrac{3}{1} = \dfrac{a}{-1} = \dfrac{2}{a}$ y no existe ningún valor de a para el que se verifiquen las igualdades. Por tanto, los planos no son paralelos.

b) Obtengamos un vector direccional de la recta dada como intersección de planos. El vector $\vec{u} = \vec{n} \times \vec{n}'$ producto vectorial de los vectores normales a π y π' tiene la dirección de la recta intersección y de cualquier paralela a ella:

$\vec{n} = (3, 2, 1)$, $\vec{n}' = (4, -2, -8)$

$$\vec{u} = \vec{n} \times \vec{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -8 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k} - 8\vec{k} + 24\vec{j} + 2\vec{i} = -14\vec{i} + 28\vec{j} - 14\vec{k} = (-14, 28, -14) \parallel (-1, 2, -1)$$

La ecuación (en forma continua) de la recta buscada es entonces: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$

3. *(5 puntos)*

a) *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = x^2 e^{1/x^2}$$

1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de $f(x)$.

2) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, las asíntotas de $f(x)$.

3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

b) *(2 puntos)* Calcule:

$$\int \left(\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(x)}{x^2} \right) dx$$

SOLUCIÓN.

a) 1) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{ 0 \}$. Se trata de una función par, simétrica respecto al eje OY.

2) ▪ Asíntota vertical: $x = 0$

pues $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \cdot e^{1/x^2}\right) = 0\cdot\infty = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1/x^2}}{\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{\infty}{\infty} =$ (regla de L'Hôpital) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1/x^2}\cdot\left(-\dfrac{2}{x^3}\right)}{-\dfrac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{1/x^2} = \infty$

▪ Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2\cdot e^{1/x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot e^{1/x^2}\right) = \infty \;\Rightarrow\;$ no tiene asíntotas horizontales.

3) $f'(x) = 2x\cdot e^{1/x^2} + x^2\cdot e^{1/x^2}\cdot\left(-\dfrac{2}{x^3}\right) = 2\,e^{1/x^2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = 0 \;\Rightarrow\; x - \dfrac{1}{x} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1\ ,\ x = 1$

$$f''(x) = 2\left[e^{1/x^2}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right) + e^{1/x^2}\cdot\frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2}\right] = 2e^{1/x^2}\cdot\frac{-2 + x^3 + x}{x^3}$$

$f''(-1) = 2e\cdot\dfrac{-2-1-1}{-1} = 8e > 0 \;\Rightarrow\; x = -1$ mínimo relativo: $(-1\,,e)$

Por la simetría respecto a OY, en $x = 1$ la función tiene también un mínimo relativo: $(1\,,e)$

b) $I = \displaystyle\int \left(\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x^2} \right) dx = \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = I_1 + I_2 = (1)$

$I_1 = \displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \left| x = t^2 \;\Rightarrow\; dx = 2t\,dt \right| = \int \frac{(t^2-1)^2}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int \left(t^4 - 2t^2 + 1\right)dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{4t^3}{3} + 2t + C_1 =$

$= \dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \dfrac{4}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C_1$

$I_2 = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \;\Rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \;\Rightarrow\; v = -\dfrac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_2$

Por tanto: $I = I_1 + I_2 = \dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \dfrac{4}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} + C$

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2016

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera, determine para qué valores de λ el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} -x + \lambda y + \lambda z &= 4 \\ \lambda x + \lambda y + z &= 6 \\ -\lambda x + \lambda y + \lambda z &= 3 + \lambda \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Resuélvalo, si es posible, para $\lambda = 2$.

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)*

a.1) *(0,5 puntos)* Si los vectores $\vec{w}$ y $\vec{s}$ verifican que $|\vec{w}| = |\vec{s}| = 2$, y el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{s}$ es 60 grados, determine: $\vec{w} \cdot (\vec{w} - \vec{s})$.

a.2) *(0,5 puntos)* Si el producto escalar del vector $\vec{u} + \vec{v}$ por sí mismo es 25 y el producto escalar de $\vec{u} - \vec{v}$ por sí mismo es 9. ¿Cuánto vale el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$?

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman las rectas siguientes:

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2} \qquad s : \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

3. *(5 puntos)*

a) *(2,25 puntos)* Considere la función:

$$f(x) = \frac{1}{8x - x^2}$$

a.1) *(1,5 puntos)* Determine las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a.2) *(0,75 puntos)* Determine los extremos relativos, si existen, de la función $f(x)$.

b) *(1,25 puntos)* Determine:

$$\lim_{x \to +\infty} \left((\ln(x^2)) \left(\frac{x+1}{x^2+3} \right) \right)$$

c) *(1,5 puntos)* Calcule el área de la región encerrada entre las curvas $f(x) = x^3$, y $g(x) = 2x^2 - x$.

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea "a" un parámetro real cualquiera. Determine el rango de la matriz siguiente según los diferentes valores del parámetro "a":

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & a+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$$

b) *(1 punto)* Se considera una matriz de orden 3×3 cuyas columnas son C_1, C_2 y C_3 y cuyo determinante es 2.

Se define ahora la matriz B cuyas columnas son $-C_2$, $C_3 + C_2$ y $3C_1$. Determine el determinante de la inversa de B, si existe.

2. *(2 puntos)* Considere el plano π y la recta r que aparecen a continuación:

$$\pi : mx - 3y + 2z = 1\,, \quad r : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

a) *(1 punto)* Determine para qué valores del parámetro "m" la recta r y el plano π son secantes, es decir, se cortan.

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman el plano π y la recta r cuando $m = 1$.

3. *(5 puntos)*

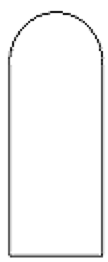
a) *(1,5 puntos)* Determine el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x+1}{2x-1} - \frac{3}{2} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}$$

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable $t = \cos(x)$, calcule:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen(x)\ \cos(x)}{1 - \cos(x)}\, dx$$

c) *(2 puntos)* Queremos construir una ventana con la forma de la figura que aparece debajo, es decir rectangular en la parte inferior y semicircular en la superior (la parte superior es un semicírculo completo).



Sabiendo que el perímetro total de la ventana son 5 metros, determine las dimensiones de la ventana para que la superficie de la misma sea máxima.

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

OPCIÓN A

A. 1. *(3 puntos)*

- **a)** *(2 puntos)* La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles. No es necesario obtener soluciones, basta con clasificar el sistema.
- **b)** *(1 punto)* Obtención de la solución: 1 punto.

A. 2. *(2 puntos)*

- **a)** *(1 punto)*
  - **a. 1)** *(0,5 puntos)* Los cálculos son suficientemente simples como para que no haya dificultad en resolver la cuestión.
  - **a. 2)** *(0,5 puntos)* Los cálculos son suficientemente simples como para que no haya dificultad en resolver la cuestión.
- **b)** *(1 punto)* Se considera igual de correcto proporcionar el ángulo o alguna de sus razones trigonométricas.

A. 3. *(5 puntos)*

- **a)** *(2,25 puntos)*
  - **a. 1)** *(1,5 puntos)* La calificación debe tener en cuenta que se analice la existencia de los tres tipos de asíntotas, aunque sea para razonar que no existen. El estudio de cada tipo de asíntota se valora con 0,5 puntos.
  - **a. 2)** *(0,75 puntos)* Estudio de extremos: 0,75 puntos.
- **b)** *(1,25 puntos)* Los pasos para el cálculo del límite deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta.
- **c)** *(1,5 puntos)* Los pasos para el cálculo del área deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta.

OPCIÓN B

B. 1. *(3 puntos)*

- **a)** *(2 puntos)* La calificación debe tener en cuenta que se analicen todos los casos posibles.
- **b)** *(1 punto)* La calificación debe tener en cuenta los cálculos y justificación de los mismos.

B. 2. *(2 puntos)*

- **a)** *(1 punto)* Determinación del valor m: 1 punto.
- **b)** *(1 punto)* Se considera igualmente correcto proporcionar el ángulo o alguna de sus razones trigonométricas.

B. 3. *(5 puntos)*

- **a)** *(1,5 puntos)* Los pasos para la determinación del límite deben estar claros y la calificación deberá tenerlos en cuenta,
- **b)** *(1,5 puntos)* Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta. Si solo se realiza el cambio de variable pero no se calcula la integral, la puntuación máxima será de 0,75 puntos. Si no se calculan correctamente los límites de integración, se podrá penalizar con un máximo de 0,25 puntos.
- **c)** *(2 puntos)* Planteamiento del problema: 1 punto. Resolución del problema: 1 punto. Si en la resolución no argumentan o comprueban (bastaría con que lo razonasen correctamente) que la solución corresponde a un máximo, se podrá penalizar con un máximo de 0,2 puntos.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera, determine para qué valores de λ el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} -x+\lambda y+\lambda z&=4\\ \lambda x+\lambda y+\ \ z&=6\\ -\lambda x+\lambda y+\lambda z&=3+\lambda \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Resuélvalo, si es posible, para $\lambda=2$.

SOLUCIÓN

a) La matriz A de los coeficientes y la matriz B ampliada son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & \lambda & 4\\ \lambda & \lambda & 1 & 6\\ -\lambda & \lambda & \lambda & 3+\lambda \end{array}\right)$$

El único menor de orden 3 en la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda & \lambda\\ \lambda & \lambda & 1\\ -\lambda & \lambda & \lambda \end{vmatrix}=-\lambda^2+\lambda^3-\lambda^2+\lambda^3-\lambda^3+\lambda=\lambda^3-2\lambda^2+\lambda=\lambda\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)=\lambda(\lambda-1)^2=0 \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l}\lambda=0\\ \lambda=1\end{array}\right.$$

▪ Para $\lambda\neq 0$ y 1: $\text{rg } A=\text{rg } B=3 \quad\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado

▪ Para $\lambda=0$: las matrices A y B son $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$.

$\text{rg } A=2$ pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

Orlemos este menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \text{rg } B=3$

Y como $\text{rg } A\neq \text{rg } B \quad\Rightarrow$ el sistema es incompatible para $\lambda=0$.

▪ Para $\lambda=1$: las matrices A y B son $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 6\\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$.

$\text{rg } A=2$ pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1\\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0$

Orlamos el menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4+4-6+4-4+6=0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\, B = 2$

El sistema es compatible indeterminado para $\lambda = 1$ pues $\text{rg}\, A = \text{rg}\, B = 2 <$ nº de incógnitas.

b) Para $\lambda = 2$ el sistema es compatible determinado: $\begin{cases} -x+2y+2z=4 \\ 2x+2y+\;z=6 \\ -2x+2y+2z=5 \end{cases}$. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{16+24+10-20-8-24}{-4+8-4+8-8+2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-12+20-8+24-16+5}{2} = \frac{13}{2} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-10+16-24+16-20+12}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)*

a.1) *(0,5 puntos)* Si los vectores $\vec{w}$ y $\vec{s}$ verifican que $|\vec{w}| = |\vec{s}| = 2$, y el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{s}$ es 60 grados, determine: $\vec{w} \cdot (\vec{w} - \vec{s})$.

a.2) *(0,5 puntos)* Si el producto escalar del vector $\vec{u} + \vec{v}$ por sí mismo es 25 y el producto escalar de $\vec{u} - \vec{v}$ por sí mismo es 9. ¿Cuánto vale el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$?

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman las rectas siguientes:

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2} \qquad s: \begin{cases} x-y-\;z=1 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

a.1) Por la propiedad distributiva del producto escalar:

$$\vec{w}\cdot(\vec{w}-\vec{s}) = \vec{w}\cdot\vec{w} - \vec{w}\cdot\vec{s} = |\vec{w}||\vec{w}|\cos 0^\circ - |\vec{w}||\vec{s}|\cos 60^\circ = 2\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 4-2 = 2$$

a.2) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{u} + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} =$ donde hemos utilizado que el producto escalar es conmutativo: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{u} - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} = 9 \quad (2)$

Restando ordenadamente las igualdades (1) y (2) tenemos: $4\,\vec{u}\cdot\vec{v} = 16 \;\Rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{v} = 4$

b) Se tiene: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores direccionales de r y s.

La recta r viene expresada por su ecuación continua. Su vector direccional es: $\vec{u} = (3, 2, 2)$

La recta s está expresada como intersección de dos planos. Su vector direccional es $\vec{v}=\vec{n}\times\vec{n}'$ siendo $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ vectores normales a cada uno de los planos. En nuestro caso:

$$\vec{v}=\vec{n}\times\vec{n}'=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2\,\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}+\vec{k}-2\,\vec{j}-\vec{i}=-3\,\vec{i}-3\,\vec{j}+0\vec{k}=(-3\,,-3\,,0)\,\|\,(1\,,1\,,0)$$

Así pues: $\cos\alpha=\dfrac{|\,3+2+0\,|}{\sqrt{3^2+2^2+2^2}\,\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{17}\,\sqrt{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{34}}\simeq 0{,}8575 \;\Rightarrow\; \alpha=30^\circ\ 57'\ 49{,}52''$

3. *(5 puntos)*

a) *(2,25 puntos)* Considere la función:

$$f(x)=\frac{1}{8x-x^2}$$

a.1) *(1,5 puntos)* Determine las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a.2) *(0,75 puntos)* Determine los extremos relativos, si existen, de la función $f(x)$.

b) *(1,25 puntos)* Determine:

$$\lim_{x\to+\infty}\left((\ln(x^2))\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)\right)$$

c) *(1,5 puntos)* Calcule el área de la región encerrada entre las curvas $f(x)=x^3$, y $g(x)=2x^2-x$.

SOLUCIÓN

a.1) Puesto que se trata de una función racional:

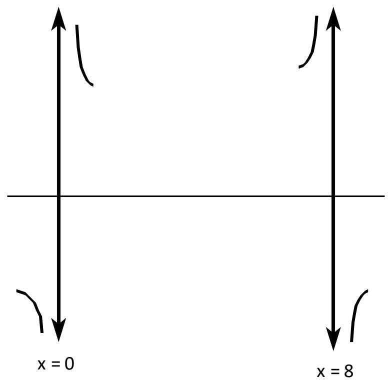
▪ Asíntotas verticales: $8x-x^2=0 \;\Rightarrow\; x(8-x)=0 \;\Rightarrow\; x=0\ ,\ x=8$

$x=0$ es una asíntota vertical de la función pues $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x(8-x)}=\infty$.

Además: $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x(8-x)}=-\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x(8-x)}=+\infty$

$x=8$ es una asíntota vertical de la función pues $\displaystyle\lim_{x\to 8}\frac{1}{x(8-x)}=\infty$.

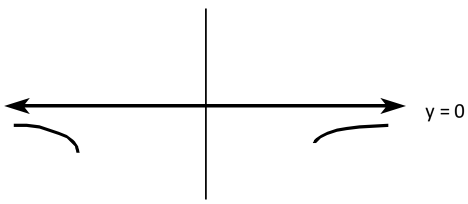
Además: $\displaystyle\lim_{x\to 8^-}\frac{1}{x(8-x)}=+\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to 8^+}\frac{1}{x(8-x)}=-\infty$



▪ Asíntota horizontal: $y=0$ es una asíntota horizontal de la función pues $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(8-x)}=0$.

Además, la posición relativa de la gráfica respecto a la asíntota es:

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x(8-x)}=0^-$ y $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(8-x)}=0^-$



a.2) $f'(x)=\dfrac{-8+2x}{(8x-x^2)^2}=0 \;\Rightarrow\; x=4$ (valor crítico)

$$f''(x)=\frac{2(8x-x^2)^2-(-8+2x)\,2\,(8x-x^2)(8-2x)}{(8x-x^2)^4} \;\Rightarrow\; f''(4)>0 \;\Rightarrow\; x=4 \text{ es un mínimo relativo.}$$

La función tiene un mínimo relativo en $\left(4\,,\dfrac{1}{16}\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\ln\left(x^2\right)\right)\left(\dfrac{x+1}{x^2+3}\right)\right)=\infty\cdot 0$ (indeterminación) $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x\,(x+1)}{x^2+3}=\dfrac{\infty}{\infty}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}(x+1)+2\ln x}{2x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x+1)+2x\ln x}{2x^2}=\frac{\infty}{\infty}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2+2\ln x+2x\,\frac{1}{x}}{4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+2\ln x}{4x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{(3)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4x}=0$$

(1), (2) y (3): regla de L'Hôpital

c) Consideramos la función $h(x)=f(x)-g(x)=x^3-2x^2+x$ y calculamos el área limitada por $h(x)$ y el eje OX.

Puntos de corte de $h(x)$ con OX: $x^3-2x^2+x=x\left(x^2-2x+1\right)=x\left(x-1\right)^2=0 \;\Rightarrow\; x=0\;,\;x=1$

$$A=\int_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)-0=\frac{3-8+6}{12}=\frac{1}{12}\,u^2$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea "a" un parámetro real cualquiera. Determine el rango de la matriz siguiente según los diferentes valores del parámetro "a":

$$A=\begin{pmatrix}a+1 & -1 & a+1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$$

b) *(1 punto)* Se considera una matriz de orden 3×3 cuyas columnas son C_1, C_2 y C_3 y cuyo determinante es 2.
Se define ahora la matriz B cuyas columnas son $-C_2$, C_3+C_2 y $3C_1$. Determine el determinante de la inversa de B, si existe.

SOLUCIÓN

a) Como el menor $\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1\neq 0 \;\Rightarrow\;$ el rango de la matriz es como mínimo 2.

Veamos los valores del parámetro para los que el rango es 3:

$$\begin{vmatrix}a+1 & -1 & a+1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & -2 & a\end{vmatrix}=-a(a+1)+(a+1)=(a+1)(-a+1)=0 \;\Rightarrow\; a=-1\;,\;a=1$$

Por lo tanto, si $a\neq -1$ y $a\neq 1$: $\operatorname{rg}A=3$

Para cualquier otro valor de a, el rango de A es 2.

b) Sea $C=\left(C_1\;\;C_2\;\;C_3\right)$ la matriz dada cuyo determinante es $|\,C\,|=2$.

$$|\,B\,|=|-C_2\;\;C_3+C_2\;\;3C_1\,|\overset{(1)}{=}|-C_2\;\;C_3\;\;3C_1\,|+|-C_2\;\;C_2\;\;3C_1|\overset{(2)}{=}|-C_2\;\;C_3\;\;3C_1\,|\overset{(3)}{=}-3|\,C_2\;\;C_3\;\;C_1\,|\overset{(4)}{=}3|\,C_1\;\;C_3\;\;C_2\,|\overset{(5)}{=}$$

$$\overset{(5)}{=}-3|\,C_1\;\;C_2\;\;C_3\,|=-6 \qquad (*)$$

Se tiene: $\left|B\cdot B^{-1}\right|=\left|I_3\right|=1=\left|B\right|\cdot\left|B^{-1}\right|=-6\cdot\left|B^{-1}\right| \;\Rightarrow\; \left|B^{-1}\right|=-\dfrac{1}{6}$

(*) Propiedades utilizadas: (1): El determinante se descompone en suma de otros dos porque la segunda columna es una suma.
(2): El segundo determinante es 0 porque tiene dos columnas iguales.
(3): De la primera columna sacamos el factor común -1 y de la tercera columna el factor 3.
(4) y (5): Al permutar dos columnas el determinante cambia de signo.

2. *(2 puntos)* Considere el plano π y la recta r que aparecen a continuación:

$$\pi : mx - 3y + 2z = 1\,, \quad r : \begin{cases} 3x + y & = 1 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

a) *(1 punto)* Determine para qué valores del parámetro "m" la recta r y el plano π son secantes, es decir, se cortan.

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman el plano π y la recta r cuando $m = 1$.

SOLUCIÓN

a) Lo serán cuando el sistema formado por los tres planos (el plano π y los dos planos que definen la recta r) sea compatible determinado.

El menor de orden 3 de la matriz de los coeficientes es: $\begin{vmatrix} m & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 6 - 4 + 18 = 2m + 8 = 0 \;\Rightarrow\; m = -4$

Por lo tanto, cuando $m \neq -4$ el rango de las matrices de los coeficientes y ampliada coincide con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado y el plano y la recta son secantes.

b) Para $m = 1$ el plano y la recta son secantes. La ecuación del plano es $\pi : x - 3y + 2z = 1$ y $\vec{n} = (1\,,-3\,,2)$ es un vector normal al mismo.

Obtengamos un vector direccional de la recta. Para ello obtengamos dos puntos de la misma:

$$\left.\begin{cases} 3x + y \quad\;\; = 1 & \text{Para } x = 0: \;\; y = 1\;,\; z = 1 \quad\;\; \Rightarrow \;\; A(0\,,1\,,1) \\ 2x - y + 2z = 1 & \text{Para } x = 2: \;\; y = -5\;,\; z = -4 \;\; \Rightarrow \;\; B(2\,,-5\,,-4) \end{cases}\right| \;\Rightarrow\; \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2\,,-6\,,-5)$$

El ángulo α que forman π y r es el complementario del que forman $\vec{n}$ y $\vec{u}$:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}||\vec{u}|} = \frac{|2 + 18 - 10|}{\sqrt{1+9+4}\,\sqrt{4+36+25}} = \frac{10}{\sqrt{14}\,\sqrt{65}} = \frac{10}{\sqrt{910}} \simeq 0{,}3315 \;\Rightarrow\; 90^\circ - \alpha = 70^\circ\, 38'\, 25{,}26'' \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \alpha = 19^\circ\, 21'\, 34{,}74''$$

3. *(5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x+1}{2x-1} - \frac{3}{2} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}$$

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable $t = \cos(x)$, calcule:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen(x)\;\cos(x)}{1 - \cos(x)}\, dx$$

c) *(2 puntos)* Queremos construir una ventana con la forma de la figura que aparece debajo, es decir rectangular en la parte inferior y semicircular en la superior (la parte superior es un semicírculo completo).

Sabiendo que el perímetro total de la ventana son 5 metros, determine las dimensiones de la ventana para que la superficie de la misma sea máxima.

SOLUCIÓN

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+1}{2x-1}-\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}\right)^{\infty}=1^{\infty}$ (indeterminación)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{2x-1}-\frac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{10x+2-6x+3}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4x+5}{4x-2}-1\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x-2}{7}}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x-2}{7}}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}\cdot\frac{4x-2}{7}\cdot\frac{7}{4x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{4x-2}{7}}\right)^{\frac{4x-2}{7}}\right]^{\frac{2x^2+1}{x-1}\cdot\frac{7}{4x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{4x-2}{7}}\right)^{\frac{4x-2}{7}}\right]^{\frac{14x^2+7}{4x^2-6x+2}}=e^{\frac{7}{2}}$$

También:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{2x-1}-\frac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5}{4x-2}-1\right)\cdot\frac{2x^2+1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5-4x+2}{4x-2}\right)\cdot\frac{2x^2+1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{4x-2}\right)\cdot\frac{2x^2+1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{14x^2+7}{4x^2-6x+2}\right)}=e^{\frac{7}{2}}$$

b) $t=\cos x\ \Rightarrow\ dt=-\operatorname{sen}x\,dx\ \Rightarrow\ dx=-\dfrac{dt}{\operatorname{sen}x}$

Obtengamos una primitiva: $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{1-\cos x}dx=\int\frac{\operatorname{sen}x\,t}{1-t}\left(-\frac{dt}{\operatorname{sen}x}\right)=-\int\frac{t}{1-t}dt=\int\frac{t}{t-1}dt=(1)$

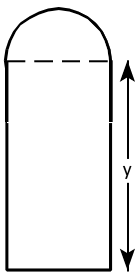
t	t − 1
−t + 1	1
1	

$$(1)=\int\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt=t+\ln|t-1|=\cos x+\ln|\cos x-1|=\cos x+\ln(1-\cos x)$$

Así pues: $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{1-\cos x}dx=\left[\cos x+\ln(1-\cos x)\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+\ln\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)\right)-\left(\cos\frac{\pi}{4}+\ln\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\right)=$

$$=\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}+\ln\left(\frac{1}{2}:\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}+\ln\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}-\ln\left(2-\sqrt{2}\right)$$

c)



La función que debe ser máxima es la superficie: $S(x)=xy+\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=xy+\dfrac{1}{8}\pi x^2$

Relación entre las variables x e y:

$$x+2y+\frac{1}{2}2\pi\frac{x}{2}=5\ \Rightarrow\ 2y=5-x-\frac{\pi}{2}x\ \Rightarrow\ y=\frac{5}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)x=\frac{5}{2}-\frac{2+\pi}{4}x$$

La función es entonces: $S(x)=\frac{5}{2}x-\frac{2+\pi}{4}x^2+\frac{\pi}{8}x^2=\frac{5}{2}x-\frac{4+\pi}{8}x^2$

Veamos dónde tiene su máximo: $S'(x)=\frac{5}{2}-\frac{4+\pi}{4}x=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}:\frac{4+\pi}{4}=\frac{10}{4+\pi}$

Comprobemos que se trata de un máximo: $S''(x)=-\frac{4+\pi}{4}<0 \Rightarrow$ se trata, en efecto, de un máximo.

El valor de y: $y=\frac{5}{2}-\frac{2+\pi}{4}\cdot\frac{10}{4+\pi}=\frac{5}{2}-\frac{10+5\pi}{8+2\pi}=\frac{40+10\pi-20-10\pi}{16+4\pi}=\frac{20}{16+4\pi}=\frac{5}{4+\pi}$

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Determine para qué valores de k el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 6 \\ x + ky + z &= 0 \\ kx - y + z &= -6 \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Resuélvalo, si es posible, cuando $k = -1$.

2. *(2 puntos)* Determine la ecuación de la recta, **expresada como intersección de dos planos**, que pasa por el punto $(1, -1, 2)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (3, 2, 1)$, $C = (2, -1, 0)$.

3. *(5 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine, si existen, todos los valores de los parámetros a y b para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} a\, e^{x} & si \quad x < 0 \\ 1 - x^2 & si \quad 0 \le x < 1 \\ b(1 - e^{x-1}) & si \quad x \ge 1 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Considere ahora que $a = 1$. Usando la definición de derivada, estudie si la función es derivable en $x = 0$.

c) *(1,5 puntos)* Determine:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(ln(x)\right)^{\frac{1}{e^x}}$$

d) *(1,5 puntos)* Determine:

$$\int \frac{(ln(x))^2}{\sqrt{x}}\, dx$$

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine la matriz inversa, si existe, de la matriz siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

En caso de que exista, compruebe que la matriz encontrada es efectivamente la inversa de la matriz M.

b) *(1,5 puntos)* Determine la matriz $A^2 + B^2$ siendo A y B las matrices solución del siguiente sistema:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine el valor del parámetro "a" para que el plano

$$\pi : x - 3y + az = -6$$

sea paralelo a la recta:

$$r : \begin{cases} 2x - 3y \quad = 1 \\ x \quad + \quad 3z = -7 \end{cases}$$

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo entre esa recta r y el plano:

$$\tilde{\pi} : 2x - 3y - z + 6 = 0$$

3. *(5 puntos)*

a) *(3 puntos)* Considere la función:

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

a. 1) *(1,5 puntos)* Determine el dominio y las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a. 2) *(1,5 puntos)* Determine los extremos relativos y puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

b) *(2 puntos)* Determine el área limitada por la curva $f(x) = -2\,sen\left(\frac{x}{2}\right)$, y las rectas $x = 0$, $x = \pi$ y el eje de abcisas $y = 0$.

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

OPCIÓN A

A. 1. *(3 puntos)*

- **a)** *(2 puntos)* La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles. Como aparecen cuatro posibilidades a considerar, deben ponderarse las cuatro igualmente (0,5 puntos cada una).
- **b)** *(1 punto)* Obtención de la solución: 1 punto. Nótese que la clasificación se califica en el apartado anterior. Si la solución se ha determinado en el apartado anterior, lo que puede ser bastante natural, deberá calificarse en este apartado.

A. 2. *(2 puntos)* Si no se proporciona la recta como intersección de dos planos la calificación máxima será de 1,25 puntos.

A. 3. *(5 puntos)*

- **a)** *(1 punto)* La característica del problema está en que para la continuidad en 0 se obtiene un valor de a mientras que cualquier valor de b asegura la continuidad en 1. La determinación del valor de "a" se calificará con 0,5 puntos y concluir que cualquier valor de "b" es válido con otros 0,5 puntos.
- **b)** *(1 punto)* Debe valorarse el uso adecuado de la definición de derivada.
- **c)** *(1,5 puntos)* Los pasos para el cálculo del límite deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta.
- **d)** *(1,5 puntos)* Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación debe tenerlo en cuenta. Si se realiza un mismo proceso varias veces no debe exigirse una reiteración de los argumentos o explicaciones todas las veces. Si no se incluye la constante de integración, podrá disminuirse la calificación del apartado con un máximo de 0,25 puntos.

OPCIÓN B

B. 1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* La determinación de la matriz inversa puede hacerse por cualquier método. Si se calcula la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan, el proceso es más largo que si se calcula mediante determinantes y los errores numéricos pueden ser más habituales. En ese caso deberá valorarse más el proceso que los cálculos, siempre que éstos tengan sentido.

La obtención de la inversa se valora con hasta 1 punto y la comprobación de que la matriz obtenida es inversa (tanto por la derecha como por la izquierda) con hasta 0,5 puntos (0,25 puntos para la comprobación a derecha y 0,25 puntos para la comprobación a izquierda).

b) *(1,5 puntos)* Los cálculos son lo suficientemente simples como para que no haya dificultad en resolver la cuestión.

Si algún alumno plantea el problema a través de sistemas de ecuaciones, planteando, por ejemplo, que la matriz *A* es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y análogamente con la matriz B, no debe penalizarse por ello. El propio planteamiento lleva implícito una penalización para el alumno que debe efectuar numerosos cálculos con el consiguiente consumo de tiempo.

B. 2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determinación del valor de “a”: 1,5 puntos.

b) *(0,5 puntos)* Se considera igual de correcto proporcionar el ángulo o alguna de sus razones trigonométricas.

B. 3. *(5 puntos)*

a) *(3 puntos)*

a. 1) *(1,5 puntos)* Dominio: 0,3 puntos.
La calificación debe tener en cuenta que se analicen los tres tipos de asíntotas, aunque sea para razonar que no existen. Cada uno de los tres tipos de asíntotas: 0,4 puntos.

a. 2) *(1,5 puntos)* Estudio de máximos: 0,5 puntos. Estudio de mínimos: 0,5 puntos. Estudio de puntos de inflexión: 0,5 puntos.

b) *(2 puntos)* Los pasos para el cálculo del área deben estar claros y la calificación debe tenerlo en cuenta.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Determine para qué valores de k el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 6 \\ x + ky + z &= 0 \\ kx - y + z &= -6 \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Resuélvalo, si es posible, cuando $k = -1$.

SOLUCIÓN.

La matriz A de los coeficientes y la matriz B ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 6 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ k & -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Estudiemos y comparemos el rango de ambas matrices según los valores de k:

El mayor rango posible de ambas es 3. El único menor de orden 3 de A es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = k + k - k - k^3 - 1 + 1 = -k^3 + k = 0 \;\Rightarrow\; k\left(-k^2 + 1\right) = 0 \;\Rightarrow\; k = 0 \;,\; k = -1 \;,\; k = 1$$

▪ Para $k \neq 0, -1$ y 1 : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

▪ Para $k = 0$, las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right)$

Como el menor de orden 2 de A: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg} A = 2$

Orlamos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2 < \text{ nº de incógnitas } \;\Rightarrow\; \text{el sistema es compatible indeterminado.}$$

▪ Para $k = -1$, las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right)$

Como el menor de orden 2 de A: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\,A = 2$

Orlemos este menor con los términos independientes:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 6-6-6+6 = 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\,A = \text{rg}B = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado

▪ Para $k = 1$, las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right)$

El menor de orden 2 de A: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\,A = 2$

Orlemos este menor con los términos independientes:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -6-6-6+6 = -12 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\,B = 3 \;\Rightarrow\; \text{rg}\,A \neq \text{rg}B \;\Rightarrow$ el sistema es incompatible

b) Para $k = -1$ el sistema es compatible indeterminado. Consideremos las dos primeras ecuaciones y la incógnita z como parámetro ($z = \lambda$):

$$\begin{cases} x + y = 6 + \lambda \\ x - y = -\lambda \end{cases} \;\Rightarrow\; 2x = 6 \;\Rightarrow\; x = 3 \;,\; y = 3 + \lambda \;,\; z = \lambda$$

2. *(2 puntos)* Determine la ecuación de la recta, **expresada como intersección de dos planos**, que pasa por el punto $(1,-1,2)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $A = (1,0,1)$, $B = (3,2,1)$, $C = (2,-1,0)$.

SOLUCIÓN.

El vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ es perpendicular al plano y, por tanto, direccional de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (1,-1,-1) \end{array}\right| \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{k} - 2\vec{k} + 2\vec{j} = (-2,2,-4) \,//\, (1,-1,2)$$

La ecuación continua de la recta es: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{2} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} -x+1 = y+1 \\ 2x-2 = z-2 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x+y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ que es la ecuación de la recta expresada como intersección de dos planos.

3. *(5 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine, si existen, todos los valores de los parámetros a y b para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} a\,e^x & si \;\; x < 0 \\ 1 - x^2 & si \;\; 0 \leq x < 1 \\ b(1 - e^{x-1}) & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Considere ahora que $a = 1$. Usando la definición de derivada, estudie si la función es derivable en $x = 0$.

c) *(1,5 puntos)* Determine:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(ln(x)\right)^{\frac{1}{e^x}}$$

d) *(1,5 puntos)* Determine:

$$\int \frac{(ln(x))^2}{\sqrt{x}}\,dx$$

SOLUCIÓN.

a) Las funciones definidas en cada uno de los trozos son continuas (exponencial, polinómica). Habrá que exigir la continuidad de la función en los puntos de empalme $x=0$ y $x=1$:

▪ Continuidad en $x=0$: debe ser $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(ae^x\right)=ae^0=a\\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(1-x^2\right)=1\end{array}\right| \Rightarrow a=1$$

▪ Continuidad en $x=1$: debe ser $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(1-x^2\right)=0\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left[b\left(1-e^{x-1}\right)\right]=b\left(1-e^0\right)=0\end{array}\right| \Rightarrow \text{ la función es continua en } x=1 \text{ independientemente del valor de b.}$$

Por tanto, la función es continua para $a=1$ y $\forall b$.

b) La función, en el entorno de $x=0$, está definida así: $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0\\ 1-x^2 & \text{si } 0\le x<1\end{cases}$

Para $a=1$ sabemos que la función es continua en $x=0$. Recordemos que $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y que para que la función sea derivable en $x=a$ debe ser $f'(a^-)=f'(a^+) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{1}=1\\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}(-x)=0\end{array}\right| \Rightarrow f'(0^-)\ne f'(0^+) \Rightarrow \text{ la función no es derivable}$$

en $x=0$

c) $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{1}{e^x}}=\infty^0$ (indeterminación) $\Rightarrow \ln L=\ln\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{1}{e^x}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\ln x\right)^{\frac{1}{e^x}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{e^x}\ln\left(\ln x\right)\right]=\dfrac{\infty}{\infty}=$

(L'Hôpital) $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\cdot\ln x\cdot e^x}=0 \Rightarrow L=e^0=1$

d) Resolvamos la integral por el método de partes:

$$I=\int\frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}\,dx=\left|\begin{array}{l}u=(\ln x)^2 \Rightarrow du=2(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}dx\\ dv=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx \Rightarrow v=\int x^{-1/2}\,dx=\dfrac{x^{1/2}}{1/2}=2\sqrt{x}\end{array}\right|=2\sqrt{x}\cdot(\ln x)^2-\int 2\sqrt{x}\cdot 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=2\sqrt{x}\cdot(\ln x)^2-4\int(\ln x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\left|\begin{array}{c} u=\ln x \ \Rightarrow\ du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \ \Rightarrow\ v=\int x^{-1/2}\,dx=\frac{x^{1/2}}{1/2}=2\sqrt{x} \end{array}\right|=$$

$$=2\sqrt{x}\cdot(\ln x)^2-4\left[2\sqrt{x}\ln x-\int 2\sqrt{x}\,\frac{1}{x}\,dx\right]=2\sqrt{x}\cdot(\ln x)^2-8\sqrt{x}\ln x+8\int x^{-1/2}\,dx=2\sqrt{x}\cdot(\ln x)^2-8\sqrt{x}\ln x+16\sqrt{x}+C$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine la matriz inversa, si existe, de la matriz siguiente:

$$M=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

En caso de que exista, compruebe que la matriz encontrada es efectivamente la inversa de la matriz M.

b) *(1,5 puntos)* Determine la matriz A^2+B^2 siendo A y B las matrices solución del siguiente sistema:

$$2A+B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) $|M|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=-2+4=2\neq 0\ \Rightarrow\ \exists M^{-1}$

Calculemos la matriz inversa: $M=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{Adj}(M)}\text{Adj}(M)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ -3 & -2 & 2\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{(\text{Adj}(M))^t}$ (*)

$$\boxed{\begin{array}{l} M_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-1\ ,\ M_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0\ ,\ M_{13}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2\ ,\ M_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3\ ,\ M_{22}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2 \\ M_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2\ ,\ M_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=2\ ,\ M_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0\ ,\ M_{33}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-2 \end{array}}$$

(*) $\xrightarrow{(\text{Adj}(M))^t}(\text{Adj}(M))^t=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ 0 & -2 & 0\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{M^{-1}}M^{-1}=\frac{(\text{Adj}(M))^t}{|M|}=\begin{pmatrix}-1/2 & -3/2 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Comprobemos que M^{-1} es la matriz inversa de M:

$M\cdot M^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/2 & -3/2 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$ luego, en efecto, lo es.

b) Calculemos las matrices A y B:

$$\left.\begin{array}{l} 2A+B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix} \\ A-B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}\right| \Rightarrow \text{ Sumando: } 3A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}2/3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=A-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A^2=\begin{pmatrix}2/3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2/3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13/9 & 2/3\\ 2/3 & 1\end{pmatrix} \\ B^2=\begin{pmatrix}-1/3 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/3 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/9 & -2/3\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}\right| \Rightarrow A^2+B^2=\begin{pmatrix}13/9 & 2/3\\ 2/3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/9 & -2/3\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14/9 & 0\\ 2/3 & 1\end{pmatrix}$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine el valor del parámetro "a" para que el plano

$$\pi : x-3y+az=-6$$

sea paralelo a la recta:

$$r:\begin{cases}2x-3y = 1\\ x+3z=-7\end{cases}$$

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo entre esa recta r y el plano:

$$\tilde{\pi} : 2x-3y-z+6=0$$

SOLUCIÓN.

a) El vector $\vec{n}=(1,-3,a)$ es normal al plano π.

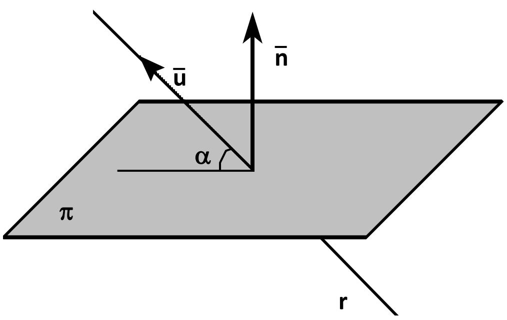
Obtengamos un vector $\vec{u}$ direccional de la recta r. Para ello, necesitamos obtener dos puntos de la misma:

$$\begin{cases}2x-3y=1\\ x+3z=-7\end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\text{Para } x=-1:\ y=-1\ ,\ z=-2 \ \Rightarrow\ A(-1,-1,-2)\\ \text{Para } x=2:\ y=1\ ,\ z=-3 \ \Rightarrow\ B(2,1,-3)\end{array}\right| \Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,2,-1)$$

El plano y la recta son paralelos si los vectores $\vec{n}$ y $\vec{u}$ son perpendiculares $\Leftrightarrow$ $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$:

$$\vec{n}\cdot\vec{u}=3-6-a=0 \Rightarrow a=-3$$

b) $\vec{n}=(2,-3,-1)$ es un vector normal al plano π y $\vec{u}=(3,2,-1)$ un vector direccional de la recta r. El ángulo α que forman la recta y el plano es el complementario del que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{n}$.



De la definición del producto escalar se tiene:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}=\frac{|6-6+1|}{\sqrt{9+4+1}\,\sqrt{4+9+1}}=\frac{1}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90^\circ-\alpha=85^\circ\,54'\,14{,}24'' \Rightarrow \alpha=4^\circ\,5'\,45{,}76''$$

3. *(5 puntos)*

a) *(3 puntos)* Considere la función:

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

a. 1) *(1,5 puntos)* Determine el dominio y las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a. 2) *(1,5 puntos)* Determine los extremos relativos y puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

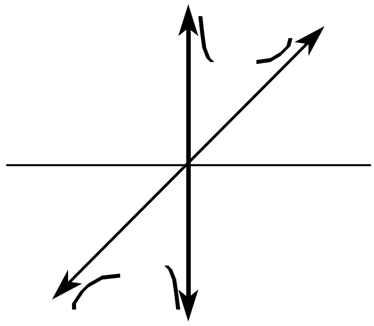
b) *(2 puntos)* Determine el área limitada por la curva $f(x) = -2\,sen\left(\frac{x}{2}\right)$, y las rectas $x = 0$, $x = \pi$ y el eje de abscisas $y = 0$.

SOLUCIÓN.

a.1) ▪ Dominio: $f(x) = x + \frac{4}{x} = \frac{x^2+4}{x}$ es una función racional cuyo dominio es: $D(f) = \mathbb{R} - \{\,0\,\}$.

▪ Asíntotas: La función tiene una asíntota vertical $x = 0$ pues $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\frac{4}{x}\right) = \infty$. La posición relativa de la curva respecto a la asíntota es:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x+\frac{4}{x}\right) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{4}{x}\right) = +\infty$$



La forma en que está expresada la función nos indica que la recta $y = x$ es una asíntota oblicua de la función. La posición relativa de la curva respecto a la asíntota es:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{4}{x}\right) = 0^- \quad , \quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{4}{x}\right) = 0^+$$

a.2) $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2 \;,\; x = 2$ (puntos críticos)

$f''(x) = \frac{8x}{x^4} = \frac{8}{x^3}$ | $f''(-2) < 0 \;\Rightarrow\;$ En $x = -2$ la función tiene un máximo relativo: $(-2\,,-4)$
$f''(2) > 0 \;\Rightarrow\;$ En $x = 2$ la función tiene un mínimo relativo: $(2\,,4)$

Puesto que $f''(x) \neq 0 \;\; \forall x \in D(f)$ la función no tiene puntos de inflexión.

b) Calculemos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas:

$-2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{2} = 0 + k\pi \;\Rightarrow\; x = 2k\pi \;\Rightarrow\; x = 0 \;,\; x = 2\pi \;,\; \ldots$ luego entre $x = 0$ y $x = \pi$ no hay otros puntos de corte.

Tenemos:

$$A = \left|\int_0^{\pi}\left[-2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]dx\right| = \left|-4\int_0^{\pi}\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\,dx\right| = \left|\left[4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}\right| = \left|\left(4\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(4\cos 0\right)\right| = |-4| = 4\ u^2$$

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. **En cada pregunta se señala la puntuación máxima.**

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones, según los diferentes valores de la constante real λ :

$$\begin{aligned} x + y \qquad &= 1 \\ \lambda x + \qquad z &= 0 \\ x + (1+\lambda)y + \lambda z &= \lambda + 1 \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Halle la solución, si existe, cuando $\lambda = 1$.

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las dos rectas siguientes:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto $P(0,0,0)$ a cada una de las dos rectas anteriores.

3. *(4 puntos)*

a) *(3 puntos)* Considere la función de variable real x siguiente:

$$f(x) = x(\text{In}(x))^2$$

a.1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función $f(x)$.

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función.

a.3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y, en ese caso, calcule el valor de la función $f(x)$ en cada uno de ellos.

b) *(1 punto)* Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + kx - 7} - \sqrt{x^2 - 2x + 5} = \frac{5}{3}$$

4. *(1 punto)* En una clase de bachillerato hay 10 chicas y 8 chicos. De ellos 3 chicas y 4 chicos juegan al ajedrez. Si escogemos un estudiante al azar, determine las siguiente probabilidades:

a) *(0,5 puntos)* Sea chica y no juegue al ajedrez.

b) *(0,5 puntos)* No juegue al ajedrez sabiendo que es chico.

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea A una matriz de dimensión 3 x 3 y denotamos por $|A|$ el determinante de la matriz.

a.1) *(1 punto)* Considere la matriz $B = \left(\frac{1}{2}\right)A$. Si $|B| = 1$, calcule el determinante de A, es decir: $|A|$.

a.2) *(1 punto)* Si

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine los valores de x para los que se cumple que $|B| = 1$, siendo $B = \left(\frac{1}{2}\right)A$.

b) *(1 punto)* Determine las matrices cuadradas de dimensión 2 x 2 de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

que verifiquen que

$$MM' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

donde M' representa la matriz traspuesta de M.

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Sea "m" una constante real. Determine la posición relativa de los planos siguientes, según los valores de "m":

$$\pi : mx - 6y + 2z = 2 \qquad \pi' : \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda + \mu \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman las rectas:

$$r : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - 4y - 2z = 0 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

3. *(4 puntos)*

a) *(2 puntos)* Encuentre dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y su producto sea máximo.

b) *(2 puntos)* Determine:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x+1}{1+\operatorname{sen}(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

4. *(1 punto)* En una urna hay 10 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar y, sin verla ni reemplazarla, se extrae una segunda bola.

a) *(0,5 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra?

b) *(0,5 puntos)* Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, calcule la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra también.

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas. De hecho, de acuerdo con las normas generales, los correctores podrán bonificar con un máximo de un punto estos aspectos.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

OPCIÓN A

A. 1. *(3 puntos)*

- **a)** *(2 puntos)* Para clasificar el sistema puede usarse cualquier método. La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles.
- **b)** *(1 punto)* La determinación de la solución del sistema para $\lambda = 1$ puede hacerse por cualquier método y no debe penalizarse el uso de uno u otro.

A. 2. *(2 puntos)*

- **a)** *(1 punto)* Determinación de que las rectas se cruzan se valorará con 1 punto. Si solo se dice que se cortan o se cruzan la calificación máxima será de 0,4 puntos.
- **b)** *(1 punto)* Determinación de la distancia: 1 punto.

A. 3. *(4 puntos)*

- **a)** *(3 puntos)*
  - **a. 1)** *(0,5 puntos)* Dominio: 0,5 puntos.
  - **a. 2)** *(1,5 puntos)* Si bien la determinación de intervalos de crecimiento y de decrecimiento se realiza de manera simultánea, si en algún caso solo se determinase un tipo de esos intervalos (crecimiento o decrecimiento) se valorará cada tipo con 0,75 puntos.
  - **a. 3)** *(1 punto)* La determinación de los máximos y mínimos relativos puede hacerse por cualquier método, a través de los intervalos de crecimiento y decrecimiento o mediante las derivadas. Si usan los desarrollos realizados en el apartado anterior no debe penalizarse nada.

    Si solo se identificaran o bien máximos o bien mínimos relativos se calificará cada caso con 0,5 puntos. Si no se proporciona el valor de la función en los máximos y mínimos, la puntuación máxima será la mitad de la prevista.
- **b)** *(1 punto)* Si bien la cuestión no ofrece una dificultad especial, los pasos en la determinación de la constante deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta.

A. 4. *(1 punto)* De manera genérica, puede pensarse que, debido a las modificaciones en el temario, el cálculo de las probabilidades representa una novedad cualitativa importante para los estudiantes. No obstante, las cuestiones son lo suficientemente sencillas como para que no supongan una especial dificultad.

- **a)** *(0,5 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida.
- **b)** *(0,5 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida.

Si el estudiante identifica correctamente la cuestión a responder como, por ejemplo, el cálculo de la probabilidad condicional identificando los sucesos, pero no sabe determinar la probabilidad, la puntuación máxima será de 0,2 puntos.

OPCIÓN B

B. 1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)*

a. 1) *(1 punto)* Los pasos en la determinación del determinante de A, $|A|$, deben estar claros y la calificación debe tenerlo en cuenta.

a. 2) *(1 punto)* La calificación máxima se otorgará si se determinan todos los valores de x que aparecen. Si solo se determinase alguno, la calificación debe repartirse proporcionalmente entre todos los valores posibles.

b) *(1 punto)* Determinación de las dos matrices que cumplen los requisitos: 1 punto. Si solo encuentran una de las dos: 0,5 puntos.

B. 2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles.

Determinar que si $m \neq -2$ los planos son secantes: 0,4 puntos.

Estudio del caso $m = -2$: 0,6 puntos. Si en este caso $m = -2$ solo se dice que los planos son paralelos o coincidentes pero no se precisa cuál de las dos opciones es la correcta, la calificación de esta parte se reducirá en 0,3 puntos.

b) *(1 punto)* Se considera igualmente válido proporcionar el ángulo o cualquiera de sus razones trigonométricas.

B. 3. *(4 puntos)*

a) *(2 puntos)* Planteamiento del problema: 1 punto. Resolución del problema: 1 punto.

Si se cometiese algún error en el planteamiento pero ese problema mal planteado se resuelve correctamente debe valorarse, al menos parcialmente, la resolución.

b) *(2 puntos)* Los pasos en el cálculo del límite deben estar claros y la calificación debe tenerlo en cuenta.

B. 4. *(1 punto)* De manera genérica, puede pensarse que, debido a las modificaciones en el temario, el cálculo de las probabilidades representa una novedad cualitativa importante para los estudiantes. No obstante, las cuestiones son lo suficientemente sencillas como para que no supongan una especial dificultad.

a) *(0,5 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida.

Si el estudiante plantea el problema correctamente, por ejemplo, identificando las fórmulas adecuadas y los sucesos que aparecen en ellas, pero no determina la probabilidad, la calificación máxima será de 0,2 puntos.

b) *(0,5 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida.

Si el estudiante plantea el problema correctamente, por ejemplo, identificando que se trata de una probabilidad condicional identificando los sucesos que aparecen, pero no determina la probabilidad la calificación máxima será de 0,2 puntos.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones, según los diferentes valores de la constante real λ:

$$\begin{aligned} x + y \quad &= 1 \\ \lambda x + \quad z &= 0 \\ x + (1+\lambda)y + \lambda z &= \lambda + 1 \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Halle la solución, si existe, cuando $\lambda = 1$.

SOLUCIÓN

a) La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & \lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$.

Estudiemos sus rangos según los posibles valores de λ:

En la matriz A, el mayor rango posible es 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 1-\lambda^2-1-\lambda = -\lambda^2-\lambda = -\lambda(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

▪ Para $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 0$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado

▪ Para $\lambda = -1$: $\operatorname{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Estudiemos si el rango de B es 3. Para ello, orlamos el menor anterior con los términos independientes (sustituyendo λ por -1, naturalmente):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} B = 2$$

Por lo tanto: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

▪ Para $\lambda = 0$: $\operatorname{rg} A = 2$ por el mismo motivo de antes. Estudiemos el rango de B:

Orlamos el menor de orden 2 con los términos independientes (sustituyendo λ por 0): $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} B = 2$

Por lo tanto: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 1$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&1\\2&2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&1\end{vmatrix}}=\frac{2-2}{1-1-2}=\frac{0}{-2}=0 \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{1-1-2}{-2}=1 \quad ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&2&2\end{vmatrix}}{-2}=\frac{0}{-2}=0$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las dos rectas siguientes:

$$r:\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=t\end{cases} \qquad s:\begin{cases}2x-y=0\\3y-2z=0\end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto $P(0,0,0)$ a cada una de las dos rectas anteriores.

SOLUCIÓN

a) Consideremos un punto y un vector direccional de cada una de las rectas:

▪ Como la recta r viene dada por su forma paramétrica: $A(1,1,0)$ es un punto y $\vec{u}=(1,1,1)$ un vector direccional.

▪ La recta s está expresada como intersección de dos planos. Si obtenemos dos puntos B y C de la misma, tendremos un punto (por ejemplo, B) y un vector direccional $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{cases}2x-y=0\\3y-2z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{y}{2}\\z=\dfrac{3y}{2}\end{cases} \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\text{Para } y=0:\ x=0\ ,\ z=0 \ \Rightarrow\ B(0,0,0)\\ \text{Para } y=2:\ x=1\ ,\ z=3 \ \Rightarrow\ C(1,2,3)\end{array}\right. \Rightarrow \vec{v}=\overrightarrow{BC}=(1,2,3)$$

▪ Puesto que las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales, las rectas r y s no son paralelas ni coincidentes. Deben cortarse o cruzarse. Para decidirlo, consideremos un vector de origen en la recta r y extremo en s: $\vec{w}=\overrightarrow{AC}=(0,1,3)$ y estudiemos si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes (las rectas se cruzan) o dependientes (las rectas se cortan):

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\0&1&3\end{vmatrix}=6+1-3-3\neq 0 \Rightarrow \vec{u},\vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ son linealmente independientes} \Rightarrow \text{las rectas se cruzan.}$$

b) ▪ Para calcular la distancia desde el punto P a la recta r calcularemos el plano π perpendicular a r que pasa por P, el punto Q de intersección del plano y la recta y la distancia entre P y Q que será la distancia buscada.

El vector $\vec{u}=(1,1,1)$ es perpendicular al plano π por lo que $\pi: x+y+z+D=0$. Y como el plano debe pasar por $P(0,0,0)$: $0+0+0+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \pi: x+y+z=0$.

Coordenadas de Q, intersección de r y π:

$$\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=t\\x+y+z=0\end{cases} \Rightarrow 1+t+1+t+t=0 \Rightarrow 3t+2=0 \Rightarrow t=-\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{array}{l}x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\\ y=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\\ z=-\frac{2}{3}\end{array} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

Y, por tanto: $d(P,r)=d(P,Q)=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(-\frac{2}{3}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

▪ Puesto que $P(0,0,0)\in s$: $d(P,s)=0$

3. *(4 puntos)*

a) *(3 puntos)* Considere la función de variable real x siguiente:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

a.1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función $f(x)$.

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función.

a.3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y, en ese caso, calcule el valor de la función $f(x)$ en cada uno de ellos.

b) *(1 punto)* Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+kx-7} - \sqrt{x^2-2x+5} = \frac{5}{3}$$

SOLUCIÓN

a.1) Se trata del producto de dos funciones continuas cuyo dominio es la intersección de los dominios de cada una de ellas. El primer factor, $f_1(x)=x$, tiene por dominio $\mathbb{R}$. La función $f_2(x)=\ln x$ tiene por dominio $(0\,,+\infty)$ y su cuadrado también. Por lo tanto: $\quad \mathrm{Dom}(f)=(0\,,+\infty)$

a.2) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada.

$$f'(x)=(\ln x)^2+x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=(\ln x)^2+2\ln x=\ln x\,(\ln x+2)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \ln x=0 \;\Rightarrow\; x=1 \\ \ln x+2=0 \;\Rightarrow\; \ln x=-2 \;\Rightarrow\; x=e^{-2} \end{cases}$$

Puesto que la función no tiene discontinuidades en su dominio, se tiene:

$f'>0$		$f'<0$		$f'>0$
0	e^{-2}		1	

f(x) es creciente $\forall x\in(0\,,e^{-2})\cup(1\,,+\infty)$

f(x) es decreciente $\forall x\in(e^{-2}\,,1)$

a.3) Puesto que la función es continua en su dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento nos ofrecen los puntos de máximo y mínimo relativos:

Punto de máximo relativo en $x=e^{-2}$. Además: $f(e^{-2})=e^{-2}\cdot(\ln e^{-2})^2=e^{-2}\cdot(-2)^2=4e^{-2}$

Punto de mínimo relativo en $x=1$. El valor de la función es: $f(1)=1\cdot(\ln 1)^2=1\cdot 0=0$

b) Calculemos el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)\left(\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}\right)}{\left(\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+kx-7-x^2+2x-5}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+2)x-12}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{k+2}{1+1}=\frac{k+2}{2} \;\Rightarrow\; \frac{k+2}{2}=\frac{5}{3} \;\Rightarrow\; k=\frac{4}{3}$$

4. *(1 punto)* En una clase de bachillerato hay 10 chicas y 8 chicos. De ellos 3 chicas y 4 chicos juegan al ajedrez. Si escogemos un estudiante al azar, determine las siguiente probabilidades:

a) *(0,5 puntos)* Sea chica y no juegue al ajedrez.

b) *(0,5 puntos)* No juegue al ajedrez sabiendo que es chico.

SOLUCIÓN.

Sea C el suceso “es chica”, $\overline{C}$ el suceso “es chico”, A el suceso “juega al ajedrez” y $\overline{A}$ el suceso “no juega al ajedrez”.

a) $p(C\cap\overline{A})=p(C)\cdot p(\overline{A}/C)=\frac{10}{18}\cdot\frac{7}{10}=\frac{7}{18}=0{,}3889$

b) $p(\bar{A}/\bar{C})=\dfrac{p(\bar{A}\cap\bar{C})}{p(\bar{C})}=\dfrac{4}{18}:\dfrac{8}{18}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}=0{,}5$

También se podría haber organizado la información en una tabla de contingencia:

	JUEGA AJEDREZ (A)	NO JUEGA AJEDREZ ($\bar{A}$)	TOTAL
CHICA (C)	3	7	10
CHICO ($\bar{C}$)	4	4	8
TOTAL	7	11	18

a) $p(C\cap\bar{A})=\dfrac{7}{18}$

b) $p(\bar{A}/\bar{C})=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}=0{,}5$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea A una matriz de dimensión 3 x 3 y denotamos por $|A|$ el determinante de la matriz.

a.1) *(1 punto)* Considere la matriz $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$. Si $|B|=1$, calcule el determinante de A, es decir: $|A|$.

a.2) *(1 punto)* Si

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine los valores de x para los que se cumple que $|B|=1$, siendo $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$.

b) *(1 punto)* Determine las matrices cuadradas de dimensión 2 x 2 de la forma

$$M=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

que verifiquen que

$$MM'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

donde M' representa la matriz traspuesta de M.

SOLUCIÓN

a.1) Cuando los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por ese número. En la matriz $B=\frac{1}{2}\cdot A$ las tres líneas de A se multiplican por $\frac{1}{2}$ por lo que:

$$|B|=\frac{1}{8}\cdot|A| \;\Rightarrow\; 1=\frac{1}{8}\cdot|A| \;\Rightarrow\; |A|=8$$

a.2) $$B=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{x}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{x-1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{x-1}{2} & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; |B|=\begin{vmatrix} \frac{x}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{x-1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{x-1}{2} & 1 \end{vmatrix}=\frac{x}{2}+\frac{(x-1)^2}{8}-\frac{1}{2}-\frac{x-1}{4}=$$

$$=\frac{4x+x^2-2x+1-4-2x+2}{8}=\frac{x^2-1}{8}=1 \;\Rightarrow\; x^2-1=8 \;\Rightarrow\; x^2=9 \;\Rightarrow\; x=\pm 3$$

b) $M=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; M^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; MM^t=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2 \\ 1 + x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \end{array} \right.$$

Para los valores de x e y encontrados los otros dos términos de las dos matrices iguales también coinciden.

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Sea "m" una constante real. Determine la posición relativa de los planos siguientes, según los valores de "m":

$$\pi : mx - 6y + 2z = 2 \qquad \pi' : \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda + \mu \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman las rectas:

$$r : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - 4y - 2z = 0 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

a) Los dos planos pueden ser secantes, paralelos o coincidentes.

El vector $\vec{n} = (m, -6, 2)$ es normal al plano π.

Los vectores $\vec{u} = (1, -1, -2)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$ están en el plano π' $\Rightarrow$ $\vec{n'} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} - \vec{j} =$

$= -\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = (-1, -3, 1)$ es normal al plano π'.

▪ Si $m = -2$: las coordenadas de $\vec{n}$ y $\vec{n'}$ son proporcionales $\frac{-2}{-1} = \frac{-6}{-3} = \frac{2}{1}$ $\Rightarrow$ $\vec{n} \parallel \vec{n'}$ $\Rightarrow$ los planos son paralelos o coincidentes. Como $P(0,1,2) \in \pi'$ y $P(0,1,2) \notin \pi$ pues $-2 \cdot 0 - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = -2 \neq 2$ hay que descartar que los planos coincidan y, por tanto, son paralelos.

▪ Si $m \neq -2$: los planos son secantes pues $\vec{n}$ y $\vec{n'}$ tienen distintas direcciones.

b) Las rectas están expresadas como intersección de dos planos. Necesitamos obtener un vector direccional de cada una de las rectas para lo que buscaremos dos puntos de cada una y con ellos su vector direccional:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Para } z = 0: \; x = 1 \;,\; y = 0 \;\Rightarrow\; A(1,0,0) \\ \text{Para } z = 1: \; x = 0 \;,\; y = 0 \;\Rightarrow\; B(0,0,1) \end{array} \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1, 0, 1)$$

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2z \\ x + y = -1 - 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 2z \\ 4x + 4y = -4 - 12z \end{cases} \Rightarrow 6x = -4 - 10z \Rightarrow x = \frac{-2 - 5z}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Para } z = -1: \; x = 1 \;,\; y = 1 \;\Rightarrow\; P(1, 1, -1) \\ \text{Para } z = 2: \; x = -4 \;,\; y = -3 \;\Rightarrow\; Q(-4, -3, 2) \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (-5, -4, 3)$$

Se tiene: $\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{|5 + 3|}{\sqrt{1+0+1}\,\sqrt{25+16+9}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \Rightarrow \alpha = 36^{\circ}\, 52'\, 11{,}63''$

3. *(4 puntos)*

a) *(2 puntos)* Encuentre dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y su producto sea máximo.

b) *(2 puntos)* Determine:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x + 1}{1 + \text{sen}(x)} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

SOLUCIÓN

a) Sean x e y los números buscados. Debe cumplirse: $2x+3y=24 \;\Rightarrow\; y=\frac{24-2x}{3}=8-\frac{2}{3}x$

La función $f(x)=x\left(8-\frac{2}{3}x\right)=8x-\frac{2}{3}x^2$ debe ser máxima.

$f'(x)=8-\frac{4}{3}x=0 \;\Rightarrow\; 24=4x \;\Rightarrow\; x=6$ y como $f''(x)=-\frac{4}{3}<0 \;\Rightarrow\; x=6$ hace máxima la función.

Por lo tanto, los dos números son: 6 y 4.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+\text{sen}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+\text{sen}x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}}=(1)$

Calculemos el límite del exponente:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1-1-\text{sen}x}{1+\text{sen}x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\text{sen}x}{x^2\left(1+\text{sen}x\right)}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{2x\left(1+\text{sen}x\right)+x^2\cos x}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}x}{2\left(1+\text{sen}x\right)+2x\cos x+2x\cos x-x^2\,\text{sen}x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}x}{2\left(1+\text{sen}x\right)+4x\cos x-x^2\,\text{sen}x}\right)=\frac{0}{2}=0$$

Y, por tanto: $(1)=e^0=1$

4. *(1 punto)* En una urna hay 10 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar y, sin verla ni reemplazarla, se extrae una segunda bola.

a) *(0,5 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra?

b) *(0,5 puntos)* Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, calcule la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra también.

SOLUCIÓN

Sea B_1 el suceso "la primera bola extraída es blanca", N_1 el suceso "la primera bola extraída es negra", B_2 "la segunda bola extraída es blanca" y N_2 "la segunda bola extraída es negra"

a) Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(N_2)=p(B_1)\cdot p(N_2/B_1)+p(N_1)\cdot p(N_2/N_1)=\frac{10}{13}\cdot\frac{3}{12}+\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}=\frac{36}{156}=\frac{3}{13}\simeq 0{,}23$$

b) Es una aplicación del teorema de Bayes: $p(N_1/N_2)=\frac{p(N_1\cap N_2)}{p(N_2)}=\frac{p(N_1)\cdot p(N_2/N_1)}{p(N_2)}=\frac{\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}}{\frac{3}{13}}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\simeq 0{,}17$

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Sea "m" una constante real. Determine para qué valores de "m" el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} 5x + 4y + 2z &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 0 \\ 4x - y + m^2 z &= m - 1 \end{aligned}$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi : x - 2y + z = 1 \qquad \pi' : \begin{cases} x = 2\lambda + \mu \\ y = \lambda + \mathbf{k}\,\mu \\ z = 1 - \mu \end{cases}$$

según los diferentes valores de la constante real $\mathbf{k}$.

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman esos planos cuando $\mathbf{k} = 3$.

3. *(4 puntos)* Considere la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)}$$

a) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función.

b) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, sus asíntotas.

c) *(2 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de la función $f(x)$ así como sus máximos y mínimos relativos, si existen.

4. *(1 punto)* Se dispone de dos cajas con bolas blancas y negras. La caja *A* contiene 6 bolas blancas y 3 negras; y la caja *B* contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se lanza un dado y si sale par se sacan dos bolas de la caja *A*, una tras otra, sin reponer ninguna. Por su parte, si sale impar al lanzar el dado se sacan dos bolas de la caja *B*, también una tras otra, sin reponer ninguna.

¿Cuál es la probabilidad de extraer exactamente dos bolas blancas?

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)* Sea k una constante real y considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & k & 3k+2 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Estudie la existencia de inversa de la matriz A según los diferentes valores de k.

b) *(1 punto)* Si $k = 2$, calcule la inversa de A, si existe.

c) *(1 punto)* Determine el rango de la matriz A según los diferentes valores de k.

2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta que es paralela a la recta:

$$r : \begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ \quad\quad\;\; y + z = 0 \end{cases}$$

y pasa por el punto $P: (2,1,-1)$.

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman los dos planos siguientes:

$$\pi : 2x - 3y + z = 4$$

$$\pi' : \quad\quad y + z = 0$$

3. *(4 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine los valores de *"a"* y *"b"* para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 1/e^x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ a\cos(x) + b & \text{si} \quad 0 < x \leq \pi \\ sen(x) - ax & \text{si} \quad \pi < x \end{cases}$$

b) *(1,5 puntos)* Calcule la integral:

$$\int x^2 (\ln x)^2 \, dx$$

c) *(1,5 puntos)* Determine el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \left(e^{(x-1)} - 1\right)^{(x-1)}$$

4. *(1 punto)* En una clase de bachillerato, el 60% de los alumnos aprueban matemáticas, el 50% aprueban inglés y el 30% aprueban las dos asignaturas. Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar:

a) *(0,5 puntos)* Apruebe alguna de las dos asignaturas (una o las dos).

b) *(0,5 puntos)* Apruebe Matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas. De hecho, de acuerdo con las normas generales, los correctores podrán bonificar con un máximo de un punto estos aspectos.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

OPCIÓN A

A. 1. *(3 puntos)* La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles y los razonamientos empleados para la clasificación del sistema.

A. 2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* La calificación máxima se otorgará si se analizan todos los casos posibles y se identifican correctamente las posiciones de los planos. Si para algún caso de valor de "m" se dice que los planos son paralelos o coincidentes pero no se precisa qué opción de esas dos es la correcta, podrá disminuirse la calificación en 0,5 puntos.

b) *(0,5 puntos)* En este caso, dado que se trata de un ángulo de 90º, si se identifica el ángulo se otorgarán los 0,5 puntos y si solo se proporciona alguna de sus razones trigonométricas se calificará con 0,4 puntos.

A. 3. *(4 puntos)*

a) *(0,5 puntos)* Dominio

b) *(1,5 puntos)* La calificación máxima requiere que se estudien los tres tipos de asíntotas posibles, incluso para decir que no existen. Si no se estudian todas, el estudio de cada tipo de asíntota se calificará con 0,5 puntos.

c) *(2 puntos)* Determinación de intervalos de crecimiento y de decrecimiento: 1 punto. Si bien la determinación de ambos intervalos se realiza de manera simultánea, si en algún caso solo se determinase uno de los dos tipos de intervalos (crecimiento o decrecimiento) se valorará cada tipo con la mitad de la puntuación total.

Determinación de máximos y mínimos relativos: 1 punto (0,5 puntos de identificación del máximo y 0,5 puntos la del mínimo). Asimismo, la determinación de los máximos y mínimos relativos puede hacerse por cualquier método, a través de los intervalos de crecimiento y decrecimiento o mediante las derivadas.

A. 4. *(1 punto)* De manera genérica, puede pensarse que, debido a las modificaciones en el temario, el cálculo de las probabilidades representa una novedad cualitativa importante para los estudiantes. No obstante, la cuestión es lo suficientemente sencilla como para que no suponga una especial dificultad.

Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida.

Si el estudiante identificase correctamente la cuestión a responder, por ejemplo a través del teorema de la probabilidad total, pero no sabe determinar las probabilidades que aparecen, la puntuación máxima será de 0,4 puntos.

OPCIÓN B

B. 1. *(3 puntos)*

a) *(1 punto)* La determinación de los valores *k* puede hacerse a través de cualquier método.

b) *(1 punto)* La determinación de la matriz inversa puede hacerse por cualquier método. Si se realiza usando Gauss-Jordan el proceso es más largo que si se hace mediante determinantes y los errores numéricos pueden ser más frecuentes. En ese caso deberá valorarse más el proceso que los cálculos, siempre que los cálculos tengan sentido.

(1 punto) La puntuación máxima se otorgará si se analizan todos los casos posibles.

B. 2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Si la ecuación de la recta no se proporciona como intersección de dos planos se calificará con un máximo de 1 punto.

b) *(0,5 puntos)* Se considera igualmente válido proporcionar el ángulo o cualquiera de sus razones trigonométricas.

B. 3. *(4 puntos)*

a) *(1 punto)* Determinación de cada una de las dos constantes: 0,5 puntos.

b) *(1,5 puntos)* Los pasos en el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación debe tenerlo en cuenta. Si no se escribe la constante de integración, la puntuación máxima será de 1,2 puntos.

c) *(1,5 puntos)* Los pasos en el cálculo del límite deben estar claros y la calificación debe tenerlo en cuenta.

B. 4. *(1 punto)* De manera genérica, puede pensarse que, debido a las modificaciones en el temario, el cálculo de las probabilidades representa una novedad cualitativa importante para los estudiantes. No obstante, las cuestiones son lo suficientemente sencillas como para que no suponga una especial dificultad.

a) *(0,5 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida.

Si el estudiante plantea el problema correctamente, por ejemplo, identificando la probabilidad pedida como la probabilidad de una unión e identifica los sucesos que aparecen en ellas, pero no determina la probabilidad la calificación máxima será de 0,2 puntos.

b) *(0,5 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida.

Si el estudiante plantea el problema correctamente, por ejemplo, identificando que se trata de una probabilidad condicional e identifica los sucesos que aparecen, pero no determina la probabilidad la calificación máxima será de 0,2 puntos.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Sea "m" una constante real. Determine para qué valores de "m" el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} 5x+4y+2z &= 0 \\ 2x+3y+z &= 0 \\ 4x-y+m^2z &= m-1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN.

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & m^2 & m-1 \end{pmatrix}$

El único menor de orden 3 de A es:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{vmatrix} = 15m^2+16-4-24+5-8m^2=7m^2-7=0 \quad\Rightarrow\quad m=-1\ ,\ m=1$$

Tenemos entonces:

- Para $m\neq -1$ y $m\neq 1$: $\text{rg}A=\text{rg}B=3=$nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

- Para $m=-1$: $\text{rg}A=2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=15-8\neq 0$.

  Orlamos este menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}=-30+16\neq 0 \Rightarrow \text{rg}B=3$

  Y como $\text{rg}A\neq\text{rg}B \Rightarrow$ el sistema es incompatible para $m=-1$.

- Para $m=1$: el menor de B resultante de orlar el menor no nulo de A es ahora: $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg}B=2$

  Luego $\text{rg}A=\text{rg}B=2<$nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado para $m=1$.

2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi : x-2y+z=1 \qquad \pi' : \begin{cases} x = 2\lambda+\mu \\ y = \lambda+\mathbf{k}\,\mu \\ z = 1-\mu \end{cases}$$

según los diferentes valores de la constante real $\mathbf{k}$.

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman esos planos cuando $\mathbf{k}=3$.

SOLUCIÓN.

a) ▪ El vector $\vec{n}=(1,-2,1)$ es perpendicular al plano π .

▪ Los vectores $\vec{u}=(2,1,0)$ y $\vec{v}=(1,k,-1)$ están contenidos en el plano π' y, por tanto, el vector $\vec{n}'=\vec{u}\times\vec{v}$ es perpendicular a π' : $\vec{n}'=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+2k\vec{k}-\vec{k}+2\vec{j}=(-1,2,2k-1)$

Los dos planos pueden ser: coincidentes o paralelos si los vectores $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ tienen la misma dirección o secantes si los vectores tienen distinta dirección.

Los vectores $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ tienen la misma dirección si sus coordenadas son proporcionales:

$$\vec{n}//\vec{n}' \Leftrightarrow \frac{1}{-1}=\frac{-2}{2}=\frac{1}{2k-1} \Rightarrow 2k-1=-1 \Rightarrow k=0$$

Tenemos entonces:

▪ Para $k=0$: $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ tienen la misma dirección $\Rightarrow$ los planos coinciden o son paralelos. Para precisar su posición veamos si tienen algún punto común (coinciden) o no tienen puntos comunes (paralelos).

El punto $P(2\lambda+\mu,\lambda,1-\mu)$ es un punto cualquiera de π'. Veamos si pertenece también al plano π comprobando si verifica o no su ecuación: $2\lambda+\mu-2\lambda+1-\mu=1 \Rightarrow P\in\pi \Rightarrow$ los planos son coincidentes.

▪ Para $k\neq 0$: los vectores tienen distinta dirección y los planos son secantes.

b) Para $k=3$ los planos π y π' son secantes. El ángulo que forman coincide con el ángulo que forman sus vectores normales $\vec{n}$ y $\vec{n}'$: $\vec{n}=(1,-2,1)$, $\vec{n}'=(-1,2,5)$.

$$\cos\alpha=\cos(\pi,\pi')=\cos(\vec{n},\vec{n}')=\frac{\vec{n}\cdot\vec{n}'}{|\vec{n}||\vec{n}'|}=\frac{-1-4+5}{\sqrt{1+4+1}\,\sqrt{1+4+25}}=0 \Rightarrow \alpha=90^{o} \Rightarrow \text{ los planos son perpendiculares.}$$

3. *(4 puntos)* Considere la función:

$$f(x)=\frac{x^2}{(1+x)}$$

a) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función.

b) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, sus asíntotas.

c) *(2 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de la función $f(x)$ así como sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN.

a) $f(x)$ es una función racional. Su dominio está formado por todos los valores reales que no anulen el denominador. Por tanto: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

b) ▪ Asíntotas verticales: $x=-1$ pues $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2}{(1+x)}=\infty$

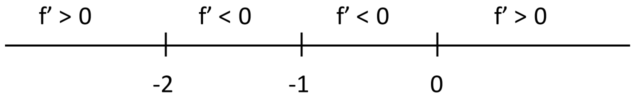
▪ Asíntotas horizontales: no existen pues $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{(1+x)}=\infty$

▪ Asíntotas oblicuas $y=mx+n$:

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x+x^2}=1 \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x-x^2}{1+x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x}{1+x}\right)=-1 \end{array}\right| \Rightarrow y=x-1$$

c) $f'(x)=\dfrac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}=\dfrac{x(2+x)}{(1+x)^2}=0 \;\Rightarrow\; x(2+x)=0 \;\Rightarrow\; x=-2\ ,\ x=0$ (valores críticos)

Estudiemos el signo de la primera derivada en los intervalos cuyos extremos son los valores críticos y el punto de discontinuidad $x=-1$: $(-\infty,-2)$, $(-2,-1)$, $(-1,0)$ y $(0,+\infty)$



$f'(-3)>0$; $f'(-1{,}5)<0$; $f'(-0{,}5)<0$; $f'(1)>0$

Luego la función es creciente en los intervalos $(-\infty,-2)$ y $(0,+\infty)$ y decreciente en $(-2,-1)$ y $(-1,0)$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento nos ofrecen la siguiente información:

La función tiene un máximo relativo en $x=-2$: $(-2,-4)$ y un mínimo relativo en $x=0$: $(0,0)$

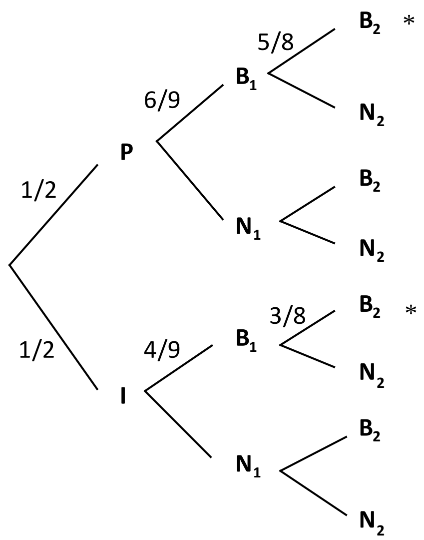
4. *(1 punto)* Se dispone de dos cajas con bolas blancas y negras. La caja *A* contiene 6 bolas blancas y 3 negras; y la caja *B* contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se lanza un dado y si sale par se sacan dos bolas de la caja *A*, una tras otra, sin reponer ninguna. Por su parte, si sale impar al lanzar el dado se sacan dos bolas de la caja *B*, también una tras otra, sin reponer ninguna.

¿Cuál es la probabilidad de extraer exactamente dos bolas blancas?

SOLUCIÓN.

Sean los sucesos: P = “sale par al lanzar el dado”, I = “sale impar al lanzar el dado”, B_1 = “la primera bola extraída es blanca”, N_1 = “la primera bola extraída es negra”, B_2 = “la segunda bola es blanca y N_2 = “la segunda bola es negra”.

Representemos la situación mediante un diagrama en árbol:



Se trata de una aplicación del teorema de la probabilidad total.

$$p(B_1\cap B_2)=p(P)\cdot p(B_1\cap B_2)+p(I)\cdot p(B_1\cap B_2)=$$

$$=p(P)\cdot p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)+p(I)\cdot p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{30}{144}+\frac{12}{144}=\frac{42}{144}=\frac{7}{24}\simeq 0{,}2917$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)* Sea k una constante real y considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & k & 3k+2 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Estudie la existencia de inversa de la matriz A según los diferentes valores de k.

b) *(1 punto)* Si $k = 2$, calcule la inversa de A, si existe.

c) *(1 punto)* Determine el rango de la matriz A según los diferentes valores de k.

SOLUCIÓN.

a) La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & k & 3k+2 \\ 1 & 0 & -k \end{vmatrix} = -k^2 - 4k = -k(k+4) = 0 \;\Rightarrow\; k = 0 \;,\; k = -4 \;\Rightarrow\; \exists\, A^{-1} \;\; \forall k \neq -4 \text{ y } 0$$

b) Para $k = 2$, existe la matriz inversa de A pues $|A| = -2 \cdot 6 = -12 \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(Adj A)*}} \begin{pmatrix} -4 & 8 & -2 \\ 0 & -6 & 0 \\ -8 & -8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(Adj A)}^t} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 8 & -6 & -8 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A^{-1} = 1/|A| \cdot (\text{Adj A})^t} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ -2/3 & 1/2 & 2/3 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}$$

*Adjuntos de los elementos de A:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 8$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -8$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -8$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

Así pues: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ -2/3 & 1/2 & 2/3 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}$ $\qquad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ -2/3 & 1/2 & 2/3 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

c)
- Según el apartado a): $\operatorname{rg} A = 3 \quad \forall k \neq -4$ y 0
- Para $k = -4$: $\operatorname{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$
- Para $k = 0$: $\operatorname{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta que es paralela a la recta:

$$r: \begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ \quad\;\; y + z = 0 \end{cases}$$

y pasa por el punto $P: (2,1,-1)$.

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman los dos planos siguientes:

$$\pi : 2x - 3y + z = 4$$
$$\pi' : \quad y + z = 0$$

SOLUCIÓN.

a) Necesitamos un punto y un vector direccional. El punto es el dado, $P(2,1,-1)$, y como vector direccional nos sirve cualquiera de los vectores direccionales de la recta r. Para obtenerlo necesitamos dos puntos cualesquiera de r:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=4 \\ \quad y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Para } z=0:\ y=0\ ,\ x=2\ \Rightarrow\ A(2,0,0) \\ \text{Para } z=-1:\ y=1\ ,\ x=4\ \Rightarrow\ B(4,1,-1) \end{matrix} \Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(2,1,-1)$$

La recta pedida es entonces: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1} \\ \dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=2y-2 \\ -y+1=z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

b) El ángulo α que forman los dos planos es el mismo que el que forman sus vectores normales: $\vec{n}=(2,-3,1)$ y $\vec{n}'=(0,1,1)$:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{n}\cdot\vec{n}'}{|\vec{n}||\vec{n}'|}=\frac{-3+1}{\sqrt{4+9+1}\,\sqrt{0+1+1}}=\frac{-2}{\sqrt{28}}=\frac{-2}{2\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{7}}{7}\simeq -0{,}378 \quad\Rightarrow\quad \alpha=112^{o}\ 12'\,27{,}56''$$

3. *(4 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine los valores de *"a"* y *"b"* para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} 1/e^{x} & \text{si } x\le 0 \\ a\cos(x)+b & \text{si } 0<x\le\pi \\ sen(x)-ax & \text{si } \pi<x \end{cases}$$

b) *(1,5 puntos)* Calcule la integral:

$$\int x^{2}(\ln x)^{2}\,dx$$

c) *(1,5 puntos)* Determine el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)}$$

SOLUCIÓN.

a) Las tres funciones que definen a $f(x)$ son continuas en los intervalos en que están definidas. Debemos exigir entonces que la función sea continua en $x=0$ y en $x=\pi$, y para que esto ocurra debe ser: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)$.

$$\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(a\cos x+b) \ \Rightarrow\ 1=a+b \\ \lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x) \ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to \pi}(a\cos x+b)=\lim\limits_{x\to \pi}(\operatorname{sen}x-ax) \ \Rightarrow\ -a+b=-a\pi \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ (1-\pi)a-b=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (2-\pi)a=1\ \Rightarrow\ a=\frac{1}{2-\pi}\quad,\quad b=1-a=1-\frac{1}{2-\pi}=\frac{1-\pi}{2-\pi}$$

b) Utilizaremos el método de integración por partes: $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$

$$\int x^2 (\ln x)^2\,dx = \left| \begin{array}{l} u = (\ln x)^2 \;\Rightarrow\; du = 2\ln x \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^2\,dx \;\Rightarrow\; v = \dfrac{1}{3}x^3 \end{array} \right| = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \int \frac{1}{3}x^3\, 2\ln x \frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{3}\int x^2 \ln x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \;\Rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^2\,dx \;\Rightarrow\; v = \dfrac{1}{3}x^3 \end{array} \right| = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 \frac{1}{x}dx\right] = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{9}\int x^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{9}\frac{x^3}{3} + K = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}x^3 + K$$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(e^{x-1}-1\right)^{x-1} = 0^0$ indeterminación. Sea $L = \lim\limits_{x\to 1}\left(e^{x-1}-1\right)^{x-1}$, aplicamos logaritmo neperiano a los dos miembros:

$\ln L = \ln\left[\lim\limits_{x\to 1}\left(e^{x-1}-1\right)^{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\left[\ln\left(e^{x-1}-1\right)^{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)\ln\left(e^{x-1}-1\right)\right] = 0\cdot(-\infty)$ (x debe tender a 1^+) =

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(e^{x-1}-1\right)}{\dfrac{1}{x-1}} = \dfrac{\infty}{\infty} =$ (aplicamos la regla de L'Hôpital) $= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{e^{x-1}}{e^{x-1}-1}}{-\dfrac{1}{(x-1)^2}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2 e^{x-1}}{-e^{x-1}+1} = \dfrac{0}{0} =$ (aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital) $= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)e^{x-1} + (x-1)^2 e^{x-1}}{-e^{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}(x-1)(2+x-1)}{-e^{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1}\left[-(x-1)(1+x)\right] = 0 \;\Rightarrow\; L = e^0 = 1$

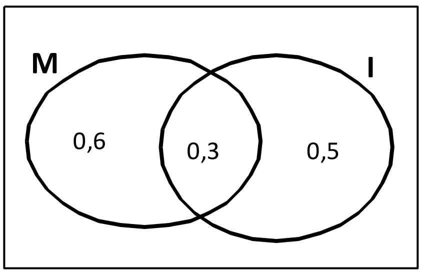
4. *(1 punto)* En una clase de bachillerato, el 60% de los alumnos aprueban matemáticas, el 50% aprueban inglés y el 30% aprueban las dos asignaturas. Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar:

a) *(0,5 puntos)* Apruebe alguna de las dos asignaturas (una o las dos).

b) *(0,5 puntos)* Apruebe Matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.

SOLUCIÓN.

Sean M el suceso "aprueba Matemáticas" e I el suceso "aprueba Inglés".



Se tiene: $p(M) = \dfrac{60}{100} = 0{,}6$; $p(I) = 0{,}5$; $p(M\cap I) = 0{,}3$

a) Se trata de calcular la probabilidad de la unión de ambos sucesos:

$$p(M\cup I) = p(M) + p(I) - p(M\cap I) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}8$$

b) $p(M/I) = \dfrac{p(M\cap I)}{p(I)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + mz &= m \\ mx + (m-1)y + z &= 2 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

a) *(1 punto)* Determine los valores del parámetro *m* para los que ese sistema de ecuaciones es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) *(1 punto)* Encuentre las soluciones de ese sistema cuando *m* = 1.

c) *(1 punto)* Considere las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, D = (\ 1,\ 2, -1)$$

Determine el rango de la matriz producto *CD*.

2. *(1,5 puntos)* Determine la ecuación del plano que pasa por el punto (0, 0, 0) y contiene a la recta:

$$r: \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

3. *(4 puntos)*

a) Considere la función:

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

a.1.) *(1 punto)* Determine el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

a.2.) *(1 punto)* Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

a.3.) *(1 punto)* Determine la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 2$.

b) *(1 punto)* Calcule:

$$\int \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}\, dx$$

4. *(1,5 puntos)* Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30% les gustan ambos deportes.

a) *(0,75 puntos)* Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?

b) *(0,75 puntos)* Se eligen 10 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule la probabilidad de que solo a 3 les guste el fútbol (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)* Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine los valores del parámetro *k* para los que la matriz:

$$A - k\,I$$

tenga inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) *(1,5 puntos)* Encuentre la matriz X que verifica que:

$$(A - 3\,I)X = 2\,I$$

siendo I la matriz identidad de orden 3 y *A* la matriz que aparece al comienzo del enunciado.

2. *(1,5 puntos)* Considere el plano: $\pi:\ 2ax + y + az = 4$ y la recta:

$$r: \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

a) *(0,75 puntos)* Determine la posición del plano y la recta según los diferentes valores de *a*.

b) *(0,75 puntos)* Para *a* = 2, determine la recta que es perpendicular al plano *π* y pasa por el punto *P*(0,1, 0).

3. *(4 puntos)*

a) *(2 puntos)* Determine los valores de los parámetros *a, b* y *c* para que la función:

$$f(x) = a\,(x-1)^3 + b\,x + c$$

a.1.) Pase por el punto (1, 1)

a.2.) En el punto (1, 1) su tangente tenga de pendiente 2.

a.3.) En el punto $x = 2$ tenga un máximo relativo.

b) *(2 puntos)* Determine el valor del límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} \right)^{\frac{3x^2 - 1}{x}}$$

4. *(1,5 puntos)* En una empresa los trabajadores se clasifican en tres categorías: *A, B* y *C*. El 30 % de los trabajadores pertenecen a la categoría A; el 25 % a la categoría B y el resto a la categoría C.

Además, se sabe que de los trabajadores de la categoría A un 5 % habla inglés; mientras que de la categoría *B* un 20 % habla inglés y de los trabajadores de la categoría *C* un 60 % habla inglés.

c) *(0,75 puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa, ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés?

d) *(0,75 puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa y resulta que SI habla inglés, ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la categoría *C*?

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

Opción A

A.1-a *(1 punto)* Para clasificar el sistema puede usarse cualquier método. La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles. La valoración de todos los casos debe ser idéntica.

A.1-b *(1 punto)* La calificación máxima de *1 punto* se obtendrá si se proporciona la parametrización de las infinitas soluciones que corresponden al caso que se estudia.

A.1-c *(1 punto)* La calificación debe tener en cuenta que se sabe determinar la matriz producto *CD* y el estudio de su rango. Si solo se obtiene la matriz producto *CD* pero no se estudia el rango la calificación máxima será de *0,4 puntos.*
A.2 *(1,5 puntos)* Determinación del plano: *1,5 puntos.* El plano puede proporcionarse en cualquiera de sus formas, vectorial, paramétrica o general, y todas deben considerarse igualmente válidas.
A.3-a-i *(1 punto)* Dominio: *0,25 puntos.* Estudio de las asíntotas: *0,25 puntos* cada uno de los tres tipos de asíntotas a estudiar, incluidos los casos en que puedan no existir, en los que deben decir que no las hay.

A.3-a-ii *(1 punto)* El estudio de los máximos y mínimos relativos pueden hacerlo a través de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento o a través de las derivadas.

A.3-a-iii Determinación de la tangente: *1 punto*.

A.3-b *(1 punto)* Los pasos y razonamientos en el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación debe tenerlo en cuenta. Si no se escribe la constante de integración, la calificación máxima será´ de *0,8 puntos*.
A.4 De manera genérica, puede pensarse que, debido a las modificaciones recientes en el temario, esta parte todavía representa una novedad cualitativa importante para los estudiantes. No obstante, las cuestiones son los suficientemente sencillas como para que no supongan una especial dificultad.

En todo caso, en las dos cuestiones planteadas los pasos para la determinación de las probabilidades deben estar claros y la valoración de las cuestiones debe tenerlo en cuenta, si bien cualquier estrategia es válida.

A.4-a *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igual- mente válida, siempre que sea coherente y correcta.

A.4-b *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igual- mente válida, siempre que sea coherente y correcta.

Debe señalarse que, dado que es razonable aplicar la distribución de probabilidades Binomial que incluye cálculos que pueden resultar tediosos, se les ha indicado a los estudiantes que NO es preciso finalizar los cálculos, y pueden dejar indicada la probabilidad, precisando, eso sí, los números que la definen.

Opción B

B.1-a *(1,5 puntos)* La calificación debe tener en cuenta que se identifican todos los valores posibles.

B.1-b *(1,5 puntos)* Para obtener la máxima calificación debe obtenerse la matriz X que se busca. En todo caso, la calificación debe tener en cuenta los cálculos y razonamientos que se utilicen, es decir, no llegar a obtener la matriz X correcta NO implica una calificación de 0 puntos.

B.2-a *(0,75 puntos)* La calificación deberá tener en cuenta que se analizan todas las posibilidades.

B.2-b *(0,75 puntos)* La recta puede proporcionarse en cualquiera de sus formas (paramétrica, continua, intersección de planos) y todas se consideran válidas.

B.3-a *(2 puntos)* Los cálculos son suficientemente sencillos como para que no ofrezcan dificultad.

B.3-b *(2 puntos)* Los pasos en la determinación del límite deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta.

B.4 Como se ha mencionado en los criterios de la opción A, puede pensarse que esta parte todavía representa una novedad cualitativa importante para los estudiantes. No obstante, las cuestiones son los suficientemente sencillas como para que no supongan una especial dificultad.

En todo caso, en las dos cuestiones planteadas los pasos para la determinación de las probabilidades deben estar claros y la valoración de las cuestiones debe tenerlo en cuenta, si bien cualquier estrategia es válida.

B.4-a *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, siempre que sea coherente y correcta.

Si un estudiante identifica correctamente la cuestión a responder identificando correctamente los sucesos pero no sabe determinar la probabilidad, la puntuación máxima será de *0,25 puntos.*

B4-b *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, siempre que sea coherente y correcta.

Si un estudiante identifica correctamente la cuestión a responder como, por ejemplo, identificando el cálculo de la probabilidad condicional, e identifica correctamente los sucesos pero no sabe determinar la probabilidad, la puntuación máxima será´ de *0,25 puntos.*

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + mz &= m \\ mx + (m-1)y + z &= 2 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

a) *(1 punto)* Determine los valores del parámetro *m* para los que ese sistema de ecuaciones es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) *(1 punto)* Encuentre las soluciones de ese sistema cuando *m* = 1.

c) *(1 punto)* Considere las matrices:

$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = (\ 1,\ 2, -1)$

Determine el rango de la matriz producto *CD*.

SOLUCIÓN

a) La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m \\ m & m-1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Estudiemos sus rangos según los posibles valores de m:

En la matriz A, el mayor rango posible es 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m-1+m^2+1-m\cdot(m-1)-m-1 = m-1+m^2+1-m^2+m-m-1 = m-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m=1$$

▪ Para $m \neq 1$: : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 3 = \text{nº de incógnitas} \quad \Rightarrow \quad$ el sistema es compatible determinado

▪ Para $m = 1$: $\operatorname{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Estudiemos ahora el rango de B. Para ello, orlamos el menor anterior con los términos independientes (sustituyendo m por 1, naturalmente):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg} B = 2$$

Por lo tanto: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2 < \text{nº de incógnitas} \quad \Rightarrow \quad$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado y es equivalente al sistema: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x \quad\ + z = 2 \end{cases}$

Consideramos z como un parámetro: $z = \lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = 1-\lambda \\ x \quad\ = 2-\lambda \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 2-\lambda \quad , \quad y = 1-\lambda-2+\lambda = -1$

Luego las soluciones son: $x = 2-\lambda$, $y = -1$, $z = \lambda$

c) $CD=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\-1 & -2 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

La matriz CD solo tiene una fila linealmente independiente pues la segunda fila es la opuesta de la primera y la tercera es el vector nulo. Por tanto: $\text{rg}\, CD=1$

2. *(1,5 puntos)* Determine la ecuación del plano que pasa por el punto (0, 0, 0) y contiene a la recta:

$$r:\begin{cases}2x-y-2=0\\3y-2z+4=0\end{cases}$$

SOLUCIÓN

La ecuación del haz de planos (conjunto de los planos que contienen a una recta) es: $2x-y-2+\lambda\,(3y-2z+4)=0$

Seleccionemos de entre todos ellos el que pasa por el punto $(0\,,0\,,0)$:

$$2\cdot 0-0-2+\lambda\,(3\cdot 0-2\cdot 0+4)=0 \;\Rightarrow\; -2+4\lambda=0 \;\Rightarrow\; \lambda=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Luego el plano buscado es: $2x-y-2+\frac{1}{2}(3y-2z+4)=0 \;\Rightarrow\; 2x+\frac{1}{2}y-z=0 \;\Leftrightarrow\; 4x+y-2z=0$

3. *(4 puntos)*

a) Considere la función:

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

a.1.) *(1 punto)* Determine el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

a.2.) *(1 punto)* Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

a.3.) *(1 punto)* Determine la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x=2$.

b) *(1 punto)* Calcule:

$$\int\frac{x^2-3x+3}{x-1}\,dx$$

SOLUCIÓN

a) a.1) Se trata de una función racional cuyo dominio es $\mathbb{R}$ menos los valores de x que anulen al denominador. El denominador es una función irracional pero como $x^2+1>0\ \forall x \;\Rightarrow\; \exists\sqrt{x^2+1}\neq 0\ \forall x \;\Rightarrow\; \text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

- Asíntotas verticales: no tiene pues la función no tiende a ∞ cuando x tiende a algún valor determinado.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=1 \;\Rightarrow\; y=1 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x\to+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{-\infty}{+\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=-1 \;\Rightarrow\; y=-1 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x\to-\infty$$

- Asíntotas oblicuas $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{x^2+1}}=0 \;\Rightarrow\; \text{se trata de las asíntotas horizontales, ya obtenidas}$$

a.2) $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{\dfrac{x^2+1-x^2-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{1-x}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}=0 \;\Rightarrow\; x=1$ (punto crítico)

$$f''(x)=\frac{-1\cdot\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}-(1-x)\left[2x\cdot\sqrt{x^2+1}+\left(x^2+1\right)\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right]}{\left(x^2+1\right)^3} \;\Rightarrow\; f''(1)<0 \;\Rightarrow\; x=1 \text{ es un máximo}$$

relativo. Además: $f(1)=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ luego la función tiene un máximo relativo en $\left(1\,,\sqrt{2}\right)$

a.3) $f(2)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5} \;\Rightarrow\;$ el punto de tangencia es $\left(2\,,\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)$

La pendiente de la recta tangente es: $f'(2)=\dfrac{1-2}{5\cdot\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{25}$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y-\frac{3\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{25}\left(x-2\right) \;\Leftrightarrow\; 25y-15\sqrt{5}=-\sqrt{5}x+2\sqrt{5} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{5}x+25y-17\sqrt{5}=0$$

b) Realicemos la división entre ambos polinomios (a la derecha):

$$\begin{array}{rr|l} x^2-3x+3 & & x-1 \\ \cline{3-3} -x^2+x & & x-2 \\ \cline{1-1} -2x+3 & & \\ 2x-2 & & \\ \cline{1-1} 1 & & \end{array}$$

Tenemos entonces: $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+3}{x-1}\,dx=\int\left(x-2+\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x-1|+C$

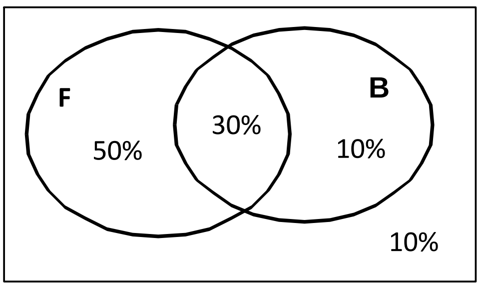
4. *(1,5 puntos)* Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30% les gustan ambos deportes.

a) *(0,75 puntos)* Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?

b) *(0,75 puntos)* Se eligen 10 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule la probabilidad de que solo a 3 les guste el fútbol (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

SOLUCIÓN.

Sea F el suceso "le gusta el fútbol" y B el suceso "le gusta el balonmano". Los porcentajes de alumnos a los que les gusta uno de los dos deportes, ambos o ninguno es:



a) $p\left(F\bigcup B\right)=p\left(F\right)+p\left(B\right)-p\left(F\bigcap B\right)=0{,}80+0{,}40-0{,}30=0{,}9$

b) Nos encontramos ante una experiencia dicotómica en la que prestamos atención a si ocurre el suceso F (éxito) o su contrario $\overline{F}$. Cuando se repite n veces una experiencia dicotómica y nos preguntamos por la probabilidad de obtener un determinado número de éxitos, estamos ante una distribución binomial.

En nuestro caso, el número de veces que se repite la experiencia es 10 y la probabilidad de éxito (a un alumno elegido al azar le gusta el futbol) es $p=p\left(F\right)=0{,}8$ y la de su contrario $k=p\left(\overline{F}\right)=0{,}2$.

La probabilidad de obtener 3 éxitos es:

$$p\left(F=3\right)=\binom{10}{3}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^7=\frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^7=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 0{,}512\cdot 0{,}0000128=0{,}0008$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)* Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine los valores del parámetro *k* para los que la matriz:

$$A - kI$$

tenga inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) *(1,5 puntos)* Encuentre la matriz X que verifica que:

$$(A - 3I)X = 2I$$

siendo I la matriz identidad de orden 3 y A la matriz que aparece al comienzo del enunciado.

SOLUCIÓN

a) $A - kI = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-k & 0 & 1 \\ 0 & -k & 0 \\ 1 & 0 & 3-k \end{pmatrix}$

Para que la matriz tenga inversa, su determinante debe ser distinto de 0.

$$|A - kI| = \begin{vmatrix} 3-k & 0 & 1 \\ 0 & -k & 0 \\ 1 & 0 & 3-k \end{vmatrix} = -k \cdot \left(9 - 6k + k^2\right) + k = -k^3 + 6k^2 - 8k = 0 \;\Rightarrow\; k\left(-k^2 + 6k - 8\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ -k^2 + 6k - 8 = 0 \;\Rightarrow\; k = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{-2} = \dfrac{-6 \pm 2}{-2} = \begin{cases} k = 2 \\ k = 4 \end{cases} \end{cases} \;\Rightarrow\; \exists \left(A - kI\right)^{-1} \;\; \forall k \neq 0\,, 2 \text{ y } 4$$

b) $\left(A - 3I\right)X = 2I \;\Rightarrow\; X = \left(A - 3I\right)^{-1} \cdot 2I$

Obtengamos las matrices que necesitamos:

$\left(A - 3I\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y calculemos su inversa: $|A - 3I| = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adjunta}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}} \left(A - 3I\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tenemos: $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. *(1,5 puntos)* Considere el plano: $\pi: \ 2ax + y + az = 4$ y la recta:

$$r: \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

a) *(0,75puntos)* Determine la posición del plano y la recta según los diferentes valores de *a*.

b) *(0,75 puntos)* Para *a* = 2, determine la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto *P*(0,1,0).

SOLUCIÓN

a) La recta y el plano pueden ser secantes (se cortan en un punto), paralelos (no tienen puntos comunes) o la recta contenida en el plano (todos los puntos de la recta pertenecen al plano).

Si consideramos el sistema formado por las dos ecuaciones que definen a la recta y la ecuación del plano, el sistema de tres ecuaciones así formado puede ser compatible determinado (recta y plano secantes), incompatible (recta y plano paralelos) o compatible indeterminado (recta contenida en el plano).

$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ -x+y+2z=3 \\ 2ax+y+az=4 \end{cases}$$ Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2a & 1 & a & 4 \end{array}\right)$$

Estudiemos sus rangos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2a & 1 & a \end{vmatrix} = 2a-1+4a-2a+a-4 = 5a-5 = 0 \quad \Rightarrow \quad a=1$$

▪ Luego para $a \neq 1$: $rgA = rgB =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado $\Rightarrow$ la recta y el plano son secantes.

▪ Para $a=1$: $rgA = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1 \neq 0$

Orlemos el menor anterior con los términos independientes para conocer el rango de B:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8+6-2-4-6+4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rgB = 3$$

Como $rgA \neq rgB \Rightarrow$ el sistema es incompatible $\Rightarrow$ la recta y el plano son paralelos

b) El plano es $4x+y+2z=4 \Rightarrow$ el vector $\vec{n}=(4,1,2)$ es normal al plano y, por tanto, direccional de cualquier recta perpendicular al plano. Como además la recta pasa por el punto $P(0,1,0)$, la ecuación continua de la recta es:

$$\frac{x}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$$

3. *(4 puntos)*

a) *(2 puntos)* Determine los valores de los parámetros *a*, *b* y *c* para que la función:

$$f(x) = a\,(x-1)^3 + b\,x + c$$

a.1.) Pase por el punto (1, 1)

a.2.) En el punto (1, 1) su tangente tenga de pendiente 2.

a.3.) En el punto $x = 2$ tenga un máximo relativo.

b) *(2 puntos)* Determine el valor del límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x}\right)^{\frac{3x^2 - 1}{x}}$$

SOLUCIÓN

a) $f(x)=a(x-1)^3+bx+c$

▪ Por pasar por el punto $(1,1)$: $1=b+c$

▪ En el punto $(1,1)$ su tangente tiene pendiente 2: $f'(1)=2 \Rightarrow$ Como $f'(x)=3a(x-1)^2+b$: $b=2$

▪ En el punto $x=2$ tiene un máximo relativo: $f'(2)=0 \Rightarrow 3a+b=0$

De las tres condiciones se sigue: $a=-\frac{2}{3}$, $b=2$, $c=-1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}-1\right)\cdot\frac{3x^2-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2-x^2+2x}{x^2-2x}\right)\cdot\frac{3x^2-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+2}{x^2-2x}\right)\cdot\frac{3x^2-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^3+6x^2+x-2}{x^3-2x^2}\right)}=e^{-3}$

4. *(1,5 puntos)* En una empresa los trabajadores se clasifican en tres categorías: *A*, *B* y *C*. El 30 % de los trabajadores pertenecen a la categoría *A*; el 25 % a la categoría *B* y el resto a la categoría *C*.

Además, se sabe que de los trabajadores de la categoría *A* un 5 % habla inglés; mientras que de la categoría *B* un 20 % habla inglés y de los trabajadores de la categoría C un 60 % habla inglés.

c) (0,75 *puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa, ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés?

d) (0,75 *puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa y resulta que SI habla inglés, ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la categoría *C*?

SOLUCIÓN

Organicemos los datos en una tabla de contingencia. Partamos de que el total de trabajadores de la empresa es 200 (por ejemplo). A la categoría A pertenecen entonces $200\cdot 0{,}30=60$ de los que $60\cdot 0{,}05=3$ hablan inglés. A la categoría B pertenecen $200\cdot 0{,}25=50$ de los que $50\cdot 0{,}20=10$ hablan inglés. A la categoría C pertenecen $200\cdot 0{,}45=90$ de los que $90\cdot 0{,}60=54$ hablan inglés:

	A	B	C	TOTAL
Inglés (I)	3	10	54	**67**
No inglés	57	40	36	**133**
TOTAL	**60**	**50**	**90**	**200**

a) $p(I)=\frac{67}{200}=0{,}335$

b) $p(C/I)=\frac{54}{67}=0{,}806$

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

<u>OPCIÓN A</u>

1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Resuelva el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) *(1,5 puntos)* Sabiendo que el determinante de la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

es 4, es decir $|A| = 4$, determine el determinante de la matriz B que aparece a continuación:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{pmatrix}$$

2. *(1,5 puntos)*

a) *(0,5 puntos)* Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 1)$ y $\vec{w} = (0, 2, 1)$, determine el volumen del paralelepípedo que definen esos tres vectores.

b) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las rectas *r* y *s* siguientes:

$$r : \frac{x+1}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z+2}{1} \qquad s: \begin{cases} -x + y + 2z - 4 = 0 \\ x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

3. *(4 puntos)*

a) *(2,5 puntos)* Considere la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$$

a.1) *(1 punto)* Determine las asíntotas de la función $f(x)$.

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los mínimos y máximos relativos de la función $f(x)$.

b) *(1,5 puntos)* Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{9}{x^2 + x - 2}\, dx$$

4. *(1,5 puntos)* Se lanza 10 veces un dado equilibrado (es decir un dado donde todas sus caras tiene la misma probabilidad de aparecer).

a) *(0,75 puntos)* Determine la probabilidad de que salga un número par en todos los lanzamientos.

b) *(0,75 puntos)* Determine la probabilidad de que salga un número par exactamente en tres lanzamientos. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

encuentre la matriz *X,* de dimensión 3x3, que resuelve la ecuación matricial:

$$AX + B = A^2$$

b) *(1,5 puntos)* Determine el rango de la matriz C siguiente según los diferentes valores del parámetro k

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix}$$

2. *(1,5 puntos)* Determine el valor de los parámetros m y n que hacen que la recta:

$$r : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$$

esté contenida en el plano:

$$\pi : mx + y + nz = 4$$

3. *(4 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Calcule el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^3 - x^2 - x + 2}{x^2} \right)^{\frac{3+x^2}{x}}$$

b) *(1,5 puntos)* De entre todos los triángulos rectángulos que tiene un área de 1 cm^2, determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo.

c) (1 punto) Calcule el área limitada por la curva $f(x) = x^2 + x$ y la recta $g(x) = x + 4$.

4. *(1,5 puntos)*

a) *(0,75 puntos)* En una clase de 20 alumnos, 10 estudian ruso, 12 practican algún deporte y tan solo 2 hacen ambas cosas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, si estudia ruso, practique algún deporte?

b) *(0,75 puntos)* Un tirador de pistola olímpica, tiene una probabilidad de 0,8 de hacer blanco. Si dispara 12 veces, ¿cuál es la probabilidad de que haga 10 o más blancos?. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCION

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

Opción A

A.1-a *(1,5 puntos)* Al tratarse de un sistema homogéneo con infinitas soluciones la calificación máxima se obtendrá si se proporciona la parametrización de las infinitas soluciones.

Si solo se proporciona la solución $x = y = z = 0$, la calificación máxima será de *0,5 puntos.*

A.1-b *(1,5 puntos)* La calificación debe tener en cuenta la aplicación de las propiedades de los determinantes que permiten calcular el determinante sin necesidad de desarrollarlo.

No obstante, si no se usa ninguna propiedad y se realizan todos los cálculos desarrollando directamente el determinante, no debe realizarse ninguna penalización ya que esta irá implícita en el consumo de tiempo necesario para efectuar todos los cálculos.
A.2-a *(0,5 puntos)* Determinación del volumen: *0,5 puntos.*

A.2-b *(1 punto)* La determinación de que las rectas se cruzan se valorará con 1 punto. Si solamente se dice que se cruzan o se cortan la calificación máxima será de *0,5 puntos*.
A.3-a-i *(1 punto)* Estudio de las asíntotas horizontales: *0,2 puntos.*

El estudio de cada una de los otros dos tipos de asíntotas (verticales y oblicuas): 0,4 cada uno de esos dos tipos.

A.3-a-ii (1,5 puntos) Determinación de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento: *1 punto*. Estudio de los máximos y mínimos relativos: *0,5 puntos.*

A.3-b (1,5 puntos) Los pasos y razonamientos en el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación debe tenerlo en cuenta. Si no se escribe la constante de integración, la calificación máxima será de *1,2 puntos.*
A.4 De manera genérica, puede pensarse que, debido a las modificaciones recientes en el temario, esta parte todavía representa una novedad cualitativa importante para los estudiantes. No obstante, las cuestiones son los suficientemente sencillas como para que no supongan una especial dificultad.

En todo caso, en las dos cuestiones planteadas los pasos para la determinación de las probabilidades deben estar claros y la valoración de las cuestiones debe tenerlo en cuenta, si bien cualquier estrategia es válida.

A.4-a *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, siempre que sea coherente y correcta.

A.4-b *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, siempre que sea coherente y correcta.

Debe señalarse que, dado que en este apartado es razonable aplicar la distribución de probabilidades Binomial que incluye cálculos que pueden resultar tediosos, se les ha indicado a los estudiantes que NO es preciso finalizar los cálculos, y pueden dejar indicada la probabilidad, precisando, eso sí, los números que la definen.

Opción B

B.1-a (*1,5 puntos)* Para obtener la máxima calificación debe obtenerse la matriz *X* que se busca. En todo caso, la calificación debe tener en cuenta los cálculos y razonamientos que se utilicen, es decir, no llegar a obtener la matriz *X* correcta NO implica una calificación de *0 puntos.*

B.1-b (1,5 puntos) La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos que aparecen. La valoración de todos los casos debe ser idéntica.

B.2 (1,5 puntos) Determinación de los dos parámetros: *1,5 puntos.*

B.3-a *(1,5 puntos)* Los pasos en la determinación del límite deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta.

B.3-b *(1,5 puntos)* Planteamiento del problema: *1 punto.* Resolución: *0,5 puntos.* Si en la resolución no argumentan o comprueban (bastaría con que lo argumentasen correctamente) que la solución corresponde a un mínimo, se podrá´ penalizar con un máximo de *0,2 puntos.*

B.3-b *(1 punto)* Los cálculos son lo suficientemente sencillos como para que no haya dificultad en determinar el valor del área.

B.4 Como se ha mencionado en los criterios de la opción A, puede pensarse que esta parte todavía representa una novedad cualitativa importante para los estudiantes. No obstante, las cuestiones son los suficientemente sencillas como para que no supongan una especial dificultad.

En todo caso, en las dos cuestiones planteadas los pasos para la determinación de las probabilidades deben estar claros y la valoración de las cuestiones debe tenerlo en cuenta, si bien cualquier estrategia es válida.

B.4-a *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, siempre que sea coherente y correcta.

Si un estudiante identifica correctamente la cuestión a responder como, por ejemplo, el cálculo de la probabilidad condicional identificando los sucesos, pero no sabe determinar la probabilidad, la puntuación máxima será´ de *0,25 puntos.*

B.4-b *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente valida, siempre que sea coherente y correcta.

Debe señalarse que, dado que es razonable aplicar la distribución de probabilidades Binomial que incluye cálculos que pueden resultar tediosos, se les ha indicado a los estudiantes que NO es preciso finalizar los cálculos, y pueden dejar indicada la probabilidad, precisando, eso sí, los números que la definen.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2018
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**
PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Resuelva el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) *(1,5 puntos)* Sabiendo que el determinante de la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

es 4, es decir $|A| = 4$, determine el determinante de la matriz B que aparece a continuación:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) Se trata de un sistema homogéneo (los términos independientes son nulos). La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Veamos cuál es su rango.

El único menor de orden 3 de A es: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8+18+8-6-16-12=0$

Como el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4-8=-4\neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\,A = 2 < \text{nº de incógnitas} \;\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado. Consideramos la incógnita z como un parámetro: $z=\lambda$. El sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+4y=-3\lambda \\ 2x+2y=-2\lambda \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \text{restando}:\; 2y=-\lambda \;\Rightarrow\; y=-\frac{\lambda}{2} \;\Rightarrow\; x=\frac{-2\lambda+\lambda}{2}=-\frac{\lambda}{2}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son: $x=-\frac{\lambda}{2}$, $y=-\frac{\lambda}{2}$, $z=\lambda$

b) Sabemos que: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 4$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3a+k & 3b+k & 3c+k \\ x+5 & y+5 & z+5 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3a+k & 3b+k & 3c+k \\ x+5 & y+5 & z+5 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 2\cdot\left[\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & k \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}\right] \overset{(4)}{=}$$

$$= 2\cdot\left[3\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\x&y&z\end{vmatrix}+0\right]=24$$

Propiedades de los determinantes utilizadas: (1) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta. (2) En la primera fila se puede extraer 2 como factor común. (3) La segunda y la tercera filas aparecen como sumas. (4) En el primer sumando se puede extraer 3 como factor común en la segunda fila. En el segundo sumando la segunda y la tercera fila son proporcionales, luego su determinante es 0.

2. *(1,5 puntos)*

a) *(0,5 puntos)* Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 1)$ y $\vec{w} = (0, 2, 1)$, determine el volumen del paralelepípedo que definen esos tres vectores.

b) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las rectas *r* y *s* siguientes:

$$r:\ \frac{x+1}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z+2}{1} \qquad s:\begin{cases}-x+y+2z-4=0\\ x+2y+z-5=0\end{cases}$$

SOLUCIÓN.

a) El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores.

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&2&1\end{vmatrix}=1+4-4-2=-1 \ \Rightarrow \ \text{el volumen del paralelepípedo es de } 1\,u^3.$$

b) Consideremos un vector direccional de cada una de las rectas.

▪ Vector direccional de la recta r: $\vec{u}=(4,6,1)$

▪ Vector direccional de la recta s. Obtengamos dos puntos de la recta:

$$\begin{cases}-x+y+2z-4=0\\ x+2y+z-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+y=-2z+4\\ x+2y=-z+5\end{cases} \Rightarrow \text{Sumando: } 3y=-3z+9 \Rightarrow y=-z+3 \Rightarrow x=-z+5+2z-6=z-1$$

Para $z=0$: $x=-1$, $y=3 \Rightarrow P(-1,3,0)$
Para $z=1$: $x=0$, $y=2 \Rightarrow Q(0,2,1)$ | $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=(1,-1,1)$

Como las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales, los vectores tienen distintas direcciones y las rectas se cortan o se cruzan.

Para decidirlo, consideremos un vector con origen en r y extremo en s. Un punto de r es $A(-1,0,-2)$ y un punto de s es $P(-1,3,0)$. El vector de origen A y extremo P es: $\overrightarrow{AP}=(0,3,2)$

Como $\begin{vmatrix}4&6&1\\1&-1&1\\0&3&2\end{vmatrix}=-8+3-12-12\neq 0 \Rightarrow$ los vectores $\vec{u}=(4,6,1)$, $\vec{v}=(1,-1,1)$ y $\overrightarrow{AP}=(0,3,2)$ son linealmente independientes $\Rightarrow$ las rectas r y s se cruzan.

3. *(4 puntos)*

a) *(2,5 puntos)* Considere la función:

$$f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$$

a.1) *(1 punto)* Determine las asíntotas de la función $f(x)$.

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los mínimos y máximos relativos de la función $f(x)$.

b) *(1,5 puntos)* Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{9}{x^2+x-2}\,dx$$

SOLUCIÓN.

a.1) ▪ Asíntotas verticales: $x = 1$ pues $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+3}{x-1} = \dfrac{1}{0} = \infty$

▪ Asíntotas horizontales: no existen pues $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+3}{x-1} = \infty$

▪ Asíntotas oblicuas $y = mx + n$:

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+3}{x^2-x} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-3x+3}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-3x+3-x^2+x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{-2x+3}{x-1}\right) = -2 \end{array}\right| \Rightarrow \quad y = x - 2$$

a.2) $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-1)-\left(x^2-3x+3\right)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2-2x-3x+3-x^2+3x-3}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ x^2 - 2x = 0 \ \Rightarrow \ x(x-2) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0 \ , \ x = 2$ (valores críticos)

Estudiemos el signo de la primera derivada en los intervalos cuyos extremos son los valores críticos y el punto de discontinuidad $x = 1$: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$

f' > 0	0	f' < 0	1	f' < 0	2	f' > 0

$f'(-1) = 0{,}75$; $f'(0{,}5) = -3$; $f'(1{,}5) = -3$; $f'(3) = 0{,}75$

Luego la función es creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$ y decreciente en $(0, 1)$ y $(1, 2)$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento nos ofrecen la siguiente información:

La función tiene un máximo relativo en $x = 0$: $(0, -3)$ y un mínimo relativo en $x = 2$: $(2, 1)$

b) Descompongamos la fracción $\dfrac{9}{x^2+x-2}$ en suma de fracciones simples.

$x^2+x-2 = 0 \ \Rightarrow \ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases} \ \Rightarrow \ x^2+x-2 = (x+2)(x-1) \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ \dfrac{9}{x^2+x-2} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-1} = \dfrac{Ax - A + Bx + 2B}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{(A+B)x - A + 2B}{x^2+x-2} \ \Rightarrow \ \begin{cases} A + B = 0 \\ -A + 2B = 9 \end{cases} \ \Rightarrow \ 3B = 9 \ \Rightarrow \ B = 3 \ , \ A = -3$

Por tanto: $\displaystyle\int \frac{9}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{-3}{x+2}\,dx + \int \frac{3}{x-1}\,dx = -3\ln|x+2| + 3\ln|x-1| + C = 3\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$

4. *(1,5 puntos)* Se lanza 10 veces un dado equilibrado (es decir un dado donde todas sus caras tiene la misma probabilidad de aparecer).

a) *(0,75 puntos)* Determine la probabilidad de que salga un número par en todos los lanzamientos.

b) *(0,75 puntos)* Determine la probabilidad de que salga un número par exactamente en tres lanzamientos. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

SOLUCIÓN.

Se trata de una distribución binomial. Sea P el suceso "sale número par en el lanzamiento de un dado" y P' su suceso contrario "sale impar al lanzar el dado". Se tiene: $p(P) = p = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ y $p(P') = q = \dfrac{1}{2}$.

Al repetir n veces una experiencia dicotómica, la probabilidad de que un determinado suceso se verifique k veces (k éxitos) y $n-k$ veces su contrario, es:

$$p[x=k]=\binom{n}{k}p^k\,q^{n-k}$$

a) En nuestro caso $n=10$ y se trata de estudiar la probabilidad de obtener 10 éxitos ($k=10$). Tenemos:

$$p[x=10]=\binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1\cdot\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}$$

b) Ahora el número de éxitos es 3. Tenemos: $p[x=3]=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{10!}{3!\,7!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{2^{10}}=\frac{120}{2^{10}}\simeq 0{,}1172$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

encuentre la matriz X, de dimensión 3x3, que resuelve la ecuación matricial:

$$AX+B=A^2$$

b) *(1,5 puntos)* Determine el rango de la matriz C siguiente según los diferentes valores del parámetro k

$$C=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&k\\k&k&1\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) $AX+B=A^2 \;\Rightarrow\; AX=A^2-B \;\Rightarrow\; X=A^{-1}\cdot\left(A^2-B\right)$

Calculemos A^{-1}: $|A|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-1$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{(Adj A)*}}\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{(Adj A)}^t}\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{A^{-1}=\text{(Adj A)}^t/|A|}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

*Adjuntos de los elementos de A:

$A_{11}=\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}=0$, $A_{12}=-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1$, $A_{13}=\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}=0$, $A_{21}=-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1$, $A_{22}=\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}=0$,

$A_{23}=-\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}=0$, $A_{31}=\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}=0$, $A_{32}=-\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}=0$, $A_{33}=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$

Calculemos A^2: $A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Así pues: $X=A^{-1}\cdot\left(A^2-B\right)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&0\\2&0&2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&2&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&-1\\-2&0&-1\end{pmatrix}$

b) Estudiemos los valores de k para los que el rango es máximo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & k \\ k & k & 1 \end{vmatrix} = 4+k^2+12k-6k-2k^2-4=-k^2+6k=0 \;\Rightarrow\; k\left(-k+6\right)=0 \;\Rightarrow\; k=0 \;,\; k=6$$

▪ Luego para k distinto de 0 y de 6: $\operatorname{rg} C = 3$

▪ Para $k=0$: $\operatorname{rg} C = 2$ pues el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$

▪ Para $k=6$: $\operatorname{rg} C = 2$ pues el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 12-6 \neq 0$

2. *(1,5 puntos)* Determine el valor de los parámetros m y n que hacen que la recta:

$$r: \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases}$$

esté contenida en el plano:

$$\pi: mx+y+nz=4$$

SOLUCIÓN.

Si la recta r está contenida en el plano π, todos los puntos de r pertenecen a π. Obtengamos dos puntos de r:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2-z \\ 2x+3y=3-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2y=-4+2z \\ 2x+3y=3-z \end{cases} \Rightarrow y=-1+z \;,\; x=-y+2-z=1-z+2-z=3-2z$$

Para $z=0$: $x=3$, $y=-1$ $\Rightarrow$ $P\left(3,-1,0\right)$
Para $z=1$: $x=1$, $y=0$ $\Rightarrow$ $Q\left(1,0,1\right)$

Como P y Q están en el plano, verifican su ecuación:

$$P\in\pi \;\Rightarrow\; 3m-1=4 \;\Rightarrow\; m=\frac{5}{3}$$

$$Q\in\pi \;\Rightarrow\; m+n=4 \;\Rightarrow\; n=4-m=4-\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$$

3. *(4 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Calcule el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}$$

b) *(1,5 puntos)* De entre todos los triángulos rectángulos que tiene un área de $1\ cm^2$, determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo.

c) (1 punto) Calcule el área limitada por la curva $f(x)=x^2+x$ y la recta $g(x)=x+4$.

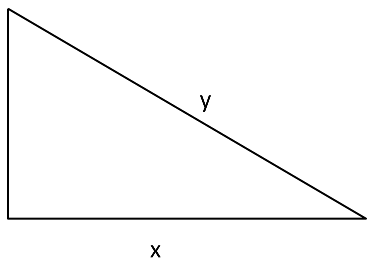
SOLUCIÓN.

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x-x^3+x^2+x-2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=1^\infty \text{ (indeterminación)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{2x-2}}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{2x-2}}\right)^{\frac{3+x^2}{x}\cdot\frac{x^2}{2x-2}\cdot\frac{2x-2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{2x-2}}\right)^{\frac{x^2}{2x-2}}\right]^{\frac{3+x^2}{x}\cdot\frac{2x-2}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{2x-2}}\right)^{\frac{x^2}{2x-2}}\right]^{\frac{2x^3-2x^2+6x-6}{x^3}}=e^2$$

b) Sea el triángulo rectángulo de catetos "x" y "z" e hipotenusa "y".



Puesto que el área debe ser de 1 cm^2: $\frac{1}{2}x\cdot z=1 \Rightarrow z=\frac{2}{x}$

La hipotenusa debe ser mínima: $y=\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}}\cdot\frac{4x^3\cdot x^2-\left(x^4+4\right)2x}{x^4}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}}\cdot\frac{4x^5-2x^5-8x}{x^4}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}}\cdot\frac{2x^5-8x}{x^4}=0 \Rightarrow 2x\left(x^4-4\right)=0 \Rightarrow$$

$x=0$ (la descartamos pues no habría triángulo)

$x^4-4=0 \Rightarrow x^4=4 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2}$ cm

$$z=\frac{2}{x}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\text{ cm}$$

Aunque no se calcule la segunda derivada para comprobar que la hipotenusa de este triángulo es mínima (los cálculos son ciertamente engorrosos), se trata de un triángulo rectángulo isósceles que es, en efecto, el de hipotenusa mínima.

La medida de la hipotenusa es $y=\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$ cm

c) Consideremos la función $h(x)=f(x)-g(x)=x^2+x-x-4=x^2-4$

Los puntos de corte de $h(x)$ con el eje de abscisas son: $x^2-4=0 \Rightarrow x=-2$, $x=2$

El área que limitan la parábola y la recta es:

$$\left|\int_{-2}^{2}h(x)\right|=\left|\int_{-2}^{2}\left(x^2-4\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-2}^{2}\right|=\left|\left(\frac{8}{3}-8\right)-\left(-\frac{8}{3}+8\right)\right|=\left|\frac{16}{3}-16\right|=\left|-\frac{32}{3}\right|=\frac{32}{3}\text{ u}^2$$

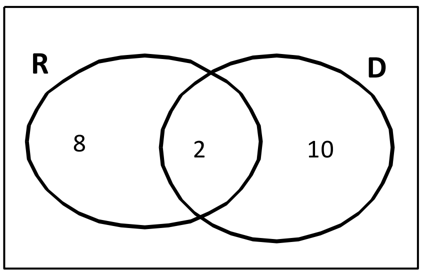
4. *(1,5 puntos)*

a) *(0,75 puntos)* En una clase de 20 alumnos, 10 estudian ruso, 12 practican algún deporte y tan solo 2 hacen ambas cosas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, si estudia ruso, practique algún deporte?

b) *(0,75 puntos)* Un tirador de pistola olímpica, tiene una probabilidad de 0,8 de hacer blanco. Si dispara 12 veces, ¿cuál es la probabilidad de que haga 10 o más blancos?. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

SOLUCIÓN.

a) Sean R el suceso "estudia ruso" y D el suceso "practica algún deporte".



Se tiene:

$p(R)=\frac{10}{20}=0{,}5$; $p(D)=\frac{12}{20}=0{,}6$; $p(R\cap D)=\frac{2}{20}=0{,}1$

$$p(D/R)=\frac{p(D\cap R)}{p(R)}=\frac{0{,}1}{0{,}5}=0{,}2$$

b) Se trata de una situación dicotómica (hace blanco / no hace blanco) que da lugar a una distribución binomial.

En una distribución binomial la probabilidad de tener k éxitos es: $P[x=k]=\binom{n}{k}p^k\cdot q^{n-k}$

En nuestro caso, se repite la experiencia 12 veces $(n=12)$, la probabilidad de hacer blanco (éxito) es $p=0,8$ y la del suceso contrario $q=0,2$.

Se tiene: $P[x\geq 10]=P[x=10]+P[x=11]+P[x=12]=\binom{12}{10}\cdot 0,8^{10}\cdot 0,2^2+\binom{12}{11}\cdot 0,8^{11}\cdot 0,2+\binom{12}{12}\cdot 0,8^{12}=$

$$=\frac{12!}{10!\cdot 2!}\cdot 0,8^{10}\cdot 0,2^2+\frac{12!}{11!\cdot 1!}\cdot 0,8^{11}\cdot 0,2+0,8^{12}=\frac{12\cdot 11}{2}\cdot 0,8^{10}\cdot 0,2^2+12\cdot 0,8^{11}\cdot 0,2+0,8^{12}=0,5583$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2019

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1.

a) (*2 puntos*) Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k.

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

b) (*1 punto*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $k = 1$.

2.

a) (*1 punto*) Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados $A : (1, 1, 2)$, $B : (2, 2, 2)$ y $C : (-1, a, b)$ y determine la recta que los contiene.

b) (*0,5 puntos*) Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calcule el vector:

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$$

Donde el símbolo “×” representa el producto vectorial.

3.

a) (*1,5 puntos*) Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos $(0, 0), (a, 0), (0, b)$ y (a, b), donde $a > 0$ y $b > 0$ y además el punto (a, b), está situado en la curva de ecuación:

$$y = \frac{1}{x^2} + 9$$

De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

b) (*1 punto*) Determine:

$$\int \frac{1}{9 - x^2}\, dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 + kx + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = 2$$

4. Se dispone de dos cajas, la caja *A* contiene 3 bolas moradas y 2 bolas rojas; mientras que la caja *B* contiene 4 bolas moradas y 4 rojas.

a) (*0,75 puntos*) Se escoge una bola cualquiera de la caja *A* y se pasa a la caja *B*. Posteriormente se saca una bola de la caja *B*. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la caja *B* sea morada?

b) (*0,75 puntos*) Ahora volvemos a la situación original de las cajas; la *A* contiene 3 moradas y 2 rojas y la *B* contiene 4 moradas y 4 rojas.

Seleccionamos una caja al azar y se saca una bola que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea de la caja *A*?

<u>OPCIÓN B</u>

1.

a) (*1,5 puntos*) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

b) (*1,5 puntos*) Sabiendo que $a = -2$, calcule el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

2.

a) (*1 punto*) Determine la ecuación del plano determinado por el punto $P:(2,1,2)$ y la recta $r:(1,0,0)+t\,(-1,1,1)$.

b) (*0,5 puntos*) Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,0)$ y $\vec{v}=(2,1,-3)$, determine el área del triángulo que tiene por lados esos dos vectores.

3. Considere la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

a) (*1,5 puntos*) Determine las asíntotas de la función, si existen.

b) (*1 punto*) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.

c) (*1,5 puntos*) Determine la integral $\int_1^3 f(x)dx$.

4. La probabilidad de que una persona escriba un mensaje de Twitter sin faltas de ortografía es 0,75. Se sabe además que una persona escribe a lo largo del día 20 mensajes de Twitter.

A partir de esta información, responde a las siguientes cuestiones. NO es necesario finalizar los cálculos en ninguna de ellas, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen.

a) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los mensajes escritos en un día, es decir 10, no tengan faltas de ortografía?

b) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún mensaje de los 20 escritos en un día tenga faltas de ortografía?

c) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que 18 o más mensajes de los 20 escritos en un día sí tengan faltas de ortografía?

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES:

Como norma general se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

De acuerdo con las normas generales que aparecen en la información pública, los correctores pueden bonificar hasta con un máximo de un punto, el buen uso de la lengua o el desarrollo técnico de los ejercicios.

OPCIÓN A

1-a (2 puntos) La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles y los razonamientos empleados para obtener el rango de la matriz.

1-b (1 punto) La determinación de la matriz inversa puede hacerse por cualquier método. Si se realiza usando el método de Gauss-Jordan puede ser más largo que si se hace mediante determinantes y los errores numéricos pueden ser más frecuentes. En ese caso deberá valorarse más el proceso que los cálculos, siempre que los cálculos tengan sentido.

2-a (1 punto) La determinación de las constantes se calificará con 0,5 puntos. La recta puede proporcionarse en cualquiera de sus formas y todas deben considerarse igualmente válidas; y la ecuación de la misma se calificará con 0,5 puntos también.

2-b (0,5 puntos) Los pasos en el cálculo de ese vector deben estar claros y la calificación deberá tenerlos en cuenta.

3-a Planteamiento del problema: 0,5 puntos. Cálculo de los valores correctos de a y b: 0,75 puntos. Cálculo del área: 0,25 puntos.

Si en la resolución del problema no argumentan o comprueban que la solución corresponde a un mínimo (**basta con que lo argumenten correctamente**) se podrá penalizar con un máximo de 0,15 puntos.

3-b (1 punto) Los pasos en el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación deberá tenerlos en cuenta.

3-c (1,5 puntos) Para determinar el valor de k bastaría con argumentar que el numerador debe hacerse cero cuando $x \to 1$, pero deberán comprobar que el límite es 2. En todo caso, debe tenerse en cuenta la forma en la que se resuelve globalmente la cuestión y la calificación debe tenerlo en cuenta. Si no comprobasen que el límite es 2 la calificación máxima será de 1 punto.

4-a (0,75 puntos) Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, si bien no basta con poner un resultado, sino que debe valorarse los pasos o razonamientos realizados para la determinación de la probabilidad.

4-b (0,75 puntos) Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, si bien, de nuevo, los pasos o razonamientos para la determinación de las probabilidades deben estar claros y la valoración debe tenerlo en cuenta.

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1-a (1,5 puntos) Planteamiento del problema 0,75 puntos.

Resolución del sistema: 0,75 puntos. Cualquier método de resolución es igualmente válido. Si se utiliza algún método de resolución más proclive a cometer errores numéricos, deberá valorarse más el proceso que los cálculos, siempre que los cálculos tengan sentido.

1-b (1,5 puntos) El cálculo del determinante se considera válido por cualquier método. Si se opta por ir a un cálculo directo del determinante global, la penalización ya está incluida en el tiempo que consumirá tal proceso.

2-a (1 punto) Cualquier expresión del plano (vectorial, paramétrica o general o implícita) se considera igualmente válida.

2-b (0,5 puntos) Determinación del área del triángulo: 0,5 puntos.

3-a (1,5 puntos) El estudio de cada tipo de asíntotas, incluso para decir que no existen, se valorará con 0,5 puntos.

3-b (1 punto) Determinación de los intervalos: 1 punto.

3-c (1,5 puntos) Los pasos en el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación debe tenerlo en cuenta. Si no se hace la sustitución en los límites de la integral podrá penalizarse hasta un máximo de 0,3 puntos.

4-a (0,5 puntos) Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, si bien deben identificarse claramente los números que definen la probabilidad.

Debe señalarse que, dado que aparecen cálculos que pueden resultar tediosos, se les ha indicado a los estudiantes que NO es preciso finalizar los cálculos, y pueden dejar indicada la probabilidad, precisando, eso sí, los números que la definen.

4-b (0,5 puntos) Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, si bien, de nuevo, los pasos o razonamientos para la determinación de las probabilidades deben estar claros y la valoración debe tenerlo en cuenta.

Debe señalarse que, dado que aparecen cálculos que pueden resultar tediosos, se les ha indicado a los estudiantes que NO es preciso finalizar los cálculos, y pueden dejar indicada la probabilidad, precisando, eso sí, los números que la definen.

4-c (0,5 puntos) Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, si bien, de nuevo, deben identificarse claramente los elementos que definen la probabilidad.

Debe señalarse que, dado que lo razonable es aplicar la distribución de probabilidades Binomial que incluye cálculos que pueden resultar tediosos, se les ha indicado a los estudiantes que NO es preciso finalizar los cálculos, y pueden dejar indicada la probabilidad, precisando, eso sí, los números que la definen.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1.

a) (*2 puntos*) Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k.

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

b) (*1 punto*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $k=1$.

SOLUCIÓN

a) El único menor de orden 3 de la matriz es el propio determinante de A:

$$\begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{vmatrix} = k\cdot(k+2)^2 - k\cdot(k+2) = k\cdot(k+2)\cdot(k+2-1) = k\cdot(k+2)\cdot(k+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad k=0 \ , \ k=-2 \ , \ k=-1$$

Por lo tanto:

▪ Para $k \neq -2, -1$ y 0: hay un menor de orden 3 distinto de 0, luego el rango de A es 3.

▪ Para $k=-2$: $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, el rango de A es 2.

▪ Para $k=-1$: $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, el rango de A es 2.

▪ Para $k=0$: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, el rango de A es 2.

b) Para $k=1$: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Tenemos: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9-3 = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1}$

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adjunta}(*)} (A_{ij})=\begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta}} (A_{ji})=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}}$$

$$\xrightarrow{\text{Inversa}} A^{-1}=\frac{(A_{ji})}{|A|}=\begin{pmatrix} 3/2 & 1/6 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/2 & -1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(*) Cálculo de los adjuntos de la matriz A:

$A_{11}=\begin{vmatrix}3&0\\1&3\end{vmatrix}=9$, $A_{12}=-\begin{vmatrix}0&0\\1&3\end{vmatrix}=0$, $A_{13}=\begin{vmatrix}0&3\\1&1\end{vmatrix}=-3$, $A_{21}=-\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}=1$, $A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=2$, $A_{23}=-\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=-1$, $A_{31}=\begin{vmatrix}0&1\\3&0\end{vmatrix}=-3$, $A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}=0$, $A_{33}=\begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix}=3$

2.

a) (*1 punto*) Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados $A:(1,1,2)$, $B:(2,2,2)$ y $C:(-1,a,b)$ y determine la recta que los contiene.

b) (*0,5 puntos*) Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calcule el vector:

$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})$$

Donde el símbolo "×" representa el producto vectorial.

SOLUCIÓN

a) Los puntos A y B nos permiten calcular la ecuación de la recta que contiene a los tres puntos:

$$\left.\begin{array}{r}A:(1,1,2)\\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,1,0)\end{array}\right| \Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{0}$$ (ecuación de la recta que contiene a los tres puntos)

Como el punto C también debe de estar en la recta: $\frac{-1-1}{1}=\frac{a-1}{1}=\frac{b-2}{0} \Rightarrow \begin{array}{l}-2=a-1\\0=b-2\end{array} \Rightarrow a=-1\ ,\ b=2$

b) $(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})=\vec{0}$ pues el producto vectorial de un vector por sí mismo (o por cualquiera que tenga su misma dirección) es el vector nulo ya que su módulo es: $\left|(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})\right|=|\vec{u}-\vec{v}|\cdot|\vec{u}-\vec{v}|\cdot \text{sen}0^{o}=0$

3.

a) (*1,5 puntos*) Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos $(0,0),(a,0),(0,b)$ y (a,b), donde $a>0$ y $b>0$ y además el punto (a,b), está situado en la curva de ecuación:

$$y=\frac{1}{x^2}+9$$

De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

b) (*1 punto*) Determine:

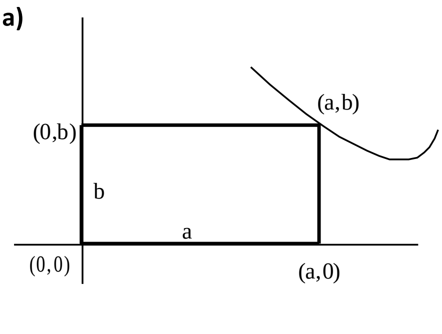
$$\int \frac{1}{9-x^2}\,dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=2$$

SOLUCIÓN

a)



Puesto que el vértice (a,b) está en la curva $y=\frac{1}{x^2}+9$: $b=\frac{1}{a^2}+9$

El área del rectángulo, que debe ser mínima, es:

$$S=a\cdot b=a\cdot\left(\frac{1}{a^2}+9\right)=\frac{1}{a}+9a \Rightarrow S'=-\frac{1}{a^2}+9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{1}{9} \Rightarrow a=\frac{1}{3}\ ,\ b=\frac{1}{\frac{1}{9}}+9=18$$

El rectángulo de área mínima tiene por vértices: $(0\,,0)$, $\left(\frac{1}{3}\,,0\right)$, $(0\,,18)$ y $\left(\frac{1}{3}\,,18\right)$.

Su área es: $S=a\cdot b=\frac{1}{3}\cdot 18=6\ u^2$

b) Descompongamos la fracción algebraica $\frac{1}{9-x^2}=\frac{-1}{x^2-9}$ como suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{9-x^2}=\frac{-1}{x^2-9}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3}=\frac{Ax-3A+Bx+3B}{(x+3)(x-3)}=\frac{(A+B)x-3A+3B}{x^2-9} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A+B=0 \;\Rightarrow\; A=-B \\ -3A+3B=-1 \;\Rightarrow\; 6B=-1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; B=-\frac{1}{6}\ ,\ A=\frac{1}{6}$$

Por lo tanto: $\int \frac{1}{9-x^2}\,dx=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+3}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-3}=\frac{1}{6}\left(\ln|x+3|\right)-\frac{1}{6}\left(\ln|x-3|\right)+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+C$

c) Descompongamos en factores el polinomio denominador:

Para que $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=\frac{5+k}{0}=2$ debe darse una indeterminación $\frac{0}{0}$ por lo que $5+k=0 \;\Rightarrow\; k=-5$

4. Se dispone de dos cajas, la caja *A* contiene 3 bolas moradas y 2 bolas rojas; mientras que la caja *B* contiene 4 bolas moradas y 4 rojas.

a) (*0,75 puntos*) Se escoge una bola cualquiera de la caja *A* y se pasa a la caja *B*. Posteriormente se saca una bola de la caja *B*. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la caja *B* sea morada?

b) (*0,75 puntos*) Ahora volvemos a la situación original de las cajas; la *A* contiene 3 moradas y 2 rojas y la *B* contiene 4 moradas y 4 rojas.

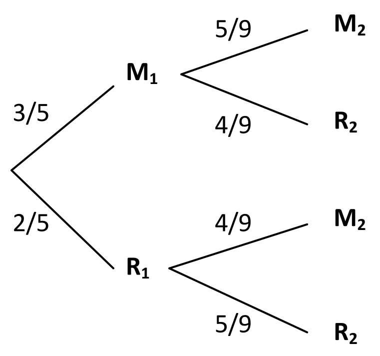
Seleccionamos una caja al azar y se saca una bola que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea de la caja *A*?

SOLUCIÓN.

Sean: A el suceso "se extrae una bola de la caja A", B el suceso "se extrae una bola de la caja B", M_1 el suceso "se extrae una bola morada de la caja A", R_1 el suceso "se extrae una bola roja de la caja A", M_2 el suceso "se extrae una bola morada de la caja B" y R_2 el suceso "se extrae una bola roja de la caja B".

a) Construyamos un diagrama en árbol de la situación:

1. EXTRACCIÓN DE UNA BOLA DE A Y PASO A B — **2. EXTRACCIÓN DE UNA BOLA DE B**



Se trata de una prueba compuesta de dos experiencias dependientes. El color de la bola de A que pasa a B condiciona la probabilidad del color de la bola extraída de la urna B.

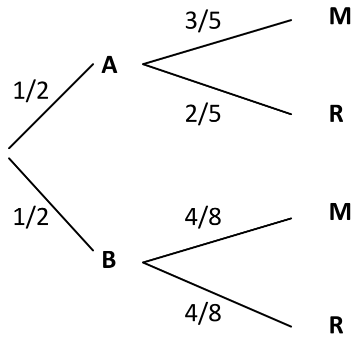
Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(M_2)=p(M_1)\cdot p(M_2/M_1)+p(R_1)\cdot p(M_2/R_1)=$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{9}=\frac{23}{45}\simeq 0{,}51$$

b) En este caso se trata, en primer lugar, de elegir una urna al azar y, después, extraer una bola de la urna elegida de cuyo color se nos informa. Se demanda la probabilidad de uno de los sucesos de la primera experiencia. Se trata entonces de una aplicación del teorema de Bayes.

El diagrama en árbol de la situación es:

1. ELECCIÓN DE URNA AL AZAR **2. EXTRACCIÓN DE UNA BOLA**



Tenemos:

$$p(A/R)=\frac{p(A)\cdot p(R/A)}{p(R)}=\frac{p(A)\cdot p(R/A)}{p(A)\cdot p(R/A)+p(B)\cdot p(R/B)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{8}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{20}}=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}\simeq 0{,}44$$

OPCIÓN B

1.

a) (*1,5 puntos*) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

b) (*1,5 puntos*) Sabiendo que $a=-2$, calcule el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN

a) Sea "x" el número de deportistas que hacen esquí alpino, "y" el de los que hacen esquí nórdico y "z" el de los que hacen escalada. Se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ x=y+z-16 \\ x+z=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=60 \\ x-y-z=-16 \\ x-3y+z=0 \end{cases}$$

Las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & -1 & -16 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$

El determinante de la matriz de los coeficientes es $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-1-1-3+1-1-3=-8$

Para resolver el sistema utilizamos la regla de Cramer:

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 60 & 1 & 1 \\ -16 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{-60+48+16-180}{-8}=\frac{-176}{-8}=22$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 60 & 1 \\ 1 & -16 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{-16-60+16-60}{-8}=\frac{-120}{-8}=15$$

$$z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 60\\ 1 & -1 & -16\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}}{-8}=\frac{-180-16+60-48}{-8}=\frac{-184}{-8}=23$$

Luego hay 22 deportistas que hacen esquí alpino, 15 que hacen esquí nórdico y 23 que hacen escalada.

b)

$$\begin{vmatrix}a & a+b & a-c\\ 2a & 3a+2b & 4a-2c\\ 3a & 6a+3b & 10a-3c\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}a & a & a-c\\ 2a & 3a & 4a-2c\\ 3a & 6a & 10a-3c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & a-c\\ 2a & 2b & 4a-2c\\ 3a & 3b & 10a-3c\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}a & a & a\\ 2a & 3a & 4a\\ 3a & 6a & 10a\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a & a & c\\ 2a & 3a & 2c\\ 3a & 6a & 3c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & a\\ 2a & 2b & 4a\\ 3a & 3b & 10a\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a & b & c\\ 2a & 2b & 2c\\ 3a & 3b & 3c\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=}a^3\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 6 & 10\end{vmatrix}-a^2c\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 6 & 3\end{vmatrix}+a^2b\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 10\end{vmatrix}-abc\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix}\overset{(3)}{=}a^3\cdot(30+12+12-9-24-20)-0+0-0=a^3=-8$$

Propiedades utilizadas:

(1) Descomposición de un determinante en suma de otros dos por tener una columna que es suma de dos sumandos.

(2) Sacar factores comunes que aparecen en las columnas.

(3) Determinantes nulos por tener dos columnas iguales.

2.

a) (*1 punto*) Determine la ecuación del plano determinado por el punto $P:(2,1,2)$ y la recta $r:(1,0,0)+t\,(-1,1,1)$.

b) (*0,5 puntos*) Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,0)$ y $\vec{v}=(2,1,-3)$, determine el área del triángulo que tiene por lados esos dos vectores.

SOLUCIÓN

a) Obtenemos la ecuación del haz de planos que pasan por r (conjunto de todos los planos que contienen a una recta):

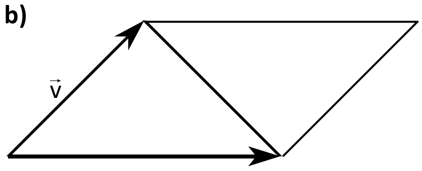
La recta r está determinada por el punto $(1,0,0)$ y el vector direccional $(-1,1,1)$ luego su ecuación en forma continua es $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ y como intersección de planos: $\left.\begin{array}{l}\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}\\ \frac{y}{1}=\frac{z}{1}\end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x-1=-y\\ y=z\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x+y-1=0\\ y-z=0\end{array}\right\}$

La ecuación del haz de planos que contienen a r es: $x+y-1+\lambda(y-z)=0$

De entre ellos, seleccionemos el que contiene al punto $P(2,1,2)$: $2+1-1+\lambda(1-2)=0 \Rightarrow 2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2$

Luego el plano buscado es: $x+y-1+2\,(y-z)=0 \Leftrightarrow x+y-1+2y-2z=0 \Leftrightarrow x+3y-2z-1=0$

b)



El módulo de $\vec{u}\times\vec{v}$ es el área del paralelogramo cuyos lados son $\vec{u}$ y $\vec{v}$. El área del triángulo es la mitad de la del paralelogramo.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=-6\vec{i}+\vec{k}-4\vec{k}+3\vec{j}=-6\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}=(-6,3,-3)$$

$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{36+9+9}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$ y, por tanto, el área del triángulo es: $S=\frac{3\sqrt{6}}{2}\,u^2$

3. Considere la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

a) (*1,5 puntos*) Determine las asíntotas de la función, si existen.

b) (*1 punto*) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.

c) (*1,5 puntos*) Determine la integral $\int_1^3 f(x)dx$.

SOLUCIÓN

a) ▪ Asíntotas verticales: $x=-1$ pues $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x-1}{(x+1)^2} = -\infty$

▪ Asíntotas horizontales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0^- \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0^+ \end{array}\right| \Rightarrow \ y=0 \ \text{ es una asíntota horizontal de la función}$$

▪ Asíntotas oblicuas $y = mx+n$:

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{(x+1)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1}{x(x+1)^2} = 0 \\ n = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \ y=0 \ \text{ (se trata de la asíntota horizontal, ya obtenida)}$$

b) $f'(x) = \frac{(x+1)^2 - (x-1)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)\cdot\left[x+1-2(x-1)\right]}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)\cdot(-x+3)}{(x+1)^4} = 0 \ \Rightarrow \ x=-1 \ , \ x=3$

Se tiene:

f' < 0	f' > 0	f' < 0
	-1	3

Es decir: la función es decreciente $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y creciente $\forall x \in (-1, 3)$.

c) Calculemos una primitiva de la función. Como se trata de una función racional cuyo denominador tiene una raíz doble $x=-1$, la descomponemos en suma de fracciones simples:

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} = \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2} \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{r} A=1 \\ A+B=-1 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ A=1 \ , \ B=-2$$

Por tanto: $\int \frac{x-1}{(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{-2}{(x+1)^2}dx = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1}$ y la integral definida:

$$\int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2}dx = \left[\ln|x+1| + \frac{2}{x+1}\right]_1^3 = \left(\ln 4 + \frac{2}{4}\right) - (\ln 2 + 1) = \ln 4 - \ln 2 + \frac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2} \simeq 0{,}1931$$

4. La probabilidad de que una persona escriba un mensaje de Twitter sin faltas de ortografía es 0,75. Se sabe además que una persona escribe a lo largo del día 20 mensajes de Twitter.

A partir de esta información, responde a las siguientes cuestiones. NO es necesario finalizar los cálculos en ninguna de ellas, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen.

a) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los mensajes escritos en un día, es decir 10, no tengan faltas de ortografía?

b) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún mensaje de los 20 escritos en un día tenga faltas de ortografía?

c) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que 18 o más mensajes de los 20 escritos en un día sí tengan faltas de ortografía?

SOLUCIÓN

Se trata de una experiencia dicotómica pues los sucesos asociados a la misma sólo son "escribe un mensaje sin faltas de ortografía" o su contrario "escribe un mensaje con faltas de ortografía". El primero de los sucesos lo llamamos éxito y su probabilidad es $p = 0{,}75$ y su contrario tiene una probabilidad $q = 0{,}25$.

Como la experiencia se repite 20 veces al día, nos encontramos ante una distribución binomial $B(20\,,0.75)$. La probabilidad de obtener k éxitos, es decir la de escribir k mensajes sin faltas de ortografía, es:

$$P[x=k] = \binom{20}{k} 0{,}75^{k}\ 0{,}25^{20-k}$$

a) La probabilidad de obtener 10 éxitos es: $P[x=10] = \binom{20}{10} 0{,}75^{10}\ 0{,}25^{10} = \dfrac{20!}{10!\cdot 10!}\cdot 0{,}75^{10}\cdot 0{,}25^{10} =$

$$= \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10!}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 10!}\cdot 0{,}75^{10}\cdot 0{,}25^{10} = 184756\cdot 0{,}75^{10}\cdot 0{,}25^{10} = 0{,}0099$$

b) El suceso "ningún mensaje tenga faltas de ortografía" equivale a obtener 20 éxitos cuya probabilidad será:

$$P[x=20] = \binom{20}{20} 0{,}75^{20}\ 0{,}25^{0} = 0{,}75^{20} = 0{,}0032$$

c) Consideramos ahora como éxito "escribe un mensaje con faltas de ortografía" cuya probabilidad es 0,25. La probabilidad del suceso "escribe 18 o más mensajes con faltas de ortografía" es:

$$P[x \ge 18] = \binom{20}{18} 0{,}25^{18}\ 0{,}75^{2} + \binom{20}{19} 0{,}25^{19}\ 0{,}75^{1} + \binom{20}{20} 0{,}25^{20}\ 0{,}75^{0} =$$

$$= \frac{20!}{18!\cdot 2!}\cdot 0{,}25^{18}\cdot 0{,}75^{2} + \frac{20!}{19!\cdot 1!}\cdot 0{,}25^{19}\cdot 0{,}75 + 1\cdot 0{,}25^{20} = \frac{20\cdot 19\cdot 18!}{18!\cdot 2}\cdot 0{,}25^{18}\cdot 0{,}75^{2} + \frac{20\cdot 19!}{19!\cdot 1}\cdot 0{,}25^{19}\cdot 0{,}75 + 0{,}25^{20} =$$

$$= 190\cdot 0{,}25^{18}\cdot 0{,}75^{2} + 20\cdot 0{,}25^{19}\cdot 0{,}75 + 0{,}25^{20} = 0{,}00000000161$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2019

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1.

a) (*1,5 punto*) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real:

$$\begin{aligned} 2x - y + kz &= 1 \\ -x + y - kz &= 0 \\ 2x - ky + 2kz &= -1 \end{aligned}$$

Determine los valores del parámetro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) (*1,5 punto*) Resuelva el sistema cuando $k = 1$.

2.

a) (*0,75 puntos*) Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (2,1,0)$ y $\vec{w}$, siendo $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, y donde el símbolo $\times$ representa el producto vectorial.

b) (*0,75 puntos*) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $P: (1, 3, 2)$ y es perpendicular a la recta.

$$r: \begin{cases} 3x - 2y \qquad = -1 \\ \qquad 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

3.

a) (*1 punto*) Determine el límite:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)} - \frac{1}{x} \right)$$

b) (*1 punto*) Determine el valor de la constante k para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, & \text{si } x \neq 1 \\ k - x\,, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

sea continua en $x = 1$.

c) (*2 puntos*) La curva $y = x^2 + 1$ divide al rectángulo limitado por los vértices $A : (0, 1)$, $B : (2, 1)$, $C : (0, 5)$ y $D : (2, 5)$ en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

4. Una encuesta realizada sobre el mes preferido, entre julio, agosto o septiembre, para salir de vacaciones arrojó los siguientes datos: un 40% prefiere julio, un 30% agosto y el resto prefiere el mes de septiembre. Entre los que prefieren el mes de julio, un 60% pasa sus vacaciones en un hotel; entre los que prefieren el mes de agosto un 40% elige hotel para sus vacaciones y entre los encuestados que prefieren septiembre, un 65% eligen hotel.

a) (*0,5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.

b) (*0,5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.

c) (*0,5 puntos*) Se elige al azar un individuo y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1.

a) (*1,5 puntos*) Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$$

b) (*1,5 puntos*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m = -1$.

2. (*1,5 puntos*) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r\colon \begin{cases} 3x + y & = -1 \\ \quad 4y + 3z & = +5 \end{cases}$$

y pasa por el punto $A\colon (1,3,-1)$.

3.

a) (*1 punto*) Considere la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^2 + 2}$$

Determine el valor de k para que la función $f(x)$ tenga como asíntota oblicua, cuando $x \to +\infty$, la recta $y = 2x - 1$.

b) (*1,5 puntos*) Determine

$$\int x(\ln(x))^2 dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine, si existen, los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$$

4. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.

a) (*0,75 puntos*) Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).

b) (*0,75 puntos*) Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES:

Como norma general se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

De acuerdo con las normas generales que aparecen en la información pública, los correctores pueden bonificar hasta con un máximo de un punto, el buen uso de la lengua o el desarrollo técnico de los ejercicios.

OPCIÓN A

1-a (*1,5 puntos*) Para clasificar el sistema puede usarse cualquier método. La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles. La valoración de todos los casos deber ser idéntica.

1-b (*1,5 puntos*) La solución del sistema puede hallarse por cualquier método.

2-a (*0,75 puntos*) Determinación del vector $\vec{w}$: *0,25 puntos*. Cálculo del volumen: *0,5 puntos*.

2-b (*0,75 puntos*) Cualquier expresión del plano (vectorial, paramétrica o general o implícita) se considera igualmente válida.

3-a (*1 punto*) Los pasos en el cálculo del límite deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta.

3-b (*1 punto*) Determinación de la constante.

3-c (*2 puntos*) Cálculo del área.

Es posible que no lleguen a determinar el área correctamente; en ese caso deberá valorarse los pasos que se hayan hecho siempre que tengan sentido. Es decir, la no determinación correcta del área no debe valorarse necesariamente con *0 puntos*.

4-a (*0,5 puntos*) Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, si bien no basta con poner un resultado, sino que deben valorarse los pasos o razonamientos realizados para la determinación de la probabilidad.

4-b (*0,5 puntos*) Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, si bien, de nuevo, los pasos o razonamientos para la determinación de las probabilidades deben estar claros y la valoración debe tenerlo en cuenta.

4-c (*0,5 puntos*) Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida. Como ya se ha dicho, los pasos o razonamientos para la determinación de las probabilidades deben estar claros y la valoración debe tenerlo en cuenta.

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1-a *(1,5 puntos*) Cualquier estrategia para determinar el rango es igualmente válida.

La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los valores del parámetro.

1-b (*1,5 puntos*) La determinación de la matriz inversa puede hacerse por cualquier método. Si se realiza usando el método de Gauss-Jordan el proceso puede ser más largo que si se hace mediante determinantes, y los errores numéricos pueden ser más frecuentes. En ese caso deberá valorarse más el proceso que los cálculos, siempre que los cálculos tengan sentido.

2 (*1,5 puntos*) Cualquier expresión del plano (vectorial, paramétrica o general o implícita) se considera igualmente válida.

3-a (*1 punto*) La calificación debe tener en cuenta los pasos que se siguen y los razonamientos empleados.

3-b (*1,5 puntos*) Los pasos en el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación debe tenerlo en cuenta. Si no se pone la constante de integración la calificación máxima será de *1,35 puntos*.

3-c (*1,5 puntos*)

Estudio de máximos y mínimos: *0,75 puntos*.

Estudios de puntos de inflexión: *0,75 puntos*.

4-a (*0,75 puntos*) Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, si bien deben identificarse claramente los números que definen la probabilidad.

Debe señalarse que, dado que aparecen cálculos que pueden resultar tediosos, se les ha indicado a los estudiantes que NO es preciso finalizar los cálculos, y pueden dejar indicada la probabilidad, precisando, eso sí, los números que la definen.

4-b (*0,75 puntos*) La probabilidad pedida requiere usar la aproximación de la distribución Binomial por la Normal.

Planteamiento de la probabilidad y aproximación por la distribución Normal: *0,5 puntos*.

Calculo de la probabilidad con la tabla: *0,25 puntos*.

Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2019
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1.

a) (*1,5 punto*) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real:

$$\begin{aligned} 2x - y + kz &= 1 \\ -x + y - kz &= 0 \\ 2x - ky + 2kz &= -1 \end{aligned}$$

Determine los valores del parámetro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) (*1,5 punto*) Resuelva el sistema cuando $k = 1$.

SOLUCIÓN.

a) La matriz de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \\ 2 & -k & 2k & -1 \end{array}\right)$.

El máximo rango posible es 3. El único menor de orden 3 en la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 1 & -k \\ 2 & -k & 2k \end{vmatrix} = 4k + k^2 + 2k - 2k - 2k - 2k^2 = -k^2 + 2k = k(-k+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 \ , \ k = 2$$

▪ Para $k \neq 0$ y $k \neq 2$: $\text{rg}A = \text{rg}B = 3 = \text{nº de incógnitas} \quad \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

▪ Para $k = 0$: el rango de la matriz A es 2 pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Orlamos el menor anterior con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rg}B = 3 \quad \Rightarrow$ el sistema es incompatible pues $\text{rg}A \neq \text{rg}B$.

▪ Para $k = 2$: el rango de la matriz A es 2 pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Orlamos el menor anterior con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 2 + 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rg}B = 3 \quad \Rightarrow$ el sistema es incompatible pues $\text{rg}A \neq \text{rg}B$.

b) Para $k = 1$ el sistema es compatible determinado. Para resolverlo utilizamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2 - 1 + 1 - 1}{4 + 1 + 2 - 2 - 2 - 2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\-1&0&-1\\2&-1&2\end{vmatrix}}{1}=\frac{1-2+2-2}{1}=\frac{-1}{1}=-1 \quad ; \quad z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}2&-1&1\\-1&1&0\\2&-1&-1\end{vmatrix}}{1}=\frac{-2+1-2+1}{1}=\frac{-2}{1}=-2$$

2.

a) (*0,75 puntos*) Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,1,0)$ y $\vec{w}$, siendo $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$, y donde el símbolo $\times$ representa el producto vectorial.

b) (*0,75 puntos*) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $P:(1,3,2)$ y es perpendicular a la recta.

$$r:\begin{cases}3x-2y=-1\\ 2y+3z=3\end{cases}$$

SOLUCIÓN.

a) Calculemos el vector $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\2&1&0\end{vmatrix}=2\vec{j}+\vec{k}-2\vec{k}-\vec{i}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}=(-1,2,-1)$

El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&0\\-1&2&-1\end{vmatrix}=-1+4+1+2=6 \Rightarrow$$ el volumen del paralelepípedo es de $6\,u^3$.

b) Obtengamos un vector direccional de la recta r. $\overrightarrow{n_1}=(3,-2,0)$ es un vector normal al primero de los planos que definen a la recta r y $\overrightarrow{n_2}=(0,2,3)$ es un vector normal al segundo de los planos. Un vector direccional de r es:

$$\vec{u}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-2&0\\0&2&3\end{vmatrix}=-6\vec{i}+6\vec{k}-9\vec{j}=(-6,-9,6)\,//\,(2,3,-2)$$

Como el plano buscado es perpendicular a r, el vector direccional de r es normal al plano. La ecuación general del plano π es: $2x+3y-2z+D=0$

Y como $P\in\pi$: $2+9-4+D=0 \Rightarrow D=-7 \Rightarrow$ el plano es: $2x+3y-2z-7=0$

3.

a) (*1 punto*) Determine el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)}-\frac{1}{x}\right)$$

b) (*1 punto*) Determine el valor de la constante k para que la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x-1}, & \text{si } x\neq 1\\ k-x, & \text{si } x=1\end{cases}$$

sea continua en $x=1$.

c) (*2 puntos*) La curva $y=x^2+1$ divide al rectángulo limitado por los vértices $A:(0,1)$, $B:(2,1)$, $C:(0,5)$ y $D:(2,5)$ en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

SOLUCIÓN.

a) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-\ln\left((1+x)^2\right)}{x\cdot\ln\left((1+x)^2\right)}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-\dfrac{1}{(1+x)^2}\cdot 2(1+x)}{\ln\left((1+x)^2\right)+x\cdot\dfrac{1}{(1+x)^2}\cdot 2(1+x)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-\frac{2}{1+x}}{\ln\left((1+x)^2\right)+\frac{2x}{1+x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2+2x-2}{1+x}}{\frac{(1+x)\cdot\ln\left((1+x)^2\right)+2x}{1+x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{(1+x)\cdot\ln\left((1+x)^2\right)+2x}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}$$

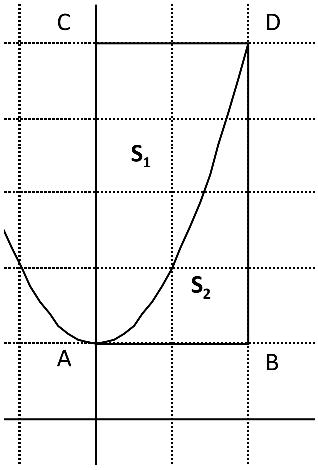
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)+(1+x)\cdot\frac{2(1+x)}{(1+x)^2}+2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)+2+2}\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Nota: $\overset{L'H}{=}$ significa que se aplica la regla de L'Hôpital.

b) Para que la función sea continua en $x=1$ debe ser $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{x-1}=4\\ f(1)=k-1\end{array}\right| \Rightarrow k-1=4 \Rightarrow k=5$$

c)



La curva $y=x^2+1$ es una parábola de eje OY, vértice en $(0,1)$ y que pasa por los puntos $(1,2)$ y $(2,5)$.

Las dos partes en que la parábola divide al rectángulo ABCD son S_1 y S_2. El lado CD del rectángulo es la recta $y=5$ y el lado AB es la recta $y=1$.

Tenemos:

$$S_1=\int_0^2\left[5-(x^2+1)\right]dx=\int_0^2(4-x^2)\,dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\left(8-\frac{8}{3}\right)-0=\frac{16}{3}\,u^2$$

$$S_2=\int_0^2\left[(x^2+1)-1\right]dx=\int_0^2 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}-0=\frac{8}{3}\,u^2$$

4. Una encuesta realizada sobre el mes preferido, entre julio, agosto o septiembre, para salir de vacaciones arrojó los siguientes datos: un 40% prefiere julio, un 30% agosto y el resto prefiere el mes de septiembre. Entre los que prefieren el mes de julio, un 60% pasa sus vacaciones en un hotel; entre los que prefieren el mes de agosto un 40% elige hotel para sus vacaciones y entre los encuestados que prefieren septiembre, un 65% eligen hotel.

a) (*0,5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.

b) (*0,5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.

c) (*0,5 puntos*) Se elige al azar un individuo y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

SOLUCIÓN.

Organicemos los datos en una tabla de contingencia (de doble entrada). Sobre un total de 100 personas, 40 prefieren julio, 30 prefieren agosto y el resto, es decir otros 30, prefieren septiembre. De los 40 que veranean en julio, un 60% ($40\cdot 0,60=24$) prefieren estar en hotel y el resto (16) no. De los 30 que veranean en agosto, un 40% ($30\cdot 0,40=12$) están en hotel y los 18 restantes no. De los 30 que prefieren veranear en septiembre, un 65%

	JULIO (J)	**AGOSTO (A)**	**SEPTIEMBRE (S)**	**TOTAL**
HOTEL (H)	$40\cdot 0,60=24$	$30\cdot 0,40=12$	$30\cdot 0,65=19,5$	55,5
NO HOTEL ($\overline{H}$)	16	18	10,5	44,5
TOTAL	40	30	30	100

($30 \cdot 0{,}65 = 19{,}5$) están en hotel y los 10,5 restantes, no. Para cada una de las filas y de las columnas, se calculan los totales.

a) Entre los 100 individuos hay 12 que prefieren veranear en agosto y en hotel: $p(H \cap A) = \dfrac{12}{100} = 0{,}12$

b) De entre las 100 personas hay 55,5 que prefieren el hotel: $p(H) = \dfrac{55{,}5}{100} = 0{,}555$

c) Sabemos que el individuo no pasa sus vacaciones en hotel por lo que nos encontramos entre los 44,5 que así lo prefieren. Los que, entre ellos, veranean en agosto son 18. Por tanto: $p(A/\overline{H}) = \dfrac{18}{44{,}5} = 0{,}4045$

OPCIÓN B

1.

a) (*1,5 puntos*) Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$$

b) (*1,5 puntos*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m = -1$.

SOLUCIÓN.

a) Estudiemos los valores de m para los que el rango es máximo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2 = 0 \;\Rightarrow\; m = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

▪ Para $m \neq 1$ y $m \neq 2$: $\operatorname{rg} A = 3$

▪ Para $m = 1$: $\operatorname{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 \neq 0$

▪ Para $m = 2$: $\operatorname{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 \neq 0$

b) Para $m = -1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Tenemos: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 3 + 2 = 6 \;\Rightarrow\; \exists A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{Adj } A)^*} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{Adj } A)^t} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A^{-1} = (\text{Adj } A)^t / |A|} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & -1/6 & -1/6 \\ -1 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

*Adjuntos de los elementos de A:

$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$,

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$

2. (*1,5 puntos*) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r: \begin{cases} 3x + y & = -1 \\ 4y + 3z & = +5 \end{cases}$$

y pasa por el punto $A: (1,3,-1)$.

SOLUCIÓN.

La ecuación del haz de planos (conjunto de todos los planos que contienen a la recta) es:

$$3x+y+1+\lambda(4y+3z-5)=0$$

De entre ellos, seleccionemos al plano que contiene al punto $A(1,3,-1)$:

$3+3+1+\lambda(12-3-5)=0 \;\Rightarrow\; 7+4\lambda=0 \;\Rightarrow\; \lambda=-\dfrac{7}{4}$ y, por tanto, el plano buscado es:

$$3x+y+1-\frac{7}{4}(4y+3z-5)=0 \;\Leftrightarrow\; 3x+y+1-7y-\frac{21}{4}z+\frac{35}{4}=0 \;\Leftrightarrow\; 12x-24y-21z+39=0 \;\Leftrightarrow\; 4x-8y-7z+13=0$$

3.

a) (*1 punto*) Considere la función:

$$f(x)=\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2}$$

Determine el valor de k para que la función $f(x)$ tenga como asíntota oblicua, cuando $x\to+\infty$, la recta $y=2x-1$.

b) (*1,5 puntos*) Determine

$$\int x(\ln(x))^2 dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine, si existen, los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$$

SOLUCIÓN.

a) Si $y=mx+n$ es una asíntota de la función f(x): $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ y $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]$.

En nuestro caso: $m=2$, $n=-1$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^3+2x}=2$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+kx^2+x+3-2x^3-4x}{x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^2-3x+3}{x^2+2}=k=-1 \;\Rightarrow\; k=-1$$

b) Procederemos a integrar "por partes": $\int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du$

$$\int x\left(\ln(x)\right)^2 dx=\left|\begin{array}{c} u=\left(\ln(x)\right)^2 \;\Rightarrow\; du=2\cdot\left(\ln(x)\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx \\ dv=x\,dx \;\Rightarrow\; v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{1}{2}x^2\left(\ln(x)\right)^2-\int\frac{x^2}{2}\,2\cdot\left(\ln(x)\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\left(\ln(x)\right)^2-\int x\cdot\left(\ln(x)\right)dx=\left|\begin{array}{c} u=\ln(x) \;\Rightarrow\; du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x\,dx \;\Rightarrow\; v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{1}{2}x^2\left(\ln(x)\right)^2-\left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\left(\ln(x)\right)^2-\frac{1}{2}x^2\ln(x)+\frac{1}{4}x^2+C=\frac{1}{2}x^2\left[\left(\ln(x)\right)^2-\ln(x)+\frac{1}{2}\right]+C$$

c) En el cálculo de los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función necesitaremos sus tres primeras derivadas. Las obtenemos:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x}{x^2} \quad\Rightarrow\quad f''(x)=\frac{x^2-(-1+x)\,2x}{x^4}=\frac{x^2+2x-2x^2}{x^4}=\frac{-x+2}{x^3} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad f'''(x)=\frac{-x^3-(-x+2)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{2x^3-6x^2}{x^6}=\frac{2x-6}{x^4}$$

▪ Máximos y mínimos relativos: $f'(x)=\frac{-1+x}{x^2}=0 \;\Rightarrow\; x=1$ (posible punto de máximo o de mínimo relativo).

$f''(1)>0 \;\Rightarrow\; x=1$ mínimo relativo: $(1\,,1)$

▪ Puntos de inflexión: $f''(x)=\frac{-x+2}{x^3}=0 \;\Rightarrow\; x=2$ (posible punto de inflexión)

$f'''(2)\neq 0 \;\Rightarrow\; x=2$ es un punto de inflexión: $\left(2\,,\frac{1}{2}+\ln 2\right)$

4. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.

a) (*0,75 puntos*) Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).

b) (*0,75 puntos*) Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN.

a) Se trata de una situación dicotómica (sale par / no sale par) que da lugar a una distribución binomial.

Entre el 1 y el 25 hay 12 múltiplos de 2 luego la probabilidad de sacar par (éxito) en una jugada es $p=\frac{12}{25}=0{,}48$ y la de su suceso contrario es $q=0{,}52$.

Cuando repetimos 100 veces la jugada, en la distribución binomial $B(100\,,0.48)$ la probabilidad de obtener 10 éxitos es: $p[x=10]=\binom{100}{10}\cdot 0{,}48^{10}\cdot 0{,}52^{90}$.

b) Estamos ante una distribución binomial $B(200\,,0.48)$. Nos piden la probabilidad: $p[90\le x\le 110]$.

Como $n\cdot p=200\cdot 0{,}48=96>5$, $n\cdot q=200\cdot 0{,}52=104>5$ la distribución binomial se aproxima de forma perfecta a una distribución normal.

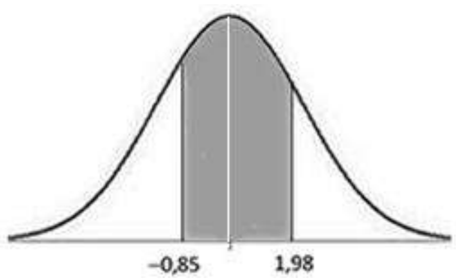
La media de la distribución normal es $\mu=n\cdot p=96$ y la desviación típica $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{200\cdot 0{,}48\cdot 0{,}52}=7{,}065$.

Por consiguiente, la distribución binomial $B(200\,,0.48)$ se aproxima a una distribución normal $N(96\,,7.065)$.

Ahora basta tipificar la variable para hacer uso de las tablas correspondientes a la normal $N(0\,,1)$. El esquema es el siguiente:

$$x\in B(200\,,0.48)\ \rightarrow\ x'\in N(96\,,7.065)\ \rightarrow\ z=\frac{x'-\mu}{\sigma}=\frac{x'-96}{7{,}065}\in N(0\,,1)$$

Tenemos:



$$p[90\le x\le 110]=p\left[\frac{90-96}{7{,}065}\le z\le\frac{110-96}{7{,}065}\right]=p[-0{,}85\le z\le 1{,}98]=$$

$$=p[z\le 1{,}98]-p[z\le -0{,}85]=(1)$$

$p[z\le 1{,}98]=0{,}9761$ (en la tabla)

$p[z\le -0{,}85]=p[z\ge 0{,}85]=1-p[z\le 0{,}85]=1-0{,}8025=0{,}1977$

Luego: $(1)=0{,}9761-0{,}1977=0{,}7784$

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El estudiante debe indicar claramente, cuáles han sido las preguntas elegidas.

Preguntas elegidas (indique un máximo de 5, antes de entregar el examen):

……………………………………………………

(Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + (m+1)z = 2 \\ x + (m-1)y + 2z = 1 \\ 2x + my + z = -1 \end{cases}$$

Discuta el sistema según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

a) (*1 punto*) Calcule, si es posible, $\left(A \cdot B^t\right)^{-1}$.

b) (*1 punto*) Compruebe que, $C^3 = I$, donde I es la matriz identidad, y calcule C^{16}.

3) Resuelva el sistema matricial

$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$$

4) Se considera la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + \quad z = 1 \\ 2x + y \quad = 3 \end{cases}$$

a) (*1,25 puntos*) Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto (0,0,1).

b) (*0,75 puntos*) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$ Sabiendo que $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, 1, 1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

5) Calcule el siguiente límite:.

$$\lim_{x \to 0^+}\left((1+x-senx)^{1/x^3}\right)$$

6) Se considera la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2}{1-e^{-x}}$. Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas cuando existan.

7) Se considera la siguiente función $f(x)=\ln(2x+1)$

- **a)** (*1,25 puntos)* Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento
- **b)** *(0,75 puntos)* Halle la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa x= $\frac{1}{2}$

8) Calcule la siguiente integral: $\int\left(\sqrt{x}\cdot\ln^2 x\right)dx$.

9) Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12%, mientras que la de que una mujer lo esté es del 16%. Además, la probabilidad de ser varón es del 64% y la de ser mujer del 36%.

- **a)** (*0,75 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en paro?
- **b)** (*0,75 puntos*) Si se elige una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?
- **c)** (*0,5 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Nota informativa: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizados con personas en disposición de trabajar.

10) De los estudiantes universitarios españoles, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente

- **a)** (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que la definen, pero sin hacer los cálculos finales).

- **b)** (1 punto) ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES:

Como norma general se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.
Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia a éste, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.
En determinados apartados se dan puntuaciones para la solución por alguno de los métodos más habituales. En todo caso, la resolución de un apartado utilizando un método distinto otorgará la puntuación máxima, siempre que el método sea correcto y lo sea también su solución.
De acuerdo con las normas generales que aparecen en la información pública, los correctores pueden bonificar hasta con un máximo de un punto, el buen uso de la lengua o el desarrollo técnico de los ejercicios.

1. (*2 ptos*) Para clasificar el sistema puede usarse cualquier método. Se detalla la puntuación para la clasificación mediante el método de Rouché-Frobenius. Cálculo del determinante 0,75 ptos. Estudio de casos para los cuales el sistema es compatible determinado 0,25 ptos. Estudio del caso para el cual el sistema es incompatible 0,5 ptos. Estudio del caso para el cual el sistema es compatible indeterminado 0,5 ptos.
Por errores de cálculo leves que no simplifiquen el estudio del sistema se restará un máximo de 0,25 puntos (sea cual sea el método de resolución que se use).

2-a. (*1 pto*) Cálculo de $A \cdot B^t$, 0,4 pts. Cálculo de la inversa, 0,6 pts.
2-b. *(1 pto)* Comprobación de que $C^3 = I$, 0,5 pts. Cálculo razonado de C^{16}: 0,5 pts. (En el caso poco probable de que un alumno calcule las sucesivas potencias C, hasta llegar a C^{16}, se considerará igualmente válido, así como cualquier otro razonamiento que le lleve a la solución correcta).

3. (*2 ptos*) Por errores de cálculo leves, se podrá penalizar hasta con 0,5 ptos. el problema.

4-a. (*1,25 ptos*) El plano puede darse en cualquiera de sus formas, que deben valorarse por igual.
4-b. (*0,75 ptos*) Los pasos en el cálculo deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta.

5. (*2 ptos*) Los pasos en el cálculo del límite deben estar claros, y la calificación debe tenerlos en cuenta. Cualquier método se considerará válido (incluida la fórmula del límite del número e).

6. (*2 ptos*) Comprobación del valor donde el denominador se anula, 0,2 pts. Estudio de cada uno de los 3 casos donde hay una posible asíntota, 0,6 pts cada uno. El estudio completo debe incluir: la indicación de la no existencia de asíntota vertical en x=0, la existencia de asíntota horizontal y=0 (cuando $x \to -\infty$) y la justificación de no existencia de asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

7-a. (*1.25 ptos*) Indicación correcta del dominio, 0,25 pts. Cálculo de la derivada de la función 0,5. ptos. Estudio de intervalos de crecimiento/decrecimiento: 0,5 pts.
7-b. (*0.75 ptos*) Cálculo de la pendiente de la recta tangente 0,2. ptos. Cálculo del punto de tangencia 0,2 ptos. Expresión de la recta tangente 0,35 ptos. Cualquier expresión de la ecuación de la recta se considerará válida.

8. (*2 ptos*) Los pasos en el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta.

Si se olvidan añadir la constante de integración al resultado final, se penalizará con 0,3 ptos.

9-a. (*0,75 ptos*) Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, siempre que sea coherente y correcta. Si se identifica correctamente la probabilidad a calcular, identificando los sucesos, pero no se sabe calcular la probabilidad, la puntuación máxima será de 0,2 pts.
9-b. (*0,75 ptos*) Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, siempre que sea coherente y correcta. Si se identifica correctamente la probabilidad a calcular, identificando los sucesos, pero no se sabe calcular la probabilidad, la puntuación máxima será de 0,2 pts.
9-c. (*0,5 ptos*) Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, siempre que sea coherente y correcta. Si se identifica correctamente la probabilidad a calcular, identificando los sucesos, pero no se sabe calcular la probabilidad, la puntuación máxima será de 0,2 pts).

10-a. (*1 pto*) Si el estudiante indica que el número de estudiantes que abandona sus estudios es una binomial, indica correctamente los valores de n y p, y plantea bien la probabilidad a calcular, aunque no recuerde las fórmulas, se le podrá asignar una puntuación de hasta 0,5 puntos (igualmente sería válido plantear el problema con el número de estudiantes que no abandonan sus estudios, aunque no será lo habitual). Si el estudiante indica correctamente las probabilidades, pero no especifica el valor concreto de los números combinatorios, se podrá penalizar hasta con 0,2 ptos.

Nota: se puede otorgar la puntuación completa a la expresión correcta de la probabilidad, aunque el estudiante no haga referencia a la binomial.

10-b. (*1 pto*) Expresión correcta de cada una de las probabilidades pedidas: 0,8 ptos, la mitad para cada caso. Razonamiento de cuál de ellas es mayor: 0,2 ptos (se puede hacer calculando el valor numérico de ambas probabilidades o bien razonando que son dos potencias con distinta base y el mismo exponente, y que la de base mayor da un resultado mayor).

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El estudiante debe indicar claramente en la primera página del tríptico, cuáles han sido las preguntas elegidas.

(Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

1) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $b=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera:

a) (1,25 puntos) Discuta el sistema $AX=b$ según los valores del parámetro a

b) (0,75 puntos) Resuelva el sistema cuando $a=1$

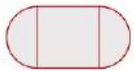
2) Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las 3 mascarillas es de 0.90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.

3) Resuelva la ecuación matricial $XA+XA^t=B$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4) Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} 3x+y-4z+1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+3z-1=0$

5) Calcule el siguiente límite $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}$.

6) Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base **y** metros y altura **x** metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo)



Su superficie se desea que sea de $4+\pi$ m^2. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle **x** e **y** de modo que se verifique este requisito.

7) Dada la siguiente función: $f(x)=\frac{-x^2}{2}+2\ln(x+1)$:

a) (*0,25 puntos*) Calcule el dominio de $f(x)$.

b) (*1,75 puntos*) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento

8) (*2 puntos*) Calcule la siguiente integral $\int x^3 e^{x^2}dx$

9) En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudiantes de segundo de bachiller de un centro acerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80% disponía de ordenador, el 15% disponía de móvil y el 10% disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro.

a) (*1,25 puntos*) Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos).

b) (*0,75 puntos*) Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos mencionados.

10) (*2 puntos*) Un estudiante universitario de matemáticas ha comprobado que el tiempo que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) (*0,75 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?

b) (*0,75 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?

c) (*0,5 puntos*) El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a clase?

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES:

Como norma general se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.
Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia a éste, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.
En determinados apartados se dan puntuaciones para la solución por alguno de los métodos más habituales. En todo caso, la resolución de un apartado utilizando un método distinto otorgará la puntuación máxima, siempre que el método sea correcto y lo sea también su solución.
De acuerdo con las normas generales que aparecen en la información pública, los correctores pueden bonificar hasta con un máximo de un punto, el buen uso de la lengua o el desarrollo técnico de los ejercicios.

1-a (*1,25 ptos*) Para clasificar el sistema puede usarse cualquier método. Se detalla la puntuación para la clasificación mediante el método de Rouché-Frobenius. Cálculo del determinante 0,5 ptos. Estudio de casos para los cuales el sistema es compatible determinado 0,15 ptos. Estudio del caso para el cual el sistema es incompatible 0,3 ptos. Estudio del caso para el cual el sistema es compatible indeterminado 0,3 ptos.
Por errores de cálculo leves que no simplifiquen el estudio del sistema se restará un máximo de 0,15 puntos (sea cual sea el método de resolución que se use).

1-b (*0,75 ptos*) La calificación máxima se obtendrá si se da la parametrización de las infinitas soluciones que tiene el sistema

2. (*2 ptos*) Planteamiento del sistema, 1 pto. Resolución del sistema, 1 pto. Errores leves de cálculo que no simplifiquen la resolución se podrán penalizar hasta con 0,3 ptos.

3. (*2 ptos*) Por errores de cálculo leves, se podrá penalizar hasta con 0,5 ptos. el ejercicio.

4. (*2 ptos*) El plano puede darse en cualquiera de sus formas, que deben valorarse por igual.

5. (*2 ptos*) Los pasos en el cálculo del límite deben estar claros, y la calificación debe tenerlos en cuenta. Cualquier método se considerará válido (incluida la fórmula del límite del número e).

6. (*2 ptos*) Planteamiento de la función a minimizar, 1 pto. Cálculo de la derivada, 0,5 ptos. Determinación del cero válido de la derivada 0,25 pts. Comprobación de que el cero de la derivada corresponde a un mínimo, 0,15 pts. Cálculo de y 0.1 pts.

7-a. (*0,25 ptos*) Los pasos en el cálculo del dominio deben estar claros, y la calificación debe tenerlos en cuenta.
7-b. (*1,75 ptos*) Cálculo de la derivada, 0,4 pts. Cálculo de los ceros de la derivada e indicación de si están en el dominio 0,6 pts. Establecimiento correcto de intervalos e indicación correcta de su monotonía 0,75 pts. Uno de los ceros de la derivada no está en el dominio de la función. Los estudiantes deben indicar este hecho. Si indican los intervalos incorrectamente, por no haber excluido puntos fuera del dominio, la puntuación máxima del apartado será de 1,25 puntos.

8. (*2 ptos*) La no inclusión de la constante de integración en el resultado final, penalizará con 0,2 pts.

9-a. (*1,25 ptos*) Planteamiento correcto de la probabilidad, 0,5 pts. Cálculo de dicha probabilidad, 0,75 pts.
9-b. (*0,75 ptos*) Planteamiento 0,25 ptos. Solución 0,5 ptos.

10-a. (*0,75 ptos*) Por pequeños errores de cálculo o por copiar mal el valor de la tabla normal se quitará un máximo de 0,2 puntos.
10-b. (*0,75 ptos*) Por pequeños errores de cálculo o por copiar mal el valor de la tabla normal se quitará un máximo de 0,25 puntos.
10-c. (*0,5 ptos*) No se asignan puntuaciones intermedias.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JULIO DE 2020
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El estudiante debe indicar claramente, cuáles han sido las preguntas elegidas.

Preguntas elegidas (indique un máximo de 5, antes de entregar el examen):

……………………………………………………

(Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{cases}$$

Discuta el sistema según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN

Estudiemos el rango de la matriz de los coeficientes, A, y el de la matriz ampliada, B:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m-1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & -1 \end{array}\right)$$

El único menor de orden 3 de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix} = m-1+m(m+1)+4-2(m+1)(m-1)-2m-1 = m-1+m^2+m+4-2m^2+2-2m-1=$$

$$=-m^2+4=0 \quad \Rightarrow \quad m=-2 \ , \ m=2$$

· Para $m \neq -2$ y $m \neq 2$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado

· Para $m=-2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$

El menor de orden 2 de la matriz de los coeficientes $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3-1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg} A = 2$

Orlamos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3-4+2+12+2+1 \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{rg}\,B = 3 \;\Rightarrow\; \mathrm{rg}\,A \neq \mathrm{rg}\,B \;\Rightarrow\; \text{sistema incompatible}$$

· Para $m=2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$

El menor de orden 2 de la matriz de los coeficientes $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-3 \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{rg}\,A = 2$

Orlamos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+2+6-8+3-1 = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{rg}\,B = 2 \;\Rightarrow\; \mathrm{rg}\,A = \mathrm{rg}\,B = 2 < \text{nº de incógnitas} \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ sistema compatible indeterminado.

2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

a) (*1 punto*) Calcule, si es posible, $\left(A \cdot B^t\right)^{-1}$.

b) (*1 punto*) Compruebe que, $C^3 = I$, donde I es la matriz identidad, y calcule C^{16}.

SOLUCIÓN

a) $B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Como $\left|A \cdot B^t\right| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists \left(A \cdot B^t\right)^{-1}$

$$\left(A \cdot B^t\right) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta}} \left(A \cdot B^t\right)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adjunta}} \mathrm{Adj}\left(A \cdot B^t\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}}$$

$$\xrightarrow{\text{Inversa}} \left(A \cdot B^t\right)^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Comprobamos que es, en efecto, la matriz inversa: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$C^4 = C^3 \cdot C = I \cdot C = C \quad \Rightarrow$ Las sucesivas potencias de C forman ciclos de tres resultados: C , C^2 e I.

C^{16} es el primer resultado del sexto ciclo. Por tanto: $C^{16} = C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Resuelva el sistema matricial $\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$

SOLUCIÓN

$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2X + 4Y = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{sumando: } 7Y = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = 2Y + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + \quad z = 1 \\ 2x + y \quad = 3 \end{cases}$

a) (*1,25 puntos*) Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto (0,0,1).

b) (*0,75 puntos*) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$ Sabiendo que $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, 1, 1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

SOLUCIÓN

a) La ecuación del haz de planos que contienen a la recta r es: $x + z - 1 + \lambda(2x + y - 3) = 0$

El plano que buscamos debe contener al punto $(0, 0, 1)$:

$0 + 1 - 1 + \lambda(0 + 0 - 3) = 0 \Rightarrow -3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$ el plano buscado es: $x + z - 1 = 0$

b) El producto mixto de tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ se define así: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ donde $\cdot$ simboliza el producto escalar y $\times$ el producto vectorial. El producto mixto de tres vectores es el volumen del paralelepípedo que tiene a los tres vectores como aristas. Por otra parte, el producto mixto es independiente del orden de los tres vectores.

Tenemos: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}] = [\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (-1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 1) = 1 + 1 + 1 = 3\ u^3$

5) Calcule el siguiente límite:.

$$\lim_{x\to 0^+}\left((1+x-senx)^{1/x^3}\right)$$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0^+}\left((1+x-\text{sen}x)^{1/x^3}\right)=1^\infty$$

Se tiene: $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=1^\infty=e^{\lim_{x\to a}[g(x)\cdot(f(x)-1)]}$

En nuestro caso: $\lim_{x\to 0^+}\left[g(x)\cdot(f(x)-1)\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x^3}\cdot(1+x-\text{sen}x-1)\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\text{sen}x}{x^3}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{3x^2}=$

$$=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}x}{6x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to 0^+}\left((1+x-\text{sen}x)^{1/x^3}\right)=e^{1/6}$$

NOTA: cuando aparece la expresión L'H significa que se aplica la regla de L'Hôpital

6) Se considera la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2}{1-e^{-x}}$. Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas cuando existan.

SOLUCIÓN

· Asíntotas verticales: $x=a$ es una asíntota vertical de f(x) $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=\infty$

En nuestro caso, f(x) es una función racional que puede tender a ∞ en los valores de x que anulen al denominador: $1-e^{-x}=0 \Rightarrow e^{-x}=1 \Rightarrow x=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-e^{-x}}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{-x}}=0 \Rightarrow x=0$ no es una asíntota vertical de la función.

La función no tiene asíntotas verticales.

· Asíntotas horizontales: $y=a$ es una asíntota horizontal de f(x) $\Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a$

La función f(x) contiene una función exponencial que hace necesario diferenciar el signo de las tendencias de x a infinito, pues $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ y $\lim_{x\to+\infty} e^x=\infty$.

En nuestro caso:

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1-e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}}=\frac{2}{\infty}=0 \Rightarrow y=0$ es una asíntota horizontal de la función cuando $x\to-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1-e^{-x}}=\frac{\infty}{1}=\infty \Rightarrow$ la función no tiene asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$

· Asíntotas oblicuas: $y=mx+n$ donde $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ y $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]$

Cuando $x\to-\infty$: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{x^2}{1-e^{-x}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x\left(1-e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1-e^{-x}}=\dfrac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{-x}}=0 \Rightarrow$ se trata de la asíntota horizontal ya obtenida.

Cuando $x\to+\infty$: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2}{1-e^{-x}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x\left(1-e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1-e^{-x}}=\dfrac{\infty}{1}=\infty \Rightarrow$ la función no tiene asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$.

7) Se considera la siguiente función $f(x)=\ln(2x+1)$

a) *(1,25 puntos)* Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) *(0,75 puntos)* Halle la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa x= $\dfrac{1}{2}$

SOLUCIÓN

a) · Se trata de una función logarítmica. Su dominio son los valores de x para los que $2x+1>0 \Rightarrow x>-\dfrac{1}{2}$

Es decir: $\text{Dom}\left(f\right)=\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

· Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$f'(x)=\dfrac{2}{2x+1}$ • En su dominio, para $x>-\dfrac{1}{2}$: $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función es creciente

b) El punto de tangencia es: $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln 2 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2},\ln 2\right)$

Y la pendiente de la tangente: $f'(x)=\dfrac{2}{2x+1} \Rightarrow m=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{2}=1$

La ecuación de la tangente es entonces: $y-\ln 2=1\cdot\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y=x+\ln 2-\dfrac{1}{2}$

8) Calcule la siguiente integral: $\int\left(\sqrt{x}\cdot\ln^2 x\right)dx$.

SOLUCIÓN

Utilizaremos el método de integración por partes: $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$

$$\int\left(\sqrt{x}\cdot\ln^2 x\right)dx \overset{(1)}{=} \left|\begin{array}{c} u=\ln^2 x \Rightarrow du=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}dx \\ dv=\sqrt{x}\,dx \Rightarrow v=\int x^{1/2}\,dx=\dfrac{2}{3}x^{3/2}=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x} \end{array}\right| \overset{(1)}{=} \dfrac{2}{3}x^{3/2}\cdot\ln^2 x-\int\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\ln^2 x-\frac{4}{3}\int\sqrt{x}\cdot\ln x\,dx\overset{(2)}{=}\quad\left|\begin{matrix}u=\ln x & \Rightarrow & du=\frac{1}{x}dx\\ dv=\sqrt{x}\,dx & \Rightarrow & v=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\end{matrix}\right|\quad\overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=}\frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\ln^2 x-\frac{4}{3}\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\ln x-\int\frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx\right]=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\ln^2 x-\frac{8}{9}x\sqrt{x}\cdot\ln x+\frac{8}{9}\int\sqrt{x}\,dx=$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\ln^2 x-\frac{8}{9}x\sqrt{x}\cdot\ln x+\frac{16}{27}x\sqrt{x}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C$$

9) Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12%, mientras que la de que una mujer lo esté es del 16%. Además, la probabilidad de ser varón es del 64% y la de ser mujer del 36%.

a) (*0,75 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en paro?

b) (*0,75 puntos*) Si se elige una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?

c) (*0,5 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Nota informativa: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizados con personas en disposición de trabajar.

SOLUCIÓN

Las personas a las que hace referencia la estadística tienen dos caracteres: el sexo (varón (V) / mujer (M)) y su situación laboral (en paro (P) / trabaja (T)). Organicemos los datos en una tabla de contingencia partiendo de un total de 100 personas (aunque algunos elementos no sean enteros):

En primer lugar tenemos que el total de varones es de 64 (64% de 100) y el de mujeres 36 (36% de 100).

	V	**M**	**TOTAL**
P	7,68	5,76	13,44
T	56,32	30,24	86,56
TOTAL	64	36	100

Del total de varones (64) está en paro un 12%: $64\cdot 0{,}12=7{,}68$ y del total de mujeres (36) está en paro un 16%: $36\cdot 0{,}16=5{,}76$.

El resto de las celdas se rellenan por restas y sumas.

a) Del total de personas (100) hay 5,76 con la doble condición de ser mujer y estar en paro. Por tanto:

$$p(M\cap P)=\frac{5{,}76}{100}=0{,}0576$$

b) Se elige una persona entre las 100 posibles y de ellas hay un total de 13,44 en paro.

$$p(P)=\frac{13{,}44}{100}=0{,}1344$$

c) Ahora sabemos que la persona contactada está entre las 13,44 que están en paro. De ellas hay 5,76 mujeres:

$$p(M/P)=\frac{5{,}76}{13{,}44}=0{,}4286$$

10) De los estudiantes universitarios españoles, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que la definen, pero sin hacer los cálculos finales).

b) (1 punto) ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

SOLUCIÓN

Estamos ante una situación dicotómica que da lugar a una distribución binomial $B(n,p)$ en la que la probabilidad de tener x "éxitos" es: $P(X=x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$

La probabilidad de que un estudiante abandone sus estudios es $p=\frac{1}{5}=0,2$ y $q=0,8$ la probabilidad de que no lo haga. Puesto que se seleccionan 5 estudiantes la distribución binomial es $B(5\ ,\ 0,2)$.

a) $P(X=1)+P(X=0)=\binom{5}{1}\cdot 0,2^1\cdot 0,8^4+\binom{5}{0}\cdot 0,2^0\cdot 0,8^5=5\cdot 0,2\cdot 0,8^4+0,8^5=0,32768+0,262144=0,5898$

b) $P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot 0,2^5\cdot 0,8^0=0,2^5=0,00032$ $\qquad P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot 0,2^0\cdot 0,8^5=0,8^5=0,32768$

Es más probable que ninguno abandone sus estudios.

NOTA: En este apartado b) no es necesario considerar el cálculo de probabilidades como en una distribución binomial. Conocida la probabilidad de que uno abandone sus estudios (0,2) y la de que no los abandone (0,8):

La probabilidad de que los 5 abandonen sus estudios es: $0,2\cdot 0,2\cdot 0,2\cdot 0,2\cdot 0,2=0,2^5=0,00032$

La probabilidad de que los 5 no abandonen sus estudios es: $0,8\cdot 0,8\cdot 0,8\cdot 0,8\cdot 0,8=0,8^5=0,32768$

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El estudiante debe indicar claramente en la primera página del tríptico, cuáles han sido las preguntas elegidas.

(Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

1) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $b=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera:

a) (1,25 puntos) Discuta el sistema $AX=b$ según los valores del parámetro a

b) (0,75 puntos) Resuelva el sistema cuando $a=1$

SOLUCIÓN

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & a & 2 & a \end{pmatrix}$.

El único menor de orden 3 de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4a+2a^2-6a=2a^2-2a=2a(a-1)=0 \quad \Rightarrow \quad a=0 \ , \ a=1$$

- Para $a\neq 0$ y $a\neq 1$: $\text{rg}\,A=\text{rg}\,B=3=\text{nº}$ de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado

- Para $a=0$: las matrices de los coeficientes y ampliada son $\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$

  El menor de orden 2 de la matriz de los coeficientes $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=6-4\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rg}\,A=2$

  Para conocer el rango de la matriz ampliada, orlamos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=4+4-4-6\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rg}\,B=3 \quad \Rightarrow \quad \text{rg}\,A\neq \text{rg}\,B \quad \Rightarrow \quad \text{sistema incompatible}$$

- Para $a=1$: las matrices de los coeficientes y ampliada son $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  El menor de orden 2 de la matriz de los coeficientes $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$

  Orlamos este menor con los términos independientes:

  $$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-2=0 \Rightarrow \operatorname{rg} B = 2 \Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2 < \text{nº de incógnitas} \Rightarrow$$

  $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

b) Ya sabemos que cuando $a=1$ el sistema es compatible indeterminado. Puesto que el menor distinto de 0 que da rango a la matriz de los coeficientes está formado por los coeficientes de x e y en la segunda y tercera ecuación del sistema, utilicemos la incógnita z como parámetro ($z=\lambda$) en el sistema formado por la segunda y la tercera ecuación:

$$\begin{cases} x-2\lambda=-1 \\ -x+y+2\lambda=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ -x+y=1-2\lambda \end{cases} \Rightarrow x=-1+2\lambda \Rightarrow y=-1+2\lambda+1-2\lambda=0$$

Las soluciones del sistema para $a=1$ son entonces: $x=-1+2\lambda$, $y=0$, $z=\lambda$

2) Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las 3 mascarillas es de 0.90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.

SOLUCIÓN

Sea "x" el precio de una mascarilla quirúrgica desechable, "y" el precio de una mascarilla higiénica y "z" el precio de una mascarilla quirúrgica reutilizable. Se tiene:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3}=0,90 \\ 30x+20y+10z=56 \\ 20x \qquad +25z=31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2,7 \\ 3x+2y+z=5,6 \\ 4x \qquad +5z=6,2 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2,7 & 1 & 1 \\ 5,6 & 2 & 1 \\ 6,2 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{27+6,2-12,4-28}{10+4-8-15} = \frac{-7,2}{-9} = 0,8$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2{,}7 & 1\\ 3 & 5{,}6 & 1\\ 4 & 6{,}2 & 5\end{vmatrix}}{-9}=\frac{28+18{,}6+10{,}8-22{,}4-40{,}5-6{,}2}{-9}=\frac{-11{,}7}{-9}=1{,}3$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2{,}7\\ 3 & 2 & 5{,}6\\ 4 & 0 & 6{,}2\end{vmatrix}}{-9}=\frac{12{,}4+22{,}4-21{,}6-18{,}6}{-9}=\frac{-5{,}4}{-9}=0{,}6$$

Así pues, la mascarilla quirúrgica desechable cuesta 0,80 euros, la mascarilla higiénica cuesta 1,30 euros y la mascarilla quirúrgica reutilizable cuesta 0,60 euros.

3) Resuelva la ecuación matricial $XA+XA^t=B$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$

SOLUCIÓN

$$XA+XA^t=B \iff X\left(A+A^t\right)=B \iff X=B\cdot\left(A+A^t\right)^{-1}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad A+A^t=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Calculemos $\left(A+A^t\right)^{-1}$:

$$\left|A+A^t\right|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=1+1-2-2=-2\neq 0 \Rightarrow \exists\left(A+A^t\right)^{-1}$$

$$\left(A+A^t\right)^t=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{Adj}(*)}\text{Adj}\left[\left(A+A^t\right)^t\right]=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{\left(A+A^t\right)^{-1}}$$

$$\xrightarrow{\left(A+A^t\right)^{-1}}\left(A+A^t\right)^{-1}=\frac{\text{Adj}\left[\left(A+A^t\right)^t\right]}{\left|A+A^t\right|}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2 & -3/2\end{pmatrix}$$

(*) Cálculo de los adjuntos de los elementos de $\left(A+A^t\right)^t$:

$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$; $A_{12}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1$; $A_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1$; $A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}-1$; $A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1$; $A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1$

$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1$; $A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1$; $A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3$

Se tiene entonces: $X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} 3x+y-4z+1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+3z-1=0$

SOLUCIÓN

El plano buscado contiene a la recta r, luego contiene a un punto de la recta y a su vector direccional. Busquemos dos puntos de r:

$$r:\begin{cases} 3x+y-4z+1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=4z-1 \\ 2x+y=z-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=4z-1 \\ -2x-y=-z+2 \end{cases} \Rightarrow x=3z+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-2x+z-2=-6z-2+z-2=-5z-4 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Para } z=0:\ x=1\ ,\ y=-4 \Rightarrow A(1,-4,0) \\ \text{Para } z=1:\ x=4\ ,\ y=-9 \Rightarrow B(4,-9,1) \end{array} \right.$$

Tenemos entonces el punto $A(1,-4,0)$ y el vector $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,-5,1)$ pertenecientes al plano buscado.

Si el plano que buscamos debe ser perpendicular al plano π, el vector $\vec{n}=(2,-1,3)$ que es normal al plano π estará contenido en el plano buscado.

El plano determinado por el punto $A(1,-4,0)$ y los vectores $\vec{u}=(3,-5,1)$ y $\vec{n}=(2,-1,3)$ es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 2 \\ y+4 & -5 & -1 \\ z & 1 & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -15x+15+2y+8-3z+10z-9y-36+x-1=0 \Leftrightarrow -14x-7y+7z-14=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+y-z+2=0$$

5) Calcule el siguiente límite $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}$.

SOLUCIÓN

$L=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}=1^{\infty}$. Apliquemos logaritmos neperianos a los dos miembros de la igualdad:

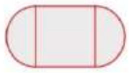
$$\ln L=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{2/tg(x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{tg(x)}\cdot\ln(1+x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\ln(1+x)}{tg(x)}\right]=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{2}{1+x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\cos^2 x}{1+x}\right]=\frac{2}{1}=2 \Rightarrow L=e^2$$

Es decir: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}=e^2$

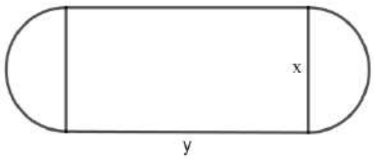
NOTA: cuando aparece la expresión L'H significa que se aplica la regla de L'Hôpital

6) Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base **y** metros y altura **x** metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo)



Su superficie se desea que sea de $4+\pi$ m^2. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle **x** e **y** de modo que se verifique este requisito.

SOLUCIÓN



La función que debe ser mínima, la longitud total de las líneas es:

$$L=2x+2y+2\pi\frac{x}{2}=(2+\pi)x+2y$$

La superficie conocida nos da una relación entre las variables x e y:

$$4+\pi=xy+\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{4+\pi-\frac{\pi x^2}{4}}{x}=\frac{16+4\pi-\pi x^2}{4x}=\frac{4+\pi}{x}-\frac{\pi}{4}x \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad L=f(x)=(2+\pi)x+\frac{2(4+\pi)}{x}-\frac{\pi}{2}x=\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x+\frac{2(4+\pi)}{x}=\frac{4+\pi}{2}x+\frac{2(4+\pi)}{x}$$

Estudiemos el valor de x para el que la función es mínima:

$$f'(x)=\frac{4+\pi}{2}+\frac{-2(4+\pi)}{x^2}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{4+\pi}{2}=\frac{2(4+\pi)}{x^2} \quad\Rightarrow\quad x^2=\frac{4(4+\pi)}{4+\pi}=4 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 2 \quad \text{(valores críticos)}$$

De los dos valores críticos, descartamos el valor negativo y comprobamos que $x=2$ es un mínimo relativo de la función:

$$f''(x)=\frac{2(4+\pi)\cdot 2x}{x^4}=\frac{4(4+\pi)x}{x^4} \quad\Rightarrow\quad f''(2)>0 \quad\Rightarrow\quad x=2 \text{ hace mínima la función.} \qquad y=\frac{4+\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Por tanto: $x=y=2$ metros.

7) Dada la siguiente función: $f(x)=\dfrac{-x^2}{2}+2\ln(x+1)$:

a) (*0,25 puntos*) Calcule el dominio de $f(x)$.

b) (*1,75 puntos*) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento

SOLUCIÓN

a) La función es la suma de una función cuadrática, de dominio $\mathbb{R}$, y de una función logarítmica de dominio: $x+1>0 \Rightarrow x>-1 \Rightarrow (-1,+\infty)$. El dominio de f(x) es la intersección de ambos dominios, luego: $\text{Dom}(f)=(-1,+\infty)$

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$$f'(x)=-x+\frac{2}{x+1}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{x+1}=x \quad\Rightarrow\quad 2=x^2+x \quad\Rightarrow\quad x^2+x-2=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}-2\\ 1\end{cases}$$

Como $x=-2$ está fuera del dominio $(-1\,,+\infty)$, los intervalos de posible cambio en el signo de f’(x) son:

$(-1\,,1)$: $f'>0$ (basta ver el signo de f'(0), por ejemplo) $\Rightarrow$ En $(-1\,,1)$ la función es creciente
$(1,+\infty)$: $f'<0$ (basta ver el signo de f'(2), por ejemplo) $\Rightarrow$ En $(1\,,+\infty)$ la función es decreciente

8) (*2 puntos*) Calcule la siguiente integral $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

SOLUCIÓN

Utilizaremos el método de integración por partes: $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$

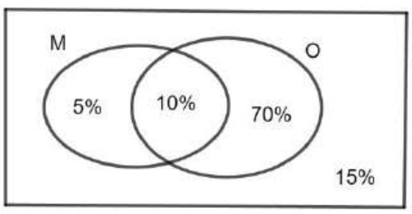
$$\int x^3\, e^{x^2}\, dx \overset{(1)}{=} \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx \\ dv = x\cdot e^{x^2}\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{1}{2}\int 2x\cdot e^{x^2}\, dx = \dfrac{1}{2} e^{x^2} \end{array} \right| \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}x^2\cdot e^{x^2} - \frac{1}{2}\int 2x\cdot e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}x^2\cdot e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)e^{x^2} + C$$

9) En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudiantes de segundo de bachiller de un centro acerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80% disponía de ordenador, el 15% disponía de móvil y el 10% disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro.
a) (*1,25 puntos*) Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos).
b) (*0,75 puntos*) Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos mencionados.

SOLUCIÓN

Sea O el conjunto de todos los estudiantes que utilizan el ordenador y M el conjunto de los estudiantes que utilizan el móvil para seguir las clases online.



Si organizamos los datos de la encuesta en un diagrama de Venn, el 10% estará en la intersección de ambos conjuntos, el 70% utilizará solo el ordenador (80% - 10%) y el 5% (15% - 10%) utilizará solo el móvil. Queda un 15% que corresponderá a los que no utilizan ni el ordenador ni el móvil.

a) Directamente, del diagrama de Venn: $p=\dfrac{85}{100}=0{,}85$.

También: $p(O\cup M)=p(O)+p(M)-p(O\cap M)=0{,}80+0{,}15-0{,}10=0{,}85$

b) Del diagrama de Venn: $p=\dfrac{15}{100}=0{,}15$.

También: se trata del suceso contrario al del apartado anterior, por tanto: $p=1-0{,}85=0{,}15$

10) (*2 puntos*) Un estudiante universitario de matemáticas ha comprobado que el tiempo que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) (*0,75 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?

b) (*0,75 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?

c) (*0,5 puntos*) El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a clase?

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

La distribución normal a la que pertenecen los datos es de media $\mu = 30$ minutos y desviación típica $\sigma = 5$ minutos, es decir es una $N(30,5)$. Para utilizar las tablas de la distribución normal $N(0,1)$ debemos tipificar las variables:

$$x \in N(\mu,\sigma) \quad \longleftrightarrow \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma} \in N(0,1)$$

$$x = 40 \quad \longleftrightarrow \quad z = \frac{40-30}{5} = 2$$

$$x = 20 \quad \longleftrightarrow \quad z = \frac{20-30}{5} = -2$$

a) $p[x<40] \longleftrightarrow p[z<2]=0{,}9772$

b) $p[20<x<40] \longleftrightarrow p[-2<z<2]=p[z<2]-p[z<-2]=p[z<2]-p[z>2]=p[z<2]-(1-p[z<2])=$

$=p[z<2]+p[z<2]-1=0{,}9772+0{,}9772-1=0{,}9544$

c) $p[x>40] \longleftrightarrow p[z>2]=1-p[z<2]=1-0{,}9772=0{,}0228$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2021

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} x^3+bx+2 & x\le 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{ax} & x>0 \end{cases} \qquad , \qquad a,b\in\mathbb{R},\ a,b\neq 0$$

a) (1 punto) Determine los valores de $a,b\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x=-1$, y determine el tipo de extremo que es.

2) Calcule el valor de $a\in\mathbb{R}$ $(a\neq 0)$ para que se verifique el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\left(1-sen^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}}=2.$$

3) Calcule

$$\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx.$$

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}$$

a) (1,2 puntos) Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.

b) (0,8 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x=1$.

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Estudie el rango de la matriz $A-kI$ según los valores de $k\in\mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (0,75 puntos) Calcule la inversa de $A-kI$ para $k=0$.

6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=5$, calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix}$.

b) (1 punto) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $\left(A-\frac{1}{2}A^T\right)\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$, donde A^T es la matriz traspuesta de A.

7) a) (1 punto) Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) (1 punto) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

8) Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A = (0,1,1)$ y es paralela a los planos: π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3, y $\pi_2 \equiv x + 2z = 1$, siendo:

$$B_1 = (-1,0,2),\ B_2 = (1,3,1),\ B_3 = (2,-1,0).$$

9) Sean los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u_1} = (-1,1,1), \qquad \overrightarrow{u_2} = (0,3,1), \qquad \overrightarrow{u_3} = (1,-2,0), \qquad \overrightarrow{u_4} = (-2,0,1)$$

a) (1 punto) Compruebe si los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo:

$$\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}, \quad \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3}, \quad \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_4}.$$

b) (1 punto*)* Calcule las siguientes expresiones:

$$(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \cdot (2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}), \qquad (\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) \times (\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}),$$

siendo $\cdot$ y $\times$ los productos escalar y vectorial de dos vectores respectivamente.

10) La cantidad de hierro en suero de una mujer adulta sigue una distribución normal de media 120 $\mu g/dl$ y desviación típica 30 $\mu g/dl$. Se considera que una mujer tiene un tipo de anemia por falta de hierro si su cantidad de hierro no llega a 75 $\mu g/dl$.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro?

b) (1 punto) El 45% de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a k. Averigüe el valor de k.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

Como norma general se valorará positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia a éste, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea inconsistente de forma evidente con el problema a resolver.

En determinados apartados se dan puntuaciones para la solución por alguno de los métodos más habituales. En todo caso, la resolución de un apartado utilizando un método distinto otorgará la puntuación máxima, siempre que el método sea correcto y lo sea también su solución.

De acuerdo con las normas generales que aparecen en la información pública, los correctores pueden bonificar hasta con un máximo de un punto, el buen uso de la lengua o el desarrollo técnico de los ejercicios.

1. (2 ptos)
- **a.** (1 pto) Aplicación de la definición de continuidad correctamente en todo el dominio, y calculando límites drcha, izda en *x=0* y *f(0).* Si sólo da el valor de "a" y no indica para todo "b" real, se penalizará con 0,4 puntos.
- **b.** (1 pto) Si no indica el tipo de extremo que es, será valorado con 0,6 ptos.

2. (2 ptos) Los pasos en el cálculo del límite deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta. Cualquier método se considera válido. Por errores de cálculo que no simplifiquen el estudio se podrá penalizar hasta con 0,5 ptos. Si no sabe despejar la a, se descontará 0,5 ptos.

3. (2 ptos) Los pasos en el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta. Si no se pone la constante de integración se penalizará con 0,2 ptos.

4. (2 ptos)
- **a.** (1,2 ptos) Dominio de definición correctamente indicado 0,4 ptos. Asíntotas verticales 0,3 (0,15*2) ptos; comprobación de no horizontal 0,2 ptos; asíntota oblicua 0,3 ptos.
- **b.** (0,8 ptos) Se podrá poner una puntuación intermedia de 0,4 ptos si se ha producido un error leve y aislado de cálculo.

5. (2 ptos)
- **a.** (1,25 ptos) Cálculo del determinante 0,25 ptos. Resolución 0,25 ptos. Estudio de cada rango 0,25 ptos.
- **b.** (0,75 ptos) Cualquier método es válido. Por algún error leve y aislado se restará 0,25.

6. (2 ptos)
- **a.** (1 pto) Debe justificar los pasos. Por errores leves de cálculo, se podrá descontar 0,25 ptos.
- **b.** (1 pto) Cualquier método es válido. Si hay error leve de cálculo, que preserva el buen razonamiento pero que da la solución incorrecta, se podrá descontar un máximo de 0,25 ptos.

7. (2 ptos)
- **a.** (1 pto) Cualquier método es válido. Por error leves y aislado, se podrá descontar 0,25 ptos.
- **b.** (1 pto) Si el desarrollo está bien, pero la fórmula final no es correcta, se podrá descontar 0,5 puntos.

8. (2 ptos) Cálculo del vector normal del primer plano 0,6 ptos. Cálculo del vector director de la recta 0,6 ptos. Cálculo de la recta 0,8 ptos (si no la expresa como ecuación implícita se valorará con 0,4 ptos).

9. (2 ptos)
- **a.** (1 pto) Por algún error leve de cálculo se podrá descontar 0,25 ptos, siempre y cuando la respuesta sea coherente con el resultado obtenido. Si se indica que son linealmente independientes sin ninguna justificación, el ejercicio no será valorado.
- **b.** (1 pto) No se contemplan puntuaciones intermedias.

10. (2 ptos)
- **a.** (1 pto) Por pequeños errores de cálculo o por copiar mal el valor de la tabla normal se quitará un máximo de 0,3 ptos.
- **b.** (1 pto) Por pequeños errores de cálculo o por copiar mal el valor de la tabla normal se quitará un máximo de 0,3 ptos.

Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2021
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} x^3+bx+2 & x\le 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{ax} & x>0 \end{cases} \quad , \qquad a,b\in\mathbb{R},\ a,b\neq 0$$

a) (1 punto) Determine los valores de $a,b\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x=-1$, y determine el tipo de extremo que es.

SOLUCIÓN

a) Para $x\in(-\infty,0)$, la función es continua por tratarse de una función polinómica $f(x)=x^3+bx+2$.

Para $x\in(0,+\infty)$, la función es continua por tratarse de un cociente entre dos funciones continuas que solo es discontinua en $x=0$, fuera del intervalo aludido.

Estudiemos la continuidad en $x=0$:

Para que la función sea continua en $x=0$, debe ser: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^3+bx+2\right)=2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{ax}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{a}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{a(x+1)}=\frac{1}{a}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow 2=\frac{1}{a} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

Nota: L'H significa que se aplica la regla de L'Hôpital.

Como, además $f(0)=2$, la función es continua para $a=\frac{1}{2}$ y $\forall b\in\mathbb{R}$

b) La función definida en $x=-1$ es: $f(x)=x^3+bx+2$. Si esta función tiene un extremo relativo en $x=-1$, debe ser $f'(-1)=0$:

$f'(x)=3x^2+b \Rightarrow f'(-1)=3+b=0 \Rightarrow b=-3$

Para estudiar el tipo de extremo relativo que hay en $x=-1$, veamos el signo de la segunda derivada en él:

$f''(x)=6x:\ f''(-1)=-6<0 \Rightarrow$ en $x=-1$ la función tiene un máximo relativo.

2) Calcule el valor de $a\in\mathbb{R}\ (a\neq 0)$ para que se verifique el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\left(1-sen^2(x)\right)^{\frac{a}{x^2}}=2.$$

SOLUCIÓN

$$L=\lim_{x\to 0}\left(1-sen^2x\right)^{\frac{a}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\cos^2 x\right)^{\frac{a}{x^2}}=1^{\infty}$$

Apliquemos logaritmos neperianos a los dos miembros:

$$\ln L=\ln\left[\lim_{x\to 0}\left(\cos^2 x\right)^{\frac{a}{x^2}}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\ln\left(\cos^2 x\right)^{\frac{a}{x^2}}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{a}{x^2}\cdot\ln\left(\cos^2 x\right)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\ln\left(\cos^2 x\right)}{x^2}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a\cdot 2\cos x\left(-\operatorname{sen}x\right)}{\cos^2 x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\cdot\operatorname{sen}2x}{2x\cdot\cos^2 x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-a\cdot\cos 2x\cdot 2}{2\cdot\cos^2 x+2x\cdot 2\cos x\left(-\operatorname{sen}x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2a\cdot\cos 2x}{2\cdot\cos^2 x-2x\cdot\operatorname{sen}2x}=$$

$$=\frac{-2a}{2}=-a \quad\Rightarrow\quad \ln L=-a \;\Rightarrow\; L=e^{-a}=2 \;\Rightarrow\; -a=\ln 2 \;\Rightarrow\; a=-\ln 2$$

3) Calcule

$$\int\frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx.$$

SOLUCIÓN

Es una integral inmediata: $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2-3}{x^3-3x+2}=\frac{1}{3}\ln\left|x^3-3x+2\right|+C$

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}$$

a) (1,2 puntos) Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.

b) (0,8 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x=1$.

SOLUCIÓN

a) ▪ Dominio de definición: f(x) es una función racional cuyo dominio es $\mathbb{R}$ menos los valores de x que anulen el denominador. En nuestro caso:

$$x^2-x-2=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}-1\\ 2\end{cases}$$

Por tanto: $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1,2\}$

▪ Asíntotas horizontales: no hay, puesto que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=-\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=+\infty$

▪ Asíntotas verticales: $x=-1$ y $x=2$ pues $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\infty$

Posición relativa de la curva respecto a las asíntotas:

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2(2x-1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{+\cdot-}{-\cdot-}=-\infty \;;\quad \lim_{x\to-1^+}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2(2x-1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{+\cdot-}{+\cdot-}=+\infty$$

Luego la curva tiende a $-\infty$ a la izquierda de $x=-1$ y a $+\infty$ a la derecha de $x=-1$.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2(2x-1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{+\cdot+}{+\cdot-}=-\infty \;;\quad \lim_{x\to 2^+}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2(2x-1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{+\cdot+}{+\cdot+}=+\infty$$

Luego la curva tiende a $-\infty$ a la izquierda de $x=2$ y a $+\infty$ a la derecha de $x=2$.

▪ Asíntotas oblicuas $y=mx+n$:

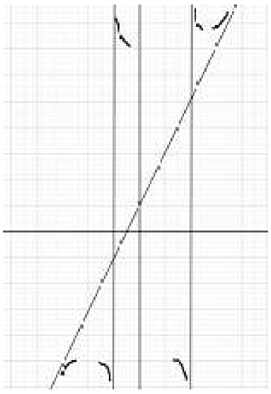
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^3-x^2-2x}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x}{x^2-x-2}=1$$

$\Rightarrow$ $y=2x+1$ es una asíntota oblicua.

Posición relativa de la curva respecto a la asíntota. Restamos las ordenadas de la curva y la asíntota:

$$f(x)-(mx+n)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}-2x-1=\frac{2x^3-x^2-2x^3+2x^2+4x-x^2+x+2}{x^2-x-2}=\frac{5x+2}{x^2-x-2}$$



$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+2}{x^2-x-2}=0^-$ $\Rightarrow$ cuando $x\to-\infty$ la curva está por debajo de la asíntota.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+2}{x^2-x-2}=0^+$ $\Rightarrow$ cuando $x\to+\infty$ la curva está por encima de la asíntota.

b) La ecuación de la recta tangente a la función y = f(x) en el punto (x_0, y_0) es: $y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)$

En este caso: $x_0=1$, $y_0=\frac{2-1}{1-1-2}=-\frac{1}{2}$

$$f'(x)=\frac{(6x^2-2x)(x^2-x-2)-(2x^3-x^2)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} \Rightarrow f'(x_0)=f'(1)=\frac{4\cdot(-2)-1\cdot 1}{4}=-\frac{9}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es entonces: $y=-\frac{1}{2}-\frac{9}{4}(x-1) \Leftrightarrow 9x+4y-7=0$

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Estudie el rango de la matriz $A-kI$ según los valores de $k\in\mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (0,75 puntos) Calcule la inversa de $A-kI$ para $k=0$.

SOLUCIÓN

a) $A-kI=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k&0&-2\\1&2-k&1\\1&0&3-k\end{pmatrix}$

El mayor menor es de orden 3:

$$\begin{vmatrix}-k&0&-2\\1&2-k&1\\1&0&3-k\end{vmatrix}=-k\cdot(2-k)\cdot(3-k)+2\cdot(2-k)=(2-k)\left(-3k+k^2+2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2-k=0 \quad \Rightarrow \quad k=2 \\ k^2-3k+2=0 \quad \Rightarrow \quad k=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{3\pm 1}{2}= \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

▪ Para $k\neq 1$ y $k\neq 2$: $\quad rg\left(A-kI\right)=3$

▪ Para $k=1$: $\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow rg\left(A-kI\right)=2$

▪ Para $k=2$: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\left(A-kI\right)=1$ pues solo uno de los vectores fila o columna son linealmente independientes.

b) Para $k=0$: $A-kI=A$ luego debemos calcular A^{-1}

$$\left|A-kI\right|=\left|A\right|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=4\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \left(o \left(A-kI\right)^{-1}\right)$$

$$\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{adjunta}]{\text{(*) Matriz}} \left(A_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{traspuesta}]{\text{Matriz}} \left(A_{ij}\right)^T=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{inversa}]{\text{Matriz}}$$

$$\xrightarrow[\text{inversa}]{\text{Matriz}} A^{-1}=\frac{\left(A_{ij}\right)^T}{\left|A\right|}=\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=6 \; ; \; A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-2 \; ; \; A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2 \; ; \; A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=0 \; ; \; A_{22}=\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2 \; ;$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \; ; \; A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=4 \; ; \; A_{32}=-\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2 \; ; \; A_{33}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=5$, calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix}$.

b) (1 punto) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $\left(A-\frac{1}{2}A^T\right)\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$, donde A^T es la matriz traspuesta de A.

SOLUCIÓN

a)

$$\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -2\begin{vmatrix} a & b+c & c \\ d & e+f & f \\ g & h+i & i \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -2\left[\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c \\ d & f & f \\ g & i & i \end{vmatrix}\right] \overset{(4)}{=}$$

$$= -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -10$$

Propiedades de los determinantes utilizadas:

(1) Al permutar dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo. En este caso hay dos permutas (primera fila por tercera y, después, la segunda por la tercera) por lo que el determinante mantiene su signo.
(2) Se saca factor común a 2 en la segunda fila y a -1 en la tercera.
(3) La segunda columna aparece como suma de dos sumandos y el determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes.
(4) El segundo sumando es un determinante con la segunda y la tercera columnas iguales por lo que el determinante es nulo.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \frac{1}{2}A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(A - \frac{1}{2}A^T\right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \left(A - \frac{1}{2}A^T\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calculemos $\left(A - \frac{1}{2}A^T\right)^{-1}$:

$$\left|A - \frac{1}{2}A^T\right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2-4+2+2 = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists \left(A - \frac{1}{2}A^T\right)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{adjunta}]{\text{(*) Matriz}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{traspuesta}]{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{inversa}]{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \; ; \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \; ; \; A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \; ; \; A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \; ; \; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \; ;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \; ; \; A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \; ; \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \; ; \; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Tenemos entonces:

$$X = \left(A - \frac{1}{2}A^T\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

7) a) (1 punto) Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) (1 punto) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{N}.$

SOLUCIÓN

a) $$\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X-2Y=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4X+6Y=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \\ 9X-6Y=\begin{pmatrix} 15 & 9 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \end{cases} \overset{\text{sumamos}}{\Rightarrow} 13X=\begin{pmatrix} 13 & 13 \\ 0 & 26 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2X+3Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 3Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Sea $A=A^1=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4=A^2\cdot A^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}$$

Generalizando los elementos de la matriz, se tiene: $A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ -\left(2^n-1\right) & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$

8) Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A = (0,1,1)$ y es paralela a los planos: π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3, y $\pi_2 \equiv x + 2z = 1$, siendo:

$$B_1 = (-1,0,2),\ B_2 = (1,3,1),\ B_3 = (2,-1,0).$$

SOLUCIÓN

Calculemos, en primer lugar, la ecuación del plano π_1 determinado por el punto $B_1(-1,0,2)$ y los vectores $\overrightarrow{B_1B_2}=(2,3,-1)$ y $\overrightarrow{B_1B_3}=(3,-1,-2)$:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6x-6-3y-2z+4-9z+18+4y-x-1=-7x+y-11z+15=0$$

Los vectores $\vec{n}_1=(-7,1,-11)$ y $\vec{n}_2=(1,0,2)$ son perpendiculares a los planos π_1 y π_2 respectivamente. Su producto vectorial será entonces un vector paralelo a los planos y direccional de la recta que buscamos:

$$\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & 1 & -11 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2\vec{i}-11\vec{j}-\vec{k}+14\vec{j}=(2,3,-1)$$

La recta está determinada por el punto $A(0,1,1)$ y el vector direccional $\vec{u}=(2,3-1)$:

La ecuación continua es $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$ y su ecuación implícita: $\begin{cases} 3x-2y+2=0 \\ x+2z-2=0 \end{cases}$

9) Sean los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u_1} = (-1,1,1), \qquad \overrightarrow{u_2} = (0,3,1), \qquad \overrightarrow{u_3} = (1,-2,0), \qquad \overrightarrow{u_4} = (-2,0,1)$$

a) (1 punto) Compruebe si los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo:

$$\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}, \quad \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3}, \quad \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_4}.$$

b) (1 punto) Calcule las siguientes expresiones:

$$(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \cdot (2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}), \qquad (\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) \times (\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}),$$

siendo $\cdot$ y $\times$ los productos escalar y vectorial de dos vectores respectivamente.

SOLUCIÓN

a) $\vec{v}_1 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = (-2,2,2) - (0,3,1) = (-2,-1,1)$ **;** $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_3 = (-1,1,1) + (1,-2,0) = (0,-1,1)$ **;** $\vec{v}_3 = \vec{u}_4 = (-2,0,1)$

Veamos si son o no linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2+2-2 = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow$$ los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente independientes.

b)
- $2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = (-2,-1,1) \;\Rightarrow\; (-2,-1,1)\cdot(-2,-1,1) = 4+1+1 = 6$
- $(\vec{u}_4 - \vec{u}_1) \times (\vec{u}_4 - \vec{u}_1) = 0$ pues el producto vectorial de un vector por él mismo es cero.

10) La cantidad de hierro en suero de una mujer adulta sigue una distribución normal de media 120 $\mu g/dl$ y desviación típica 30 $\mu g/dl$. Se considera que una mujer tiene un tipo de anemia por falta de hierro si su cantidad de hierro no llega a 75 $\mu g/dl$.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro?

b) (1 punto) El 45% de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a k. Averigüe el valor de k.

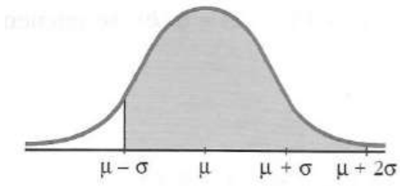
k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

a) Los datos de que disponemos pertenecen a una distribución normal de media $\mu = 120\ \mu g/dl$ y desviación típica $\sigma = 30\ \mu g/dl$, es decir una normal $N(120, 30)$.



Para hacer uso de la tabla correspondiente a la normal $N(0,1)$ debemos tipificar las variables $x \in N(120, 30)$ convirtiéndolas en variables $z \in N(0,1)$:

$$x \in N(120, 30) \longleftrightarrow z \in N(0,1)$$
$$x = 75 \longleftrightarrow z = \frac{75-120}{30} = -1,5$$

$$P[x \leq 75] = P[z \leq -1,5] = P[z \geq 1,5] = 1 - P[z \leq 1,5] = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

b) Las variables pertenecen a la distribución normal N (120 , 30) por lo que debemos tipificarlas:

$$x \in N(120, 30) \longleftrightarrow z \in N(0,1)$$
$$x \longleftrightarrow z = \frac{x-120}{30}$$

$$P[x > k] = P\left[\frac{x-120}{30} > \frac{k-120}{30}\right] = P\left[z > \frac{k-120}{30}\right] = 0,45 \Rightarrow 1 - P\left[z < \frac{k-120}{30}\right] = 0,45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left[z < \frac{k-120}{30}\right] = 0,55 \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{k-120}{30} = 0,125 \Rightarrow k = 123,75\ \mu g/dl$$

(*) Buscando en la tabla los valores más próximos a 0,55, encontramos 0,5478 para $k = 0,12$ y 0,5517 para $k = 0,13$. Como 0,55 está próximo a la media de ambos valores, hemos elegido como valor de k la media de 0,12 y 0,13, es decir 0,125.

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} 5-ax^2 & si \quad x\leq 1 \\ \frac{6}{ax} & si \quad x>1 \end{cases} \quad , \qquad a\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$

a) (1 punto) Calcule los valores de $a\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua.

b) (1 punto) Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=e$ sea 6 u^2.

2) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}.$$

3) Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3. El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2, mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2. Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{e^x}{x^3-x}$$

a) (1,25 puntos) Estudie la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calcúlelas cuando existan.

b) (0,75 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x=2$.

5) Dada la siguiente matriz:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudie el rango de la matriz $A=I+P$, donde I es la matriz identidad de orden 3, según los valores de $k\in\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Para $k=1$, calcule la inversa de la matriz A del apartado anterior.

6) Dadas las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela.

b) (1 punto) Calcule la matriz X que verifica la siguiente ecuación matricial: $I + BX = C_1C_2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z \ = 3 \\ 2x - 5y + az \ = -2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discuta según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = 0$.

8) Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, –2, 0) y es perpendicular al plano determinado por los puntos (1, 0, 1), (3, 1, 0) y (2, –1, 1). Exprésela como intersección de dos planos.

9) En un departamento de calidad se analiza el funcionamiento del software del motor de vehículos eléctricos e híbridos. Se revisaron 85 coches eléctricos y 145 coches híbridos. En total, 43 coches tenían errores en el software de sus motores. Además, de los motores con software defectuoso, 12 correspondían a coches eléctricos.

a) (0,8 puntos) Calcule la probabilidad de que un coche revisado seleccionado al azar, sea híbrido y presente el software de su motor correcto.

b) (1,2 puntos*)* Calcule la probabilidad de que un coche híbrido seleccionado al azar tenga defectuoso el software del motor.

10) Uno de cada 7 deportistas de la selección española de gimnasia deportiva, será elegido para las próximas olimpiadas. Se escogen aleatoriamente y de modo independiente 9 deportistas de dicha selección española.

a) (0,8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos exactamente 2 de estos 9 deportistas para las próximas olimpiadas?

b) (1,2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que alguno (al menos 1) de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas?

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

Como norma general se valorará positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia a éste, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea inconsistente de forma evidente con el problema a resolver.

En determinados apartados se dan puntuaciones para la solución por alguno de los métodos más habituales. En todo caso, la resolución de un apartado utilizando un método distinto otorgará la puntuación máxima, siempre que el método sea correcto y lo sea también su solución.

De acuerdo con las normas generales que aparecen en la información pública, los correctores pueden bonificar hasta con un máximo de un punto, el buen uso de la lengua o el desarrollo técnico de los ejercicios.

1.
  - **a.** (1 pto) Aplicación de la definición de continuidad correctamente en todo el dominio, y calculando límites drcha, izda en *x=1* y *f(1)*, y obteniendo con esto los dos posibles valores de *a*, 1 punto.
  - **b.** (1 pto) Determinación del valor solución de *a* en función de la integral correctamente calculada 1 punto. Por errores de cálculo leves que no simplifiquen el estudio se podrán penalizar hasta con 0,5 puntos.

2. (2 ptos) Los pasos en el cálculo del límite deben estar claros, y la calificación debe tenerlos en cuenta. Cualquier método se considera válido (incluída la fórmula del límite del número *e*).

3. (2 ptos) El cálculo de la función a minimizar 0,75 puntos. El cálculo de la ecuación a resolver (derivada =0) 0,75 puntos. Comprobación de mínimo 0,5 puntos. Errores leves que no simplifiquen el estudio se resta un máximo de 0,3 puntos.

4.
  - **a.** (1,2 ptos) Cálculo de cada asíntota vertical 0,2 puntos. Comprobación de asíntota horizontal 0,4 puntos. Comprobación de no oblícua 0,2 puntos.
  - **b.** (0,8 ptos) Cálculo correcto de la recta tangente.

5.
  - **a.** (1 pto) La solución correcta debe contemplar todas las clasificaciones. Si hay algún error leve que no simplifique el estudio se restará un máximo de 0,2 puntos.
  - **b.** (1 pto) Cualquier método es válido. Algún error leve de cuentas se restará un máximo de 0,25 puntos.

  Nota: si se equivoca y en lugar de la matriz *A*, opera sobre la matriz *P*, se dividirá por 2 la puntuación.

6.
  - **a.** (1 pto) 0,3 puntos comprobar que es invertible, 0,7 puntos cálculo de la inversa.
  - **b.** (1 pto) Si hay algún error leve que no simplifique el estudio se restará un máximo de 0,2 puntos.

7.
  - **a.** (1 pto) Cualquier método es válido. Cálculo del determinante 0,5 puntos.
  - **b.** (1 pto) Errores de cálculo leves, se resta un máximo de 0,3 puntos.

8. Cálculo de la ecuación del plano 1 punto. Cálculo de la ecuación de la recta como intersección de dos planos 1 punto: si la recta no la expresa como intersección de dos planos se valorará con 0,25 puntos.

9.

- **a.** (0,8 ptos) Válida cualquier estrategia para determinar la probabilidad, si es coherente y correcta. Si se identifican el suceso y la probabilidad que debe calcular pero no se llega a calcular esta probabilidad será un máximo de 0,4 puntos.
- **b.** (1,2 ptos) Válida cualquier estrategia para determinar la probabilidad, si es coherente y correcta. Si se identifican el suceso y la probabilidad que debe calcular pero no se llega a calcular esta probabilidad será un máximo de 0,3 puntos.

10. Si se indica la variable aleatoria binomial, con sus parámetros *n* y *p* correctamente, se podrán asignar 0,5 puntos.
Si se indican las probabilidades solicitadas correctamente, pero no se especifica el valor concreto de los números combinatorios, se podrá penalizar hasta con 0,2 puntos.

Nota: se puede otorgar la puntuación completa a la expresión correcta de la probabilidad, aunque el estudiante no haga referencia a la binomial.

- **a.** (0,8 ptos).
- **b.** (1,2 ptos).

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}5-ax^2 & si\ \ x\leq 1\\ \frac{6}{ax} & si\ \ x>1\end{cases}\quad , \qquad a\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$

a) (1 punto) Calcule los valores de $a\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua.

b) (1 punto) Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=e$ sea 6 u^2.

SOLUCIÓN

a) Para $x\in(-\infty,1)$, la función es continua por tratarse de una función polinómica $f(x)=5-ax^2$.

Para $x\in(1,+\infty)$, la función es continua por tratarse de un cociente entre dos funciones continuas que solo es discontinua en $x=0$, fuera del intervalo aludido.

Estudiemos la continuidad en $x=1$:

Para que la función sea continua en $x=1$, debe ser: $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(5-ax^2\right)=5-a\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6}{ax}=\dfrac{6}{a}\end{array}\right|\quad \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)\ \Rightarrow\ 5-a=\frac{6}{a}\ \Rightarrow\ 5a-a^2=6\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^2-5a+6=0\ \Rightarrow\ a=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}2\\3\end{cases}$$

b) En el intervalo $(0,1)$ la función $f(x)=5-ax^2$ es continua y positiva para cualquiera de los valores de a en discusión ($a=2$ ó $a=3$). Lo mismo ocurre con la función $f(x)=\dfrac{6}{ax}$ en el intervalo $(1,e)$. Se tiene:

$$\int_0^e f(x)\,dx=\int_0^1\left(5-ax^2\right)dx+\int_1^e\frac{6}{ax}\,dx=\left[5x-\frac{ax^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{6}{a}\ln x\right]_1^e=\left[\left(5-\frac{a}{3}\right)-0\right]+\left[\frac{6}{a}-0\right]=$$

$$=\frac{15a-a^2+18}{3a}=6\ \Rightarrow\ a^2+3a-18=0\ \Rightarrow\ a=\frac{-3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\frac{-3\pm9}{2}=\begin{cases}-6\\3\end{cases}$$

luego se trata del valor $a=3$.

2) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}.$$

SOLUCIÓN

Sea $L=\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}=1^{\infty}$

Apliquemos logaritmos neperianos a los dos miembros:

$$\ln L=\ln\left[\lim_{x\to 1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\right)\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\right)}{(1-x)^2}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x}}{-2(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}x}{-2+2x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{\pi}{2}}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{\pi^2}{4}}{2\cdot\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2}x}=\frac{-\frac{\pi^2}{4}}{2}=-\frac{\pi^2}{8}\;\Rightarrow\; L=e^{-\frac{\pi^2}{8}}$$

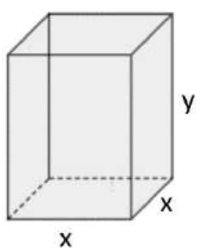
NOTA: cuando aparece L’H significa que se aplica la regla de L’Hôpital

También podríamos haberlo resuelto así:

$$\lim_{x\to 1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x-1\right]\cdot\frac{1}{(1-x)^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x-1}{(1-x)^2}}\overset{L'H}{=}e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}{-2(1-x)}}\overset{L'H}{=}e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\frac{\pi}{2}}{2}}=e^{-\frac{\pi^2}{8}}$$

3) Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3. El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2, mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2. Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.

SOLUCIÓN



Sea x la arista de la base e y la arista lateral del prisma.

La superficie lateral más la superficie de la base es: $4xy+x^2$

La función que debe ser mínimaes el coste de fabricación del depósito:

$$C=70\cdot 4xy+140\cdot x^2=280xy+140x^2$$

que depende, en principio, de dos variables. El dato de la capacidad del depósito nos ofrece una relación entre ambas variables: $x^2y=64\;\Rightarrow\; y=\frac{64}{x^2}$

La función “coste”, ahora dependiente de una sola variable, es: $C(x)=280x\cdot\frac{64}{x^2}+140x^2=\frac{17920}{x}+140x^2$

Estudiemos para qué valor de x la función es mínima:

$$C'(x)=\frac{-17920}{x^2}+280x=\frac{-17920+280x^3}{x^2}=0 \;\Rightarrow\; 280x^3=17920 \;\Rightarrow\; x=\sqrt[3]{\frac{17920}{280}}=\sqrt[3]{64}=4$$

Comprobemos que $x=4$ es un mínimo relativo de la función:

$$C''(x)=\frac{840x^2\cdot x^2-\left(-17920+280x^3\right)\cdot 2x}{x^4} \;\Rightarrow\; C''(4)>0 \;\Rightarrow\; \text{la función es mínima en } x=4.$$

Así pues, las dimensiones del depósito deben ser: Arista de la base: 4 m. Arista lateral: $y=\frac{64}{16}=4$ m. es decir, un cubo de 4 m de arista.

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{e^x}{x^3-x}$$

a) (1,25 puntos) Estudie la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calcúlelas cuando existan.

b) (0,75 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x=2$.

SOLUCIÓN

a) ▪ Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e^{-\infty}}{(-\infty)^3}=\frac{0}{-\infty}=0 \;\Rightarrow\; y=0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x\to-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty \;\Rightarrow\; \text{no tiene asíntota horizontal cuando } x\to+\infty$$

▪ Asíntotas verticales: $x^3-x=0 \;\Rightarrow\; x\left(x^2-1\right)=0 \;\Rightarrow\; x=-1 \;,\; x=0 \;,\; x=1$

Las tres son asíntotas verticales de la función pues:

$$\lim_{x\to-1}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e^{-1}}{0}=\infty \;;\; \lim_{x\to0}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{1}{0}=\infty \;;\; \lim_{x\to1}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e}{0}=\infty$$

Posición relativa de la curva respecto a las asíntotas:

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{e^x}{x^3-x}=\lim_{x\to-1^-}\frac{e^x}{x\left(x^2-1\right)}=\frac{+}{-\cdot+}=-\infty \;;\; \lim_{x\to-1^+}\frac{e^x}{x\left(x^2-1\right)}=\frac{+}{-\cdot-}=+\infty$$

Luego la curva tiende a $-\infty$ a la izquierda de $x=-1$ y a $+\infty$ a la derecha de $x=-1$.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{x\left(x^2-1\right)}=\frac{+}{-\cdot-}=+\infty \;;\; \lim_{x\to0^+}\frac{e^x}{x\left(x^2-1\right)}=\frac{+}{+\cdot-}=-\infty$$

Luego la curva tiende a $+\infty$ a la izquierda de $x=0$ y a $-\infty$ a la derecha de $x=0$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{e^x}{x\left(x^2-1\right)}=\frac{+}{+\cdot-}=-\infty \;;\; \lim_{x\to1^+}\frac{e^x}{x\left(x^2-1\right)}=\frac{+}{+\cdot+}=+\infty$$

Luego la curva tiende a $-\infty$ a la izquierda de $x=1$ y a $+\infty$ a la derecha de $x=1$.

▪ Asíntotas oblicuas $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^x}{x^3-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2\left(x^2-1\right)}=\frac{0}{+\infty}=0 \;\Rightarrow\; \text{es la asíntota horizontal } y=0$$

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^3-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^4-x^2}=\frac{+\infty}{+\infty}=+\infty$ pues la función exponencial del numerador crece más rápidamente que la polinómica del denominador $\Rightarrow$ la función no tiene asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$.

b) La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa x_0 es:

$y=y_0+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ donde $y_0=f(x_0)$.

En nuestro caso: $x_0=2\ ;\ y_0=\frac{e^2}{6}$

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot(x^3-x)-e^x\cdot(3x^2-1)}{(x^3-x)^2}=\frac{e^x\cdot(x^3-3x^2-x+1)}{(x^3-x)^2}\quad\Rightarrow\quad f'(2)=\frac{-5e^2}{36}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y=\frac{e^2}{6}-\frac{5e^2}{36}(x-2)\quad\Leftrightarrow\quad y=-\frac{5e^2}{36}x+\frac{16e^2}{36}\quad\Leftrightarrow\quad y=-\frac{5e^2}{36}x+\frac{4e^2}{9}$$

5) Dada la siguiente matriz:

$$P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-k&-2k\\1&-k&0\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudie el rango de la matriz $A=I+P$, donde I es la matriz identidad de orden 3, según los valores de $k\in\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Para $k=1$, calcule la inversa de la matriz A del apartado anterior.

SOLUCIÓN

a) $A=I+P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-k&-2k\\1&-k&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1-k&-2k\\1&-k&1\end{pmatrix}$

El mayor menor es de orden 3:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1-k&-2k\\1&-k&1\end{vmatrix}=1-k-k-2k-1+k-2k^2-1=0\quad\Leftrightarrow\quad -2k^2-3k-1=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad k=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{-4}=\frac{3\pm1}{-4}=\begin{cases}-1/2\\-1\end{cases}$$

▪ Para $k\neq-\frac{1}{2}$ y $k\neq-1$: $\text{rg } A=3$

▪ Para $k=-\frac{1}{2}$: $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1/2&1\\1&1/2&1\end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix}1&1\\1&1/2\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq0\quad\Rightarrow\quad \text{rg } A=2$

▪ Para $k=-1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\,A = 2$

a) Para $k=1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1-2-1-2 = -6 \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists A^{-1}$

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{adjunta}]{\text{(*) Matriz}} (A_{ij})=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{traspuesta}]{\text{Matriz}} (A_{ij})^T=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{inversa}]{\text{Matriz}}$$

$$\xrightarrow[\text{inversa}]{\text{Matriz}} A^{-1} = \frac{(A_{ij})^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;
$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$; $A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

6) Dadas las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela.
b) (1 punto) Calcule la matriz X que verifica la siguiente ecuación matricial: $I + BX = C_1C_2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

SOLUCIÓN

a) $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3+1+1+1-1-3 = -4 \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists B^{-1}$

$$B=(b_{ij})=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(*) Adjunta}} (B_{ij})=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta}} (B_{ij})^T=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}}$$

$$B^{-1} = \frac{(B_{ij})^T}{|B|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta:

$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$; $B_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $B_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $B_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $B_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$;
$B_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $B_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $B_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $B_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$

b) $I+BX=C_1C_2 \;\Rightarrow\; BX=C_1C_2-I \;\Rightarrow\; X=B^{-1}(C_1C_2-I)$

$$C_1C_2=\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&1\\-6&4&-1\\-1&2&0\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; C_1C_2-I=\begin{pmatrix}2&4&1\\-6&4&-1\\-1&2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&1\\-6&3&-1\\-1&2&-1\end{pmatrix}$$

Tenemos entonces:

$$X=B^{-1}\cdot(C_1C_2-I)=\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&1/2&1/2\\-1/2&1/2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4&1\\-6&3&-1\\-1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&0\\-7/2&5/2&-1\\-5/2&-5/2&0\end{pmatrix}$$

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases}3x-y+2z=1\\x+4y+z\;=3\\2x-5y+az\;=-2\end{cases}$$

a) (1 punto) Discuta según los valores de $a\in\mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a=0$.

SOLUCIÓN

a) Sea A la matriz de los coeficientes: $A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\1&4&1\\2&-5&a\end{pmatrix}$ y M la matriz ampliada: $M=\begin{pmatrix}3&-1&2&1\\1&4&1&3\\2&-5&a&-2\end{pmatrix}$

El mayor menor de A es su propio determinante:

$$\begin{vmatrix}3&-1&2\\1&4&1\\2&-5&a\end{vmatrix}=12a-10-2-16+a+15=13a-13=0 \;\Rightarrow\; a=1$$

Tenemos:

· Para $\forall a\neq 1:\ \text{rg}A=\text{rg}M=3=\text{nº de incógnitas} \;\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

· Para $a=1:\ \text{rg}A=2$ pues el menor $\begin{vmatrix}3&-1\\1&4\end{vmatrix}=13\neq 0$

Para calcular el rango de M, orlamos el menor anterior con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix}3&-1&1\\1&4&3\\2&-5&-2\end{vmatrix}=-24-5-6-8-2+45=0 \;\Rightarrow\; \text{rg}M=2 \;\Rightarrow\; \text{rg}A=\text{rg}M=2<\text{nº de incógnitas} \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a=0$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos por la regla de Cramer:

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&4&1\\-2&-5&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&-1&2\\1&4&1\\2&-5&0\end{vmatrix}}=\frac{-30+2+16+5}{-10-2-16+15}=\frac{-7}{-13}=\frac{7}{13}$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}3&1&2\\1&3&1\\2&-2&0\end{vmatrix}}{-13}=\frac{-4+2-12+6}{-10-2-16+15}=\frac{-8}{-13}=\frac{8}{13}$$

$$z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}3&-1&1\\1&4&3\\2&-5&-2\end{vmatrix}}{-13}=\frac{-24-5-6-8+45-2}{-10-2-16+15}=\frac{0}{-13}=0$$

8) Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, –2, 0) y es perpendicular al plano determinado por los puntos (1, 0, 1), (3, 1, 0) y (2, –1, 1). Exprésela como intersección de dos planos.

SOLUCIÓN

El plano determinado por los puntos $A(1,0 1)$, $B(3,1,0)$ y $C\ (2,-1,1)$ contiene a los vectores $\overrightarrow{AB}=\vec{u}=(2,1,-1)$ y $\overrightarrow{AC}=\vec{v}=(1,-1,0)$.

El vector $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$ es perpendicular al plano y, por tanto, direccional de la recta:

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-1\\1&-1&0\end{vmatrix}=-\vec{j}-2\vec{k}-\vec{k}-\vec{i}=(-1,-1,-3)$$

Así pues, la recta está determinada por el punto $(1,-2,0)$ y el vector direccional $\vec{n}=(-1,-1-3)$:

La ecuación continua es $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-3}\iff\begin{cases}-x+1=-y-2\\-3x+3=-z\end{cases}\iff\begin{cases}x-y\quad-3=0\\3x\quad-z-3=0\end{cases}$

9) En un departamento de calidad se analiza el funcionamiento del software del motor de vehículos eléctricos e híbridos. Se revisaron 85 coches eléctricos y 145 coches híbridos. En total, 43 coches tenían errores en el software de sus motores. Además, de los motores con software defectuoso, 12 correspondían a coches eléctricos.

a) (0,8 puntos) Calcule la probabilidad de que un coche revisado seleccionado al azar, sea híbrido y presente el software de su motor correcto.

b) (1,2 puntos*)* Calcule la probabilidad de que un coche híbrido seleccionado al azar tenga defectuoso el software del motor.

SOLUCIÓN

Organizamos los datos en una tabla de doble entrada.

El total de coches revisados son: 85 eléctricos y 145 híbridos. En total: 230 coches.

43 de los 230 coches revisados tienen el software defectuoso luego $230-43=187$ lo tienen correcto.

De los 43 coches defectuosos 12 son eléctricos, luego 31 son híbridos. Por último, completamos la tabla con $85-12=73$ coches eléctricos no defectuosos y $145-31=114$ coches híbridos no defectuosos.

La tabla de contingencia queda así:

	Elèctricos (E)	**Híbridos (H)**	**TOTALES**
Defectuoso (D)	12	31	43
No defectuoso ($\bar{D}$)	73	114	187
TOTALES	85	145	230

a) Del total de 230 coches revisados, hay 114 híbridos con el software del motor correcto:

$$p\left(H \cap \bar{D}\right) = \frac{114}{230} = 0,4957$$

b) Entre los 145 coches híbridos hay 31 con el software del motor defectuoso:

$$p\left(D/H\right) = \frac{31}{145} = 0,2138$$

10) Uno de cada 7 deportistas de la selección española de gimnasia deportiva, será elegido para las próximas olimpiadas. Se escogen aleatoriamente y de modo independiente 9 deportistas de dicha selección española.

a) (0,8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos exactamente 2 de estos 9 deportistas para las próximas olimpiadas?

b) (1,2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que alguno (al menos 1) de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas?

SOLUCIÓN

Se trata de una experiencia dicotómica (es elegido / no es elegido). La probabilidad de que un deportista de la selección española de gimnasia deportiva sea elegido para las próximas olimpiadas (éxito) es $p = \frac{1}{7}$ y la probabilidad de su contrario (no es elegido) es $q = \frac{6}{7}$.

Como se eligen aleatoriamente 9 deportistas, estamos ante una distribución binomial $B\left(9, \frac{1}{7}\right)$.

a) $p\left[x=2\right] = \binom{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^7 = \frac{9!}{2!\,7!} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^7 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^7 = 0,2497$

b) El suceso B = “alguno de los 9 deportistas es elegido” es el suceso contrario a “ninguno de los 9 deportistas es elegido”

$p\left[x=0\right] = \binom{9}{0} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^9 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^9 = 0,2497 \;\Rightarrow\; p\left(B\right) = 0,7503$

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, <u>en la primera página del tríptico</u>, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} + e^3, & x \leq 0 \\ (1-x)^{a/x}, & x > 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) (1 punto) Determina los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcula, para $a = 1$, la recta tangente a la función en $x = -4$.

2) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{3\,x^2 - 2} - (\sqrt{3}\,x + 5)\right].$$

3) Calcula:

$$\int e^{-x}\,(x^2 - 1)dx.$$

4) Para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

a) (1 punto) Obtén el dominio de definición y estudia su crecimiento y decrecimiento.
b) (1 punto) Analiza la curvatura (concavidad = ∩ y convexidad = U) y existencia de puntos de inflexión en su dominio de definición. Obtén los puntos de inflexión caso de existir.

5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $A\,X - 2\,I = A^2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
b) (1 punto) Analiza el rango de la matriz $A - mB$, según los valores de $m \in \mathbb{R}$, siendo A la matriz del apartado anterior y

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -2$, calcula justificadamente

$$\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

b) (1 punto) Comprueba que la matriz B es invertible y calcula su inversa, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x & +3y & +z & = & 5 \\ 2x & & +az & = & -4 \\ 4x & & -3z & = & a+1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).

b) (1 punto) Resuelve el sistema para a=1.

8)

a) (1 punto) Escribe la ecuación del plano que contiene a las rectas r_1 y r_2, y además pasa por el punto $(-1,2,1)$, siendo

$$r_1 = \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \qquad \text{y} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = -1+6t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

b) (1 punto) Dado el vector $\vec{v} = (2, k, 2k)$, calcula el valor $k \in \mathbb{R}$ para que $\vec{v}$ y los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 sean linealmente dependientes.

9)

a) (1 punto) Dados los siguientes vectores: $\vec{v}_1 = a\,\vec{u}_1 - 2\,\vec{u}_2 + 3\,\vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1 + a\,\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ sean ortogonales, sabiendo que los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ son ortogonales y de módulo igual a 1.

b) (1 punto) Calcula el volumen del tetraedro formado por los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ siendo

$$\vec{v}_1 = (1,0,-2) \;\; y \;\; \vec{v}_2 = (3,1,0)$$

10) El peso de los recién nacidos de una localidad, sigue una distribución normal de media 3300 gramos y desviación típica 465 gramos. Un recién nacido tiene bajo peso si su peso es inferior a 2500 gramos.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga bajo peso?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga un peso entre 3500 y 4000 gramos?

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	**0,0**
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	**0,1**
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	**0,2**
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	**0,3**
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	**0,4**
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	**0,5**
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	**0,6**
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	**0,7**
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	**0,8**
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	**0,9**
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	**1,0**
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	**1,1**
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	**1,2**
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	**1,3**
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	**1,4**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	**1,5**
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	**1,6**
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	**1,7**
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	**1,8**
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	**1,9**
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	**2,0**
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	**2,1**
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	**2,2**
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	**2,3**
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	**2,4**
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	**2,5**
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	**2,6**
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	**2,7**
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	**2,8**
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	**2,9**
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	**3,0**
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	**3,1**
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	**3,2**
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	**3,3**
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	**3,4**
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	**3,5**
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	**3,6**

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

Como norma general se valorará positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia a éste, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea inconsistente de forma evidente con el problema a resolver.

En determinados apartados se dan puntuaciones para la solución por alguno de los métodos más habituales. En todo caso, la resolución de un apartado utilizando un método distinto otorgará la puntuación máxima, siempre que el método sea correcto y lo sea también su solución.

De acuerdo con las normas generales que aparecen en la información pública, los correctores pueden bonificar hasta con un máximo de un punto, el buen uso de la lengua o el desarrollo técnico de los ejercicios.

1. (*2 puntos*)
    - **a.** (1 punto) Se tendrá en cuenta la dificultad añadida con la función exponencial negativa. Aplicación de la definición de continuidad correctamente en todo el dominio, y calculando límites derecha, izquierda en $x=0$. Si no estudia la continuidad fuera del punto $x=0$ se penalizará con 0,3 puntos.
    - **b.** (1 punto) Cualquier método es válido. Si realizan bien la derivada, serán 0,4 puntos. Por algún error leve y aislado se restará un máximo de 0,25.
2. (*2 puntos*) Los pasos en el cálculo del límite deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta. Por errores leves se podrá descontar hasta un máximo de 0,25.
3. (*2 puntos*) Los pasos en el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta. Si no se incluye la constante de integración se penalizará con 0,4 puntos.
4. (*2 puntos*)
    - **a.** (1 punto) Dominio 0,3 puntos. Crecimiento 0,4 puntos. Decrecimiento 0,3 puntos.
    - **b.** (1 punto)
        - i. Punto de inflexión 0,4 puntos. Si no comprueban que es punto de inflexión -0,15 puntos. Si no dan el punto de inflexión completo (x, y) -0,15 puntos.
        - ii. Concavidad 0,3 puntos.
        - iii. Convexidad 0,3 puntos. Si no quitan el 0 de la región de convexidad -0,15 puntos.
5. (*2 puntos*)
    - **a.** (1 punto) Cualquier método es válido. Cálculo de A^2, será 0,25, cálculo de A^2+2I 0,25. Si despeja correctamente X será 0,5 puntos. Por algún error leve y aislado se restará un máximo de 0,2.
    - **b.** (1 punto) La solución correcta debe contemplar todas las clasificaciones. Determinante distinto de 0 bien, 0,4 puntos. Caso m ≠-1,1 0,2 puntos, caso m=1, 0,2 puntos, m=-1, 0,2 puntos. Si hay algún error leve que no simplifique el estudio se restará un máximo de 0,25.
6. (*2 puntos*)
    - **a.** (1 punto) Debe justificar los pasos. Por errores leves de cálculo, se podrá descontar un máximo de 0,25 puntos.
    - **b.** (1 punto) Si no analiza si tiene inversa se descontará 0,3 puntos. Cualquier método es válido para realizar la inversa. Se podrá descontar hasta 0,2 puntos por error leve.
7. (*2 puntos*)
    - **a.** (1 punto) Cualquier método es válido. Determinante 0,2 puntos, caso SCD, 0,3 puntos, caso SI, 0,5 puntos. Si hay algún error leve que no simplifique el estudio se restará un máximo de 0,2 puntos.
    - **b.** (1 punto) Se descontará un máximo de 0,2 por error leve y aislado.
8. (*2 puntos*)
    - **a.** (1 punto) La solución es que no existe el plano. Pero se dará por válida la solución del plano paralelo a las rectas. En general se considerará válida cualquier respuesta que sea coherente y justificada con relación a los datos proporcionados por el problema. Por errores leves y aislados se restará un máximo de 0,2 puntos.
    - **b.** (1 punto) Por algún error leve y aislado se descontará un máximo de 0,2 puntos.
9. (*2 puntos*)
    - **a.** (1 punto) Por algún error leve y aislado se descontará un máximo de 0,25 puntos.
    - **b.** (1 punto) No se contemplan puntuaciones intermedias.
10. En general es válida cualquier estrategia para determinar la probabilidad, si es coherente y correcta.
    - **a.** (1 punto) Por pequeños errores de cálculo o por copiar mal el valor de la tabla normal se quitará un máximo de 0,3 puntos.

b. (1 punto) Por pequeños errores de cálculo o por copiar mal el valor de la tabla normal se quitará un máximo de 0,3 puntos.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2022
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} + e^3, & x \leq 0 \\ (1-x)^{a/x}, & x > 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) (1 punto) Determina los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcula, para $a = 1$, la recta tangente a la función en $x = -4$.

SOLUCIÓN

a) $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ la función es continua por tratarse de funciones continuas las definidas en sus respectivos intervalos.

Falta asegurar la continuidad en $x = 0$. Y para que lo sea debe ser $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{-x} + e^3\right) = e^3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[(1-x)^{a/x}\right] = 1^\infty = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}\cdot(1-x-1)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}\cdot(-x)\right]} = e^{-a} \end{array}\right| \Rightarrow e^3 = e^{-a} \Rightarrow a = -3$$

b) La ecuación de la recta tangente a la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = x_0$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

En $x = -4$ la función definida es $f(x) = \sqrt{-x} + e^3 \Rightarrow f(-4) = 2 + e^3$.

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x}} \Rightarrow f'(-4) = -\frac{1}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es entonces:

$$y - 2 - e^3 = -\frac{1}{4}\cdot(x+4) \Leftrightarrow 4y - 8 - 4e^3 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 4 - 4e^3 = 0$$

2) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2 - 2} - (\sqrt{3}x + 5)\right].$$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-2} - \left(\sqrt{3}x+5\right)\right] = \infty - \infty = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{3x^2-2} - \left(\sqrt{3}x+5\right)\right]\left[\sqrt{3x^2-2} + \left(\sqrt{3}x+5\right)\right]}{\left[\sqrt{3x^2-2} + \left(\sqrt{3}x+5\right)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2-\left(\sqrt{3}x+5\right)^2}{\sqrt{3x^2-2}+\left(\sqrt{3}x+5\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2-3x^2-10\sqrt{3}x-25}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3}x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-10\sqrt{3}\,x-27}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3}x+5} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-10\sqrt{3}-\dfrac{27}{x}}{\sqrt{\dfrac{3x^2}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}}+\sqrt{3}+\dfrac{5}{x}} = \frac{-10\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{-10\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -5$$

3) Calcula:

$$\int e^{-x}\,(x^2-1)dx.$$

SOLUCIÓN

Resolveremos la integral por el método de integración por partes: $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$:

$$\int e^{-x}\left(x^2-1\right)dx = \left| \begin{array}{l} u=x^2-1 \;\Rightarrow\; du=2x\,dx \\ dv=e^{-x}\,dx \;\Rightarrow\; v=-e^{-x} \end{array} \right| = -e^{-x}\left(x^2-1\right)-\int\left(-e^{-x}\right)\cdot 2x\,dx = -e^{-x}\left(x^2-1\right)+2\int x\cdot e^{-x}\cdot dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u=x \;\Rightarrow\; du=dx \\ dv=e^{-x}\,dx \;\Rightarrow\; v=-e^{-x} \end{array} \right| = -e^{-x}\left(x^2-1\right)+2\left[-x\cdot e^{-x}+\int e^{-x}dx\right] = -e^{-x}\left(x^2-1\right)-2xe^{-x}-2e^{-x}+C =$$

$$= -e^{-x}\left(x^2+2x+1\right)+C = -e^{-x}\left(x+1\right)^2+C$$

4) Para la siguiente función:

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$$

a) (1 punto) Obtén el dominio de definición y estudia su crecimiento y decrecimiento.
b) (1 punto) Analiza la curvatura (concavidad = ∩ y convexidad = U) y existencia de puntos de inflexión en su dominio de definición. Obtén los puntos de inflexión caso de existir.

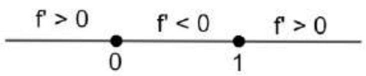
SOLUCIÓN

a) ▪ Dominio de definición: f(x) es una función racional cuyo dominio es $\mathbb{R}$ menos los valores de x que anulen el denominador. En nuestro caso: $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

▪ La función $y=f(x)$ es creciente $\forall x$ para los que $f'(x)>0$ y decreciente $\forall x$ para los que $f'(x)<0$.

$$f'(x)=\frac{2(x-1)\cdot x^2-2x\cdot(x-1)^2}{x^4}=\frac{2x(x-1)(x-x+1)}{x^4}=\frac{2x(x-1)}{x^4}$$

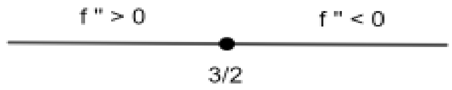
El signo de $f'(x)$ depende del signo del numerador (puesto que el denominador es positivo $\forall x$) que cambia en $x=0$ y en $x=1$:



$\forall x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty):\ f'(x)>0$
$\forall x\in(0,1):\ f'(x)<0$

luego la función es creciente en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ y decreciente en $(0,1)$.

b) $f''(x)=\dfrac{2(x-1+x)\cdot x^4-2x(x-1)\cdot 4x^3}{x^8}=\dfrac{2x^4(2x-1-4x+4)}{x^8}=\dfrac{2(-2x+3)}{x^4}=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{3}{2}$



$\forall x\in\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right):\;\; f''(x)>0 \;\Rightarrow\;$ la función es cóncava en $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$

$\forall x\in\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right):\;\; f''(x)<0 \;\Rightarrow\;$ la función es convexa en $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

Aunque ya podemos decidir que en $x=\dfrac{3}{2}$ hay un punto de inflexión pues la función pasa de ser cóncava a ser convexa, caractericemos la existencia del punto de inflexión calculando la tercera derivada:

$f'''(x)=\dfrac{-4x^4-2(-2x+3)\cdot 4x^3}{x^4} \;\Rightarrow\; f'''\left(\dfrac{3}{2}\right)=-4\neq 0 \;\Rightarrow\;$ En $x=\dfrac{3}{2}$ la función tiene un punto de inflexión: $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}}=\dfrac{1}{9} \;\Rightarrow\;$ Punto de inflexión: $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{9}\right)$

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $AX-2I=A^2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1 punto) Analiza el rango de la matriz $A-mB$, según los valores de $m\in\mathbb{R}$, siendo A la matriz del apartado anterior y

$$B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

a) $AX-2I=A^2 \;\Rightarrow\; AX=A^2+2I \;\Rightarrow\; A^{-1}AX=A^{-1}\left(A^2+2I\right) \;\Rightarrow\; X=A^{-1}\left(A^2+2I\right)$

Obtengamos las matrices que necesitamos:

▪ Matriz A^{-1}:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0 \;\Rightarrow\; \exists A^{-1}$$

$$A\xrightarrow[\text{adjunta}]{\text{* Matriz}}(\operatorname{Adj}A)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{traspuesta}]{\text{Matriz}}(\operatorname{Adj}A)^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{inversa}]{\text{Matriz}}A^{-1}=\frac{(\operatorname{Adj}A)^t}{|A|}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta

$A_{11}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0$, $A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$, $A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0$, $A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$, $A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$

$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$, $A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$, $A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$, $A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$

▪ Matriz $A^2+2I=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\2&-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\1&2&1\\2&-1&3\end{pmatrix}$

▪ Tenemos entonces: $X=A^{-1}\left(A^2+2I\right)=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-1&-1\\1&2&1\\2&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-2&-2&3\\1&2&1\end{pmatrix}$

b) $A-mB=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}-m\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1+m&0\\-m&0&1-m\\1&m&1\end{pmatrix}$

El mayor menor es de orden 3:

$$\begin{vmatrix}1&-1+m&0\\-m&0&1-m\\1&m&1\end{vmatrix}=(-1+m)\cdot(1-m)+m\cdot(-1+m)-m\cdot(1-m)=-1+m+m-m^2-m+m^2-m+m^2=$$

$=m^2-1=0 \;\Rightarrow\; m=-1\;,\;m=1$

▪ Para $m\neq-1$ y $m\neq1$: $\operatorname{rg}(A-mB)=3$

▪ Para $m=-1$: $(A-mB)=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix}1&-2\\1&0\end{vmatrix}=2\neq0 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg}(A-mB)=2$

▪ Para $m=1$: $(A-mB)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1\neq0 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg}(A-mB)=2$

6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\a&b&c\end{vmatrix}=-2$, calcula justificadamente

$$\begin{vmatrix}-a+2&-c+2&-b+2\\x/2&z/2&y/2\\3&3&3\end{vmatrix}.$$

b) (1 punto) Comprueba que la matriz B es invertible y calcula su inversa, siendo

$$B=\begin{pmatrix}3&2&0\\0&1&-1\\5&3&-1\end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

a)

$$\begin{vmatrix}-a+2&-c+2&-b+2\\x/2&z/2&y/2\\3&3&3\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}-a&-c&-b\\x/2&z/2&y/2\\3&3&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&2&2\\x/2&z/2&y/2\\3&3&3\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}\begin{vmatrix}-a&-c&-b\\x/2&z/2&y/2\\3&3&3\end{vmatrix}\overset{(3)}{=}-\frac{3}{2}\begin{vmatrix}a&c&b\\x&z&y\\1&1&1\end{vmatrix}\overset{(4)}{=}$$

$$=-\frac{3}{2}\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\a&b&c\end{vmatrix}=-\frac{3}{2}\cdot(-2)=3$$

Propiedades de los determinantes utilizadas:

(1) Los elementos de la primera fila están descompuestos en sumas de dos sumandos.
(2) El segundo determinante es 0 porque la primera y la tercera filas son proporcionales.
(3) Se saca factor común a -1 en la primera fila, a ½ en la segunda fila y a 3 en la tercera fila.
(4) Al permutar dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo. En este caso hay dos permutas (segunda columna por la tercera y, después, la primera fila por la tercera) por lo que el determinante mantiene su signo.

b) La matriz cuadrada B es invertible si su determinante es distinto de 0:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -3-10+9=-4\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \exists B^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{adjunta}]{\text{(*) Matriz}} \begin{pmatrix} 2 & -5 & -5 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{traspuesta}]{\text{Matriz}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -5 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{inversa}]{\text{Matriz}} B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 5/4 & 3/4 & -3/4 \\ 5/4 & -1/4 & -3/4 \end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=2\ ;\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=-5\ ;\ A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=-5\ ;\ A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=2\ ;\ A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=-3\ ;$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=1\ ;\ A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\ ;\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=3\ ;\ A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=3$$

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x & +3y & +z & = 5 \\ 2x & & +az & = -4 \\ 4x & & -3z & = a+1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).

b) (1 punto) Resuelve el sistema para a=1.

SOLUCIÓN

a) Sean A la matriz de los coeficientes y B la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & a & -4 \\ 4 & 0 & -3 & a+1 \end{pmatrix}$$

Comparemos los rangos de ambas matrices según los valores de a.

El mayor menor de A es:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 12a+18=0 \quad\Rightarrow\quad a=-\frac{3}{2}$$

▪ Para $a\neq -\frac{3}{2}$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado

▪ Para $a= -\frac{3}{2}$: $\operatorname{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6\neq 0$

Orlamos ese menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = -48+3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\,B = 3 \Rightarrow \text{rg}\,A \neq \text{rg}\,B \Rightarrow \text{el sistema es incompatible.}$$

b) Para $a=1$ el sistema es: $\begin{cases} -x+3y+z=5 \\ 2x \quad +z=-4 \\ 4x \quad -3z=2 \end{cases}$ y sabemos que es compatible determinado. Lo resolvemos por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{6-36}{12+18} = \frac{-30}{30} = -1 \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{30} = \frac{-12+4+20+16+30+2}{30} = \frac{60}{30} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{30} = \frac{-48-12}{30} = \frac{-60}{30} = -2$$

8)

a) (1 punto) Escribe la ecuación del plano que contiene a las rectas r_1 y r_2, y además pasa por el punto $(-1,2,1)$, siendo

$$r_1 = \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \qquad \text{y} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = -1+6t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

b) (1 punto) Dado el vector $\vec{v} = (2,k,2k)$, calcula el valor $k \in \mathbb{R}$ para que $\vec{v}$ y los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 sean linealmente dependientes.

SOLUCIÓN

a) La recta r_1 contiene al punto $P(0,-2,0)$ y tiene como vector direccional $\vec{u}_1 = (3,1,1)$. La recta r_2 contiene al punto $Q(-1,0,0)$ y tiene como vector direccional $\vec{u}_2 = (6,-2,1)$. Para que las rectas r_1 y r_2 estén contenidas en un plano, los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\overrightarrow{PQ} = (-1,2,0)$ deben ser linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12-1-2-6 \neq 0 \Rightarrow$$ los vectores son linealmente independientes $\Rightarrow$ las rectas se cruzan y, por tanto, no están contenidas en un plano $\Rightarrow$ No es posible hallar un plano que contenga a ambas rectas.

b) Para que los vectores $\vec{v} = (2,k,2k)$, $\vec{u}_1 = (3,1,1)$ y $\vec{u}_2 = (6,-2,1)$ sean linealmente dependientes, debe ser:

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 2k \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 2+6k-12k-12k-3k+4=-21k+6=0 \;\Rightarrow\; k=\frac{2}{7}$$

9)

a) v (1 punto) Dados los siguientes vectores: $\vec{v}_1 = a\,\vec{u}_1 - 2\,\vec{u}_2 + 3\,\vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1 + a\,\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ sean ortogonales, sabiendo que los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ son ortogonales y de módulo igual a 1.

b) (1 punto) Calcula el volumen del tetraedro formado por los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ siendo

$$\vec{v}_1 = (1,0,-2) \;\; y \;\; \vec{v}_2 = (3,1,0)$$

SOLUCIÓN

a) Como los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ son ortogonales y de módulo 1, constituyen una base ortonormal.

$$\vec{v}_1 = a\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3 = (a,-2,3) \quad , \quad \vec{v}_2 = -\vec{u}_1 + a\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (-1,a,1)$$

$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \;\Rightarrow\; -a-2a+3=0 \;\Rightarrow\; a=1$$

b) La forma de construir el vector $\vec{v}_3$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ nos indica que los tres vectores son coplanarios y por tanto el volumen del tetraedro que los tiene como aristas será 0.

No obstante, se podría haber calculado el volumen:

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (4,1,-2)$$

$$V = \frac{1}{6}[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \frac{1}{6}[\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)] = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-2-6+8) = 0$$

10) El peso de los recién nacidos de una localidad, sigue una distribución normal de media 3300 gramos y desviación típica 465 gramos. Un recién nacido tiene bajo peso si su peso es inferior a 2500 gramos.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga bajo peso?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga un peso entre 3500 y 4000 gramos?

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	**0,0**
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	**0,1**
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	**0,2**
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	**0,3**
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	**0,4**
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	**0,5**
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	**0,6**
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	**0,7**
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	**0,8**
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	**0,9**
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	**1,0**
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	**1,1**
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	**1,2**
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	**1,3**
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	**1,4**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	**1,5**
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	**1,6**
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	**1,7**
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	**1,8**
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	**1,9**
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	**2,0**
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	**2,1**
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	**2,2**
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	**2,3**
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	**2,4**
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	**2,5**
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	**2,6**
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	**2,7**
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	**2,8**

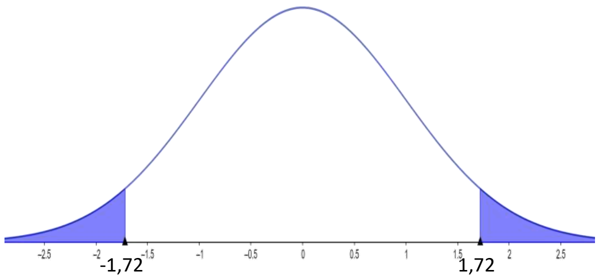
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	**2,9**
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	**3,0**
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	**3,1**
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	**3,2**
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	**3,3**
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	**3,4**
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	**3,5**
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	**3,6**

NOTA: En la tabla figuran los valores de P(Z ≤ k) para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

a) Los datos de que disponemos pertenecen a una distribución normal de media $\mu = 3300$ gr. y desviación típica $\sigma = 465$ gr., es decir una normal $N(3300\,,465)$.

Para hacer uso de la tabla correspondiente a la normal $N(0\,,1)$ debemos tipificar las variables $x \in N(3300\,,465)$ convirtiéndolas en variables $z \in N(0\,,1)$:



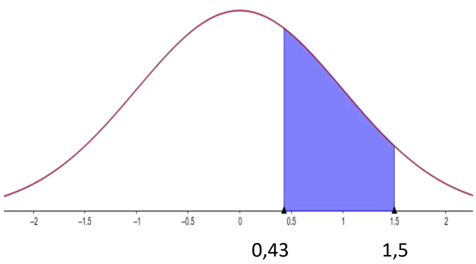
$$x \in N(3300\,,465) \longleftrightarrow z \in N(0\,,1)$$

$$x = 2500 \longleftrightarrow z = \frac{2500-3300}{465} = -1,72$$

$$P[x \le 2500] = P[z \le -1,72] = P[z \ge 1,72] =$$

$$= 1 - P[z \le 1,72] = 1 - 0,9573 = 0,0427$$

b) Las variables pertenecen a la distribución normal N (3300 , 465) por lo que debemos tipificarlas:



$$x \in N(3300\,,465) \longleftrightarrow z \in N(0\,,1)$$

$$x = 3500 \longleftrightarrow z = \frac{3500-3300}{465} = 0,43$$

$$x = 4000 \longleftrightarrow z = \frac{4000-3300}{465} = 1,505$$

$$P[3500 \le x \le 4000] = P[0,43 \le z \le 1,51] =$$

$$= P[z \le 1,51] - P[z \le 0,43] = 0,9345 - 0,6664 = 0,2681$$

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función:

$$f(x) = x\, e^{-ax^2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) (1 punto) Determina los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$ y tenga la asíntota horizontal $y = 0$.

b) (1 punto) Calcula, para el valor $a = \frac{1}{2}$, el área que encierra la gráfica de la curva $f(x)$ entre el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

2) Para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^3 + ax^2 + bx + 3}{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Calcula los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, para que $\lim_{x \to 1} f(x) = L \in \mathbb{R}$, y determina el valor de dicho límite.

3) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = 3x + 2x^2,$$
$$g(x) = x^2 + 4x + 2.$$

4) Para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{3 - x^2}$$

a) (1,25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, así como de ramas parabólicas. Determina las asíntotas cuando existan.

b) (0,75 puntos) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x = 1$.

5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que se verifique $A^2 = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) (1 punto) Calcula, para $k = 0$, la matriz B^n con $B = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2, y $n \in \mathbb{N}$.

6) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1-m & -1 \\ 2 & 2m \\ m-1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **a)** (1 punto) Estudia, según los valores de $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz $P = AB^T + C$, donde B^T es la matriz traspuesta de B.
- **b)** (1 punto) Para el valor $m = 1$, calcula la inversa de la matriz P del apartado anterior.

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + a\,y + z = 0 \\ x + y + a^2 z = 0 \\ x + y + 2\,az = 0 \end{cases}$$

- **a)** (1 punto) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).
- **b)** (1 punto) Resuelve el sistema para $a = 0$.

8) El volumen de un tetraedro es de 10 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los puntos $\mathrm{A}(1,1,1), \mathrm{B}(-2,1,0)$ y $\mathrm{C}(0,1,3)$, halla las coordenadas del cuarto vértice D sabiendo que se encuentra en el eje Y. Escribe todas las soluciones posibles.

9) En una academia de artes escénicas se imparten clases de danza y teatro. De danza, hay modalidad de danza clásica y cabaret. En la academia, un 17% de individuos practica danza clásica, un 45% cabaret y un 5% ambas modalidades de danza. Si elegimos un individuo que asiste a dicha academia:

- **a)** (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique algún tipo de danza (o los dos).
- **b)** (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique solamente teatro.

10) De los huevos que se producen diariamente en una granja, deben desecharse el 20% por no ser aptos para su consumo. Se seleccionan de manera aleatoria e independiente 5 huevos:

- **a)** (1 punto) Calcula la probabilidad de que tengamos que desechar alguno de los huevos seleccionados (al menos 1).
- **b)** (1 punto)
  1. (0,5 puntos) ¿Qué es más probable, que haya exactamente 2 huevos no aptos, o que haya exactamente 3 huevos no aptos? Obtén estas probabilidades.
  2. (0,5 puntos) ¿Cómo razonarías la respuesta a la pregunta anterior sin hacer uso de la calculadora?

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

Como norma general se valorará positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia a éste, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea inconsistente de forma evidente con el problema a resolver.

En determinados apartados se dan puntuaciones para la solución por alguno de los métodos más habituales. En todo caso, la resolución de un apartado utilizando un método distinto otorgará la puntuación máxima, siempre que el método sea correcto y lo sea también su solución.

De acuerdo con las normas generales que aparecen en la información pública, los correctores pueden bonificar hasta con un máximo de un punto, el buen uso de la lengua o el desarrollo técnico de los ejercicios.

1. (*2 ptos*)
   - **a.** (1 pto) Aplicación de la definición de continuidad correctamente en todo el dominio. Si solo se centra en la asíntota para calcular "a" y no indica el resto del dominio, se penalizará con 0,4 puntos.
   - **b.** (1 pto) La integral es inmediata. Por algún error leve de cálculo se podrá descontar 0,25.
2. (*2 ptos*) Los pasos en el cálculo del límite deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta. Se puntuará 1,25 el cálculo adecuado de "a" y "b". 0,75 el límite. Por errores leves se podrá descontar 0,2.
3. (*2 ptos*) Los pasos en el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta. Se deben buscar los puntos de corte, el cálculo incorrecto de estos se penalizará con 0,75. Si la primitiva está bien serán 1,25 puntos.
4. (*2 ptos*)
   - **a.** (1,25 ptos) Cálculo de asíntotas verticales 0,5 (0,25*2). Cálculo de asíntota horizontal 0,35 puntos. Comprobación de no oblícua 0,2. Comprobación de no ramas parabólicas 0,2.
   - **b.** (0,75 ptos) Cualquier método es válido. Por algún error leve y aislado se restará un máximo de 0,25.
5. (*2 ptos*)
   - **a.** (1 pto) Cualquier método es válido. Por algún error leve y aislado, se descontará hasta 0,25 puntos.
   - **b.** (1 pto) Si el desarrollo está bien, pero la fórmula final no es correcta, se descontará 0,5 puntos.
6. (*2 ptos*)
   - **a.** (1 pto) La solución correcta debe contemplar todas las clasificaciones. Si hay algún error leve que no simplifique el estudio se restará un máximo de 0,25.
   - **b.** (1 pto) Cualquier método es válido. Si hay error leve de cálculo se podrá descontar un máximo de 0,25 ptos.
7. (*2 ptos*)
   - **a.** (1 pto) Cualquier método es válido. El cálculo correcto del determinante 0,2 puntos; resolución (=0) 0,25 puntos; SCD 0,1 puntos; SCI 0,15*3.
   - **b.** (1 pto) Si expresa de forma clara y paramétrica las infinitas soluciones. Si sólo da una solución serán 0,5 puntos.
8. (*2 ptos*) Por algún error leve de cálculo se podrá descontar hasta 0,25 ptos, siempre y cuando la respuesta sea coherente con el resultado obtenido. Si sólo da una solución será 1.25 ptos.

Nota para Ejs 9 y 10: Válida cualquier estrategia para determinar la probabilidad, si es coherente y correcta.

9. (*2 ptos*)
   - **a.** (1 pto) Errores de cálculo que no resten o simplifiquen, se descontará hasta 0,25.
   - **b.** (1 pto) Errores de cálculo que no resten o simplifiquen, se descontará hasta 0,25.
10. (*2 ptos*) Si se indica la variable aleatoria binomial, con sus parámetros n y p correctamente, se podrán asignar 0,5 puntos. Se puede otorgar la puntuación completa a la expresión correcta de la probabilidad, aunque el estudiante no haga referencia a la binomial. Si se indican las probabilidades solicitadas correctamente, pero no se especifica el valor concreto de los números combinatorios, se podrá penalizar hasta con 0,2 puntos.
    - **a.** (1 pto)
    - **b.** **b1)** (0,5 ptos)
      b2) (0,5 ptos)

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2022
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

Universidad Zaragoza 1542

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función:

$$f(x) = x\, e^{-ax^2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) (1 punto) Determina los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$ y tenga la asíntota horizontal $y = 0$.

b) (1 punto) Calcula, para el valor $a = \frac{1}{2}$, el área que encierra la gráfica de la curva $f(x)$ entre el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

SOLUCIÓN

a) f(x) está definida como el producto de una función lineal $f_1(x) = x$ que es continua en $\mathbb{R}$ y una función exponencial $f_2(x) = e^{-ax^2}$ que es también continua en $\mathbb{R}$. En la segunda función el signo del exponente, que debe tenerse en cuenta al estudiar las tendencias cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$, depende solo del signo del parámetro a:

▪ Cuando $a \in \mathbb{R}^-$ (denotaremos $a = -\lambda$, $\lambda > 0$): $f(x) = x \cdot e^{-(-\lambda)x^2} = x \cdot e^{\lambda x^2}$ es una función continua por ser producto de dos funciones continuas. Además:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot e^{\lambda x^2}\right) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{\lambda x^2}\right) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la función no tiene asíntotas horizontales.}$$

▪ Para $a = 0$: $f(x) = x \cdot e^0 = x \;\Rightarrow\;$ la función es continua y no tiene asíntotas horizontales.

▪ Para $a \in \mathbb{R}^+$ (denotaremos $a = +\lambda$, $\lambda > 0$): $f(x) = x \cdot e^{-(+\lambda)x^2} = x \cdot e^{-\lambda x^2} = \dfrac{x}{e^{\lambda x^2}}$ que es continua por ser cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula. Además:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^{\lambda x^2}}\right) = \dfrac{-\infty}{+\infty} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2\lambda x \cdot e^{\lambda x^2}}\right) = \dfrac{1}{-\infty} = 0^- \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^{\lambda x^2}}\right) = \dfrac{+\infty}{+\infty} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2\lambda x \cdot e^{\lambda x^2}}\right) = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la recta } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal de la función.}$$

Luego los valores de a para los que la función, además de ser continua, tiene al eje de abscisas como asíntota horizontal son $a \in (0, +\infty)$.

b) $S = \int_0^1 x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = -\int_0^1 -x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \left[-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_0^1 = -e^{-\frac{1}{2}} + e^0 = -\dfrac{1}{\sqrt{e}} + 1 \simeq 0{,}39\, u^2$

2) Para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^3 + ax^2 + bx + 3}{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Calcula los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, para que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = L \in \mathbb{R}$, y determina el valor de dicho límite.

SOLUCIÓN

Descompongamos el denominador en factores:

	-1	4	-5	2
1		-1	3	-2
	-1	3	-2	0

$$-x^2 + 3x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3 + ax^2 + bx + 3}{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3 + ax^2 + bx + 3}{-(x-1)^2 \cdot (x-2)} \;\Rightarrow\;$ Para que el límite sea un número real, el polinomio del numerador debe tener a $x = 1$ como una raiz doble:

	2	a	b	3
1		2	a+2	a+b+2
	2	a+2	a+b+2	a+b+5 = 0
1		2	a+4	
	2	a+4	2a+b+6 = 0	

$$\left.\begin{matrix} 2a + b + 6 = 0 \\ a + b + 5 = 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; a + 1 = 0 \;\Rightarrow\; a = -1 \;\Rightarrow\; b = -4$$

Luego: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3 - x^2 - 4x + 3}{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2 \cdot (2x+3)}{-(x-1)^2 \cdot (x-2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+3}{-(x-2)} = \dfrac{5}{1} = 5$

3) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = 3x + 2x^2,$$
$$g(x) = x^2 + 4x + 2.$$

SOLUCIÓN

Consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x) = 3x + 2x^2 - x^2 - 4x - 2 = x^2 - x - 2$ y calculemos el área del recinto limitado por dicha función y el eje OX.

Los puntos de corte de $h(x)$ y OX son: $\quad x^2 - x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$

Luego: $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = 3 - 8 + \frac{1}{2} = -\frac{9}{2} \;\Rightarrow\; S = \frac{9}{2}u^2$

4) Para la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^2+x}{3-x^2}$$

a) (1,25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, así como de ramas parabólicas. Determina las asíntotas cuando existan.

b) (0,75 puntos) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x=1$.

SOLUCIÓN

a) ▪ Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3-x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x}}{\frac{3}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\frac{1}{-1}=-1 \Rightarrow$$ $y=-1$ es asíntota horizontal de la función.

Posición de la curva respecto a la asíntota: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1^+$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1^-$

Se descartan asimismo las ramas parabólicas para las que debería ser: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$.

▪ Asíntotas verticales: $3-x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow x=-\sqrt{3}$ y $x=\sqrt{3}$ son asíntotas verticales pues:

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}}\frac{x^2+x}{3-x^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{0}=\infty \quad ; \quad \lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2+x}{3-x^2}=\frac{3+\sqrt{3}}{0}=\infty$$

▪ Asíntotas oblicuas $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+x}{3-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3x-x^3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}{\frac{3x}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}}=\frac{0}{-1}=0 \Rightarrow$$ es la asíntota horizontal.

Luego no tiene asíntotas oblicuas.

b) La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa x_0 es:

$y=y_0+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ donde $y_0=f(x_0)$.

En nuestro caso: $x_0=1$; $y_0=\frac{2}{2}=1$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)\cdot(3-x^2)-(x^2+x)\cdot(-2x)}{(3-x^2)^2} \Rightarrow f'(1)=\frac{3\cdot 2-2\cdot(-2)}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y=1+\frac{5}{2}(x-1) \Leftrightarrow 2y=2+5x-5 \Leftrightarrow 5x-2y-3=0$

5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que se verifique $A^2 = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) (1 punto) Calcula, para $k = 0$, la matriz B^n con $B = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2, y $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k & k+k^2+k \\ -1-k-1 & -k+k^2+2k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k & k^2+2k \\ -k-2 & k^2+k+1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 3I \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1-k & k^2+2k \\ -k-2 & k^2+k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; 1-k=3 \;\Rightarrow\; k=-2 \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} k^2+2k = 4-4 = 0 \\ -k-2 = 2-2 = 0 \\ k^2+k+1 = 3 \end{array} \right.$$

b) Para $k = 0$: $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; B = 2A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{pmatrix}$$

6) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1-m & -1 \\ 2 & 2m \\ m-1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudia, según los valores de $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz $P = AB^T + C$, donde B^T es la matriz traspuesta de B.

b) (1 punto) Para el valor $m = 1$, calcula la inversa de la matriz P del apartado anterior.

SOLUCIÓN

a) $$P = AB^T + C = \begin{pmatrix} 1-m & -1 \\ 2 & 2m \\ m-1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m & -1 & 1-m \\ 2 & 2m & 2 \\ m-1 & 1 & m-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-m & 0 & 2-m \\ 2 & 2m+1 & 3 \\ m-1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} 2-m & 0 & 2-m \\ 2 & 2m+1 & 3 \\ m-1 & 1 & m \end{vmatrix} = m(2-m)(2m+1) + 2(2-m) - (m-1)(2m+1)(2-m) - 3(2-m) =$$

$$= (2-m)\cdot\left[2m^2+m+2-2m^2-m+2m+1-3\right] = (2-m)\cdot 2m = 0 \;\Rightarrow\; m=0 \;,\; m=2$$

- Para $m \neq 0$ y $m \neq 2$: $\operatorname{rg} P = 3$

▪ Para $m=0$: $\operatorname{rg}P=2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$

▪ Para $m=2$: $\operatorname{rg}P=2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$

b) Para $m=1$: $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |P|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3+2-3=2\neq 0 \Rightarrow \exists P^{-1}$

$$P=(p_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(*) Adjunta}} (P_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta}} (P_{ij})^T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}}$$

$$\xrightarrow{\text{Inversa}} P^{-1}=\frac{(P_{ij})^T}{|P|}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta:

$P_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$; $P_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-2$; $P_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2$; $P_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$; $P_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$;

$P_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$; $P_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-3$; $P_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1$; $P_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3$

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+a\,y+z=0 \\ x+y+\ a^2z=0 \\ x+y+2\,az=0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discute según los valores de $a\in\mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).

b) (1 punto) Resuelve el sistema para $a=0$.

SOLUCIÓN

a) Se trata de un sistema homogéneo. La matriz de los coeficientes es: $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a \end{pmatrix}$. Estudiemos su rango según los posibles valores de a:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}=2a+a^3+1-1-a^2-2a^2=a^3-3a^2+2a=a\cdot\left(a^2-3a+2\right)=0 \Rightarrow \left|\begin{matrix} a=0 \\ a^2-3a+2=0 \end{matrix}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

▪ Para $a \neq 0, a \neq 1$ y $a \neq 2$: $\text{rg } A = 3 = $ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado (sólo tiene la solución trivial: $x=0, y=0, z=0$).

▪ Para $a=0$: $\text{rg } A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

▪ Para $a=1$: $\text{rg } A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

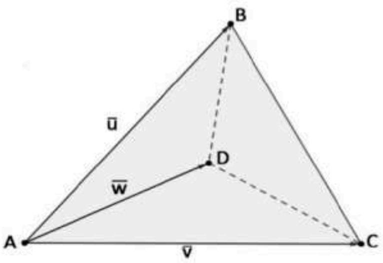
▪ Para $a=2$: $\text{rg } A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a=0$ el sistema es compatible indeterminado. Atendiendo al menor que ha dado rango 2 a la matriz de los coeficientes, utilizamos la incógnita z como parámetro, $z=\lambda$, y las dos primeras ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow x=-\lambda \ , \ y=\lambda \ , \ z=\lambda$$

8) El volumen de un tetraedro es de 10 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los puntos $A(1,1,1), B(-2,1,0)$ y $C(0,1,3)$, halla las coordenadas del cuarto vértice D sabiendo que se encuentra en el eje Y. Escribe todas las soluciones posibles.

SOLUCIÓN



$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]\right|$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-3,0,-1) \quad , \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1,0,-2)$$

$$\text{Sea } D(0,y,0) \Rightarrow \vec{w} = \overrightarrow{AD} = (-1,y-1,-1)$$

Se tiene: $10 = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & y-1 & -1 \end{vmatrix}\right| \Rightarrow 60 = |y-1+6(y-1)| = |7y-7| \Rightarrow$

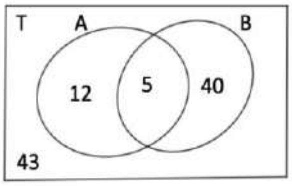
$$\Rightarrow \begin{matrix} 7y-7=60 \Rightarrow y=\frac{67}{7} \Rightarrow D\left(0,\frac{67}{7},0\right) \\ 7y-7=-60 \Rightarrow y=-\frac{53}{7} \Rightarrow D\left(0,-\frac{53}{7},0\right) \end{matrix}$$

9) En una academia de artes escénicas se imparten clases de danza y teatro. De danza, hay modalidad de danza clásica y cabaret. En la academia, un 17% de individuos practica danza clásica, un 45% cabaret y un 5% ambas modalidades de danza. Si elegimos un individuo que asiste a dicha academia:

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique algún tipo de danza (o los dos).

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que practique solamente teatro.

SOLUCIÓN



Sean los sucesos: A = “practica danza clásica”, B = “practica cabaret” y T = “practica teatro”.

El diagrama de Venn correspondiente a la situación es el que figura a la izquierda.

Tenemos:

a) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}17 + 0{,}45 - 0{,}05 = 0{,}57$

b) $p(T) = p\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - 0{,}57 = 0{,}43$

10) De los huevos que se producen diariamente en una granja, deben desecharse el 20% por no ser aptos para su consumo. Se seleccionan de manera aleatoria e independiente 5 huevos:

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que tengamos que desechar alguno de los huevos seleccionados (al menos 1).

b) (1 punto)

1. (0,5 puntos) ¿Qué es más probable, que haya exactamente 2 huevos no aptos, o que haya exactamente 3 huevos no aptos? Obtén estas probabilidades.

2. (0,5 puntos) ¿Cómo razonarías la respuesta a la pregunta anterior sin hacer uso de la calculadora?

SOLUCIÓN

Se trata de una distribución binomial. Los sucesos son: A = “el huevo no es apto para el consumo” y B = “el huevo es apto para el consumo”. La probabilidad de que un huevo sea no apto para el consumo es $p(A) = p = 0{,}20$ y la probabilidad de su contrario (es apto para el consumo) es $p(B) = q = 0{,}80$.

Como se eligen al azar 5 huevos, estamos ante una distribución binomial $B(5\,;0{,}20)$.

a) El suceso “desechar alguno de los huevos” es el suceso contrario a “todos son aptos para el consumo”.

En la binomial $B(5\,;0{,}80)$: $p[x=5] = \binom{5}{5} \cdot 0{,}80^5 \cdot 0{,}20^0 = 0{,}32768$ luego: p = 1 - 0,32768 =0,67

b) **1.** En la binomial $B(5\,;0{,}20)$:

$$p[x=2] = \binom{5}{2} \cdot 0{,}20^2 \cdot 0{,}80^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}20^2 \cdot 0{,}80^3 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 0{,}20^2 \cdot 0{,}80^3 = 0{,}2048$$

$$p[x=3] = \binom{5}{3} \cdot 0{,}20^3 \cdot 0{,}80^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0{,}20^3 \cdot 0{,}80^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 0{,}20^3 \cdot 0{,}80^2 = 0{,}0512$$

Luego es más probable que haya exactamente 2 huevos no aptos para el consumo.

2. Al sacar al azar un huevo es menor la probabilidad de que no sea apto para el consumo que la probabilidad de que sí lo sea. Es más probable entonces sacar dos huevos no aptos para el consumo que sacar tres.

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, <u>en la primera página del tríptico</u>, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función

$$f(x) = (e^{ax} + b)x - e, \qquad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

a) (1 punto) Calcula los valores de a y b, sabiendo que dicha función tiene un extremo relativo en $x = 0$ y un punto de inflexión en $x = 2$.

b) (1 punto) Para los valores $a = 1$ y $b = 2$, calcula $\int x f(x) dx$.

2) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, para que el siguiente límite sea finito y calcula el valor de dicho límite

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) - a\, sen(x) + 3x cos(2x)}{x^2}.$$

3) Descompón el número $\sqrt{3}$ en dos sumandos positivos, de forma que la suma de sus respectivos logaritmos en base 3 sea máxima y calcula esta suma de forma exacta.

4) Para la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$$

a) (1 punto) Indica el dominio de definición y estudia su monotonía.

b) (1 punto) Estudia la curvatura de la función (concavidad = ∩ y convexidad = U) y la existencia de puntos de inflexión, y calcúlalos si existen.

5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & m & m+2 \\ m-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Discute el rango de la matriz A según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcula la inversa de la matriz A para el valor $m = 1$.

6) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$, calcula razonadamente el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{pmatrix}^2.$$

7) Una ONG aragonesa de reciente creación tiene tres sedes, una en Huesca, otra en Zaragoza y otra en Teruel. El número total de voluntarios es de 31. Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza. Además, el número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes. ¿Cuántos voluntarios hay en cada una de las tres sedes?

8) Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1,2 puntos) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}, \qquad \vec{s} = \vec{u} + 3\vec{w}, \qquad \vec{t} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}.$$

b) (0,8 puntos) Calcula razonadamente $3\vec{s} \times (\vec{t} - \vec{r})$ donde $\times$ representa el producto vectorial de dos vectores.

9) De los turistas que llegaron a España el mes pasado, el 35% visitaron Aragón. Si seleccionamos al azar y de manera independiente 7 turistas que llegaron a España el mes pasado.

a) (1 punto) Razona, sin hacer uso de la calculadora: ¿Qué es más probable, que 2 de estos turistas visitaran Aragón, o que sean 5 los que visitaron nuestra Comunidad Autónoma?

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que alguno de los 7 turistas haya visitado Aragón.

10) En el club deportivo Ares, se juegan tres modalidades de raqueta: pádel, tenis y frontón-tenis. Cada socio del club sólo puede apuntarse a una única modalidad. El 60% se apuntó a pádel, el 25% a tenis y el 15% a frontón-tenis. En los campeonatos anuales entre clubes deportivos, participaron todos los socios del club Ares, de los cuales han conseguido medalla el 21% de los jugadores de pádel, el 30% de los jugadores de tenis y el 12% de los jugadores de frontón-tenis.

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador de raqueta del club, seleccionado al azar, haya obtenido una medalla.

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador con medalla, seleccionado al azar, sea jugador de la modalidad tenis.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

Como norma general se valorará positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia a éste, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea inconsistente de forma evidente con el problema a resolver.

En determinados apartados se dan puntuaciones para la solución por alguno de los métodos más habituales. En todo caso, la resolución de un apartado utilizando un método distinto otorgará la puntuación máxima, siempre que el método sea correcto y lo sea también su solución.

De acuerdo con las normas generales que aparecen en la información pública, los correctores pueden bonificar hasta con un máximo de un punto, el buen uso de la lengua o el desarrollo técnico de los ejercicios.

1. (2 ptos)
   - **a.** (1 pto) Cálculo de cada parámetro 0,5 puntos. Por algún error leve de cálculo se podrá descontar 0,2.
   - **b.** (1 pto) Si no ponen la constante de integración, se descuenta 0,3. Por algún error leve de cálculo se podrá descontar 0,2.
2. (2 ptos) Los pasos en el cálculo del límite deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta. Por errores leves se podrá descontar 0,25.
3. (2 ptos) Función a optimizar 0,5. Obtención del máximo 0,5. Comprobación de máximo 0,5. Cálculo de la suma exacta 0,5. Errores leves que no simplifiquen descontarán un máximo de 0,25.
4. (2 ptos)
   - **a.** (1 pto) Dominio de definición correctamente escrito 0,5. Monotonía 0,5. Por errores leves, se podrá descontar 0,2. Si la escritura matemática no es correcta se descontará 0,3.
   - **b.** (1 pto) Región de concavidad 0,3; convexidad 0,3; punto de inflexión 0,4; Si no quitan el punto fuera del dominio de la región se restará 0,3. Por errores leves se podrá descontar 0,2.
5. (2 ptos)
   - **a.** (1 pto) Si calcula bien el determinante 0,4. La solución correcta debe contemplar todas las clasificaciones. 0,2 para cada opción (rango 2, 3). Si hay algún error leve que no simplifique el estudio se restará un máximo de 0,2.
   - **b.** (1 pto) Válido cualquier método de cálculo de la inversa. Algún error leve que no simplifique se podrá descontar hasta 0,2.
6. (2 ptos) Debe justificar los pasos. Cada paso que no se justifique se descuenta 0,1 puntos. Si calcula el determinante sin elevar al cuadrado serán 1,2 puntos. Por errores leves de cálculo, se podrá descontar un máximo de 0,25 ptos.
7. (2 ptos) Si escribe bien las ecuaciones será 1,2 puntos (0,4*3). Por errores leves de cálculo, se podrá descontar un máximo de 0,25 ptos.
8. (2 ptos)
   - **a.** (1,2 ptos) Si responde sin ninguna justificación, no será valorado. Se podrá descontar 0,25 por algún error leve de cálculo siempre que la respuesta sea coherente con el resultado obtenido.
   - **b.** (0,8 ptos) Errores de cálculo que no resten o simplifiquen, se descontará hasta 0,2. El razonamiento alude a las características de los vectores y al concepto de producto vectorial de dos vectores. Si no indica estos aspectos en ninguna ocasión será -0,4. Si no indica el resultado como expresión de un vector (vector nulo), se descontará 0,4.

Nota para Ejs 9 y 10, y común a los dos apartados: válida cualquier estrategia para determinar la probabilidad, si es coherente y correcta.

9. (2 ptos) Si se indica la variable aleatoria binomial, con sus parámetros n y p correctamente, se podrán asignar 0,5 puntos. Se puede otorgar la puntuación completa a la expresión correcta de la probabilidad, aunque el estudiante no haga referencia a la binomial. Si se indican las probabilidades

solicitadas correctamente, pero no se especifica el valor concreto de los números combinatorios, se podrá penalizar hasta con 0,2 puntos.

   a. (1 pto) Errores de cálculo que no resten o simplifiquen, se descontará hasta 0,2. Si no razona la respuesta, pero se da correcta, se valora con 0,25.
   b. (1 pto) Errores de cálculo que no resten o simplifiquen, se descontará hasta 0,2.

10. (2 ptos)

   a. (1 pto) Si se identifica el suceso y la probabilidad que debe calcular pero no se llega a desarrollar (el denominador de Bayes) será un máximo de 0,5 puntos. Errores de cálculo que no resten o simplifiquen, se descontará hasta 0,2.
   b. (1 pto) Si se identifica el suceso y la probabilidad que debe calcular pero no se llega a desarrollar el denominador de Bayes será un máximo de 0,5 puntos. Si se identifican los sucesos y la probabilidad a calcular, y se sabe desarrollar el denominador de Bayes, pero no se calcula la probabilidad será un máximo de 0,75 puntos. Errores de cálculo que no resten o simplifiquen, se descontará hasta 0,2.

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Sea la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} a\,x - \frac{sen\,x}{x} + 2, & x \neq 0 \\ 2 \quad , & x = 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

b) (1 punto) Calcula el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -\frac{\pi}{2}$ y di qué tipo de extremo es.

2) Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1} \right]^{\ln x}.$$

3) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 4x$ y la recta de pendiente $\frac{1}{2}$ que corta a $f(x)$ en $x = \frac{7}{2}$.

4) Dada la siguiente función

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} \ ,$$

a) (0,75 puntos) Estudia y escribe su dominio de definición.

b) (1,25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas y ramas parabólicas. Determina las asíntotas caso de existir.

5) Sean las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = A \cdot B^T - 2I,$$

donde B^T es la matriz traspuesta de B, e I es la matriz identidad de orden 3.

a) (1 punto) Estudia si la matriz D tiene inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $C\,X = A^T \cdot B$, donde A^T es la matriz traspuesta de A.

6) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x \quad \quad + mz = 0 \\ \quad my + 2z = 2 + m^2 \\ x + y \quad \quad = 2\,m \end{cases}$$

a) (1,2 puntos) Discute según los valores de $m \in \mathbb{R}$, qué tipo de sistema es atendiendo a las posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).

b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema para el valor $m = 2$.

7) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Calcula la matriz A^n para $n \in \mathbb{N}$.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación $(A + 2\,I)\,X = B$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

8) El plano $\pi \equiv 2x + by - 2z + 4 = 0,\quad b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0,$ corta a los ejes de coordenadas en tres puntos *A*, *B* y *C*. Calcula los valores de $b \in \mathbb{R}$ tal que el área del triángulo que determinan estos tres puntos *A*, *B* y *C* sea 6 u^2.

9) Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1 punto) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r} = 2\vec{u} + \vec{w}, \qquad \vec{s} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}, \qquad \vec{t} = -3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}.$$

b) (1 punto) Si además, los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son ortogonales y unitarios, calcula razonadamente $\vec{u}\cdot\vec{r} + \vec{v}\cdot\vec{s} + \vec{w}\cdot\vec{t}$, donde · representa el producto escalar de dos vectores.

10) El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino que se produce en una bodega, sigue una distribución normal de media 150 mg/l y desviación típica 30 mg/l. La bodega se compromete a vender solamente vinos con un contenido total en sulfitos inferior a 200 mg/l, por lo que se desechan para la venta aquellos que superen esta cantidad. Se pide,

a) (1 punto) ¿Cuál es probabilidad de que un vino producido en la bodega se deseche por la elevada cantidad total de sulfitos?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de los vinos producidos en esta bodega tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l?

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de P (Z ≤ k) para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

Como norma general se valorará positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia a éste, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea inconsistente de forma evidente con el problema a resolver.

En determinados apartados se dan puntuaciones para la solución por alguno de los métodos más habituales. En todo caso, la resolución de un apartado utilizando un método distinto otorgará la puntuación máxima, siempre que el método sea correcto y lo sea también su solución.

De acuerdo con las normas generales que aparecen en la información pública, los correctores pueden bonificar hasta con un máximo de un punto, el buen uso de la lengua o el desarrollo técnico de los ejercicios.

1. (2 ptos)
   a. (1 pto) Aplicación de la definición de continuidad correctamente en todo el dominio. Tiene que indicar claramente la discontinuidad en 0 (los límites coinciden, pero la función no).
   b. (1 pto) Calculo del valor de a correcto 0,6 puntos. Cálculo de la segunda derivada 0,2 puntos. Tipo de extremo 0,2.
2. (2 ptos) Los pasos en el cálculo del límite deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta. Por errores leves se podrá descontar 0,25 puntos.
3. (2 ptos) Planteamiento del área como el valor absoluto de la integral de la diferencia de funciones con los extremos correctos 1 punto. Si la primitiva está bien serán 0,5 puntos. No se consideran más puntuaciones intermedias.
4. (2 ptos)
   a. (0,75 ptos) Por errores leves en el cálculo y/o escritura del dominio de definición se descontará hasta 0,2 puntos.
   b. (1,25 ptos) Cálculo de asíntotas verticales 0,5 (0,25*2). Cálculo de asíntota horizontal 0,35 puntos. Comprobación de no oblicua 0,2. Comprobación de no rama parabólica 0,2.
5. (2 ptos)
   a. (1 pto) Cualquier método es válido. Cálculo matriz D 0,3 puntos. Estudio existencia 0,2. Cálculo de la inversa 0,5 puntos.
   b. (1 pto) 0,2 plantear bien la solución despejando X, 0,5 ecuación final bien, 0,3 solución final bien. Algún error leve que no simplifique se podrá descontar hasta 0,2.
6. (2 ptos)
   a. (1,2 ptos) La solución correcta debe contemplar todas las clasificaciones. Si hay algún error leve que no simplifique el estudio se restará un máximo de 0,25.
   b. (0,8 ptos) Cualquier método es válido. Si hay error leve de cálculo se podrá descontar un máximo de 0,25 ptos.
7. (2 ptos)
   a. (1 pto) Si calcula las tres primeras potencias correctas 0,4 puntos. Si se aproxima, pero no llega a la solución final 0,8 puntos.
   b. (1 pto) 0,3 plantear bien la solución despejando X, 0,5 ecuación final bien, 0,2 solución final bien. Algún error leve que no simplifique se podrá descontar hasta 0,2.
8. (2 ptos) Si escribe bien los puntos 0,6 puntos (0,2*3). Errores leves y aislados se descontará un máximo de 0,2 puntos.
9. (2 ptos)
   a. (1 pto) Si responde sin ninguna justificación, no será valorado. Se podrá descontar 0,25 por algún error leve de cálculo siempre que la respuesta sea coherente con el resultado obtenido.
   b. (1 pto) Errores de cálculo que no resten o simplifiquen, se descontará hasta 0,2. El razonamiento tiene que indicar en algún momento la ortogonalidad y la condición de unitario, cuando haya que aplicarlo. Si no indica estos aspectos en ninguna ocasión será -0,4.

10. Válida cualquier estrategia para determinar la probabilidad, si es coherente y correcta. Por pequeños errores de cálculo o por copiar mal el valor de la tabla normal se quitará un máximo de 0,3 ptos en cada apartado.

- **a.** (1 pto) Debe contestarse en probabilidad. Si no se da la probabilidad, se descontará 0,3 puntos.
- **b.** (1 pto) Debe contestarse en porcentaje. Si no se da el porcentaje, se descontará 0,3 puntos.

Junio 1994.

OPCIÓN A.

1. *Un aficionado a la Bolsa invirtió 2.000.000 de pesetas en acciones de tres empresas A, B y C. Al cabo de un año la empresa A pagó el 6% del dinero invertido, la B el 8% y la C el 10%. Como consecuencia de ello, el aficionado a la Bolsa cobró un total de 162.400 pesetas. Además en la empresa C invirtió el doble que en la A. Se pide:*

a) Calcular cuánto invirtió en cada empresa. (Razonar la respuesta) *(7 puntos)*
b) Prescindiendo del último dato, es decir de que el aficionado invirtió en la empresa C el doble que en la A, ¿cuál sería la respuesta? *(3 puntos)*

Nota: *Los sistemas de ecuaciones lineales se deben resolver por el método de Gauss.*

SOLUCIÓN.

a) Planteamos un sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} A+B+C=2000000 \\ 0{,}06A+0{,}08B+0{,}10C=162400 \\ C=2A \end{cases}$ que resolvemos por el método de Gauss: $\begin{cases} A+B+C=2000000 \\ 3A+4B+5C=8120000 \\ 2A-C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=2000000 \\ B+2C=2120000 \\ -2B-3C=-4000000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=2000000 \\ B+2C=2120000 \\ \mathrm{C}=240000 \end{cases} \Rightarrow$

$$\mathrm{A} = 120\,000 \text{ ptas} \quad , \quad \mathrm{B} = 1\,640\,000 \text{ ptas} \quad , \quad \mathrm{C} = 240\,000 \text{ ptas}$$

b) Si eliminamos la última condición, el sistema tiene dos ecuaciones (las dos primeras) y tres incógnitas. Se trata de un sistema compatible indeterminado y sus soluciones habrá que expresarlas en función de una de las cantidades invertidas:

$$A = C - 120000 \quad , \quad \mathrm{B} = 2120000 - 2C$$

2. *Sea f: /// una función cuya primera derivada es f´(x) = 2x !x². Se pide:*

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, de concavidad y convexidad de la función f(x). *(4 puntos)*
b) Razonar si existen máximos, mínimos y puntos de inflexión. En caso de que existan, calcularlos. *(2 puntos)*
c) Representar la gráfica de una función cuya primera derivada sea 2x !x². *(2 puntos)*
d) La gráfica representada en el apartado anterior ¿es la única que se podía pintar? ¿por qué?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) ∃ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$$\mathrm{f'(x)} = 2\mathrm{x} - \mathrm{x}^2 = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{x}\,(2-\mathrm{x}) = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{x} = 0 \;,\; \mathrm{x} = 2$$

f' < 0	0	f' > 0	2	f' < 0

Luego la función es decreciente en $(-\infty, 0)\,\mathrm{Y}\,(2, \infty)$ y creciente en $(0, 2)$.

∃ Los intervalos de concavidad y convexidad dependen del signo de la segunda derivada:

$$\mathrm{f''(x)} = 2 - 2\mathrm{x} = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{x} = 1$$

f´´ > 0	1	f´´ < 0

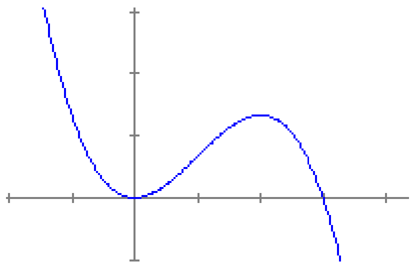
Luego la función es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, \infty)$.

b) ∃ Los posibles puntos de máximo o mínimo anulan a la primera derivada: x = 0 y x = 2. Para comprobar si se trata de máximos o de mínimos, sustituimos dichos valores en la segunda derivada:

$f''(0) = 2 > 0 \;\Rightarrow\;$ La función tiene un mínimo en $x = 0$. $\;f''(2) = -2 < 0 \;\Rightarrow\;$ La función tiene un mínimo en $x = 2$.

$\exists$ Los puntos de inflexión anulan la segunda derivada ($x = 1$) y no anulan a la tercera derivada. Como $f'''(1) = -2 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ La función tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

c) Con los datos de que disponemos: función polinómica (continua), mínimo en $x = 0$, máximo en $x = 2$, punto de inflexión en $x = 1$, una posible gráfica es:



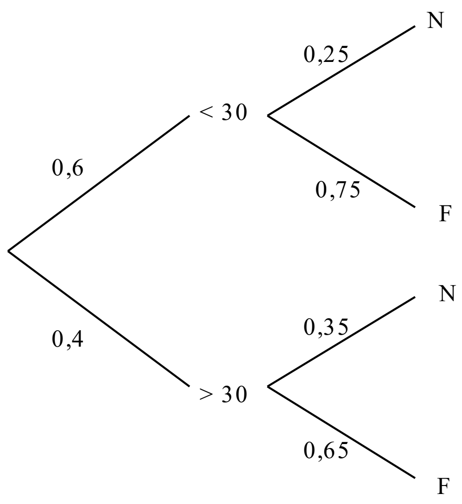
d) No, si se le suma (o resta) una constante k a la ecuación, la gráfica se desplazará k unidades hacia arriba (hacia abajo).

3. *El año pasado el 60% de los veraneantes de una cierta localidad eran menores de 30 años y el resto mayores. Un 25% de los menores de 30 años y un 35% de los mayores eran nativos de esa localidad. Se pide:*

a) La probabilidad de que un veraneante elegido al azar sea nativo de esa localidad. *(5 puntos)*
b) Se elige un veraneante al azar y se observa que es nativo de la localidad, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 30 años?. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación:



a) Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p\,(N) = 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}35 = 0{,}29$$

b) Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p\left(> 30\,/\,N\right) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}35}{0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}35} = 0{,}48$$

Junio 1994.

OPCIÓN B

1. *Los 400 alumnos de un colegio van a ir de excursión. Para ello se contrata el viaje a una empresa que dispone de 8 autobuses de 40 plazas y 10 con 50 plazas, pero sólo de 9 conductores para ese día. Dada la diferente capacidad y calidad, el alquiler de cada autobús de los grandes cuesta 8.000 pesetas y el de cada uno de los pequeños 6.000 pesetas. Se quiere saber cuántos autobuses de cada clase se tiene que alquilar para que el coste del viaje sea mínimo. Para ello se pide:*

a) Plantear el problema que se debe resolver (función objetivo y restricciones) *(5 puntos)*
b) Representar la región factible. *(2,5 puntos)*
c) Resolver el problema, explicando los pasos seguidos hasta obtener la solución. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Organicemos en una tabla los datos y condiciones del problema:

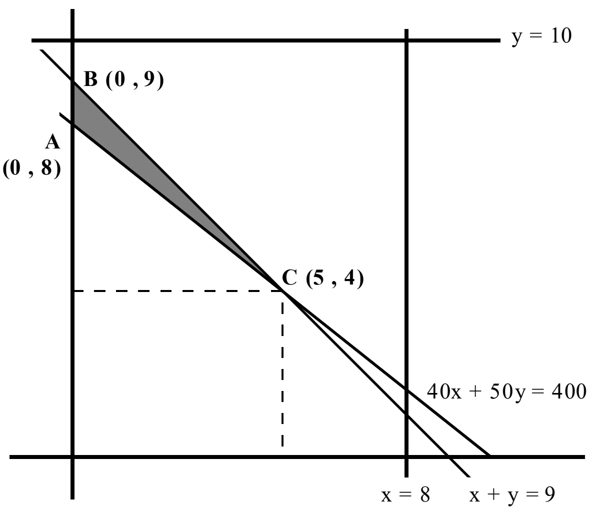
Tipo autobuses	**Número**	**Nº viajeros**	**Nº conductores**	**Precio**
40 plazas	x	40x	x	6000x
50 plazas	y	50y	y	8000y
	$0 \le x \le 8$ $0 \le y \le 10$	$40x + 50y \ge 400$	$x + y \le 9$	F (x , y)

∃ La función objetivo (que debe ser mínima) es: $F(x, y) = 6000x + 8000y$

∃ El conjunto de restricciones a que debe estar sometida la solución es: $\begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 8 \\ y \ge 0 \\ y \le 10 \\ x + y \le 9 \\ 40x + 50y \ge 400 \end{cases}$

b) La región factible es el conjunto de puntos del plano solución del sistema de restricciones.

Dibujamos las rectas x = 0, x = 8, y = 0, y = 10, x + y = 9 y 40x + 50y = 400 y seleccionamos el semiplano solución de cada una de las inecuaciones. La intersección de todos los semiplanos es la región factible: el triángulo de vértices A, B y C.



Calculemos sus vértices:

Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 40x + 50y = 400 \end{cases} \Rightarrow \ x = 0 \ , \ y = 8$

Vértice B: $\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow \ x = 0 \ , \ y = 9$

Vértice C: $\begin{cases} x + y = 9 \\ 40x + 50y = 400 \end{cases} \Rightarrow \ x = 5 \ , \ y = 4$

c) La solución del problema está en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

$$F(0\,,8)=64000 \quad , \quad F(0\,,9)=72000 \quad , \quad F(5\,,4)=62000$$

Luego la solución más barata se obtiene utilizando 5 autobuses de 40 plazas y 4 autobuses de 50 plazas.

2. *Dada la función* $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$ *, se pide:*

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Razonar si existen máximos y mínimos y en caso de que existan, calcularlos. *(6 puntos)*

b) Estudiar la existencia de asíntotas. En caso de que existan, calcularlas. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) ∃ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada: $f'(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}$

$f'(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=-2\ ,\ x=2:$

f´> 0 f´< 0 f´> 0

! 2 2

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty\,,-2)\,Y\,(2\,,\infty)$ y decreciente en $(-2\,,2)$.

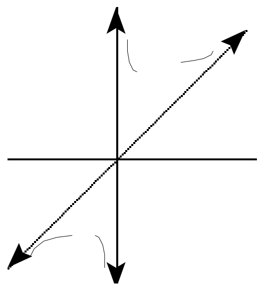
∃ La función puede tener máximos o mínimos en $x=-2$ y en $x=2$ pues son los dos valores que anulan a $f'(x)$.

Para comprobar si se tratan de máximos o de mínimos sustituimos los valores en $f''(x)=\dfrac{8}{x^3}$:

$f''(-2)<0 \Rightarrow$ en $x=-2$ la función tiene un máximo relativo.

$f''(2)>0 \Rightarrow$ en $x = 2$ la función tiene un mínimo relativo.

b) ∃ Asíntotas verticales: $x = 0$ es una asíntota vertical pues $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$.



Posición de la curva respecto a la asíntota: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+4}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+4}{x}=+\infty$

∃ Asíntotas horizontales u oblicuas: $\dfrac{x^2+4}{x}=x+\dfrac{4}{x} \Rightarrow$ $y = x$ es una asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4}{x}=0^-$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4}{x}=0^+$

3. *Un barco tiene tres sistemas de alarma independientes, cada uno de los cuales tiene una probabilidad de 0,9 de funcionar en caso necesario. Si se produce un robo, calcular razonadamente:*

a) La probabilidad de que las tres alarmas se activen. *(3 puntos)*

b) La probabilidad de que ninguna alarma se active. *(3,5 puntos)*

c) La probabilidad de que al menos una alarma se active. *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sean los sucesos A_1 = "la primera alarma se activa", A_2 = "la segunda alarma se activa" y A_3 = "la tercera alarma se activa". Como son sucesos independientes:

$$p\left(A_1\ I\ \ A_2\ I\ \ A_3\right)=p\left(A_1\right)\cdot p\left(A_2\right)\cdot p\left(A_3\right)=0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9=0{,}729$$

b) $p\left(\overline{A}_1\ I\ \ \overline{A}_2\ I\ \ \overline{A}_3\right)=p\left(\overline{A}_1\right)\cdot p\left(\overline{A}_2\right)\cdot p\left(\overline{A}_3\right)=0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1=0{,}001$

c) El suceso "al menos una alarma se activa" es el suceso contrario a "ninguna alarma se activa": $p = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$

Septiembre 1994

OPCIÓN A.

1. *Considerar la matriz* $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

a) Calcular el rango de A. *(3 puntos)*
b) Discutir si existe solución y resolver, caso de que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

(3 puntos)
c) Cambiando una sola ecuación, convertir el sistema de ecuaciones lineales del apartado b en un sistema que tenga infinitas soluciones. Calcular dichas soluciones. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Utilicemos las transformaciones elementales para conseguir una matriz triangular del mismo rango que la dada:

$$rg\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=3$$

Transformaciones elementales realizadas: F_2-F_1 , F_3-F_1

b)

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\ x-y+z=0\\ x+y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\ -2y\quad=0\\ \quad -2z=0\end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y, como es homogéneo, su única solución es: x = y = z = 0

c) Basta con sustituir la tercera ecuación (por ejemplo) por una combinación lineal de las otras dos: $E_3=E_1+E_2$

En este caso, el sistema queda: $\begin{cases}x+y+z=0\\ x-y+z=0\\ 2x+2z=0\end{cases}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x+y+z=0\\ -2y=0\\ 2y=0\end{cases}\Rightarrow x=-\lambda\ ,\ y=0\ ,\ z=\lambda$

Transformaciones elementales: (1) E_2-E_1 , E_3-2E_1

2. *Sea f: / / / una función que cumple las siguientes condiciones:*

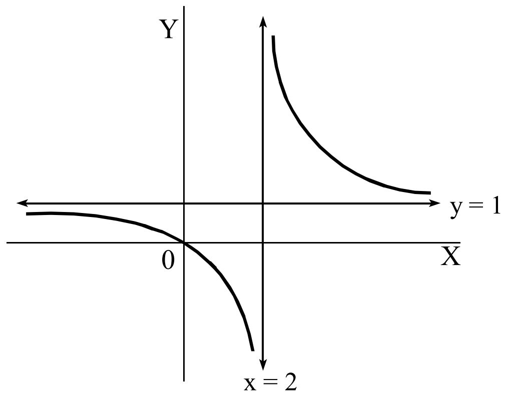
$i)\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 \qquad ii)\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1 \qquad iii)\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty \qquad iv)\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty \qquad v)\ f(0)=0$

Se pide:

a) Dibujar la gráfica de una función f que verifique las cinco condiciones anteriores. (Razonar la gráfica dibujada). *(4 puntos)*
b) Dar la ecuación de la función representada en el apartado anterior. (Razonar la respuesta). *(2 puntos)*
c) Representar la gráfica de la función $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$ *haciendo un estudio de su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.* *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a)



La gráfica cumple todas y cada una de las condiciones exigidas:

X tiene una asíntota horizontal de ecuación y = 1 como indican las dos primeras condiciones.
X tiene una asíntota vertical de ecuación x = 2como indican las condiciones tercera y cuarta.
X pasa por el origen de coordenadas como indica la quinta condición.

b) La ecuación es $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ pues tiene una asíntota vertical de ecuación x = 2 (ya que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$), una asíntota horizontal de ecuación y = 1 (ya que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$) y pasa por el origen de coordenadas,

c) La gráfica es la del apartado a). Estudiemos su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad:

$$g(x)=\frac{x}{x-2} \;\Rightarrow\; g'(x)=\frac{-2}{(x-2)^2} \;\Rightarrow\; g''(x)=\frac{4}{(x-2)^3}$$

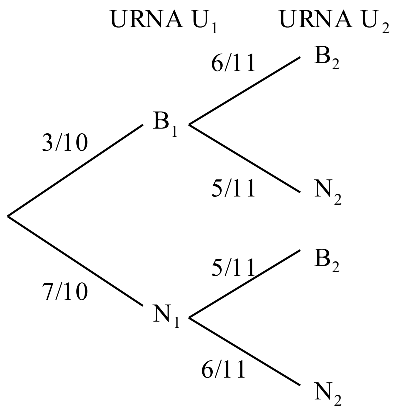
X Como g ´(x) < 0 □x $\Rightarrow$ g(x) es decreciente en todo su dominio
X g ´´(x) < 0 para x < 2 luego g(x) es convexa en $(-\infty, 2)$
g ´´(x) > 0 para x > 2 luego g(x) es cóncava en $(2, \infty)$

3. *Se tiene dos urnas U_1 y U_2, con bolas blancas y negras. La composición de las urnas es la siguiente: la U_1 contiene tres bolas blancas y siete negras, la U_2 contiene cinco blancas y cinco negras. Se saca una bola de la urna U_1 y se coloca en la U_2, sin mirarla; luego se saca una bola de la urna U_2. Se pide:*

a) La probabilidad de que la bola que se saca de U_2 sea blanca. *(5 puntos)*
b) Sabiendo que la bola que se saca de la urna U_2 es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola que se pasó de la urna U_1 a la U_2 fuera blanca? *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación:



a) Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(B_2)=p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)+p(N_1)\cdot p(B_2/N_1)=$$
$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{11}+\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{11}=\frac{18}{110}+\frac{35}{110}=\frac{53}{110}\approx 0{,}48$$

b) Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p(B_1/B_2)=\frac{p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)}{p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)+p(N_1)\cdot p(B_2/N_1)}=$$
$$=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{11}}{\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{11}+\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{11}}=\frac{\frac{18}{110}}{\frac{18}{110}+\frac{35}{110}}=\frac{\frac{18}{110}}{\frac{53}{110}}=\frac{18}{53}\approx 0{,}34$$

Septiembre 1994

OPCIÓN B.

1. *Un camión puede transportar como máximo 9 toneladas de mercancía por viaje. En un cierto viaje desea transportar al menos 4 toneladas de la mercancía A, y un peso de la mercancía B que no sea inferior a la mitad del peso que transporta de A. Sabiendo que se cobra 3000 pesetas por tonelada de A transportada y 2000 pesetas por tonelada de B, se quiere saber cuántas toneladas de A y B se deben cargar en el camión para obtener la ganancia máxima. Para ello se pide:*

a) Plantear el problema que se debe resolver (función objetivo y restricciones) *(5 puntos)*
b) Representar la región factible. *(2,5 puntos)*
c) Resolver el problema, explicando los pasos seguidos hasta obtener la solución. *(2,5 puntos)*

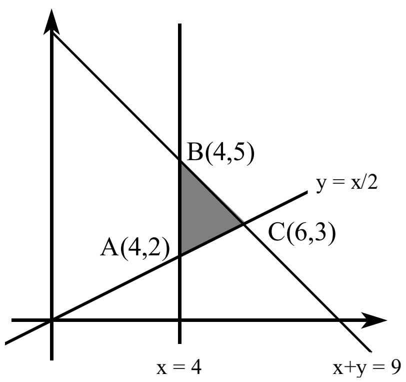
SOLUCIÓN.

Mercancía	**Nº de toneladas**	**Ganancia**
A	x	3000x
B	y	2000y
	$x \geq 0$ $x \geq 4$ $y \geq 0$ $y \geq \frac{x}{2}$ $x + y \leq 9$	F(x , y) = 3000x + 2000y

a) XFunción objetivo (máxima): F(x , y) = 3000x + 2000y

X Restricciones:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 4 \\ y \geq \frac{x}{2} \\ x + y \leq 9 \end{cases}$$

b)



Obtención de los vértices de la región factible:

Vértice A: $\begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 4 \ , \ y = 2$

Vértice B: $\begin{cases} x = 4 \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \ , \ y = 5$

Vértice C: $\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 6 \ , \ y = 3$

c) La solución está en alguno de los vértices de la región factible. Sustituyamos las coordenadas de cada vértice en la función objetivo y observemos el valor que tiene:

F(4 , 2) = 16 000 , F(4 , 5) = 22 000 , F(6 , 3) = 24 000 $\Rightarrow$ la máxima ganancia se obtendrá cargando 6 toneladas de A y 3 toneladas de B

2. *Dada la función* $y = x^3 + x$ *! 2, se pide:*

a) Dar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Razonar si existen máximos y mínimos, y en caso de que existan, calcularlos. *(3 puntos)*
b) Dar los intervalos de concavidad y convexidad de la función. Razonar si existen puntos de inflexión, y en caso de que existan, calcularlos. *(3 puntos)*
c) Representar la gráfica de la función. *(2 puntos)*
d) Dar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa x = 0. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) El crecimiento y decrecimiento de la función dependen del signo de la primera derivada: $y' = 3x^2 + 1$

Puesto que $y' > 0 \ \forall x \Rightarrow$ la función es siempre creciente

No puede tener máximos ni mínimos porque $y' \neq 0$

b) La concavidad y la convexidad dependen del signo de la segunda derivada: $y'' = 6x$

Como $y'' < 0$ para $x < 0 \Rightarrow$ la función es convexa en $(-\infty, 0)$.

Como $y'' > 0$ para $x > 0 \Rightarrow$ la función es cóncava en $(0, \infty)$.

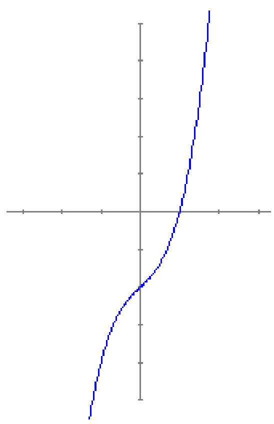
Los posibles puntos de inflexión son las soluciones de la ecuación $y'' = 0$. En este caso: $6x = 0 \Rightarrow x = 0$. Como $y''' = 6 \neq 0 \Rightarrow$ la función tiene un punto de inflexión en $(0, -2)$.

c) Las funciones polinómicas no tienen asíntotas. Además: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Calculemos los puntos de corte con los ejes: con OX: $\begin{cases} y = 0 \\ y = x^3 + x - 2 \end{cases} \Rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1: \ (1, 0)$

con OY: $\begin{cases} x = 0 \\ y = x^3 + x - 2 \end{cases} \Rightarrow y = -2: \ (0, -2)$

La gráfica será:



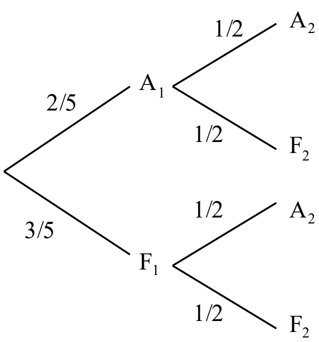
d) Ecuación de la recta tangente: $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde: $m = f'(0) = 1$ y $(x_0, y_0) = (0, -2)$. Por tanto, la ecuación es: $y + 2 = x \Rightarrow y = x - 2$

3. *Dos tiradores disparan sobre una diana. Uno tiene dos aciertos cada cinco disparos y el otro un acierto cada dos disparos. Si los dos disparan al mismo tiempo, se pide contestar razonadamente a las siguientes preguntas:*

a) La probabilidad de que los dos acierten. *(2,5 puntos)*
b) La probabilidad de que alguno acierte. *(2,5 puntos)*
c) La probabilidad de que ninguno acierte. *(2,5 puntos)*
d) La probabilidad de que uno acierte y el otro no. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación:



a) $p(A_1 \cap A_2) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$

b) $1 - p(F_1 \cap F_2) = 1 - \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

c) $p(F_1 \cap F_2) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = 0{,}3$

d) $p = p(A_1 \cap F_2) + p(F_1 \cap A_2) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{10} + \dfrac{3}{10} = 0{,}5$

Junio 1995

OPCIÓN A.

1. *Los alumnos de un conservatorio de música deciden formar una orquesta. Los gustos del público exigen que haya siempre mayor o igual número de instrumentos de cuerda que de viento, y que el número de instrumentos de cuerda no debe superar el doble del número de instrumentos de viento. En total hay disponibles 20 instrumentos de viento y 30 de cuerda. Los empresarios pagan a la orquesta 25.000 pesetas por cada instrumento de viento y 20.000 por cada uno de cuerda. Se pide:*

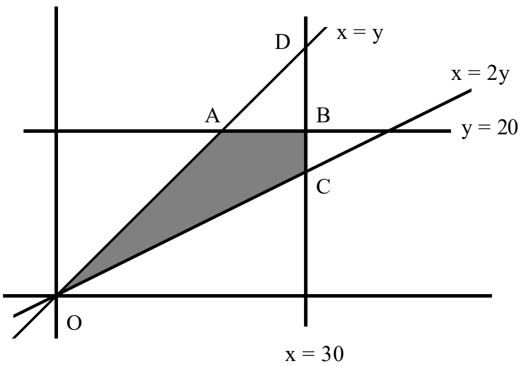
a) ¿De cuántos instrumentos de cuerda y cuántos de viento se debe componer la orquesta para obtener el máximo beneficio? *(6 puntos)*
b) Si se suprime la restricción del número total disponible de instrumentos de viento ¿varía la respuesta en el apartado a)?. Razonar la respuesta. En caso de que varíe, calcular la nueva solución. *(2 puntos)*
c) Si se suprime tanto la restricción del número total disponible de instrumentos de viento como de cuerda ¿qué ocurre con el beneficio?. Razonar la respuesta. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

Instrumentos	**Número**	**Beneficio**
Cuerda	x	20000x
Viento	y	25000y

Función objetivo (máxima): F (x , y) = 20000x + 25000y
Restricciones:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq y \\ x \leq 2y \\ y \leq 20 \\ x \leq 30 \end{cases}$$

a) Representemos la región factible y calculemos las coordenadas de sus vértices:



Vértice O: O (0 , 0)

Vértice A: $\begin{cases} x = y \\ y = 20 \end{cases} \Rightarrow x = 20, y = 20 \Rightarrow A(20, 20)$

Vértice B: $\begin{cases} y = 20 \\ x = 30 \end{cases} \Rightarrow B(30, 20)$

Vértice C: $\begin{cases} x = 30 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow C(30, 15)$

La solución al problema son las coordenadas de alguno de los vértices de la región factible. Calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos para comprobar en cuál alcanza el mayor valor:

F (0 , 0) = 0 , F (20 , 20) = 900 000 , F (30 , 20) = 1 100 000 , F (30 , 15) = 975 000 luego el número de instrumentos más adecuado es 30 de cuerda y 20 de viento.

b) Si se suprime la restricción $y \leq 20$, la solución la tendremos en el vértice D de la nueva región factible ODC. Es decir: 30 instrumentos de cada clase.

c) Si además se suprime la restricción $x \leq 30$, la región factible es abierta y el beneficio máximo no se alcanzaría nunca pues bastaría con añadir más instrumentos de cada clase para que aumentara.

2. *a) Considerar la función f(x) = $x^3 + ax + b$ siendo a, b 0 ⁄ Hallar a y b para que f(x) tenga un mínimo en el punto (1 ,1). Razonar la respuesta..* *(5 puntos)*

b) Considerar la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$. *Razonar si existen máximos, mínimos y puntos de inflexión; en caso de que existan, calcularlos.* *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Tenemos: $f(x) = x^3 + ax + b \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + a$

Si el punto (1 ,1) es un mínimo de la función $\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a + b = 1 \\ 3 + a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -3 \;,\; b = 3$

b) Calculemos f´(x) y f´´(x):

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - x^2\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{-8x}{\left(x^2-4\right)^2} \;\Rightarrow\; f''(x) = \frac{-8\left(x^2-4\right)^2 + 8x\cdot 2\left(x^2-4\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(x^2-4\right)\left[-8x^2+32+32x^2\right]}{\left(x^2-4\right)^4} = \frac{24x^2+32}{\left(x^2-4\right)^3}$$

Los posibles máximos y mínimos son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, que en este caso es x = 0. Sustituimos x = 0 en la segunda derivada y tenemos: $f''(0) < 0$ por lo que la función tiene un máximo en (0 , 0).

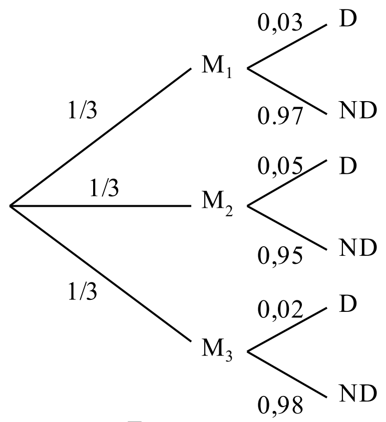
Los posibles puntos de inflexión son las soluciones de la ecuación $f''(x) = 0$. Como en este caso la ecuación no tiene solución $\Rightarrow$ la función no tiene puntos de inflexión.

3. *En una fábrica hay tres máquinas M_1, M_2 y M_3 que producen un mismo tornillo en proporciones iguales. Se sabe que la máquina M_1 produce un 3% de tornillos defectuosos, la M_2 un 5% y la M_3 un 2%. Se pide:*

a) La probabilidad de que un tornillo elegido al azar sea defectuoso. *(4 puntos)*
b) La probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso. *(1 punto)*
c) Se elige un tornillo al azar y se observa que no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina M_3?. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación:



a) Aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(D) = \frac{1}{3}\cdot 0{,}03 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}05 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}02 = \frac{1}{3}\left(0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}02\right) = 0{,}033$$

b) $p(ND) = 1 - p(D) = 1 - 0{,}033 = 0{,}967$

c) Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p(M_3 / ND) = \frac{p(M_3)\cdot p(ND/M_3)}{p(M_1)\cdot p(ND/M_1) + p(M_2)\cdot p(ND/M_2) + p(M_3)\cdot p(ND/M_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}98}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}97 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}95 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}98} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}98}{\frac{1}{3}(0{,}97 + 0{,}95 + 0{,}98)} = \frac{0{,}98}{2{,}9} = 0{,}338$$

Junio 1995.

OPCIÓN B

1. *a) En un problema de programación lineal, qué diferencia hay entre solución factible y solución óptima..* *(1 punto)*
b) Sea S la región del plano definida por las cinco inecuaciones siguientes:

$$x - y \geq -2 \qquad x + 2y \leq 6 \qquad 2x + y \leq 6 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Se pide:

b_1) Representar gráficamente la región S y calcular sus vértices. *(4 puntos)*

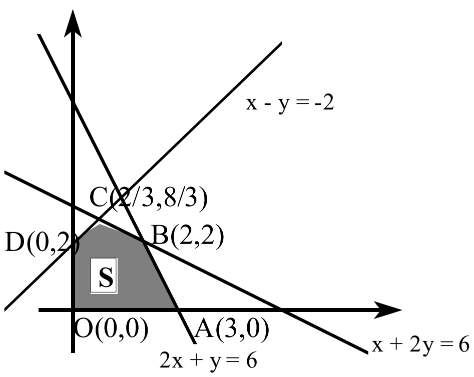
b_2) Considerar la función f(x,y) = x + y. Calcular los valores de (x,y) que hacen mínima y los que hacen máxima la función f(x,y) en la región S. Razonar la respuesta. *(2 puntos)*

b_3) Considerar la función g(x,y) = !2x ! 4y. Calcular los valores de (x,y) que hacen mínima y los que hacen máxima la función g(x,y) en la región S. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Solución factible es cualquiera que cumpla todas las restricciones y por tanto pertenezca a la región factible.
Solución óptima es la que, entre las factibles, maximice o minimice la función objetivo.

b_1)



Vértice O: O (0 , 0)

Vértice A: $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3,0)$

Vértice B: $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow B(2,2)$

Vértice C: $\begin{cases} x - y = -2 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$

Vértice D: $\begin{cases} x - y = -2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow D(0,2)$

b_2) La función objetivo alcanza su valor máximo y su valor mínimo en los vértices de la región factible. Sustituyamos las coordenadas de los vértices en la función f(x , y) = x + y para observar en cuál se maximiza y en cuál se minimiza:

$$f(0,0)=0 \;,\; f(3,0)=3 \;,\; f(2,2)=4 \;,\; f\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)=\frac{10}{3} \;,\; f(0,2)=2$$

luego la función objetivo se maximiza en $(2,2)$ y se minimiza en $(0,0)$.

b_3) Sustituyamos los vértices de la región factible en la función $g(x,y) = -2x - 4y$:

$$g(0,0)=0 \;,\; g(3,0)=-6 \;,\; \mathrm{g}(2,2)=-12 \;,\; \mathrm{g}\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)=-12 \;,\; \mathrm{g}(0,2)=-8$$

luego la función alcanza su valor máximo en $(0,0)$ y su valor mínimo en cualquier punto del lado BC.

2. *a) El coste de la producción de x unidades diarias de un determinado producto es $x^2 + 10x + 10$ y el precio de venta de una unidad es (30!x). Calcular el número de unidades del producto que deben venderse diariamente para que el beneficio sea máximo y el beneficio máximo que se obtiene. Razonar la respuesta.* *(5 puntos)*
b) Hallar la región del plano limitada por las gráficas de las siguientes funciones: $y = x^2 + 1$ e $y = x + 3$ *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) La función beneficio es la diferencia entre los ingresos (por ventas) y los costes de producción:

$$B(x) = (30 - x)x - (x^2 + 10x + 10) = -2x^2 + 20x - 10$$

Veamos dónde alcanza la función B(x) su máximo: $B'(x) = -4x + 20 = 0 \Rightarrow x = 5$ (punto crítico). Veamos que se trata en efecto de un máximo: $B''(x) = -4 < 0 \Rightarrow$ máximo.

Por tanto el beneficio es máximo cuando se producen y se venden 5 unidades. El beneficio máximo obtenido será: $B(5) = 40$.

b) Definimos la función diferencia de las dos funciones dadas: $f(x) = \left(x^2 + 1\right) - \left(x + 3\right) = x^2 - x - 2$

Veamos los puntos de corte de esta función con el eje OX: $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = -1$ y 2

Calculamos la integral definida entre –1 y 2 de la función diferencia:

$$\int_{-1}^{2} \left(x^2 - x - 2\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{8}{3} - 2 - 4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{2}$$

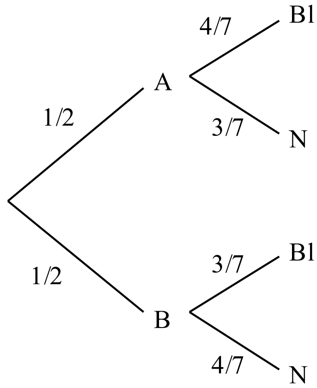
Por tanto: $S = \left| -\dfrac{9}{2} \right| = \dfrac{9}{2} u^2$

3. *Se tiene dos cajas A y B, con bolas blancas y negras. La caja A contiene 4 bolas blancas y 3 negras y la B contiene 3 blancas y 4 negras. Se selecciona una caja al azar y seguidamente se extrae una bola de la caja seleccionada. Se pide:*

a) La probabilidad de que la bola extraída sea blanca. *(5 puntos)*
b) Si se extrae una bola y resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que dicha bola sea de la caja A? *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación:



a) Aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(Bl) = p(A) \cdot p(Bl / A) + p(B) \cdot p(Bl / \mathrm{B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{7}{14} = 0{,}5$$

b) Aplicación del teorema de Bayes:

$$p(A / Bl) = \frac{p(A) \cdot p(Bl / A)}{p(A) \cdot p(Bl / A) + p(B) \cdot p(Bl / \mathrm{B})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}} = \frac{4}{7} = 0{,}57$$

Septiembre 1995.

OPCIÓN A.

1. *a) Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 5\end{pmatrix}$

Resolver, indicando los pasos seguidos, la ecuación matricial AB + CX = 2D. *(5 puntos)*

***NOTA:** X es una matriz.*

b) Escribir un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que sea incompatible y comprobar la incompatibilidad. Interpretar geométricamente este sistema. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Despejamos X en la ecuación matricial dada:

$$AB+CX=2D \;\Rightarrow\; CX=2D-AB \;\Rightarrow\; C^{-1}CX=C^{-1}(2D-AB) \;\Rightarrow\; X=C^{-1}\cdot(2D-AB)$$

X Calculemos $C^{!1}$: $\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right) \overset{(1)}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right) \overset{(2)}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right) \overset{(3)}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$

luego $C^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$ Transformaciones que conservan el rango: (1) F_2-3F_1 (2) F_1+F_2 (3) $\frac{F_2}{-2}$

X Calculemos AB: $A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}$

X Calculemos ahora la matriz X: $X=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}2 & 0\\ -6 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & 0\\ -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22 & 0\\ \frac{31}{2} & 0\end{pmatrix}$

□Otra forma de resolverlo sería considerar una matriz X de elementos desconocidos (tiene que ser 2H2) que pueden ser calculados a partir de la ecuación matricial dada:

$$AB+CX=2D \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -6 & 10\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+4c & 3b+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -6 & 10\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix}-7+a+2c & b+2d\\ -2+3a+4c & 10+3b+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -6 & 10\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases}a+2c=9\\ 3a+4c=-4\\ b+2d=0\\ 3b+4d=0\end{cases} \;\Rightarrow\; a=-22\ ,\ b=0\ ,\ c=\frac{31}{2}\ ,\ d=0$$ y queda la misma matriz X que antes.

b) Por ejemplo: $\begin{cases}x+y=1\\ x+y=2\end{cases}$. En efecto el sistema es incompatible: $\begin{cases}x+y=1\\ x+y=2\end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x+y=1\\ 0y=1\end{cases} \;\Rightarrow$ incompatible

Se trata de dos rectas paralelas. Transformaciones elementales: (1) E_2-E_1

2. *Las funciones de oferta, q = S(p), y demanda, q = D(p), que determinan la cantidad q de un producto en función de su precio p, son respectivamente:*

Se pide:

$$S(p) = p - 3 \quad ; \quad D(p) = \frac{4}{p}$$

a) Calcular el precio de equilibrio (cuando la oferta y la demanda se igualan), y para este precio la cantidad de producto demandada y ofertada. *(2 puntos)*
b) En el mismo sistema de ejes cartesianos, representar gráficamente S(p) y D(p) para p > 0, haciendo previamente un estudio del crecimiento, decrecimiento, convexidad y concavidad de cada una de las dos funciones. *(4 puntos)*
c) Calcular el área de la región limitada por las gráficas de S(p), D(p) y la recta p = 1. *(2 puntos)*

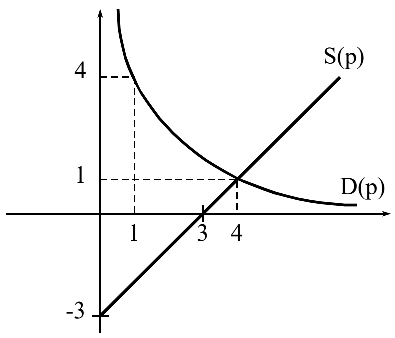
SOLUCIÓN.

a) $S(p) = D(p) \;\Rightarrow\; p - 3 = \dfrac{4}{p} \;\Rightarrow\; p^2 - 3p - 4 = 0 \;\Rightarrow\; p = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix} \;\Rightarrow\; p = 4$ (el precio no puede ser negativo. Las cantidades de producto demandada y ofertada serán: $S(4) = 1$, $D(p) = 1$.

b) Hagamos un estudio previo del crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad:

$S'(p) = 1 \;\Rightarrow\; S''(p) = 0 \;\Rightarrow$ la función de oferta es creciente y no es ni cóncava ni convexa (es una recta)

$D'(p) = -\dfrac{4}{p^2} < 0 \;\; \forall x \;\Rightarrow\; D''(p) = \dfrac{8}{p^3} > 0 \;\; \forall p > 0 \;\Rightarrow$ la función de demanda es decreciente y cóncava (es una hipérbola). La gráfica es:



c) A la vista de la gráfica: $S = \int_1^4 D(p)\,dp - \int_1^4 S(p)\,dp \;\Rightarrow$

$$S = \int_1^4 \left(\frac{4}{p}\right) dx - \int_1^4 (p-3)\,dx = \left[4 \cdot \ln p\right]_1^4 - \left[\frac{p^2}{2} - 3p\right]_1^4 =$$

$$= (4 \cdot \ln 4 - \ln 1) - \left(8 - 12 - \frac{1}{2} + 3\right) = 4 \cdot \ln 4 + \frac{3}{2} \cong 7\ u^2$$

3. *Una moneda está trucada de manera que la probabilidad de salir cara es doble que la de salir cruz. Se lanza la moneda y si sale cara se elige al azar un número entre el 1 y el 5; si sale cruz se elige al azar un número entre el 1 y el 3. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) Salga cara en la moneda. *(1 punto)*
b) Salga cruz en la moneda. *(1 punto)*
c) Resulte elegido el número 5. *(3 puntos)*
d) Resulte elegido un número par. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $p\ (C) = \dfrac{2}{3}$

b) $p\ (X) = \dfrac{1}{3}$

c) $p\ (5) = p\,(C) \cdot p\ (5\ /\ C) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{15} = 0{,}133$

d) $p\ (par) = p\ (C) \cdot p\ (par\ /\ C) + p\ (X) \cdot p\ (par\ /\ X) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{15} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{17}{45} = 0{,}378$

Septiembre 1995.

OPCIÓN B.

1. *Una compañía aérea tiene 2 aviones A y B para cubrir un determinado trayecto. El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B, pero no puede pasar de 120 vuelos y el avión B no puede hacer más de 180. Entre los dos aviones han de realizar al menos 60 vuelos y como mucho 200. Se pide:*

a) Si en cada vuelo del avión A la empresa gana 300.000 pesetas y en cada vuelo del avión B 200.000, ¿cuántos vuelos debe realizar cada avión para maximizar los beneficios de la empresa? (Explicar los pasos seguidos para resolver el problema) *(6 puntos)*
b) ¿Se puede quitar alguna restricción sin que la solución varíe?. Razonar la respuesta. *(1 punto)*
c) Si en cada vuelo el avión A consume el doble de litros de gasolina que el avión B, ¿cuántos vuelos ha de hacer cada avión para que el consumo de gasolina sea mínimo?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

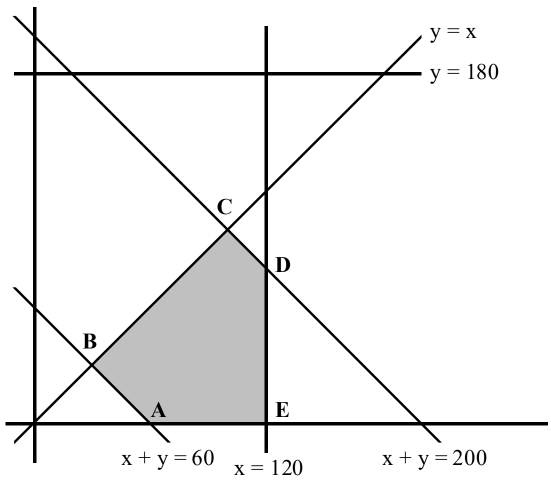
SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de Programación Lineal. Sea x el número de vuelos del avión A e y el de vuelos del avión B. Escribamos la función objetivo y sus restricciones:

X Función objetivo: $f(x, y) = 300000x + 200000y$ (maximizar)

X Restricciones: $\begin{cases} 0 \le x \le 120 \\ 0 \le y \le 180 \\ y \le x \\ 60 \le x + y \le 200 \end{cases}$

Representemos gráficamente el conjunto de restricciones (sistema de inecuaciones de dos incógnitas):



X La recta de ecuación x = 0 es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $0 \le x$ es el semiplano de la derecha. La recta de ecuación x = 120 es paralela el eje de ordenadas y la solu-ción de $x \le 120$ es el semiplano de la izquierda.
X La recta de ecuación y = 0 es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $0 \le y$ es el semiplano superior. La recta de ecuación y = 180 es paralela al eje de abscisas y la solución de $y \le 180$ es el semiplano inferior.
X La recta de ecuación $x + y = 60$ pasa por los puntos $(60, 0)$ y $(0, 60)$ (por ejemplo). La solución de $x + y \ge 60$ es el semi-plano al que no pertenece el origen de coordenadas.
X La recta de ecuación $x + y = 200$ pasa por los puntos $(200, 0)$ y $(0, 200)$ (por ejemplo). La solución de $x + y \le 200$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La solución común de todas las inecuaciones es la región factible(en gris). La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos sus coordenadas y el valor de la función en cada uno de ellos:

Vértice A: $\begin{cases} y = 0 \\ x + y = 60 \end{cases} \Rightarrow A(60, 0) \Rightarrow f(60, 0) = 300000 \cdot 60 = 18000000$

Vértice B: $\begin{cases} y = x \\ x + y = 60 \end{cases} \Rightarrow B(30, 30) \Rightarrow f(30, 30) = 300000 \cdot 30 + 200000 \cdot 30 = 15000000$

Vértice C: $\begin{cases} y = x \\ x + y = 200 \end{cases} \Rightarrow C(100, 100) \Rightarrow f(100, 100) = 300000 \cdot 100 + 200000 \cdot 100 = 50000000$

Vértice D: $\begin{cases} x = 120 \\ x + y = 200 \end{cases} \Rightarrow D(120\,,80) \Rightarrow f(120\,,80) = 300000 \cdot 120 + 200000 \cdot 80 = 52000000$

Vértice E: $\begin{cases} x = 120 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E(120\,,0) \Rightarrow f(120\,,0) = 300000 \cdot 120 = 36000000$

Por tanto, el máximo beneficio lo obtiene con 120 vuelos del avión A y 80 vuelos del avión B.

b) Sí. La restricción $y \le 180$ se podría eliminar pues no contribuye a formar la región factible. También sobra $x \ge 0$.

c) La función objetivo referida al consumo será: $F(x\,,y) = 2x + y$. Calculando el valor de la función en cada uno de los vértices de la región factible, se llega a la conclusión de que el menor consumo se tiene en el vértice B, es decir para 30 vuelos de cada uno de los tipos de avión.

2. *Considerar la función* $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{x^2}$. *Se pide:*

a) Dar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, de concavidad y convexidad de la función. Razonar si existen máximos, mínimos y puntos de inflexión. *(4 puntos)*

b) Razonar si existen asíntotas y en caso de que existan, calcularlas. *(2 puntos)*

c) Representar la gráfica de la función. *(1 punto)*

d) Calcular $\int_1^4 \dfrac{1 + x^2}{x^2}\,dx$. *Explicar qué representa este valor.* *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) X Tenemos: $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} \Rightarrow$

f´(x) > 0	f´(x) < 0
	0

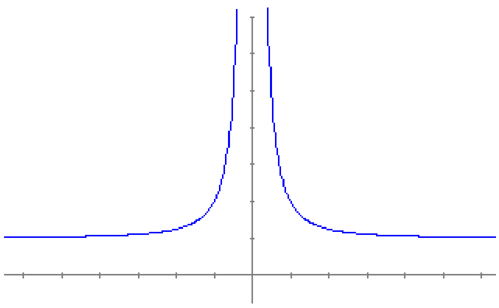
luego la función es creciente en $(-\infty\,,0)$ y decreciente en $(0\,,\infty)$. No tiene puntos de máximo ni de mínimo porque $f'(x) \ne 0 \quad \forall x$

X $f''(x) = \dfrac{6}{x^4} > 0 \;\; \forall x \Rightarrow$ la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión porque $f''(x) \ne 0 \quad \forall x$

b) X x = 0 es una asíntota vertical pues $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + x^2}{x^2} = \infty$

X y = 1 es una asíntota horizontal pues $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 + x^2}{x^2} = 1$

c)



d) $\int_1^4 \dfrac{1 + x^2}{x^2}\,dx = \int_1^4 \left(x^{-2} + 1\right)dx = \left[\dfrac{x^{-1}}{-1} + x\right]_1^4 =$

$= \left[-\dfrac{1}{x} + x\right]_1^4 = \left(-\dfrac{1}{4} + 4\right) - (-1 + 1) = \dfrac{15}{4}$

Representa el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas x = 1 y x = 4.

3. *Se tiene dos urnas con bolas blancas y verdes. Una de las urnas contiene 8 bolas blancas y 4 verdes y la otra contiene 6 blancas y 10 verdes. Se extrae una bola de cada urna. Calcula:*

a) La probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color. *(5 puntos)*

b) La probabilidad de que una bola sea verde y la otra blanca. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $p\left[(B_1 \text{ I } B_2) \text{ Y } (V_1 \text{ I } V_2)\right] = p(B_1 \text{ I } B_2) + p(V_1 \text{ I } V_2) = \dfrac{8}{12} \cdot \dfrac{6}{16} + \dfrac{4}{12} \cdot \dfrac{10}{16} = \dfrac{88}{192} = 0{,}458$

b) $p\left[(B_1 \text{ I } V_2) \text{ Y } (V_1 \text{ I } B_2)\right] = p(B_1 \text{ I } V_2) + p(V_1 \text{ I } B_2) = \dfrac{8}{12} \cdot \dfrac{10}{16} + \dfrac{4}{12} \cdot \dfrac{6}{16} = \dfrac{104}{192} = 0{,}542$

Junio 1996.

OPCIÓN A.

1. *Un fabricante de alfombras dispone de las siguientes existencias de lana: 500 kg. de color azul, 400 kg. de color verde y 225 kg. de color rojo. Desea fabricar dos tipos de alfombras, A y B. Para fabricar una de tipo A se necesitan 1 kg. de lana azul y 2 kg. de lana verde y para fabricar una de tipo B, 2 kg. de lana azul, 1 kg. de lana verde y 1kg. de lana roja. Cada alfombra de tipo A se vende por 2.000 pesetas y cada una de tipo B por 3.000 pesetas. Se supone que se vende todo lo que se fabrica. Se pide:*

a) ¿Cuántas alfombras de cada tipo se han de fabricar para que el beneficio sea máximo?, ¿cuál es ese beneficio máximo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. *(8 puntos)*
b) ¿Qué cantidad de lana de cada color quedará cuando se fabrique el número de alfombras que proporciona el máximo beneficio? *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

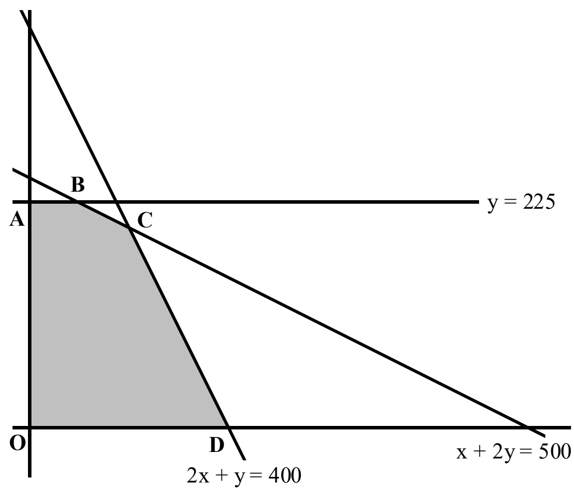
Es un problema de Programación Lineal. Debemos construir la función objetivo y las restricciones a que está sometida. Elaboremos una tabla con lo datos y condiciones expresados en el enunciado:

Tipo	**número**	**Lana azul**	**Lana verde**	**Lana roja**	**Beneficio**
A	x	x	2x	0x	2000x
B	y	2y	y	y	3000y
	$x \geq 0$; $y \geq 0$	≤ 500	≤ 400	≤ 225	$f(x, y)$

• Función objetivo (maximizar): $f(x, y) = 2000x + 3000y$

• Restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \end{cases}$

Construyamos la región factible que es la solución del conjunto de restricciones:



- La recta x = 0 es el eje de ordenadas y la inecuación $x \geq 0$ tiene como solución el semiplano de la derecha.
- La recta y = 0 es el eje de abscisas y la inecuación $y \geq 0$ tiene como solución el semiplano superior.
- La recta $x + 2y = 500$ pasa por los puntos $(500, 0)$ y $(0, 250)$ (por ejemplo) y la solución de la inecuación $x + 2y \leq 500$ es el semiplano al que pertenece el origen.
- La recta $2x + y = 400$ pasa por los puntos $(200, 0)$ y $(0, 400)$ (por ejemplo) y la solución de la inecuación $2x + y \leq 400$ es el semiplano al que pertenece el origen.
- La recta $y = 225$ es paralela al eje de abscisas y la solución de $y \leq 225$ es el semiplano inferior.

La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos las coordenadas de dichos vértices y el valor que tiene la función objetivo en los mismos:

Vértice O: $O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0$
Vértice A: $A(0, 225) \Rightarrow f(0, 225) = 3000 \cdot 225 = 675000$

Vértice B: $\begin{cases} x+2y=500 \\ y=225 \end{cases} \Rightarrow B(50\,,225) \Rightarrow f(50\,,225)=2000\cdot 50+3000\cdot 225=775000$

Vértice C: $\begin{cases} x+2y=500 \\ 2x+y=400 \end{cases} \Rightarrow C(100\,,200) \Rightarrow f(100\,,200)=2000\cdot 100+3000\cdot 200=800000$

Vértice D: $\begin{cases} y=0 \\ 2x+y=400 \end{cases} \Rightarrow D(200\,,0) \Rightarrow f(200\,,0)=2000\cdot 200=400000$

Por tanto, la función objetivo se maximiza en el vértice C. Interesa fabricar 100 alfombras del tipo A y 200 del tipo B.

b) La lana de cada color que se gasta es: Azul: $100+400=500\text{ kg} \Rightarrow$ no sobra .
Verde: $200+200=400\text{ kg} \Rightarrow$ no sobra.
Roja: $0+200=200\text{ kg} \Rightarrow$ sobran 25 kg.

2. *a) Encontrar un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima. Razonar la respuesta.* *(5 puntos)*
b) Calcular el área del recinto plano limitado por las gráficas de $y=x^2-9$ *,* $y=7$. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sea x el número buscado. La función que debe ser máxima es: $f(x)=x-x^2$. Estudiemos para qué valor de x la función alcanza su máximo: $f'(x)=1-2x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$. Como $f''(x)=-2<0 \Rightarrow$ f(x) es máxima en $x=\frac{1}{2}$.

El número buscado es pues $x=\frac{1}{2}$.

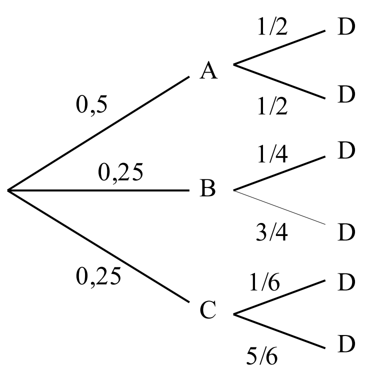
b) Escribamos la función diferencia de las dos funciones dadas: $f(x)=x^2-9-7=x^2-16$.
Los puntos de corte de esta función con el eje OX (límites de integración) son: $x^2-16=0 \Rightarrow x=-4\ ,\ x=4$.
Por tanto:

$$\int_{-4}^{4}\left(x^2-16\right)=\left[\frac{x^3}{3}-16x\right]_{-4}^{4}=\left(\frac{64}{3}-64\right)-\left(\frac{-64}{3}+64\right)=\frac{64}{3}-64+\frac{64}{3}-64=\frac{128}{3}-128=-\frac{256}{3} \Rightarrow S=\frac{256}{3}u^2$$

3. *Una fábrica de coches tiene tres cadenas de producción A, B y C. La cadena A fabrica el 50% del total de coches producidos, la B el 25% y la C el resto. La probabilidad de que un coche resulte defectuoso es en la cadena A de 1/2, en la B de 1/4 y en la C de 1/6. Calcular razonadamente:*

a) La probabilidad de que un coche sea defectuoso y haya sido fabricado por la cadena A. *(2 puntos)*
b) La probabilidad de que un coche sea defectuoso. *(4 puntos)*
c) Si un coche no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la cadena C? *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.



a) $p(D \cap A)=p(A)\cdot p(D/A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=0{,}25$

b) Aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(D)=p(A)\cdot p(D/A)+p(B)\cdot p(B/D)+p(C)\cdot p(D/C)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}=\frac{12}{48}+\frac{3}{48}+\frac{2}{48}=\frac{17}{48}\cong 0{,}35$$

c) Aplicación del teorema de Bayes:

$$p(C/\overline{D})=\frac{p(C)\cdot p(\overline{D}/C)}{p(A)\cdot p(\overline{D}/A)+p(B)\cdot p(\overline{D}/B)+p(C)\cdot p(\overline{D}/C)}=$$
$$=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}}=\frac{10}{31}\cong 0{,}32$$

Junio 1996.

OPCIÓN B.

1. *Tres personas A, B y C le van a hacer un regalo a un amigo común. El regalo les cuesta 8.600 pesetas. Como no todos disponen del mismo dinero deciden pagar de la siguiente manera: A paga el triple de lo que pagan B y C juntos, y por cada 2 pesetas que paga B, C paga 3 pesetas. Se pide:*

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que permita determinar cuánto paga cada persona. *(5 puntos)*
b) Resolver el sistema planteado en el apartado anterior por el método de Gauss. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $$\begin{cases} A+B+C=8600 \\ A=3\cdot(B+C) \\ \dfrac{B}{C}=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=8600 \\ A-3B-3C=0 \\ 3B-2C=0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} A+B+C=8600 \\ A-3B-3C=0 \\ 3B-2C=0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A+B+C=8600 \\ 3B-2C=0 \\ A-3B-3C=0 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A+B+C=8600 \\ 3B-2C=0 \\ -4B-4C=-8600 \end{cases} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A+B+C=8600 \\ 3B-2C=0 \\ -20C=-25800 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\;$ C = 1290 , B = 860 , A = 6450

Transformaciones elementales: (1) Cambio de orden de las ecuaciones
(2) E_3-E_1
(3) (3) $3E_3+4E_2$

es decir: A paga 6450 ptas., B paga 860 ptas. y C paga 1290 ptas.

2. *El coste total de fabricación de q unidades de un cierto artículo es $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$ dólares. Se define coste medio por unidad como el cociente C(q) / q . Se pide:*

a) ¿En qué nivel de producción será menor el coste medio por unidad?. Razonar la respuesta. *(7 puntos)*
b) ¿Tiene la función coste medio por unidad puntos de inflexión?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) La función "coste medio por unidad" es: $f(q)=\dfrac{3q^2+5q+75}{q}$. Veamos para qué valor de q alcanza su mínimo:

$$f'(q)=\frac{(6q+5)\cdot q-\left(3q^2+5q+75\right)}{q^2}=\frac{3q^2-75}{q^2}=0 \;\Rightarrow\; 3q^2-75=0 \;\Rightarrow\; q=\pm 5 \text{ (puntos críticos)}$$

$$f''(q)=\frac{6q\cdot q^2-\left(3q^2-75\right)\cdot 2q}{q^4}=\frac{150}{q^3} \;\Rightarrow\; \begin{cases} f''(5)>0 \;\Rightarrow\; \text{mínimo} \\ f''(-5)<0 \;\Rightarrow\; \text{máximo} \end{cases}$$ luego el coste medio por unidad es mínimo

para una producción de q = 5.

b) La función no tiene puntos de inflexión porque $f''(q)\neq 0 \quad \forall q$

3. *Se sabe que la desviación típica del peso de los individuos de una cierta población es de 6 Kg. Calcula el tamaño de la muestra que se ha de considerar para, con un nivel de confianza del 95%, estimar el peso medio de los individuos de la población con un error inferior a 1 Kg. Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La desviación típica poblacional es $\sigma = 6\,kg$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible es E = 1kg: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \dfrac{z_{\alpha/2}^2 \cdot \sigma^2}{E^2} = \dfrac{1{,}96^2 \cdot 6^2}{1^2} = 138{,}3$ luego el tamaño de la muestra debe ser de 139 individuos como mínimo.

Septiembre 1996.

OPCIÓN A.

1. *En un hospital se quiere elaborar una dieta alimenticia para un determinado grupo de enfermos con dos alimentos A y B. Estos alimentos contienen tres principios nutritivos: N_1, N_2 y N_3. Una unidad de A vale 100 pesetas y contiene 2 unidades de N_1, 1 de N_2 y 1 de N_3. Una unidad de B vale 240 pesetas y contiene 1, 3 y 2 unidades de N_1, N_2 y N_3 respectivamente.*

Un enfermo de este grupo necesita diariamente al menos 4, 6 y 5 unidades de N_1, N_2 y N_3 respectivamente. Se pide:

a) Plantear un problema de programación lineal que permita determinar las cantidades de alimento A y B que dan lugar a la dieta de coste mínimo. *(5 puntos)*
b) Resolver el problema planteado en el apartado anterior. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Organicemos los datos y condiciones del problema en una tabla para facilitar el análisis de la situación y escribir la función objetivo y sus restricciones:

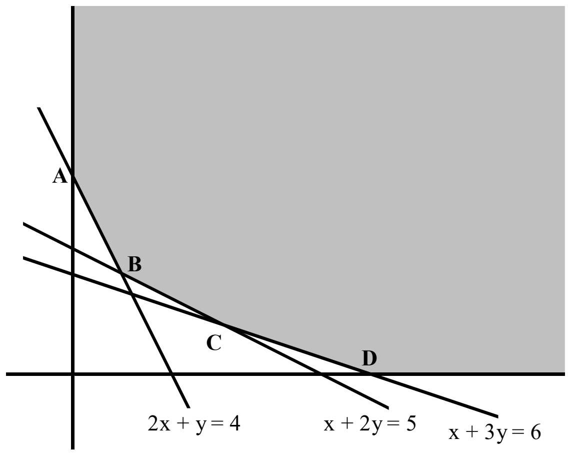
Alimento	Cantidad	N_1	N_2	N_3	Coste
A	x	2x	x	x	100x
B	y	y	3y	2y	240y
	$x \geq 0$, $y \geq 0$	≥ 4	≥ 6	≥ 5	$f(x, y)$

Función objetivo (minimizar):
$f(x, y) = 100x + 240y$

Restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 4 \\ x + 3y \geq 6 \\ x + 2y \geq 5 \end{cases}$

b) Representemos gráficamente las restricciones para dibujar la región factible:

- La recta x = 0 es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.
- La recta y = 0 es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.
- La recta $2x + y = 4$ pasa por los puntos $(0, 4)$ y $(2, 0)$ (por ejemplo) y la inecuación $2x + y \geq 4$ tiene por solución el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.
- La recta $x + 3y = 6$ pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(6, 0)$ (por ejemplo) y la inecuación $x + 3y \geq 6$ tiene por solución el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.
- La recta $x + 2y = 5$ pasa por los puntos $(5, 0)$ y $(1, 2)$ (por ejemplo) y la inecuación $x + 2y \geq 5$ tiene por solución el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.



La función objetivo alcanza su mínimo en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos las coordenadas de dichos vértices y el valor de la función objetivo en los mismos:

Vértice A: $A(0, 4) \Rightarrow f(0, 4) = 240 \cdot 4 = 960$

Vértice B: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(1, 2) \Rightarrow f(1, 2) = 100 + 240 \cdot 2 = 580$

Vértice C: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow C(3, 1) \Rightarrow f(3, 1) = 100 \cdot 3 + 240 = 540$

Vértice D: $D(6, 0) \Rightarrow f(6, 0) = 100 \cdot 6 = 600$

La función objetivo tiene su mínimo en el vértice C, luego conviene preparar 3 unidades del alimento A y 1 unidad del alimento B.

2. *Considerar la función* $f(x) = x^3 - 3x$. *Se pide:*

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Razonar si existen máximos y mínimos y, en caso afirmativo, calcularlos. *(3 puntos)*
b) Razonar si existen puntos de inflexión. En caso de que existan, calcularlos. *(2 puntos)*
c) Calcular el área de la superficie comprendida entre la gráfica f(x) y el eje OX. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3$.
$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ (puntos donde cambia el signo de $f'(x)$ y posibles puntos de máximo y mínimo relativos).
Se tiene:

$f'(x) > 0$		$f'(x) < 0$		$f'(x) > 0$
	-1		1	

$\Rightarrow$ la función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y decreciente en $(-1, 1)$.

Como la función es polinómica y por tanto continua, debe tener un máximo en $x = -1$ (pasa de creciente a decreciente) y un mínimo en $x = 1$ (pasa de decreciente a creciente): Máximo en $(-1, 2)$ y mínimo en $(1, -2)$.

b) Un punto de inflexión se caracteriza por: $f''(x) = 0$ y $f'''(x) \neq 0$.
$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ y como $f'''(x) = 6 \neq 0\ \forall x$ la función tiene un punto de inflexión en x = 0: $(0, 0)$

c) Los puntos de corte de la función y el eje de abscisas son:
$x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0\ ,\ x = -\sqrt{3}\ ,\ x = \sqrt{3}$

Se tiene: $\int (x^3 - 3x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-\sqrt{3}}^{0} = 0 - \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right) = \frac{9}{4} \\ S_2 = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{\sqrt{3}}\right| = \left|\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right) - 0\right| = \left|-\frac{9}{4}\right| = \frac{9}{4} \end{cases}$

Por tanto: $S = S_1 + S_2 = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} u^2$

3. *La probabilidad de que un estudiante de Economía obtenga el título de economista es de 0,6. Calcular la probabilidad de que de un grupo de tres estudiantes matriculados en Economía:*

a) Los tres obtengan el título. *(2,5 puntos)*
b) Ninguno obtenga el título. *(2,5 puntos)*
c) Al menos uno obtenga el título. *(2,5 puntos)*
d) Sólo uno obtenga el título. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Se trata de una binomial $B(3\ ,\ 0{,}6)$:

a) $p(\text{"}tres\ éxitos\text{"}) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^0 = 0{,}216$

b) $p(\text{"}cero\ éxitos\text{"}) = \binom{3}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}064$

c) El suceso “al menos uno obtiene título” es el contrario del suceso “ninguno obtiene título”. Por tanto:

$p(\text{"}al\ menos\ uno\ obtiene\ título\text{"}) = 1 - 0{,}064 = 0{,}936$

d) $p(\text{"}un\ éxito\text{"}) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^2 = 3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}16 = 0{,}288$

Septiembre 1996.

OPCIÓN B.

1. *Considerar las matrices* $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Se pide:*

a) Comprobar que no se cumple la siguiente igualdad: (A + B)^2 *=* A^2 *+* B^2 *+ 2AB. ¿Cuál es la razón de que no se cumpla?* *(6 puntos)*

b) Considerar el sistema de ecuaciones lineales $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *. Discutir si existe solución y, en caso afirmativo, resolverlo. Interpretar geométricamente el sistema.* *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $(A+B)^2=\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (1)

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$; $B^2=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

luego: $A^2+B^2+2AB=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (2)

Como se observa: $(1)\neq(2)$. La razón es que el producto de matrices no es conmutativo $A\cdot B\neq B\cdot A$ y por tanto:

$$(A+B)^2=(A+B)\cdot(A+B)=A\cdot A+A\cdot B+B\cdot A+B\cdot B=A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2$$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución).

Las ecuaciones representan a dos rectas paralelas.

2. *La función de beneficios de una empresa es* $B(x)=\dfrac{3x-6}{x+1}$ *donde x representa los años de vida de la empresa (* $x\geq 0$ *) y B(x) está expresado en millones de pesetas. Se pide:*

a) Determinar cuándo la empresa tiene ganancias y cuándo pérdidas. *(3 puntos)*
b) Determinar si B(x) tiene máximos, mínimos y puntos de inflexión en su dominio de definición. *(4 puntos)*
c) ¿Están los beneficios limitados?. Razonar la respuesta. Si lo están, ¿cuál es su límite?. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Se trata de ver para qué valores de x la función B(x) es positiva o negativa: $B(x)=\dfrac{3x-6}{x+1}=0 \Rightarrow x=2$

Para $x < 2$: $B(x) < 0$ luego en los dos primeros años la empresa tiene pérdidas.
Para $x > 2$: $B(x) > 0$ luego a partir del segundo año la empresa tiene ganancias.

b) $B'(x) = \dfrac{3\cdot(x+1)-(3x-6)}{(x+1)^2} = \dfrac{9}{(x+1)^2} > 0 \;\; \forall x \;\; \Rightarrow$ la función es siempre creciente y no tiene máximos ni mínimos.

Veamos si tiene puntos de inflexión: $B''(x) = \dfrac{-9\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{-18}{(x+1)^3} \neq 0 \;\; \forall x \;\; \Rightarrow$ la función no tiene p. de inflexión.

c) Puesto que la función es creciente, veamos qué pasa cuando el tiempo tienda a infinito:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-6}{x+1} = 3$ luego los beneficios se aproximarán a tres millones de pesetas pero no serán mayores.

3. *En una gran empresa, la desviación típica de la edad de sus trabajadores es de 6 años. Se considera una muestra aleatoria de 100 trabajadores que revela una media de edad de 38 años. Determina un intervalo de confianza del 95% para la edad media de los trabajadores de dicha empresa. Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta.*

(10 puntos)

SOLUCIÓN.

La desviación típica poblacional es $\sigma = 6$ años.

Para un intervalo de confianza del 95% el valor crítico que debemos utilizar es: $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Calculemos el error máximo admisible (radio del intervalo): $E = z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\cdot\dfrac{6}{\sqrt{100}} = 1{,}176$

El intervalo de confianza para la edad media de la población, a partir de la obtenida en la muestra es:

$\left(\mu_{\overline{X}} - E \;,\; \mu_{\overline{X}} + E\right) = (38 - 1{,}176 \;,\; 38 + 1{,}176) = (36{,}824 \;,\; 39{,}176)$ es decir, la edad media estará comprendida entre

36,824 y 39,176 años.

Junio 1997.

OPCIÓN A.

1. *Sea S la región del plano definida por las tres inecuaciones siguientes:* $x - y - 1 \le 0$, $y \ge 3 - 3x$, $x + 3y \ge 5$

a) Representar gráficamente la región S. *(2 puntos)*
b) Considerar la función f(x , y) = x + 3y. Calcular, si existen, los valores de (x , y) que hacen máxima y los que hacen mínima la función f(x , y) en la región S. Razonar la respuesta. *(4 puntos)*
c) Suponer que en la tercera inecuación se cambia la desigualdad, es decir las inecuaciones que definen S son:

$$x - y - 1 \le 0 \quad , \quad y \ge 3 - 3x \quad , \quad x + 3y \le 5$$

¿Cuáles son ahora las respuestas del apartado b)?. Razonar la respuesta. *(4 puntos)*

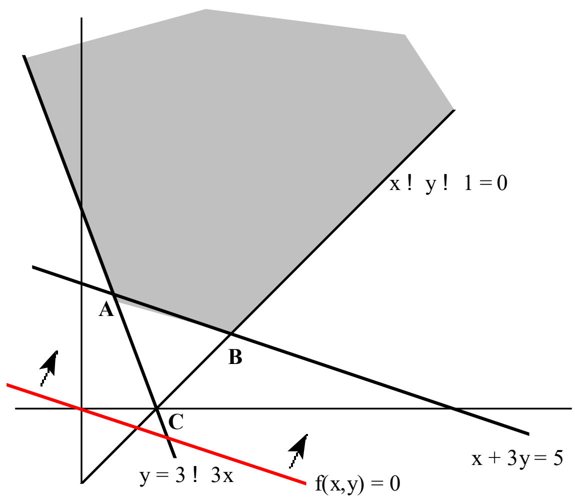
SOLUCIÓN.

a) - La recta $x - y - 1 = 0$ pasa por los puntos $(0, -1)$ y $(1, 0)$ (por ejemplo). La solución de la inecuación $x - y - 1 \le 0$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

- La recta $y = 3 - 3x$ pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(1, 0)$ (por ejemplo). La solución de la inecuación $y \ge 3 - 3x$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

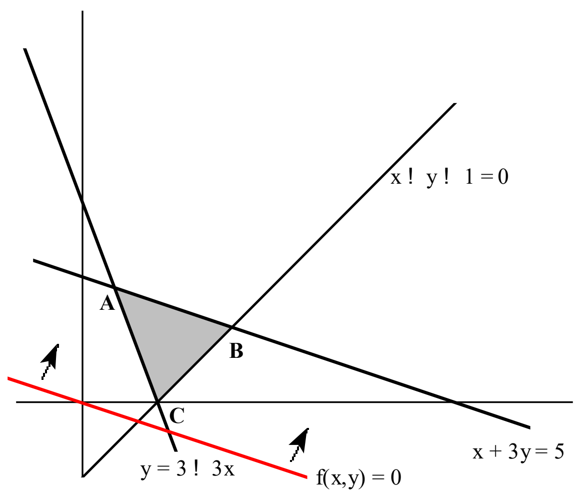
- La recta $x + 3y = 5$ pasa por los puntos $(5, 0)$ y $(2, 1)$ (por ejemplo). La solución de la inecuación $x + 3y \ge 5$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

La región S, que satisface las tres desigualdades, está señalada en gris.



b) Representamos la función $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x + 3y = 0$. Se trata de una recta que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(3, -1)$ (por ejemplo). Puesto que es paralela al lado AB de S, al trasladarla en dirección a S, los primeros puntos de la región S que toca es el lado AB y como la región S es abierta, no existe un punto de la misma que sea el más alejado. En consecuencia, la función $f(x, y)$ alcanza su mínimo valor en cualquier punto del segmento AB y no alcanza un valor máximo en S.

c) Ahora la región S es el triángulo ABC. Al trasladar la función $f(x, y) = 0$ paralelamente a sí misma hacia S, el primer vértice que toca es el $C(1, 0)$ donde alcanza el mínimo y los dos últimos el A y el B por lo que alcanza el máximo en cualquier punto del segmento AB.



2. *Sea la función f(x) = ln (1 + x²). Se pide:*

a) Determinar el dominio de definición de f(x). *(1 punto)*
b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). Razonar si existen máximos y mínimos. En caso afirmativo, calcularlos. *(6 puntos)*
c) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en x = 0. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $D(f) = \{x \in \Re \ / \ 1 + x^2 > 0\} = \Re$

b) Los intervalos ce crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$. Se tiene:

f´(x) < 0	0	f´(x) > 0

luego la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.
La función es continua por lo que tiene un mínimo en x = 0 ya que pasa en dicho punto de ser decreciente a ser creciente. Por tanto, la función tiene un mínimo en el punto $(0, 0)$.

c) Puesto que en $(0, 0)$ la función tiene un mínimo, la tangente es horizontal de ecuación y = 0.

3. *En una bolsa hay 5 bolas verdes y 4 marrones. Se extraen al azar dos bolas. Calcular razonadamente la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color si:*

a) se extraen simultáneamente. *(5 puntos)*
b) se extrae una bola, se devuelve a la bolsa y se extrae otra bola. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Extraerlas simultáneamente equivale a extraer una y, sin reponerla, extraer la otra. En este caso, la extracción de la segunda bola está condicionada por la primera extracción. Se tiene:

$$p\left[(V_1 \cap V_2) \cup (M_1 \cap M_2)\right] = p(\mathrm{V}_1) \cdot p(V_2 / V_1) + p(\mathrm{M}_1) \cdot p(M_2 / M_1) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{32}{72} = 0{,}44$$

b) Ahora la extracción de la segunda bola se realiza en las mismas condiciones que la primera. Por tanto:

$$p\left[(V_1 \cap V_2) \cup (M_1 \cap M_2)\right] = p(\mathrm{V}_1) \cdot p(V_2) + p(\mathrm{M}_1) \cdot p(M_2) = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{41}{81} = 0{,}506$$

Junio 1997.

OPCIÓN B.

1. *Considerar la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & m \end{pmatrix}$ *siendo m un parámetro real. Se pide:*

a) Calcular el rango de A según los valores del parámetro m. *(3 puntos)*

b) Considerar el sistema de ecuaciones lineales $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Discutir si existe solución según los valores del parámetro m. En caso afirmativo, resolver el sistema.* *(4 puntos)*

c) Para m = 7, considerar el sistema de ecuaciones lineales $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Discutir si existe solución.* *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Utilicemos las transformaciones elementales para conseguir una matriz triangular del mismo rango:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & m \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & m-9 \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & m-7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si m} = 7: & \text{rg A} = 2 \\ \text{Si m} \neq 7: & \text{rg A} = 3 \end{cases}$$

Transformaciones elementales: (1) $F_2 - 2F_1$, $F_3 - 3F_1$ (2) $F_3 - F_2$

b) El sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + mz = 0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ \quad y - 2z = 0 \\ \quad (m-7)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Transformaciones elementales: (1) las mismas que en el apartado anterior

$$\begin{cases} \text{Si } m \neq 7: \text{ el sistema es compatible determinado. La única solución es la trivial: } x = y = z = 0 . \\ \text{Si } m = 7: \text{ el sistema es compatible indeterminado. Las soluciones son: } x = -5\lambda \text{ , } y = 2\lambda \text{ , } z = \lambda \end{cases}$$

c) El sistema es:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + 7z = 3 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ \quad y - 2z = -4 \\ \quad y - 2z = -3 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ \quad y - 2z = -4 \\ \quad 0z = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ el sistema es incompatible.}$$

Transformaciones elementales: (1) $F_2 - 2F_1$, $F_3 - 3F_1$ (2) $F_3 - F_2$

2. *Una empresa emplea un único factor para producir un bien de acuerdo con la función de producción* $q(x) = 4\sqrt{x}$*, donde x es el número de unidades de factor utilizadas en el proceso de producción y q(x) representa el número de unidades de bien obtenidas en dicho proceso. Cada unidad del bien se vende a 100 unidades monetarias y una unidad de factor cuesta 50. Se pide:*

a) Determinar una función que represente los beneficios de la empresa en función de la cantidad de factor que se utiliza. *(3 puntos)*
b) ¿Qué cantidad de factor se ha de utilizar para maximizar los beneficios de la empresa?, ¿cuál es el máximo beneficio que alcanza la empresa?. Explicar los pasos seguidos para obtener las respuestas. *(7 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Los beneficios se obtienen como diferencia entre los ingresos y los gastos:

$$B(x) = I(x) - G(x) = 100 \cdot 4\sqrt{x} - 50x = 400\sqrt{x} - 50x$$

b) Veamos para qué valor de x la función B(x) es máxima: $B'(x) = \frac{400}{2\sqrt{x}} - 50 = \frac{200}{\sqrt{x}} - 50 = 0 \Rightarrow 200 - 50\sqrt{x} = 0 \Rightarrow$

$\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$ (valor crítico)

Como además: $B''(x) = \dfrac{-200 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\dfrac{100}{x\sqrt{x}} \Rightarrow B''(16) < 0 \Rightarrow$ máximo

Por tanto deben utilizarse 16 unidades de factor.

3. *Se sabe que la desviación típica de la duración de las lámparas eléctricas fabricadas en cierta empresa es de 250 horas. Calcular el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que, con un nivel de confianza del 95%, se pueda estimar la duración media de las lámparas con un error menor que 40 horas. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La desviación típica poblacional es: $\sigma = 250$ horas

Para un nivel de confianza del 95%: $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible es $E = 40$ horas. Se tiene:

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \dfrac{z_{\alpha/2}^2 \cdot \sigma^2}{E^2} = \dfrac{1{,}96^2 \cdot 250^2}{40^2} = 150{,}06 \Rightarrow$ debe elegirse una muestra de 151 lámparas como mínimo.

Septiembre 1997.

OPCIÓN A.

1. *Sea el sistema de ecuaciones lineales* $\begin{cases} 3x+4y-5z=6 \\ x-y+z=0 \\ x-y \quad\;\; =2 \end{cases}$. *Se pide:*

a) Discutir si existe solución y, en caso afirmativo, resolverlo. *(5 puntos)*
b) Modificando una sola de las tres ecuaciones, transformar el sistema dado en un sistema compatible indeterminado y resolverlo. Razonar la respuesta. *(5 puntos)*
NOTA: *Resolver los sistemas por el método de Gauss*

SOLUCIÓN.

a) Para la discusión y la resolución utilizamos el método de Gauss que consiste en la aplicación de las transformaciones elementales hasta conseguir un sistema escalonado equivalente al dado:

$$\begin{cases} 3x+4y-5z=6 \\ x-y+z=0 \\ x-y \quad\;\; =2 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+z=0 \\ 3x+4y-5z=6 \\ x-y=2 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+z=0 \\ 7y-8z=6 \\ -z=2 \end{cases} \Rightarrow \text{el sistema es compatible determinado.}$$

Resolviendo las ecuaciones de abajo a arriba: $z=-2$, $7y=6-16 \Rightarrow y=-\frac{10}{7}$, $x=-\frac{10}{7}+2=\frac{4}{7}$ es decir:

$$\boxed{x=\frac{4}{7}\ ,\ y=-\frac{10}{7}\ ,\ z=-2}$$

Transformaciones elementales: (1) Cambio de orden de las ecuaciones (2) E_2-3E_1 E_3-E_1

b) Se trata de que una de las ecuaciones sea una combinación lineal de las otras dos. Por ejemplo, haciendo que $E_1=E_2+E_3$:

$$\begin{cases} 2x-2y+z=2 \\ x-y+z=0 \\ x-y= \quad 2 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y=2 \\ 2x-2y+z=2 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+z=0 \\ -z=2 \\ -z=2 \end{cases} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=y-z \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=\lambda+2\ ,\ y=\lambda\ ,\ z=-2}$$

Transformaciones elementales: (1) Cambio de orden de las ecuaciones (2) E_2-E_1 E_3-2E_1 (3) Eliminación de una ecuación repetida

2. *Considerar la función* $f(x)=2x^3-3x^2$. *Se pide:*

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). Razonar si existen máximos y mínimos de f(x) y, en caso afirmativo, calcularlos. *(5 puntos)*
b) ¿Existen puntos de inflexión de f(x)?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*
c) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en $x=-1$. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) El crecimiento y decrecimiento de una función depende del signo que tenga $f'(x)$: $f'(x)=6x^2-6x=6x\cdot(x-1)$

Se tiene:

$f'(x)>0$	0	$f'(x)<0$	1	$f'(x)>0$

luego la función es creciente en $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$ y decreciente en $(0,1)$

Puesto que la función es polinómica y por tanto continua, tiene un máximo relativo en x = 0 (pasa de creciente a decreciente) y un mínimo relativo en en x = 1 (pasa de decreciente a creciente). Por tanto:

$$\text{Máximo: } (0\,,0) \quad \text{Mínimo: } (1\,,-1)$$

b) Un punto de inflexión se caracteriza por anular la segunda derivada y no anular a la tercera derivada:

$f''(x) = 12x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$. Y como $f'''(x) = 12 \neq 0$, f (x) tiene un punto de inflexión en $x = \dfrac{1}{2}$: $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

c) La ecuación de la recta tangente es $y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

En nuestro caso: $x_0 = -1 \;\Rightarrow\; y_0 = -5$ y $f'(x_0) = f'(-1) = 12$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y + 5 = 12\cdot(x+1) \;\Leftrightarrow\; y + 5 = 12x + 12 \;\Leftrightarrow\; \boxed{12x - y + 7 = 0}$$

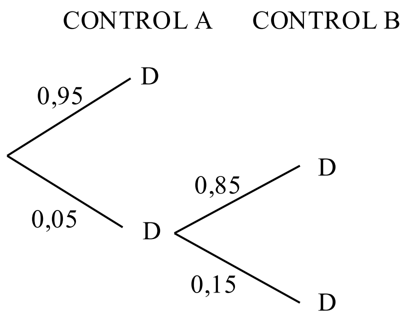
3. *Para que un determinado electrodoméstico salga al mercado debe superar dos controles de calidad, que denominamos A y B. El control de calidad A detecta un electrodoméstico defectuoso con una probabilidad de 0,95 y el B lo detecta con probabilidad 0,85. Calcular la probabilidad de que un electrodoméstico defectuoso:*

a) Sea detectado. *(5 puntos)*
b) No sea detectado. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sea D el suceso “detectado” y $\overline{D}$ el suceso “no detectado”

Organicemos el diagrama en árbol de la situación:



Se tiene:

a) $p\,(D) = 0{,}95 + 0{,}05 \cdot 0{,}85 = 0{,}9925$

b) $p\,(\overline{D}) = 1 - 0{,}9925 = 0{,}0075$

Septiembre 1997.

OPCIÓN B.

1. *En una empresa se produce queso y mantequilla. Para fabricar una unidad de queso se necesitan 10 unidades de leche y 6 unidades de mano de obra y para fabricar una unidad de mantequilla se utilizan 5 de leche y 8 de mano de obra. La empresa dispone cada día de 200 unidades de leche y 150 de mano de obra. Sabiendo que una unidad de queso se vende a 400 pesetas y una de mantequilla a 250 y que se vende todo lo que se produce, se pide:*

a) ¿Cuántas unidades de queso y de mantequilla se han de producir diariamente para que el beneficio sea máximo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. *(7 puntos)*
b) Suponer que la empresa decide no producir más de 13 unidades de queso, ¿cambia la solución del apartado a)?. Razonar la respuesta y en caso de que varíe, calcular la nueva solución del problema. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Se trata de un problema de programación lineal. Debemos construir la función objetivo y el conjunto de restricciones a las que se encuentra sujeta. Para facilitarlo, organicemos en forma de tabla los datos del problema:

Producto	Nº unidades	Leche	Mano de obra	Beneficio
Queso	x	10x	6x	400x
Mantequilla	y	5y	8y	250y
	$x \geq 0$, $y \geq 0$	≤ 200	≤ 150	$f(x, y)$

Se tiene:
- Función objetivo (maximizar):
$$f(x, y) = 400x + 250y$$
- Restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10x + 5y \leq 200 \\ 6x + 8y \leq 150 \end{cases}$

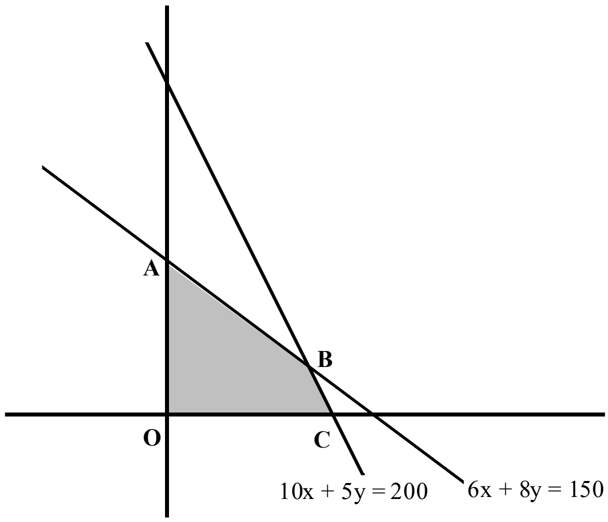
Representemos gráficamente el conjunto de restricciones para dibujar la región factible:

- La recta x = 0 es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.

- La recta y = 0 es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.

- La recta $10x + 5y = 200$ pasa por los puntos $(20, 0)$ y $(0, 40)$ (por ejemplo). La solución de $10x + 5y \leq 200$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

- La recta $6x + 8y = 150$ pasa por los puntos $(25, 0)$ y $(-15, 30)$ (por ejemplo). La solución de $6x + 8y \leq 150$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.



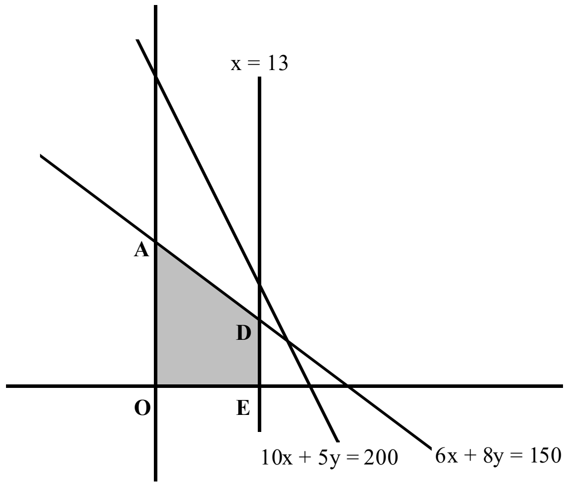
La región factible es el cuadrilátero OABC (en gris). Como la función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible, obtengamos las coordenadas de los mismos y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

Vértice O: $O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0$; Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 6x + 8y = 150 \end{cases} \Rightarrow A(0\ ,\ 18{,}75) \Rightarrow f(0\ ,\ 18{,}75) = 4687{,}5$

Vértice B: $\begin{cases} 10x + 5y = 200 \\ 6x + 8y = 150 \end{cases} \Rightarrow B(17, 6) \Rightarrow f(17, 6) = 8300$; Vértice C: $C(20, 0) \Rightarrow f(20, 0) = 8000$

Por tanto, los beneficios serán máximos si se producen 17 unidades de queso y 6 de mantequilla.

b) Al conjunto de restricciones hay que añadir $x \leq 13$. La solución de esta inecuación es el semiplano a la izquierda de la recta x = 13 que es paralela al eje de ordenadas. La región factible es ahora el cuadrilátero OADE:



Los nuevos vértices son:

Vértice D: $\begin{cases} x = 13 \\ 6x + 8y = 150 \end{cases} \Rightarrow D(13\,,9) \Rightarrow f(13\,,9) = 7450$

Vértice E: $E(13\,,0) \Rightarrow f(13\,,0) = 5200$

y además sabemos: $f(0\,,0) = 0$ y $f(0\ ,\ 18{,}75) = 4687{,}5$

por lo que, ahora, la nueva solución es: 13 unidades de queso y 9 unidades de mantequilla.

2. *Considerar la función* $f(x) = ax^2 + b \ln x$. *Se pide:*

a) Calcular los valores de a y b para que f(x) tenga un punto de inflexión en el punto (1 , 2) . *(6 puntos)*

b) Para a = 1 y b = 0, calcular $\int_2^4 f(x)\,dx$. *Interpretar geométricamente esta integral.* *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si tiene un punto de inflexión en $(1\,,2)$ debe ocurrir: $f(1) = 2$ y $f''(1) = 0$

Se tiene: $f'(x) = 2ax + \dfrac{b}{x} \Rightarrow f''(x) = 2a - \dfrac{b}{x^2}$. Entonces: $\begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow a = 2 \\ f''(1) = 0 \Rightarrow 2a - b = 0 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$

b) Tenemos: $f(x) = x^2$ luego: $\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 x^2\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_2^4 = \dfrac{64}{3} - \dfrac{8}{3} = \dfrac{56}{3}$ Es el área de la región limitada por la curva $y = x^2$, el eje de abscisas y las rectas x = 2 y x = 4.

3. *Se sabe que la desviación típica del número de pulsaciones por minuto de los individuos de una cierta población es de 9 pulsaciones por minuto. Se considera una muestra aleatoria de 100 individuos que revela un número medio de pulsaciones por minuto de 68. Con un nivel de confianza del 99%, determinar el intervalo en el que se encontrará el número medio de pulsaciones por minuto de los individuos de esta población. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La desviación típica poblacional es: $\sigma = 9$ pulsaciones por minuto.

Para un nivel de confianza del 99%, el valor crítico es: $z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

El radio del intervalo es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \dfrac{9}{\sqrt{100}} \cong 2{,}3$.

Por tanto, el intervalo es: $(68 - 2{,}3\ ,\ 68 + 2{,}3) = (65{,}7\ ,\ 70{,}3)$ es decir, el número medio de pulsaciones por minuto de la población está entre 65,7 y 70,3 con un nivel de confianza del 99%.

Junio 1998.

OPCIÓN A.

1. *a) Considerar una matriz A de orden* $m\times n$ *con* $m \neq n$ *. Razonar si se puede calcular la expresión* $A\cdot A^t - A^t\cdot A$ *siendo* A^t *la matriz traspuesta de A.* *(4 puntos)*

b) Considerar la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$*, resolver por el método de Gauss:*

i) el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A^t.A$ *(4 puntos)*
ii) el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A.A^t$ *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si A es de orden $m\times n$, A^t es de orden $n\times m$ por lo que $A\cdot A^t$ será de orden $m\times m$ y $A^t\cdot A$ de orden $n\times n$ y no podrán restarse las matrices $A\cdot A^t$ y $A^t\cdot A$ por ser de órdenes distintos.

b) i) $$A^t\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}5x+2y+z=0\\ 2x+y+z=0\\ x+y+2z=0\end{cases}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x+y+2z=0\\ 2x+y+z=0\\ 5x+2y+z=0\end{cases}\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x+y+2z=0\\ -y-3z=0\\ -3y-9z=0\end{cases}\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x+y+2z=0\\ y+3z=0\\ y+3z=0\end{cases}\overset{(4)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x+y+2z=0\\ y+3z=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{x=\lambda\ ,\ y=-3\lambda\ ,\ z=\lambda}$$

Transformaciones elementales: (1) Cambio de orden de las ecuaciones.
(2) E_2-2E_1 , E_3-5E_1
(3) $E_2\cdot(-1)$, $E_3:(-3)$
(4) Eliminación de la tercera ecuación por ser igual que la segunda

ii) $$A\cdot A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=0\\ x+6y=0\end{cases}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x+6y=0\\ 2x+y=0\end{cases}\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x+6y=0\\ -11y=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{x=0\ ,\ y=0}$$

Transformaciones elementales: (1) Cambio de orden de las ecuaciones (2) E_2-2E_1

2. *Dada la función f(x) =* $2x^2 + 4\ln x$*, se pide:*

a) ¿Cuál es el dominio de definición de f(x)?. *(1 punto)*
b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). Razonar si existen máximo y mínimo y, en caso afirmativo, calcularlos. *(3 puntos)*
c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de f(x). Razonar si existen puntos de inflexión y, en caso afirmativo, calcularlos. *(4 puntos)*
d) Determinar, si existen, las asíntotas de f(x). *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Dom (f) = $\Re^+$ pues es el dominio de la función y = ln x

b) • Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$$f'(x) = 4x + \frac{4}{x} = \frac{4x^2+4}{x} = \frac{4\left(x^2+1\right)}{x} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{la función es creciente } \forall x \in Dom\,(f)$$

• No existen máximos ni mínimos pues $f'(x) \neq 0 \ \ \forall x$

c) • $f''(x) = \dfrac{8x^2-4x^2-4}{x^2} = \dfrac{4x^2-4}{x^2} = \dfrac{4\left(x^2-1\right)}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} f''(x)<0 \text{ para x} \in (0\,,1) \Rightarrow f(x) \text{ convexa en } (0\,,1) \\ f''(x)>0 \text{ para x} \in (1\,,\infty) \Rightarrow f(x) \text{ cóncava en } (1\,,\infty) \end{cases}$

• Un punto de inflexión verifica: $f''(x)=0$ y $f'''(x) \neq 0$:

Tenemos: $f''(x)=0 \Rightarrow x=1$ (posible punto de inflexión)

$f'''(x) = \dfrac{8x^3-\left(4x^2-4\right)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{8x^3-8x^3+8x}{x^4} = \dfrac{8}{x^3} \Rightarrow f'''(1) \neq 0 \Rightarrow (1\,,2)$ es un punto de inflexión de f(x).

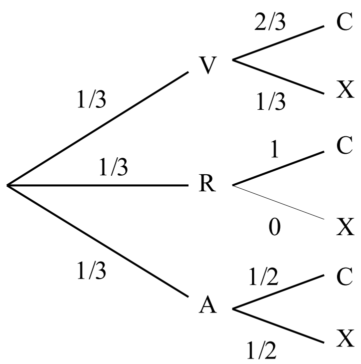
d) Puesto que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0^+$ es una asíntota vertical de la función.

3. *Tenemos tres cajas, una verde, una roja y una amarilla, y en cada caja hay una moneda. La de la caja verde está trucada y la probabilidad de que salga cara es el doble de la probabilidad de que salga cruz, la moneda de la caja roja tiene dos caras y la de la caja amarilla no está trucada. Se toma una caja al azar y se lanza la moneda que está en esa caja. Calcular razonadamente:*

a) La probabilidad de que salga cara. *(5 puntos)*
b) La probabilidad de que sabiendo que ha salido cara, se haya lanzado la moneda de la caja roja. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación:



a) Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(C) = p(V)\cdot p(C/V) + p(R)\cdot p(C/R) + p(A)\cdot p(C/A) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{18} + \frac{6}{18} + \frac{3}{18} = \frac{13}{18} \cong 0{,}72$$

b) Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p(R/C) = \frac{p(R)\cdot p(C/R)}{p(V)\cdot p(C/V) + p(R)\cdot p(C/R) + p(A)\cdot p(C/A)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{13}{18}} = \frac{18}{39} \cong 0{,}46$$

Junio 1998.

OPCIÓN B.

1. *Considerar las inecuaciones:* $y - x \geq -2$; $-x - y \leq 2$; $3x + y \leq 3$. *Se pide:*

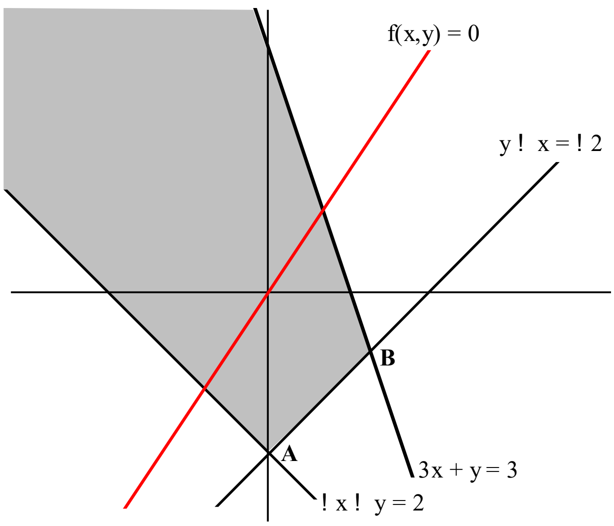
a) Representar gráficamente el conjunto S definido por estas inecuaciones. *(3 puntos)*
b) Determinar si f(x , y) = 3x– 2y alcanza un valor máximo y un valor mínimo en S y, en caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos donde se alcanzan. *(3,5 puntos)*
c) Determinar si f(x , y) = –6x + 4y alcanza un valor máximo y un valor mínimo en S y, en caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos donde se alcanzan. *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) - La recta $y - x = -2$ pasa por los puntos $(2,0)$ y $(0,-2)$ (por ejemplo). La inecuación $y - x \geq -2$ tiene por solución el semiplano que contiene al origen de coordenadas.

- La recta $-x - y = 2$ pasa por los puntos $(-2,0)$ y $(0,-2)$ (por ejemplo). La inecuación $-x - y \leq 2$ tiene por solución el semiplano que contiene al origen de coordenadas.

- La recta $3x + y = 3$ pasa por los puntos $(1,0)$ y $(0,3)$ (por ejemplo). La inecuación $3x + y \leq 3$ tiene por solución el semiplano que contiene al origen de coordenadas.



El conjunto S es una región abierta (en gris) cuyos vértices son:

Vértice A: $A(0,-2)$

Vértice B: $\begin{cases} y - x = -2 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

b) Representamos la recta $f(x,y) = 0$, es decir: $3x - 2y = 0$ que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(2,3)$. Al desplazarla paralelamente a sí misma hacia la derecha, el vértice más alejado de S donde toca es el $B\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ que es donde alcanza el valor máximo. En cambio, si la desplazamos hacia su izquierda, no toca a ningún vértice de S lo que significa que la función no alcanza su valor mínimo en S.

c) La recta que representa a $f(x,y) = 0$ es la misma que en el apartado anterior pero la función es opuesta (y multiplicada por 2) que la de dicho apartado. Esta función alcanza su valor mínimo en el vértice $B\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ y no alcanza, en cambio, un valor máximo.

2. *a) Un cultivador de frutas cítricas estima que si plantan 60 naranjos en un huerto, la producción media por árbol será de 400 naranjas y ésta disminuirá en un promedio de 5 naranjas por árbol por cada árbol adicional plantado en el huerto. Se pide:*

i) Determinar la función de producción total de naranjas. *(2 puntos)*
ii) ¿Cuántos árboles se deben plantar en el huerto para maximizar la producción total de naranjas?, ¿cuál es dicha producción máxima?. Razonar la respuesta. *(4 puntos)*

b) Calcular el área limitada por la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ y las rectas x = 0, x = 1, y = 0. *(4puntos)*

SOLUCIÓN.

a) i) Se tiene:

Nº árboles	60	60 + 1	60 + 2	60 + x
producción	$60\cdot 400$	$(60+1)\cdot(400-5)$	$(60+2)\cdot(400-5\cdot 2)$	$(60+x)\cdot(400-5x)$

es decir, si llamamos x al nº de árboles que exceden de los 60, la función que relaciona la producción con el número de árboles es:

$$f(x) = (60+x)\cdot(400-5x) = 24000 - 300x + 400x - 5x^2 = -5x^2 + 100x + 24000$$

es decir, se trata de una función cuadrática.

ii) Veamos para qué valor de x se maximiza la función anterior: $f'(x) = -10x + 100 = 0 \Rightarrow x = 10$

$f''(x) = -10 < 0 \Rightarrow f(x)$ *máxima*

luego se deben plantar 70 árboles.

La producción máxima será entonces: $f(10) = -500 + 1000 + 24000 = 24500$ naranjas.

b) $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \left[\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3} \Rightarrow S = \dfrac{2}{3}\, u^2$

3. *La desviación típica de la altura de los habitantes de un país es de 10 centímetros. Calcular el tamaño mínimo que ha de tener una muestra de habitantes de dicho país para que el error cometido al estimar la altura media sea inferior a 1 centímetro con un nivel de confianza del 99%. ¿Y si el nivel de confianza es del 95%?. Explicar los pasos seguidos para obtener las respuestas.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

Desviación típica poblacional: $\sigma = 10$ cm

Para un nivel de confianza del 99%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

El error máximo admisible es E = 1. Se tiene: $E = z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \dfrac{z_{\alpha/2}^2\cdot\sigma^2}{E^2} = \dfrac{2{,}575^2\cdot 100}{1^2} = 663{,}06$

Luego el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 664 habitantes.

- En el caso de un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ con lo que se tiene:

$n = \dfrac{1{,}96^2\cdot 100}{1^2} = 384{,}16 \Rightarrow$ la muestra debe contener un mínimo de 385 habitantes.

Septiembre 1998.

OPCIÓN A.

1. *Se considera un número de tres cifras del que se sabe que la suma de sus tres cifras es 12, el doble de la cifra de las decenas es igual a la suma de las otras dos cifras y, por último, se sabe que la cifra de las centenas es tres más la mitad de la cifra de las decenas. Se pide:*

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales con el que se determine dicho número. *(3 puntos)*
b) Resolver, utilizando el método de Gauss, el sistema de ecuaciones lineales planteado en el apartado a). *(4 puntos)*
c) ¿Cuál es la solución del problema si no se considera la última condición?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sea x la cifra de las centenas, y la de las decenas, z la de las unidades. Se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ 2y=x+z \\ x=3+\dfrac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ x-2y+z=0 \\ 2x-y=6 \end{cases}$$

b) El método de Gauss consiste en utilizar las transformaciones elementales para convertir el sistema en otro escalonado equivalente:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ x-2y+z=0 \\ 2x-y=6 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=12 \\ -3y=-12 \\ -3y-2z=-18 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=12 \\ -3y \quad =-12 \\ \quad -2z=-6 \end{cases} \Rightarrow\ z=3\ ,\ y=4\ ,\ x=5\ \Rightarrow \text{ el número es 543}$$

Transformaciones elementales: (1) $E_2 - E_1$, $E_3 - 2E_1$ (2) $E_3 - E_2$

c) Al no considerar la última condición, el sistema está formado por dos ecuaciones y tiene tres incógnitas:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=12 \\ -3y \quad =-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-\lambda \\ y=4 \\ z=\lambda \end{cases}$$

es decir, el número debe quedar en función de una de sus cifras (de las unidades, por ejemplo) aunque la de las decenas es 4.

2. *Sea la función* $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & \text{si } x<0 \\ x^2+a & \text{si } 0\le x\le 3 \\ \dfrac{x+5}{x-3} & \text{si } x>3 \end{cases}$ *con a un parámetro real. Se pide:*

a) Determinar, razonadamente, el valor del parámetro a para que f(x) sea continua en x = 0. *(3 puntos)*
b) ¿Para qué valores del parámetro a es continua f(x) en x = 3?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*
c) Determina el valor del parámetro a para que $\int_0^3 f(x)\,dx=15$ *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Para que la función sea continua en x = 0 debe ser $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Para verificar esta condición debe cumplirse:

i) $\exists\, f(0)=a$

ii) $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} e^{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+a\right) \Leftrightarrow 1 = a$

iii) Para a = 1 se verifica: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

es decir, para que la función sea continua en x = 0 debe ser a = 1.

b) Debe ocurrir que $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$:

i) $\exists f(3) = 9 + a$

ii) $\exists \lim\limits_{x\to 3} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+a\right) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+5}{x-3} \Leftrightarrow 9+a=\infty$ $\Rightarrow$ no existe valor de a para el que $\exists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ y por tanto, la función no es continua en x = 3 (a la derecha de x = 3 la función tiene una asíntota vertical)

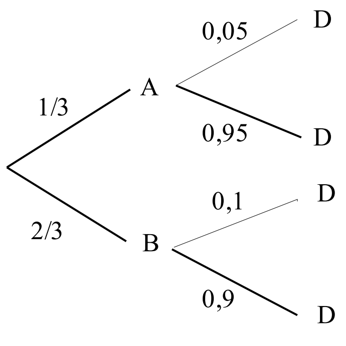
c) $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \left(x^2+a\right)dx = \left[\dfrac{x^3}{3} + ax\right]_0^3 = 9 + 3a = 15 \Rightarrow a = 2$

3. *En una tienda de electrodomésticos se venden dos marcas, A y B. Se ha comprobado que un tercio de los clientes elige un electrodoméstico de la marca A y el resto uno de la B. Además, la probabilidad de que un electrodoméstico de la marca A sea defectuoso es 0,05 y la probabilidad de que uno de la marca B no lo sea es 0,9. Calcular razonadamente:*

a) la probabilidad de que un cliente compre un electrodoméstico en dicha tienda y le salga defectuoso. *(5 puntos)*
b) la probabilidad de que el electrodoméstico comprado sea de la marca B, sabiendo que no es defectuoso. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Organicemos el diagrama en árbol de la situación:



Se tiene:

a) Aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(D) = p(A)\cdot p(D/A) + p(B)\cdot p(D/B) = \frac{1}{3}\cdot 0{,}05 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}1 = 0{,}083$$

b) Aplicación del teorema de Bayes:

$$p\left(B/\overline{D}\right) = \frac{p(B)\cdot p\left(\overline{D}/B\right)}{p(A)\cdot p\left(\overline{D}/A\right) + p(B)\cdot p\left(\overline{D}/B\right)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}9}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}95 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}9} = \frac{0{,}6}{0{,}916} \cong 0{,}65$$

Septiembre 1998.

OPCIÓN B.

1. *Una empresa que fabrica motos y coches en dos factorías F_1 y F_2, ha recibido un pedido de 300 coches y 500 motos. En la factoría F_1 se producen 10 coches y 25 motos por hora y en la F_2 se producen 20 coches por hora y el mismo número de motos por hora que en la otra. Sabiendo que los costes operativos de las factorías F_1 y F_2 son 9.000 y 7.000 unidades monetarias por hora respectivamente, se pide:*

a) ¿Cuántas horas debe trabajar cada factoría para servir el pedido con los mínimos costes?, ¿cuál es el valor de estos mínimos costes?. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(8 puntos)*
b) Suponer que la empresa decide que el número de horas trabajadas entre las dos factorías para servir un pedido no puede ser superior a 50. ¿Cambiaría la solución del problema? Razonar la respuesta. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Se trata de un problema de programación lineal. Debemos construir la función objetivo y las restricciones a las que está sometida. Para ayudarnos, organicemos los datos y condiciones en forma de tabla:

factoría	**nº horas**	**coches**	**motos**	**costes**
F_1	x	10x	25x	9000x
F_2	y	20y	25y	7000y
	$x \geq 0$, $y \geq 0$	≥ 300	≥ 500	$f(x, y)$

La función objetivo (minimizar) es: $f(x, y) = 9000x + 7000y$

Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10x + 20y \geq 300 \\ 25x + 25y \geq 500 \end{cases}$

Resolvamos gráficamente el sistema de inecuaciones para obtener la región factible:

- La recta x = 0 es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.
- La recta y = 0 es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.
- La recta $10x + 20y = 300$ pasa por los puntos $(30, 0)$ y $(0, 15)$ (por ejemplo). La solución de $10x + 20y \geq 300$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.
- La recta $25x + 25y = 500$ pasa por los puntos $(20, 0)$ y $(0, 20)$ (por ejemplo). La solución de $25x + 25y \geq 500$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

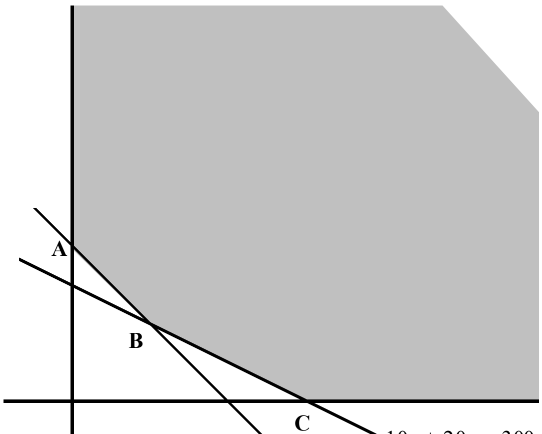


Fig. 1

La región factible (fig. 1) es abierta (en gris) y tiene por vértices los puntos A, B y C. La función objetivo se minimiza en alguno de dichos vértices. Calculemos sus coordenadas y el valor de $f(x, y)$ en los mismos:

Vértice A: $A(0, 20) \Rightarrow f(0, 20) = 140000$
Vértice B:
$$\begin{cases} 10x + 20y = 300 \\ 25x + 25y = 500 \end{cases} \Rightarrow B(10, 10) \Rightarrow f(10, 10) = 160000$$
Vértice C: $C(30, 0) \Rightarrow f(30, 0) = 270000$

Luego la solución más adecuada es que la factoría F_1 no trabaje y la F_2 dedique 20 horas. Los costes mínimos son de 140000 unidades monetarias.

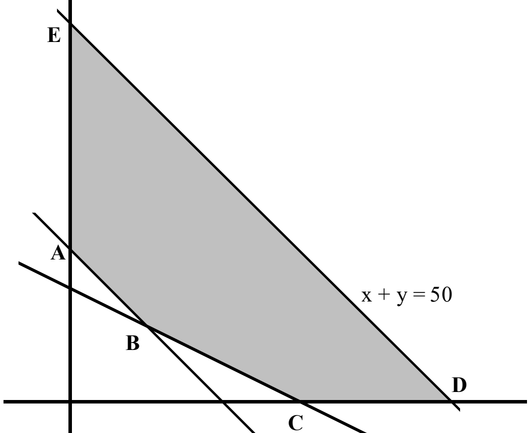


Fig. 2

b) Hay que añadir al conjunto de restricciones la inecuación $x+y \le 50$. La recta $x+y=50$ pasa por los puntos $(50\,,0)$ y $(0\,,50)$ y la solución de la inecuación $x+y \le 50$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas. La nueva región factible es la señalada en gris en la figura 2. Los nuevos vértices son:

$$D(50\,,0) \;\Rightarrow\; f(50\,,0)=450000 \quad \text{y} \quad E(0\,,50) \;\Rightarrow\; f(0\,,50)=350000$$

Comparando el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible, se concluye que la solución que minimiza los costes sigue siendo la misma que antes.

2. *Sea la función* $f(x)=\dfrac{x^2}{x+4}$. *Se pide:*

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x). Razonar si existen máximos y mínimos y, en caso de que existan, calcularlos. *(5 puntos)*
b) ¿Tiene f(x) puntos de inflexión?. Justificar la respuesta. *(2 puntos)*
c) Determinar, si existen, las asíntotas de f(x). *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f\,'(x)=\dfrac{2x\cdot(x+4)-x^2}{(x+4)^2}=\dfrac{x^2+8x}{(x+4)^2}=\dfrac{x\cdot(x+8)}{(x+4)^2} \;\Rightarrow$

f´(x) > 0	! 8	f´(x) < 0	0	f´(x) > 0

luego la función es creciente en $(-\infty\,,-8)\mathrm{Y}(0\,,\infty)$ y decreciente en $(-8\,,0)$

Los posibles puntos de máximo o de mínimo verifican $f\,'(x)=0 \;\Rightarrow\; x=-8$ y $x=0$. Sustituyendo estos valores en $f\,''(x)$ comprobaremos el tipo de extremos relativos que son:

$$f\,''(x)=\frac{(2x+8)\cdot(x+4)^2-(x^2+8x)\cdot 2(x+4)}{(x+4)^4}=\frac{(x+4)\cdot\left[(2x+8)\cdot(x+4)-2(x^2+8x)\right]}{(x+4)^4}=\frac{2x^2+8x+8x+32-2x^2-16x}{(x+4)^3}=$$

$$=\frac{32}{(x+4)^3} \;\Rightarrow\; \begin{cases} f\,''(-8)<0 \\ f\,''(0)>0 \end{cases}$$ luego en $(-8\,,-16)$ la función tiene un máximo relativo y en $(0\,,0)$ un mínimo relativo.

b) No tiene puntos de inflexión pues $f\,''(x)\neq 0 \;\; \forall x$ y un punto de inflexión debe anular la segunda derivada.

c) • Asíntota vertical: $x=-4$ pues $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2}{x+4}=\infty$. Además: $\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{x^2}{x+4}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x^2}{x+4}=+\infty$

• Asíntota oblicua: dividiendo x^2 entre x+4 se tiene: $\dfrac{x^2}{x+4}=x-4+\dfrac{16}{x+4} \;\Rightarrow\; y=x-4$ es una asíntota oblicua de la función. Además: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{16}{x+4}=0^-$ y $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{16}{x+4}=0^+$

3. *El peso de las naranjas producidas en una determinada región sigue una distribución normal con una desviación típica de 15 gramos. Un almacenista compra 10.000 de estas naranjas y observa que su peso medio es de 190 gramos. Razonar si se puede afirmar, con un nivel de significación del 0,05 que el peso medio de las naranjas producidas en esta región es de 200 gramos. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

$E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=1{,}96\cdot\dfrac{15}{\sqrt{10000}}=0{,}294 \;\Rightarrow$ el intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(190-0{,}294\ \ ,\ \ 190+0{,}294)=(189{,}706\ \ ,\ \ 190{,}294).$$

Como $200 \notin (189{,}706\ \ ,\ \ 190{,}294)$ no se puede hacer esa afirmación.

Junio 1999.

OPCIÓN A.

1. *Una empresa se dedica a la producción de frascos de perfume y de agua de colonia a partir de tres factores productivos F_1, F_2 y F_3. Las unidades de dichos factores utilizadas en la producción de cada tipo de frasco se detallan en la siguiente tabla:*

	Perfume	***Agua de colonia***
F_1	*1*	*2*
F_2	*2*	*0*
F_3	*0*	*4*

Sabiendo que el precio de venta de un frasco de perfume es de 5.000 pesetas, de uno de agua de colonia es de 2.000 pesetas y que la empresa dispone de 240 unidades de F_1, 360 de F_2 y 440 de F_3:

a) Calcular el número de frascos de cada tipo que debe fabricar la empresa para maximizar sus beneficios. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(8 puntos)*
b) ¿Se consumen todas las existencias de F_1, F_2 y F_3 en la producción de los frascos que maximiza los beneficios?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

Es un problema de Programación Lineal. Elaboremos una tabla con todos los datos y condiciones y escribamos la función objetivo y las restricciones a que debe estar sometida:

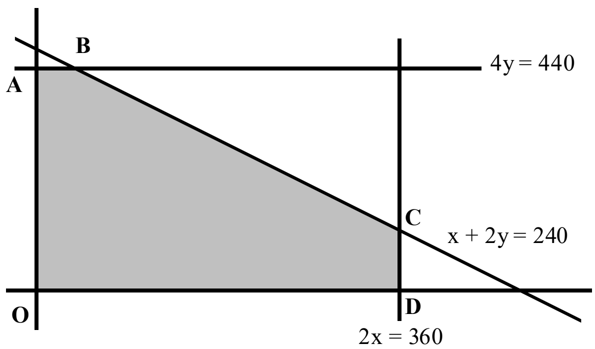
Producto	**nº de frascos**	F_1	F_2	F_3	**Beneficio**
Perfume	x	x	2x	0x	5000x
Colonia	y	2y	0y	4y	2000y
	$x \geq 0$; $y \geq 0$	≤ 240	≤ 360	≤ 440	$f(x, y)$

X La función objetivo (máxima) es:
$$f(x, y) = 5000x + 2000y$$

X Las restricciones:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 240 \\ 2x \leq 360 \\ 4y \leq 440 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema de inecuaciones para obtener la región factible (en gris):

La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos las coordenadas de los vértices y el valor que tiene la función objetivo en los mismos:



Vértice O: $O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0$
Vértice A: $A(0, 110) \Rightarrow f(0, 110) = 220000$
Vértice B:
$$\begin{cases} y = 110 \\ x + 2y = 240 \end{cases} \Rightarrow B(20, 110) \Rightarrow f(20, 110) = 320000$$
Vértice C:
$$\begin{cases} x + 2y = 240 \\ x = 180 \end{cases} \Rightarrow C(180, 30) \Rightarrow f(180, 30) = 960000$$
Vértice D: $D(180, 0) \Rightarrow f(180, 0) = 900000$

La función objetivo tiene el máximo valor en el vértice C y, por tanto, deben fabricarse 180 frascos de perfume y 30 de agua de colonia.

b) Se consumen: 180 + 60 = 240 de F_1 , 360 de F_2 y 120 de F_3. Sobran entonces 320 unidades de F_3.

2. *Sea la función* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+b & \text{si } x\le -1\\ 3x^2+4 & \text{si} -1<x<1\\ -x^3+8 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$ *donde b es un parámetro real. Se pide:*

a) Calcular el valor del parámetro b para que f(x) sea continua en x = −1 y en x = 1. *(4 puntos)*
b) Calcular el área del recinto plano limitado por y = f(x), y = 0, x = 0, x = 2. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Para que la función sea continua en x = −1 y en x = 1, debe ocurrir:

i) $\exists f(-1)=1+b$ y $\exists f(1)=7$

ii) $\exists \lim\limits_{x\to -1} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x^2}+b\right)=\lim\limits_{x\to -1}(3x^2+4) \Rightarrow 1+b=7 \Rightarrow b=6$

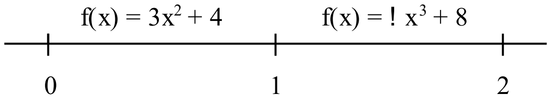
$\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2+4\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-x^3+8\right) \Rightarrow 7=7 \Rightarrow$ f(x) es continua en x = 1

iii) $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ lo que se verifica cuando b = 6

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ que como se puede comprobar, se verifica.

Por tanto, la función es continua para b = 6.

b) Entre x = 0 y x = 2, la función está definida así:



Se tiene: $S_1=\int_0^1\left(3x^2+4\right)dx=\left[x^3+4x\right]_0^1=5$

$$S_2=\int_1^2\left(-x^3+8\right)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+8x\right]_1^2=(-4+16)-\left(-\frac{1}{4}+8\right)=\frac{17}{4}$$

y por tanto: $S=S_1+S_2=\dfrac{37}{4}u^2$

3. *Un dado ha sido trucado de manera que la probabilidad de sacar un número par es el doble que la de sacar un número impar. Se lanza el dado y se pide:*

a) la probabilidad de obtener un número par. *(3 puntos)*
b) si a la vez se lanza un dado no trucado, la probabilidad de obtener un número par y un número impar. *(3 puntos)*
c) si a la vez se lanza un dado no trucado, la probabilidad de obtener al menos un número impar. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $p(P)=\dfrac{2}{3}$

b) $p\left[(P_1\cap I_2)\cup(I_1\cap P_2)\right]=p(P_1\cap I_2)+p(I_1\cap P_2)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

c) El suceso “al menos un número impar” es el suceso contrario al suceso “ningún número impar” o “los dos pares”

$$p(P_1\cap P_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3} \Rightarrow p(\text{"al menos un número impar"})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Junio 1999.

OPCIÓN B.

1. *Considerar la ecuación matricial:* $X\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & m^2+m\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, *con m un parámetro real. Se pide:*

a) ¿Para qué valores del parámetro m existe una única matriz X que verifica la ecuación anterior? *(4 puntos)*
b) Si es posible, resolver la ecuación matricial para m = 0. *(3 puntos)*
c) Si es posible, resolver la ecuación matricial para m = 1. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Despejando la matriz X: $X=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 8 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & m^2+m\end{pmatrix}^{-1}$. Por tanto, para que X sea calculable, debe existir la matriz inversa de $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & m^2+m\end{pmatrix}$ y esto hace que:

$$\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & m^2+m\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow 2m^2+2m-4\neq 0 \Rightarrow m\neq\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{4}=\frac{-2\pm 6}{4}\Rightarrow\begin{cases}m\neq -2\\ m\neq 1\end{cases}$$

b) Calculemos la matriz inversa de $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$: $\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -1 & 1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2\end{array}\right)$

Por tanto: $X=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 8 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 8 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

c) No es posible pues para m = 1 no se puede calcular la matriz X.

2. *Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que dada la estructura de la empresa sólo puede optar por dos tipos de alarmas, de tipo A o de tipo B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como el producto entre el número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en la empresa para maximizar su seguridad? Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sea x el número de alarmas del tipo A e y el de alarmas del tipo B. Se tiene: $x+y=9 \Rightarrow y=9-x$

La función que expresa la seguridad según las alarmas colocadas es: $S=x\cdot y^2=x\cdot(9-x)^2=x\cdot(81+x^2-18x)$ es decir: $S(x)=x^3-18x^2+81x$

Veamos para qué valor de x se maximiza la seguridad:

$$S'(x)=3x^2-36x+81=0\Rightarrow x=\frac{36\pm\sqrt{1296-972}}{6}=\frac{36\pm 18}{6}=\begin{matrix}9\\ 3\end{matrix}$$

$$S''(x)=6x-36:\quad S''(9)>0\Rightarrow \text{mínimo}\quad S''(3)<0\Rightarrow \text{máximo}$$

Por tanto, la seguridad es máxima con 3 alarmas del tipo A y 6 alarmas del tipo B.

3. *En una gran ciudad española la altura media de sus habitantes tiene una desviación típica de 8 cm. Se pide:*

a) Si la altura media de dichos habitantes fuera de 175 cm, ¿cuál sería la probabilidad de que la altura media de una muestra de 100 individuos tomada al azar fuera superior a 176 cm? Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(4 puntos)*
b) Si se considera una muestra aleatoria de 100 individuos de esta ciudad se obtiene una altura media de 178 cm. Determinar un intervalo de confianza del 95% para la altura media de los habitantes de esta ciudad. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Como el número de elementos de la muestra es suficientemente grande la distribución muestral de medias se aproxima a una normal:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 175\, cm \qquad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = 0{,}8$$

luego las medias muestrales $\overline{X}$ siguen una distribución normal $N\left(175\ ,\ 0{,}8\right)$

Tipificando el valor $\overline{X} = 176$ podemos utilizar las tablas de la normal $N\left(0\,,1\right)$:

$$p\left(\overline{X} > 176\right) = p\left(z > \frac{176-175}{0{,}8}\right) = p\left(z > 1{,}25\right) = 1 - \phi\left(1{,}25\right) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$$

b) Para un intervalo de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(178 - 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}}\ ,\ 178 + 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}}\right) = \left(176{,}432\ ,\ 179{,}568\right)$$

es decir, entre 176,432 cms y 179,568 cms

Septiembre 1999.

OPCIÓN A.

1. *En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla. Se pide:*

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana. *(5 puntos)*
b) Resolver el sistema planteado en el apartado anterior. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sean x = helados de vainilla, y = helados de chocolate, z = helados de nata. Se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \\ y+z=1{,}20x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \\ 1{,}20x-y-z=0 \end{cases}$$

b) Resolvamos el sistema por el método de Gauss (aplicar al sistema dado las transformaciones elementales necesarias hasta convertirlo en un sistema escalonado equivalente):

$$\begin{cases} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \\ 1{,}20x-y-z=0 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=110 \\ \quad y+2z=100 \\ -2{,}20y-2{,}20z=-132 \end{cases} \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=110 \\ \quad y+2z=100 \\ \quad 2{,}20z=88 \end{cases} \Rightarrow z=40\ ,\ y=20\ ,\ x=50$$

es decir: 50 helados de vainilla, 20 de chocolate y 40 de nata

Transformaciones elementales: (1) E_2-4E_1 , $E_3-1{,}20E_1$ (2) $E_3+2{,}20E_2$

2. *Dada la función* $f(x)=\dfrac{bx}{x^2+1}$ *con b un parámetro real distinto de 0. Se pide:*

a) Determinar las asíntotas de la función f(x) para cualquier valor del parámetro b. *(4 puntos)*
b) Determinar el valor del parámetro b para que la función f(x) tenga un máximo en el punto (1 , 3). *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) X Asíntotas verticales: no tiene pues $x^2+1\neq 0 \quad \forall x$

X Asíntotas horizontales: como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \Rightarrow$ y = 0 (eje de abscisas) es una asíntota horizontal de la función.

X Asíntotas oblicuas: no puede tener, pues una función tiene como máximo una sola asíntota entre horizontales y oblicuas.

b) Si la función tiene un máximo en el punto (1 , 3), se cumplirá: $f(1)=3$, $f'(1)=0$

De la primera condición se obtiene: $\dfrac{b}{2}=3 \Rightarrow b=6$ y no es necesario utilizar la segunda condición.

3. *En una baraja española de 40 cartas se extraen dos cartas al azar, calcular razonadamente:*

a) la probabilidad de que las dos sean copas. *(3 puntos)*
b) la probabilidad de que al menos una sea de oros. *(3 puntos)*
c) la probabilidad de que sean de diferentes palos. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

Extraer dos cartas equivale a extraer una y, sin reponerla, extraer otra.

a) $p\left(C_1 \cap C_2\right) = p\left(\mathrm{C}_1\right) \cdot p\left(C_2 / C_1\right) = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{9}{39} = \dfrac{90}{1560} = 0{,}0577$

b) Calculemos primero la probabilidad de que ninguna de las cartas sea de oros: $p\left(\overline{O_1} \cap \overline{O_2}\right) = \dfrac{30}{40} \cdot \dfrac{29}{39} = \dfrac{870}{1560}$

El suceso "al menos una sea de oros" es el suceso contrario de "ninguna es de oros". Por tanto:

$p\,(\text{"}\textit{al menos una es de oros}\text{"}) = 1 - \dfrac{870}{1560} = \dfrac{690}{1560} = 0{,}4423$

c) Es el suceso contrario a que sean del mismo palo. La probabilidad de que sean del mismo palo es $4 \cdot \dfrac{90}{1560} = \dfrac{360}{1560}$ luego la probabilidad de que sean de palos distintos es: $p\,(\text{"palos distintos"}) = 1 - \dfrac{360}{1560} = \dfrac{1200}{1560} = 0{,}7692$

Septiembre 1999.

OPCIÓN B.

1. *Un veterinario aconseja a un granjero dedicado a la cría de aves una dieta mínima que consiste en 3 unidades de hierro y 4 unidades de vitaminas diarias. El granjero sabe que cada kilo de maíz proporciona 2,5 unidades de hierro y 1 de vitaminas y que cada kilo de pienso compuesto proporciona 1 de hierro y 2 de vitaminas. Sabiendo que el kilo de maíz vale 30 pesetas y el de pienso compuesto 52 pesetas, se pide:*

a) ¿Cuál es la composición de la dieta diaria que minimiza los costes del granjero?. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(7 puntos)*
b) ¿Cambiaría la solución del problema si por escasez en el mercado el granjero no pudiera disponer de más de 1 kilo diario de pienso compuesto?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Se trata de un problema de Programación Lineal. Elaboremos una tabla con los datos y condiciones del problema:

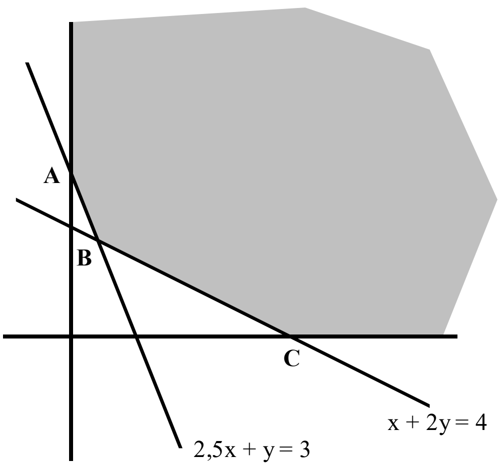
Alimento	**Cantidad**	**Hierro**	**Vitaminas**	**Precio**
maíz	x	2,5x	x	30x
pienso	y	y	2y	52y
	$x \geq 0$; $y \geq 0$	≥ 3	≥ 4	$f(x, y)$

X La función objetivo (mínima) es:

$$f(x, y) = 30x + 52y$$

X Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2{,}5x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 4 \end{cases}$

Representemos gráficamente el conjunto de restricciones para encontrar la región factible:



X x = 0 es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.

X y = 0 es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.

X La recta $2{,}5x + y = 3$ pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(2, -2)$ (por ejemplo) y la solución de la inecuación $2{,}5x + y \geq 3$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

X La recta $x + 2y = 4$ pasa por los puntos $(4, 0)$ y $(0, 2)$ (por ejemplo) y la solución de la inecuación $x + 2y \geq 4$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

La región factible es abierta y aparece en gris.

La función objetivo se minimiza en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos sus coordenadas y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

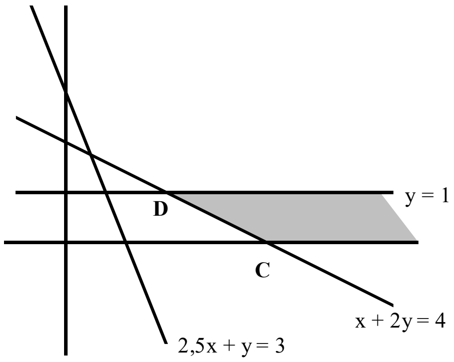
Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 2{,}5x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(0, 3) \Rightarrow f(0, 3) = 30 \cdot 0 + 52 \cdot 3 = 156$

Vértice B: $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2{,}5x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) = 30 \cdot \frac{1}{2} + 52 \cdot \frac{7}{4} = 15 + 91 = 106$

Vértice C: $\begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(4, 0) \Rightarrow f(4, 0) = 120$

Por tanto, la función objetivo alcanza su valor mínimo en el vértice B, es decir, la dieta debe estar formada por medio kilo de maíz y un kilo y tres cuartos de pienso.

b) Si se añade la restricción $y \leq 1$, la región factible cambia:



El nuevo vértice D tiene por coordenadas $(2\,,1)$ y la función objetivo vale en él: $f\,(2\,,1) = 30 \cdot 2 + 52 = 112$ que es menor que el valor que tiene en el vértice C. Por tanto, ahora la dieta más barata está formada por dos kilos de maíz y un kilo de pienso.

2. *Dada la función* $f\,(x) = -x^2 + x + 1$, *se pide:*

a) Determinar, en caso de que existan, los máximos y mínimos de la función f(x) en el intervalo $[-1,\ 4]$. *(4 puntos)*

b) Calcular el área del recinto limitado por: y = f(x) , y = f'(x). Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f\,'(x) = -2x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$ (punto crítico). Como $f\,''(x) = -2 < 0 \;\Rightarrow\;$ en $x = \dfrac{1}{2}$ la función tiene un máximo.

b) Consideremos la función diferencia: $f\,(x) - f\,'(x) = -x^2 + x + 1 + 2x - 1 = -x^2 + 3x$

Los puntos de corte de esta función con el eje de abscisas son: $-x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (-x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0\ ,\ x = 3$

$$\int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \left(-\frac{27}{3} + \frac{27}{2}\right) - 0 = -\frac{54}{6} + \frac{81}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \;\Rightarrow\; S = \frac{9}{2}u^2$$

3. *Una moneda está trucada de manera que 20 de cada 100 veces que se lanza sale cara. Se pide:*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar la moneda salga cara?, ¿y de que salga cruz?. *(2 puntos)*

b) ¿Cuántas veces se ha de lanzar esta moneda como mínimo para que la proporción de caras obtenidas no difiera de la proporción verdadera en más de un 2% con un nivel de confianza del 95%?. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(8 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $p\,(C) = \dfrac{20}{100} = 0{,}2$ y $p\,(X) = 0{,}8$

b) La proporción de caras es de 0,2 y la proporción de cruces de 0,8.

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

La cota de error (error máximo admisible) es de 0,02.

Por tanto: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{p \cdot (1-p)}{n}} \;\Rightarrow\; n = \dfrac{z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot (1-p)}{E^2} = \dfrac{1{,}96^2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}02^2} = 1536{,}64$ luego se habrá de lanzar un mínimo de 1537 veces.

Junio 2000.

OPCIÓN A.

1. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$, *con b un parámetro real. Se pide:*

a) ¿Para qué valores del parámetro b el sistema de ecuaciones lineales $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *tiene sólo la solución x = y = z = 0?. Justificar la respuesta.* *(5 puntos)*

b) Para b = !1, resolver, si es posible, el sistema de ecuaciones lineales $A\begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Puesto que se trata de un sistema homogéneo, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al de la ampliada. El sistema tiene sólo la solución trivial si el rango coincide con el número de incógnitas, es decir si rg A = 3.

$$rg\ A = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b^2 \end{pmatrix} \underset{(1)}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & b^2-1 \end{pmatrix}$$ luego para que el rango sea 3, debe ser $b^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow b \neq \pm 1$

Transformaciones elementales: (1) $F_2 - 2F_1$, $F_3 - F_1$

b) El sistema es: $\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = -1 \\ 0z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases}$ Transformaciones elementales: (1) $E_2 - 2E_1$, $E_3 - E_1$

2. *Considerar la función polinómica de tercer grado* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *, siendo a, b, c y d parámetros reales. Se pide:*

a) Determinar los valores de los parámetros para que f(x) tenga un máximo en el punto (0 , 4) y un mínimo en el punto (2 , 0). *(7 puntos)*
b) Para a = b = c = d = 1, razonar si f(x) tiene puntos de inflexión y, en caso afirmativo, calcularlos. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si f(x) tiene un máximo en el punto (0 , 4), debe ser: $f(0) = 4$, $f'(0) = 0$ y si tiene un mínimo en (2 , 0), debe ser: $f(2) = 0$, $f'(2) = 0$:

Como $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, exigiendo que se cumplan las cuatro condiciones anteriores:

$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f'(0) = 0 \\ f(2) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 4 \\ c = 0 \\ 8a + 4b + 4 = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$ es decir: a = 1 , b = !3 , c = 0 , d = 4

b) La función es $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Un punto de inflexión cumple que $f''(x) = 0$ y $f'''(x)$ □ 0.

Se tiene: $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'''(x) = 6$.

Los posibles puntos de inflexión anulan a la segunda derivada: $6x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ y como $f'''(x) = 6 \neq 0$ la función tiene un punto de inflexión en $x = -\dfrac{1}{3}$: $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{20}{27}\right)$

3. *De una baraja española de 40 cartas se extraen sucesivamente y sin reposición dos cartas. Se pide calcular la probabilidad de que:*

a) La primera carta sea de copas y la segunda de espadas. *(2,5 puntos)*
b) Una carta sea de copas y la otra de espadas. *(2,5 puntos)*
c) Ninguna sea de bastos. *(2,5 puntos)*
d) Las dos sean de oros. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $p\left(C_1 \cap E_2\right) = p\left(C_1\right) \cdot p\left(E_2 / C_1\right) = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{39} = \dfrac{100}{1560} = 0{,}064$

b) $p\left[\left(C_1 \cap E_2\right) \cup \left(E_1 \cap C_2\right)\right] = p\left(C_1 \cap E_2\right) + p\left(E_1 \cap C_2\right) = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{39} + \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{39} = \dfrac{200}{1560} = 0{,}128$

c) $p\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = p\left(\overline{B_1}\right) \cdot p\left(\overline{B_2} / \overline{B_1}\right) = \dfrac{30}{40} \cdot \dfrac{29}{39} = \dfrac{870}{1560} = 0{,}5577$

d) $p\left(O_1 \cap O_2\right) = p\left(O_1\right) \cdot p\left(O_2 / O_1\right) = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{9}{39}$

Junio 2000.

OPCIÓN B.

1. *Un colegio prepara una excursión a la montaña para 114 alumnos. Para ello dispone de 8 vehículos de 6 plazas cada uno y otros 8 de 15 plazas, pero para el día de la excursión sólo dispone de 10 conductores. El viaje de ida y vuelta con un vehículo de 6 plazas cuesta 800 pesetas y con uno de 15 plazas 2100 pesetas. Calcular cuántos vehículos de cada tipo debe utilizar el colegio para que el coste del transporte sea mínimo. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

Elaboremos una tabla con todos los datos y condiciones:

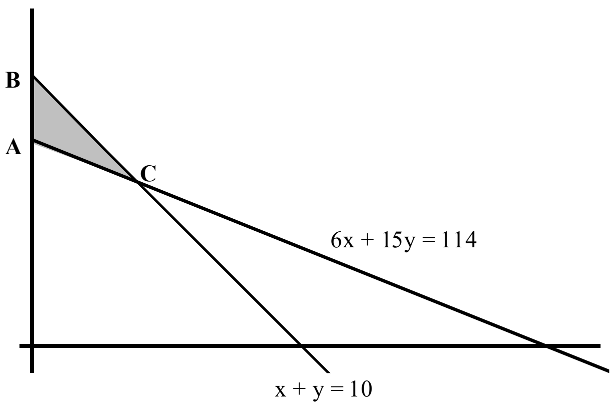
Tipo	**Número**	**Nº viajeros**	**Nº conduct.**	**Coste**
6 plazas	x	6x	x	800x
15 plazas	y	15y	y	2100y
	$x \geq 0$; $y \geq 0$	≥ 114	≤ 10	$f(x, y)$

X La función objetivo (mínima) es:

$$f(x, y) = 800x + 2100y$$

X Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 15y \geq 114 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$

Resolvamos el sistema de restricciones para dibujar la región factible:



X La recta x = 0 es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano derecho.

X La recta y = 0 es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.

X La recta $6x + 15y = 114$ pasa por los puntos $(19, 0)$ y $(4, 6)$ (por ejemplo) y la solución de la inecuación $6x + 15y \geq 114$ es el semiplano en el que no está el origen de coordenadas.

X La recta x + y = 10 pasa por los puntos $(10, 0)$ y (por ejemplo) y la solución de la inecuación $x + y \leq 10$ es el semiplano en el que está el origen de coordenadas.

La región factible es la sombreada en gris.

La función objetivo alcanza su mínimo en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos las coordenadas de dichos vértices y el valor que toma la función objetivo en cada uno de ellos:

Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 6x + 15y = 114 \end{cases} \Rightarrow A\left(0, \frac{38}{5}\right) \Rightarrow f\left(0, \frac{38}{5}\right) = 2100 \cdot \frac{38}{5} = 15960 \text{ pts}$

Vértice B: $\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow B(0, 10) \Rightarrow f(0, 10) = 21000 \text{ pts}$

Vértice C: $\begin{cases} x + y = 10 \\ 6x + 15y = 114 \end{cases} \Rightarrow C(4, 6) \Rightarrow f(4, 6) = 800 \cdot 4 + 2100 \cdot 6 = 15800 \text{ pts}$

Luego la combinación más barata es la de utilizar cuatro vehículos de 6 plazas y seis de 15 plazas.

2. *a) Determinar el área limitada entre las parábolas* $y = x^2 - 4$, $y = 4 - x^2$. *(5 puntos)*

b) Determinar una función f(x) que verifica: $f'(x) + x^3 - 3 = 0$, $f(1) = \dfrac{3}{4}$ *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Escribamos la función diferencia de las dadas: $f(x) = 2x^2 - 8$

Calculemos sus puntos de corte con OX (límites de integración): $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow$ x = −2 , x = 2

Se tiene:

$$\int_{-2}^{2} \left(2x^2 - 8\right)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 8x\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{16}{3} - 16\right) - \left(\frac{-16}{3} + 16\right) = \frac{16}{3} - 16 + \frac{16}{3} - 16 = -\frac{64}{3} \Rightarrow S = \left|-\frac{64}{3}\right| = \frac{64}{3}u^2$$

b) De la primera condición se tiene: $f'(x) = -x^3 + 3 \Rightarrow f(x) = \int \left(-x^3 + 3\right)dx = -\dfrac{x^4}{4} + 3x + k$

y utilizando la segunda condición: $f(1) = \dfrac{3}{4} \Rightarrow -\dfrac{1}{4} + 3 + k = \dfrac{3}{4} \Rightarrow k = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} - 3 = -2$

luego: $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^4 + 3x - 2$

3. *La cuarta parte de una población ha sido vacunada contra una enfermedad. ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener una muestra de dicha población para que, con un nivel de confianza del 95%, la proporción muestral y la poblacional no difieran en más de 0,02?. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La proporción poblacional de vacunados es: $pr = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$ y la de no vacunados: $1 - pr = 0{,}75$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es: $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible es: E = 0,02.

En estas condiciones: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pr \cdot (1 - pr)}{n}} \Rightarrow n = \dfrac{z_{\alpha/2}^2 \cdot pr \cdot (1 - pr)}{E^2} = \dfrac{1{,}96^2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}{0{,}02^2} = 1800{,}75$

es decir, el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 1801 personas.

Septiembre 2000.

OPCIÓN A.

1. *Una empresa produce dos tipos de bolsos A y B. La producción de un bolso de tipo A requiere 3 unidades de materia prima y 5 horas de trabajo. Por otra parte, la producción de un bolso de tipo B requiere 2 unidades de materia prima y 4 horas de trabajo. La empresa en cuestión dispone cada día de 180 unidades de materia prima y 320 horas de trabajo. Sabiendo que cada bolso de tipo A produce un beneficio de 4 unidades monetarias, cada bolso de tipo B 3 unidades monetarias y que se vende todo lo que se produce, se pide:*

a) ¿Cuántos bolsos de cada tipo se han de producir diariamente para que el beneficio sea máximo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. *(7 puntos)*
b) Suponer que cambian los beneficios producidos por cada tipo de bolso, siendo el que produce uno de tipo A de 3 unidades monetarias y uno de tipo B de 2, ¿varía la solución del apartado a)?. En caso de que varíe, calcular la nueva solución del problema. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

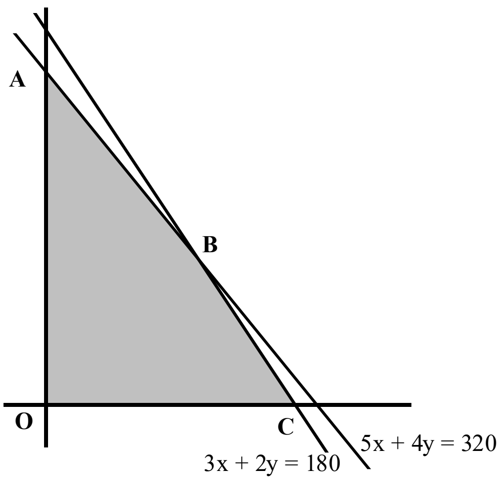
Se trata de un problema de Programación Lineal. Organicemos los datos y escribamos la función objetivo y las restricciones a que está sometida:

Tipo de bolso	Número	Mat. Prima	Horas	Beneficio
A	x	3x	5x	4x
B	y	2y	4y	3y
	$x \geq 0$ $y \geq 0$	≤ 180	≤ 320	$f(x, y)$

Función objetivo (maximizar): $f(x, y) = 4x + 3y$

Restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 180 \\ 5x + 4y \leq 320 \end{cases}$

Construyamos la región factible (solución del sistema de restricciones) y calculemos las coordenadas de sus vértices:



Vértice O: $O(0, 0)$

Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 5x + 4y = 320 \end{cases} \Rightarrow A(0, 80)$

Vértice B: $\begin{cases} 3x + 2y = 180 \\ 5x + 4y = 320 \end{cases} \Rightarrow B(40, 30)$

Vértice C: $\begin{cases} y = 0 \\ 3x + 2y = 180 \end{cases} \Rightarrow C(60, 0)$

La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Sustituyamos las coordenadas de los vértices en la función objetivo para ver en cual alcanza el mayor valor:

$f(0, 0) = 0$, $f(0, 80) = 240$, $f(40, 30) = 250$, $f(60, 0) = 240$
luego se maximiza para 40 bolsos del tipo A y 30 bolsos del tipo B.

b) Ahora varía la función objetivo $f(x, y) = 3x + 2y$ pero no las restricciones. Veamos el valor de la nueva función en los vértices de la región factible: $f(0, 0) = 0$, $f(0, 80) = 160$, $f(40, 30) = 180$, $f(60, 0) = 180$. Como alcanza el mayor valor tanto en el vértice B como en el vértice C, la solución es cualquier punto del segmento BC con coordenadas enteras.

2. *Considerar la función* $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$*, siendo p y q números reales. Se pide:*

a) ¿Qué valores deben tomar p y q para que f(x) tenga un mínimo en el punto (1, 1)? Razonar la respuesta. *(7 puntos)*

b) Para p = 3 y q = 2, razonar si f(x) tiene puntos de inflexión y, en caso afirmativo, calcularlos. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si tiene un mínimo en el punto $(1,1)$ debe ocurrir: $f(1)=1$ y $f'(1)=0$:

$$f(1) = 1 + p + q + 1 = 1 \Rightarrow p + q = -1 \quad (*)$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2px + q \Rightarrow f'(1) = 3 + 2p + q = 0 \Rightarrow 2p + q = -3 \quad (*)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (*): $\begin{cases} p + q = -1 \\ 2p + q = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -p - q = 1 \\ 2p + q = -3 \end{cases} \Rightarrow p = -2 \ , \ q = 1$

b) La función es $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x + 2 \Rightarrow f''(x) = 6x + 6$

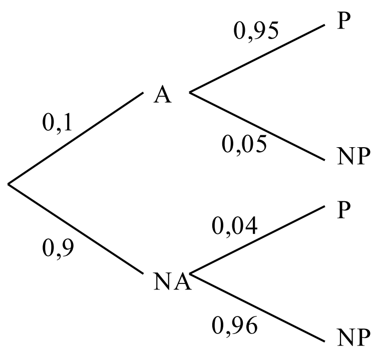
Los puntos de inflexión satisfacen $f''(x) = 0$ y $f'''(x) \neq 0$: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ y como $f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ la función tiene un punto de inflexión en x = !1: $(-1, 1)$.

3. *En una empresa de transportes la probabilidad de que se accidente un camión es 0,1. Si se produce el accidente, la probabilidad de perder la carga es 0,95. Por otra parte, la probabilidad de perder la carga sin que haya accidente es 0,04. Calcular razonadamente:*

a) La probabilidad de que se pierda la carga de un camión. *(5 puntos)*
b) Sabiendo que se ha perdido la carga de un camión, la probabilidad de que no haya tenido un accidente. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación (A = "accidente" , NA = "no accidente" , P = "perder la carga" , NP = "no perder la carga"):



a) Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(P) = p(A) \cdot p(P/A) + p(NA) \cdot p(P/NA) =$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}04 = 0{,}131$$

b) Aplicación del teorema de Bayes:

$$p(NA/P) = \frac{p(NA) \cdot p(P/NA)}{p(A) \cdot p(P/A) + p(NA) \cdot p(P/NA)} =$$
$$= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}04}{0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}04} = 0{,}2748$$

Septiembre 2000.

OPCIÓN B.

1. *Considerar las matrices* $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&3&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1&3\\1&1\\6&2\end{pmatrix}$. *Se pide:*

a) Determinar una matriz X que verifique: $A^2\cdot X=\frac{1}{2}B\cdot C$ *(5 puntos)*

b) Considerar el sistema de ecuaciones lineales $(C\cdot B)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. *Discutir si existe solución y, en caso afirmativo, resolverlo por el método de Gauss.* *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Obtengamos las matrices A^2 y $\frac{1}{2}B\cdot C$:

$$A^2=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\3&1\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}B\cdot C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&3\\1&1\\6&2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}12&8\\10&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&4\\5&1\end{pmatrix}$$

La matriz X debe ser una matriz 2H2: $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Se cumple:

$$\begin{pmatrix}4&0\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&4\\5&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}4a&4b\\3a+c&3b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&4\\5&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}4a=6\\4b=4\\3a+c=5\\3b+d=1\end{cases} \Rightarrow a=\frac{3}{2}\ ,\ b=1\ ,\ c=\frac{1}{2}\ ,\ d=-2$$

Por tanto: $X=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&1\\\frac{1}{2}&-2\end{pmatrix}$

b) Calculemos la matriz de los coeficientes $C\cdot B=\begin{pmatrix}-1&3\\1&1\\6&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&8&1\\0&4&3\\4&12&14\end{pmatrix}$

Puesto que se trata de un sistema homogéneo, el rango de la matriz de los coeficientes es igual que el de la matriz ampliada. Lo que hay que ver es si este rango es igual al número de incógnitas (es decir, 3) o menor:

$$rg\begin{pmatrix}-4&8&1\\0&4&3\\4&12&14\end{pmatrix}\overset{(1)}{=}rg\begin{pmatrix}-4&8&1\\0&4&3\\0&20&15\end{pmatrix}\overset{(2)}{=}rg\begin{pmatrix}-4&8&1\\0&4&3\\0&0&0\end{pmatrix}=2$$

$\Rightarrow$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2 $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

Transformaciones elementales: (1) F_3-F_1 (2) F_3-5F_2

El sistema dado es equivalente al: $\begin{cases}-4x+8y+z=0\\4y+3z=0\end{cases} \Rightarrow z=\lambda\ ,\ y=-\frac{3\lambda}{4}\ ,\ x=-\frac{5\lambda}{4}$

2. *a) De entre todos los pares de números que suman 30, calcular aquel par cuyo producto sea máximo. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(5 puntos)*
b) Calcular el área del recinto plano limitado por las gráficas de $y = x^2$, $y = x$. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sean los números: x , $30 - x$.

La función $f(x) = x \cdot (30 - x) = 30x - x^2$ debe ser máxima. El valor de x donde la función alcanza su máximo debe verificar: $f'(x) = 0$ y $f''(x) < 0$:

$f'(x) = 30 - 2x = 0 \Rightarrow x = 15$ y $f''(x) = -2 < 0$. Por tanto, la función es máxima para x = 15, es decir, los dos números cuya suma es 30 y cuyo producto es máximo son 15 y 15.

b) La función diferencia de las dos funciones dadas es: $f(x) = x^2 - x$. Calculemos el área limitada por esta función y el eje de abscisas.

X Puntos de corte con OX: $x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 1$ (límites de integración)

X $\int_0^1 (x^2 - x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow S = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}u^2$

3. *En una región se seleccionó aleatoriamente una muestra de 150 personas. A todas ellas se les preguntó si eran fumadoras y 90 contestaron que no. Determinar un intervalo del porcentaje de fumadores de dicha región con un nivel de confianza del 95%. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La proporción muestral de fumadores es $pr = \frac{60}{150} = 0{,}4$ y la de no fumadores $1 - pr = 0{,}6$.
Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

El error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot (1-pr)}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{150}} = 0{,}0784$

Por tanto, el intervalo del porcentaje de fumadores en la región es:

$(pr - E\,,\, pr + E) = (0{,}4 - 0{,}0784\ ,\ 0{,}4 + 0{,}0784) = (0{,}3216\ ,\ 0{,}4784)$ es decir, entre un 32,16% y un 47,84%.

Junio 2001.

OPCIÓN A.

1. *El tratamiento de cierta enfermedad requiere la administración de dos complejos vitamínicos, C_1 y C_2. Cada semana es preciso consumir al menos 450 mg de C_1 y 200 mg de C_2. Estos complejos se presentan en dos comprimidos diferentes: el comprimido de color rojo que cuesta 25 pesetas la unidad y que contiene 15 mg de C_1 y 25 mg de C_2 y el comprimido de color azul que también cuesta 25 pesetas la unidad y que contiene 28 mg de C_1 y 10 mg de C_2. ¿Cuántos comprimidos de cada color debe tomar un individuo en una semana para que el coste del tratamiento sea mínimo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de Programación Lineal. Escribamos la función objetivo y las restricciones:

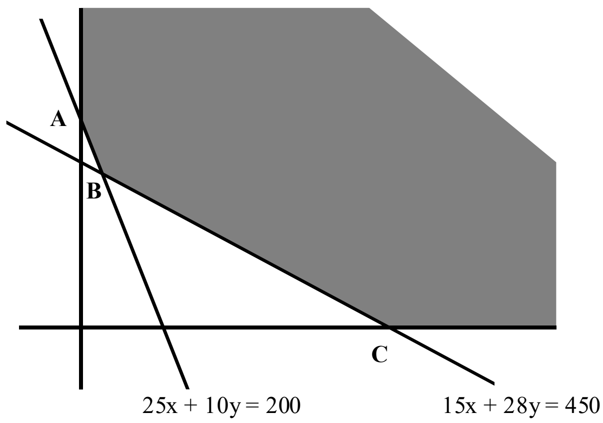
Comprimidos	**nº**	**C_1 (cantidad)**	**C_2 (cantidad)**	**Coste**
R (rojo)	x	15x	25x	25x
A (azul)	y	28y	10y	25y
	$x \geq 0$; $y \geq 0$	≥ 450	≥ 200	F(x , y)

- Función objetivo (mínima):
  F(x , y) = 25x + 25y
- Restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 15x + 28y \geq 450 \\ 25x + 10y \geq 200 \end{cases}$$

Construyamos la región factible (solución del sistema de restricciones):

- La recta x = 0 es el eje de ordenadas. $x \geq 0$ es el semiplano formado por los puntos de abscisa positiva.
- La recta y = 0 es el eje de abscisas. $y \geq 0$ es el semiplano formado por los puntos de ordenada positiva.
- La recta $15x + 28y = 450$ pasa por los puntos (30 , 0) y (2 , 15) (por ejemplo). La inecuación $15x + 28y \geq 450$ es el semiplano del que no forma parte el origen de coordenadas (0 , 0).
- La recta $25x + 10y = 200$ pasa por los puntos(0 , 20) y (2 , 15) (por ejemplo). La inecuación $25x + 10y \geq 200$ es el semiplano del que no forma parte el origen de coordenadas (0 , 0).



La región factible es la zona en gris.

La solución del problema está en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos sus coordenadas:

Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 25x + 10y = 200 \end{cases} \Rightarrow A(0\,,20)$

Vértice B: $\begin{cases} 25x + 10y = 200 \\ 15x + 28y = 450 \end{cases} \Rightarrow B(2\,,15)$

Vértice C: $\begin{cases} y = 0 \\ 15x + 28y = 450 \end{cases} \Rightarrow C(30\,,0)$

Calculemos el valor de la función objetivo en cada vértice: F(0 , 20) = 500 , F(2 , 15) = 425 , F(30 , 0) = 750

luego el coste es mínimo utilizando 2 comprimidos rojos y 15 comprimidos azules.

2. *Sea una función f(x) tal que su primera derivada es f'(x) = 4x + b, con b un parámetro real. Se pide:*

a) Determinar el valor del parámetro b para que f(x) tenga un mínimo en x = 1. *(3 puntos)*
b) ¿Puede tener f(x) un máximo en x = -1?. Razonar la respuesta. *(2 puntos)*
c) Determinar el valor del parámetro b para que 0 y -1 sean raíces de f(x). *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si f(x) tiene un mínimo en x = 1, debe ser $f'(1) = 0 \;\Rightarrow\; 4 + b = 0 \;\Rightarrow\; b = -4$

b) No. Al ser f´(x) una función polinómica de primer grado, sólo puede tener un punto crítico que corresponde al mínimo en x = -1.

c) Calculemos la función f(x): $f(x) = \int f'(x)\, d(x) = \int (4x + b)\, dx = 2x^2 + bx + k$

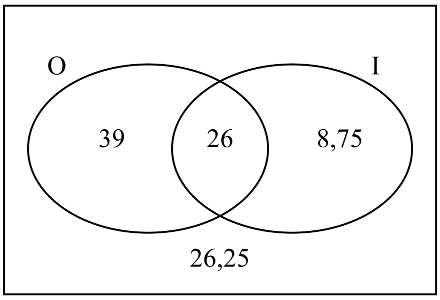
Si x = 0 y x = -1 son raíces de f(x), debe ocurrir que:
$$\begin{array}{l} f(0) = 0 \;\Rightarrow\; k = 0 \\ f(-1) = 0 \;\Rightarrow\; 2 - b = 0 \;\Rightarrow\; b = 2 \end{array}$$

3. *En una empresa, el 65% de sus empleados saben manejar un ordenador y de éstos, el 40% hablan inglés. La cuarta parte de los que no saben manejar el ordenador hablan inglés. Calcular la probabilidad de que elegido al azar un empleado de esta empresa:*

a) Hable inglés y maneje el ordenador. *(3 puntos)*
b) Hable inglés. *(3,5 puntos)*
c) Maneje el ordenador, sabiendo que habla inglés. *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Si suponemos un total de 100 empleados, la distribución de los mismos según el manejo del ordenador y del inglés es:

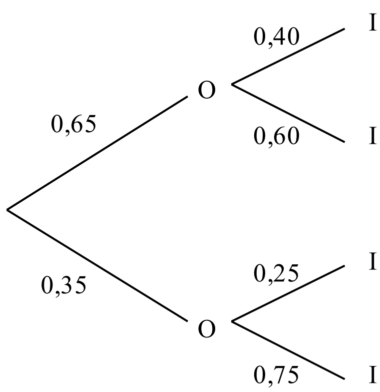


a) $p(I \cap O) = \dfrac{26}{100} = 0{,}26$

b) $p(I) = \dfrac{26 + 8{,}75}{100} = \dfrac{34{,}75}{100} = 0{,}3475$

c) $p(0/I) = \dfrac{26}{34{,}75} = 0{,}7482$

- También puede resolverse organizando el diagrama en árbol de la situación:



a) $p(I \cap O) = 0{,}65 \cdot 0{,}40 = 0{,}26$

b) Aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(I) = 0{,}65 \cdot 0{,}40 + 0{,}35 \cdot 0{,}25 = 0{,}3475$$

c) Aplicación del teorema de Bayes:

$$p(O/I) = \frac{p(O) \cdot p(I/O)}{p(O) \cdot p(I/O) + p(\overline{O}) \cdot p(I/\overline{O})} =$$

$$= \frac{0{,}65 \cdot 0{,}40}{0{,}65 \cdot 0{,}40 + 0{,}35 \cdot 0{,}25} = 0{,}7482$$

Junio 2001.

OPCIÓN B.

1. *En una librería hubo la semana pasada una promoción de tres libros: una novela, un libro de poesía y un cuento. Se vendieron 200 ejemplares de la novela, 100 de poesía y 150 cuentos. Sabiendo que la librería ingresó por dicha promoción 8.600 euros, que el precio de un ejemplar de novela es el doble que el de un cuento y que el triple de la diferencia entre el precio del ejemplar de poesía y del cuento es igual al precio de una novela, se pide:*

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales para determinar el precio al que se vendió cada libro. *(5 puntos)*
b) Resolver el sistema de ecuaciones planteado por el método de Gauss. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sean: precio novela = x , precio poesía = y , precio cuento = z

Se tiene: $$\begin{cases} 200x+100y+150z=8600 \\ x=2z \\ x=3(y-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 200x+100y+150z=8600 \\ x-2z=0 \\ x-3y+3z=0 \end{cases}$$

b) Utilicemos las transformaciones elementales para conseguir un sistema escalonado equivalente:

$$\begin{cases} 200x+100y+150z=8600 \\ x-2z=0 \\ x-3y+3z=0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-3y+3z=0 \\ x-2z=0 \\ 4x+2y+3z=172 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-3y+3z=0 \\ \quad 3y-5z=0 \\ \quad 14y-9z=172 \end{cases} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-3y+3z=0 \\ \quad 3y-5z=0 \\ \qquad 43z=516 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad z=12 \ , \ y=20 \ , \ x=24$

Transformaciones elementales: (1) $E_1/50$, cambio de orden de las ecuaciones
(2) E_2-E_1 , E_3-4E_1
(3) $3E_3-14E_2$

luego la novela se vendió a 24 €, la poesía a 20 € y el cuento a 12 €.

2. *Dada la función* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x\neq 5 \\ 0 & \text{si } x=5 \end{cases}$ *, se pide:*

a) Demostrar que f(x) no es continua en x = 5. *(3 puntos)*
b) ¿Existe una función continua que coincida con f(x) para todos los valores $x\neq 5$ *?. En caso afirmativo, dar su expresión.* *(3 puntos)*
c) ¿Existe alguna asíntota oblicua de f(x)?. En caso afirmativo, calcularla. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Apliquemos la definición de continuidad en un punto:

i) $\exists f(5)=0$

ii) $\exists \lim\limits_{x\to 5} f(x)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x+5)\cdot(x-5)}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}(x+5)=10$

iii) $f(5)\neq \lim\limits_{x\to 5} f(x)$

Falla la tercera condición, luego la función es discontinua en x =5 (discontinuidad evitable)

b) Sí, basta con conseguir que $f(5)=\lim\limits_{x\to 5} f(x)$: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x\neq 5 \\ 10 & \text{si } x=5 \end{cases}$

c) Sea y = mx + n: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2-25}{x-5}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}=1$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-25}{x-5}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-25-x^2+5x}{x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-25}{x-5}=5$$

Por tanto, la recta y = x + 5 es una asíntota oblicua de la función.

3. *En cierta población cercana a una estación de esquí se quiere estimar con un nivel de confianza del 95% la proporción de habitantes que practican el esquí. Se toma una muestra de 400 habitantes de la población de la que 240 afirman que practican este deporte. Determinar el correspondiente intervalo de confianza. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La proporción muestral de practicantes es: $pr=\dfrac{240}{400}=0{,}6$ y la de no practicantes: $1-pr=0{,}4$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es: $z_{\alpha/2}=1{,}96$

La cota de error es: $E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{pr\cdot(1-pr)}{n}}=1{,}96\cdot\sqrt{\dfrac{0{,}6\cdot 0{,}4}{400}}=0{,}048$

Por tanto, el intervalo de confianza para la proporción de practicantes en la población será:

$(0{,}6-0{,}048\ ,\ 0{,}6+0{,}048)=(0{,}552\ ,\ 0{,}648)$ es decir: entre el 55,2% y el 64,8%

Septiembre 2001.

OPCIÓN A.

1. *Dado el sistema de ecuaciones lineales* $\begin{cases} -x - y + 3z = 0 \\ 2x + bz = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases}$ *con b un parámetro real, calcular:*

a) El rango de la matriz de coeficientes del sistema según los valores del parámetro b. *(4 puntos)*
b) Los valores del parámetro b para los que el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado y hallar la solución del sistema para los valores de b calculados. *(3 puntos)*
c) Los valores del parámetro b para los que el sistema de ecuaciones lineales es compatible indeterminado y hallar las soluciones del sistema para los valores de b calculados. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sea A la matriz de los coeficientes. Se tiene:

$$\text{rg } A = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & b \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & b+6 \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & b+10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $F_2 \leftrightarrow F_3$ (2) $F_3 + 2F_1$ (3) $F_3 + F_2$

$\Rightarrow$ Si $b = -10$: rg A = 2 ; si $b \neq -10$: rag A = 3

b) Puesto que se trata de un sistema homogéneo, es compatible determinado cuando rg A = nº de incógnitas = 3, luego lo es para b … !10. La única solución es la trivial: $x = y = z = 0$.

c) El sistema es compatible indeterminado cuando rg A < nº de incógnitas, luego lo es para b = !10 (rg A = 2).

El sistema dado es equivalente al: $\begin{cases} -x - y + 3z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases}$ y considerando la incógnita z como un parámetro: $z = \lambda$, se tiene:

$$\begin{cases} -x - y = -3\lambda \\ 2y = -4\lambda \end{cases} \Rightarrow x = 5\lambda \ , \ y = -2\lambda \ , \ z = \lambda$$

2. *a) Calcular, si existen, los puntos de inflexión de la función* $f(x) = 2x^2 + \ln x$ *(5 puntos)*
b) Determinar una función polinómica cuya derivada sea $x - 1$ *y cuya gráfica pase por el punto* $(1, 1)$. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Observemos que $\text{Dom}(f) = R^+$.

Los puntos de inflexión anulan la segunda derivada y no anulan la tercera derivada:

$f'(x) = 4x + \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (se desestima $x = -\frac{1}{2}$ porque no pertenece al dominio de la función) y como $f'''(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0 \ \forall x \in R^+$, la función tiene un punto de inflexión en $x = \frac{1}{2}$.

b) Sea F(x) la función buscada. Se tiene: $F(x)=\int (x-1)\,dx=\dfrac{x^2}{2}-x+C$

Como F(1) = 1: $\dfrac{1}{2}-1+C=1 \;\Rightarrow\; C=\dfrac{3}{2}$ y por tanto: $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{3}{2}$

3. *De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta al azar, se pide:*

a) Calcular la probabilidad de que la carta extraída no sea un rey *(2 puntos)*
b) Calcular la probabilidad de que la carta extraída no sea un rey, sabiendo que ha sido una figura *(3 puntos)*
c) Si de la misma baraja se extrae otra carta al azar después de introducir la primera, calcular la probabilidad de que al menos una de las dos cartas extraídas haya sido un rey. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sean los sucesos: R = "extraer un rey" , F = "extraer una figura". Se tiene:

a) $p\left(\overline{R}\right)=\dfrac{36}{40}=\dfrac{9}{10}=0{,}9$

b) $p\left(\overline{R}\,/\,F\right)=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}=0{,}6667$

c) El suceso "al menos una de las dos cartas extraídas ha sido un rey" es el suceso contrario del suceso "ninguna de las dos cartas extraídas ha sido un rey". Como se trata de un experimento con reposición, los sucesos son independientes y se tiene:

$$p\left(R_1\cup R_2\right)=1-p\left(\overline{R}_1\cap\overline{R}_2\right)=1-0{,}9\cdot 0{,}9=1-0{,}81=0{,}19$$

También: $p\left(R_1\cup R_2\right)=p\left(R_1\right)+p\left(R_2\right)-p\left(R_1\cap R_2\right)=\dfrac{4}{40}+\dfrac{4}{40}-\dfrac{4}{40}\cdot\dfrac{4}{40}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{100}=\dfrac{19}{100}=0{,}19$

Septiembre 2001.

OPCIÓN B.

1. *Un taller de cerámica produce jarrones y ceniceros de los que obtiene unos beneficios unitarios de 5 y 6 unidades monetarias, respectivamente. La producción de dichos artículos se realiza a partir de dos factores productivos F_1 y F_2, de los que se utilizan 4 y 2 unidades, respectivamente, por cada jarrón y 2 y 3 unidades por cada cenicero. Sabiendo que la disponibilidad semanal de F_1 es de 110 unidades y de F_2 es de 85 unidades, el taller quiere saber:*

semanales? Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(8 puntos)*
b) Si a partir de un estudio de mercado se concluye que existe más demanda de jarrones que de ceniceros, ¿afectará esta circunstancia a la producción del taller si su objetivo sigue siendo maximizar sus beneficios? *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de programación lineal.

a) Organicemos los datos y las condiciones del problema en una tabla:

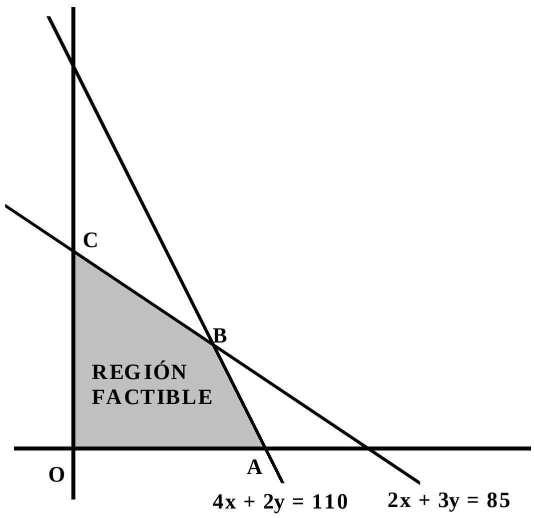
OBJETO	NÚMERO	FACTOR F_1	FACTOR F_2	BENEFICIOS
Jarrones	x	4x	2x	5x
Ceniceros	y	2y	3y	6y
	$x \geq 0$ $y \geq 0$	$4x + 2y \leq 110$	$2x + 3y \leq 85$	$F(x, y)$

La función objetivo, que debe ser máxima, es la función que expresa los beneficios: $F(x, y) = 5x + 6y$.

Las restricciones a que está sometida la solución son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + 2y \leq 110 \\ 2x + 3y \leq 85 \end{cases}$

Dibujemos la región factible (conjunto de los puntos del plano solución del sistema de restricciones):

C La recta de ecuación x = 0 es el eje de ordenadas. La solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.
C La recta y = 0 es el eje de abscisas. La solución de $y \geq 0$ es el semiplano superior.
C La recta $4x + 2y = 110$ pasa por los puntos $(0, 55)$ y $(20, 15)$!por ejemplo!. El semiplano solución de la inecuación $4x + 2y \leq 110$ es el que contiene al origen de coordenadas pues $(0, 0)$ verifica la inecuación.
C La recta $2x + 3y = 85$ pasa por los puntos $(5, 25)$ y $(20, 15)$!por ejemplo!. El semiplano solución de la inecuación $2x + 3y \leq 85$ es el que contiene al origen de coordenadas pues $(0, 0)$ verifica la inecuación.



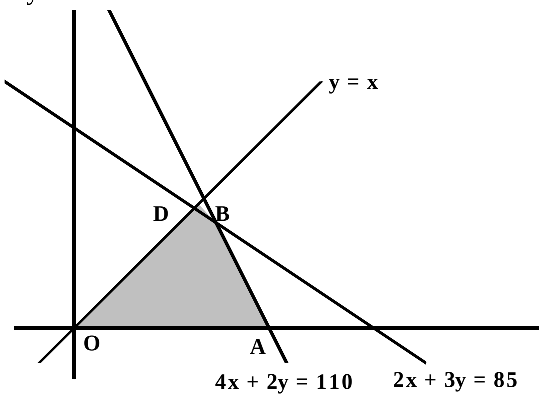
La región factible es el cuadrilátero OABC. La solución del problema serán las coordenadas de alguno de sus vértices. Calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos y observemos en cuál tiene el valor máximo:

$O(0, 0) \Rightarrow F(0, 0) = 0$ $\qquad$ $A\left(\frac{55}{2}, 0\right) \Rightarrow F\left(\frac{55}{2}, 0\right) = 5 \cdot \frac{55}{2} + 6 \cdot 0 = 137{,}5$

$B(20\,,15) \Rightarrow F(20\,,15) = 5\cdot 20 + 6\cdot 15 = 190 \qquad C\left(0\,,\dfrac{85}{3}\right) \Rightarrow F\left(0\,,\dfrac{85}{3}\right) = 5\cdot 0 + 6\cdot\dfrac{85}{3} = 170$

Luego los beneficios son máximos cuando fabriquen y vendan 20 jarrones y 15 ceniceros.

b) Ahora hay que añadir la condición $x \ge y$. La nueva región factible es el cuadrilátero OABD:



El valor de la función objetivo en los vértices O, A y B ya es conocido. Veamos su valor en el nuevo vértice D:

$D(17\,,17) \Rightarrow F(17\,,17) = 5\cdot 17 + 6\cdot 17 = 187$

Por tanto, la función sigue siendo máxima en el vértice B.

2. *Dada la función* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ *, se pide:*

a) Probar que la recta $y = -x$ *es tangente a la curva* $y = f(x)$ *en algún punto.* *(4 puntos)*

b) Determinar el área del recinto plano limitado por la curva $y = f(x)$ *y el eje de abscisas.* *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) La pendiente de la recta $y = -x$ es ! 1. Si esta recta es tangente a la gráfica de la función, su pendiente debe coincidir con el valor de la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8 = -1 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \quad x = 1\ ,\ x = 3$$

Por tanto, la recta puede ser tangente a la gráfica de la función en dos puntos: $(1,3)$ y $(3,-3)$. En $(1\,,3)$ no lo es pues la recta $y = -x$ no pasa por dicho punto. En cambio sí lo es en $(3\,,\,-3)$ pues este punto pertenece a la tangente.

b) Puesto que la función es polinómica y, por tanto, continua, los puntos de corte con el eje OX serán los extremos de los recintos limitados por la función y el eje de abscisas:

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 6x + 8\right) = 0 \Rightarrow x = 0\,,\ x = 2\ ,\ x = 4.$$

Obtengamos una primitiva de la función: $F(x) = \int \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)dx = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2$

Con lo que: $S_1 = \left| F(2) - F(0) \right| = 4 \qquad S_2 = \left| F(4) - F(2) \right| = \left| -4 \right| = 4$ y por tanto: $S = S_1 + S_2 = 8\ u^2$

3. *Las puntuaciones en cierta asignatura de una universidad siguen una distribución normal de media desconocida y varianza 4. Calcular, con un nivel de confianza del 98%, un intervalo para la puntuación media sabiendo que en una muestra de 64 estudiantes se obtuvo una puntuación media de 5. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

Si la varianza es 4, la desviación típica es $\sigma = \sqrt{4} = 2$

$1 - \alpha = 98\% = 0{,}98 \Rightarrow \alpha = 0{,}02 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}01 \Rightarrow p = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$ y mirando en la tabla, esta probabilidad corresponde a un valor crítico $z_{\alpha/2} = 2{,}33$. El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(5 - 2{,}33\cdot\frac{2}{8}\ ,\ 5 + 2{,}33\cdot\frac{2}{8}\right) = (4'4175\ ,\ 5'5825)$$

Junio 2002.

OPCIÓN A.

1. *Se considera la función $f(x , y) = x + 3y$, se pide:*

a) Razonar si $f(x , y)$ alcanza un valor máximo y uno mínimo en el conjunto:

$$S = \{(x, y) \ / \ 2x + y \leq 4 \ , \ x + 3y \leq 7 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \}$$

En caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos en los que se alcanzan. *(6 puntos)*

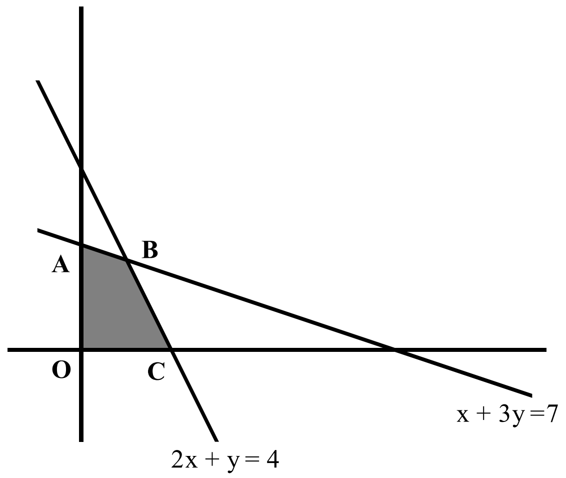
b) Razonar si $f(x , y)$ alcanza un valor máximo y uno mínimo en el conjunto:

$$T = \{(x, y) \ / \ 2x + y \geq 4 \ , \ x + 3y \geq 7 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \}$$

En caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos en los que se alcanzan. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Representemos el conjunto S:



Calculemos las coordenadas de los vértices:

Vértice O: O (0 , 0)

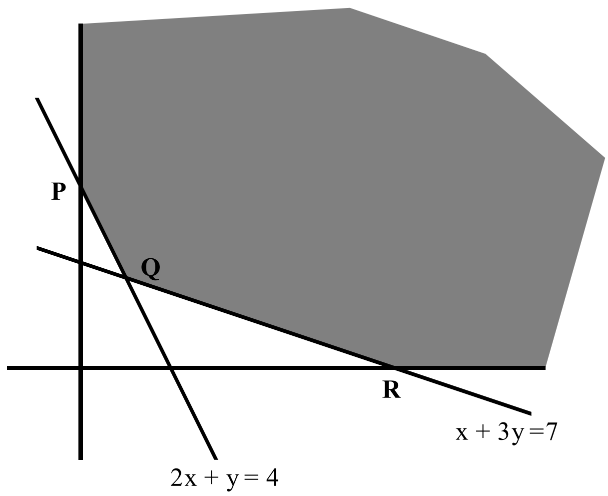
Vértice A: $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(0 , \dfrac{7}{3}\right)$

Vértice B: $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(1 , 2)$

Vértice C: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2 , 0)$

Los puntos donde la función f(x , y) alcanza un máximo o un mínimo están entre los vértices del conjunto S. Calculemos el valor de la función en dichos vértices: $f(0 , 0) = 0$, $f\left(0 , \dfrac{7}{3}\right) = 7$, $f(1 , 2) = 7$, $f(2 , 0) = 2$ $\Rightarrow$ el valor mínimo lo alcanza en el punto (0 , 0) y el valor mínimo en cualquier punto del lado AB.

b) Representemos el conjunto T:



Ahora se trata de una región abierta. Los vértices son:

P (0 , 4) , Q (1 , 2) y R (0 , 7)

El valor que toma la función en cada uno de ellos es:

$$f(0 , 4) = 12 \ , \ f(1 , 2) = 7 \ , \ f(7 , 0) = 7$$

luego alcanza un mínimo en cualquier punto del segmento QR y el máximo no lo alcanza en ningún punto pues se trata de una región abierta.

2. *Se considera la función* $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). *(3 puntos)*
b) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de f(x). ¿Existen puntos de inflexión?. Razonar la respuesta. *(5 puntos)*
c) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en x = 0. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0\ \ \forall x\ \Rightarrow\ \text{la función es creciente.}$$

b) Los intervalos de concavidad y convexidad dependen del signo de la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{-2\cdot 2\,(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\bullet\ \text{Para } x<-1:\ f''(x)>0\ \Rightarrow\ \text{la función es cóncava en } (-\infty,-1)\\ \bullet\ \text{Para } x>-1:\ f''(x)<0\ \Rightarrow\ \text{la función es convexa en } (-1,\infty)\end{cases}$$

No existen puntos de inflexión porque $f''(x)\neq 0\quad \forall x$

c) La recta tangente tiene por pendiente $m=f'(0)=2$ y pasa por el punto $(0,f(0))=(0,-1)$. Su ecuación es por tanto: $y-y_0=m\cdot(x-x_0)\ \Leftrightarrow\ y+1=2\cdot(x-0)\ \Leftrightarrow\ y=2x-1$

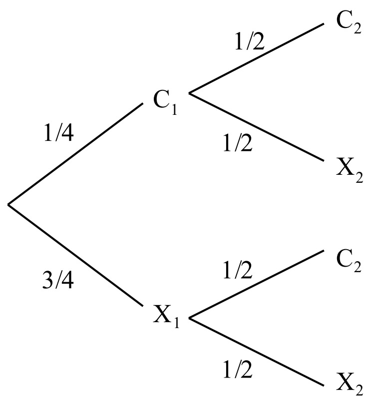
3. *Se tienen dos monedas, una sin trucar y otra trucada. Sabiendo que con la moneda trucada la probabilidad de obtener cruz es triple que la probabilidad de obtener cara, calcular la probabilidad de que al lanzar las dos monedas:*

a) Se obtengan dos caras. *(2,5 puntos)*
b) No se obtenga ninguna cara. *(2,5 puntos)*
c) Se obtenga una cara y una cruz. *(2,5 puntos)*
d) Se obtengan dos caras o dos cruces. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación (C_1 = "cara con la moneda trucada", X_1 = "cruz con la moneda trucada", C_2 = "cara con la moneda normal", X_2 = "cruz con la moneda normal"):

Puesto que los resultados con ambas monedas son independientes:



a) $p(C_1\cap C_2)=p(C_1)\cdot p(C_2)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}=0{,}125$

b) $p(X_1\cap X_2)=p(X_1)\cdot p(X_2)=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}=0{,}375$

c) $p[(C_1\cap X_2)\cup(X_1\cap C_2)]=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{8}=\dfrac{4}{8}=0{,}5$

d) $p[(C_1\cap C_2)\cup(X_1\cap X_2)]=p(C_1\cap C_2)+p(X_1\cap X_2)=$

$=0{,}125+0{,}375=0{,}5$

Junio 2002.

OPCIÓN B.

1. *En una empresa trabajan 160 personas y todas ellas deben hacerse un reconocimiento médico en el plazo de tres días. El primer día se lo hace la tercera parte de los que se lo hacen durante los otros dos días. El segundo día y el tercero se lo hacen el mismo número de personas. Se pide:*

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que permita calcular el número de trabajadores que se hacen el reconocimiento cada día. *(5 puntos)*
b) Resolver el sistema de ecuaciones lineales propuesto en el apartado anterior por el método de Gauss. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sea "x" el número de personas que se hacen el reconocimiento el primer día, "y" los que se lo hacen el segundo día y "z" el tercer día. Se tiene:

a) $\begin{cases} x+y+z=160 \\ x=\dfrac{y+z}{3} \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=160 \\ 3x-y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

b) Utilicemos el método de Gauss para resolver el sistema planteado:

$$\begin{cases} x+y+z=160 \\ 3x-y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=160 \\ y-z=0 \\ 3x-y-z=0 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=160 \\ y-z=0 \\ -4y-4z=-480 \end{cases} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=160 \\ y-z=0 \\ -8z=-480 \end{cases} \Rightarrow z=60\ ,\ y=60\ ,\ x=40$$

luego el primer día se hacen el reconocimiento 40 personas, el segundo día 60 y el tercero 60.

Transformaciones elementales: (1) cambio de orden de las ecuaciones (2) E_3-3E_1 (3) E_3+4E_2

2. *Dada la función* $f(x)=ax^3+bx+11$, *donde a y b son parámetros reales, se pide:*

a) Determinar el valor de los parámetros a y b para que f(x) tenga un extremo relativo en el punto (2 , 5). ¿Es máximo o mínimo? *(5 puntos)*
b) Considerando b = 0, determinar el valor del parámetro a para que f(x) tenga una primitiva cuya gráfica pase por el origen y por el punto (1 , 1). *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si f(x) tiene un extremo relativo en el punto (2 , 5) deben ser: f(2) = 5 y f´(2) = 0.

$f'(x)=3ax^2+b \Rightarrow f'(2)=12a+b=0 \qquad f(2)=8a+2b+11=5$

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 12a+b=0 \\ 8a+2b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24a+2b=0 \\ -8a-2b=6 \end{cases} \Rightarrow 16a=6 \Rightarrow a=\frac{3}{8} \ , \ b=-\frac{9}{2}$$

Para dichos valores: $f'(x)=\frac{9}{8}x^2-\frac{9}{2} \Rightarrow f''(x)=\frac{9}{4}x \Rightarrow f''(2)>0 \Rightarrow$ se trata de un mínimo.

b) La función es: $f(x)=ax^3+11$. Calculemos una primitiva de la función: $F(x)=\int\left(ax^3+11\right)dx=\frac{ax^4}{4}+11x+k$.

Debe ser: F(0) = 0 y F(1) = 1 luego: $\begin{cases} k=0 \\ \frac{a}{4}+11=1 \end{cases} \Rightarrow a=-40$

3. *La desviación típica del número de horas diarias que duermen los alumnos de cierta Universidad es 3 horas. Se considera una muestra aleatoria de 40 estudiantes que revela una media de sueño de 7 horas. Hallar un intervalo de confianza del 95% para la media de horas de sueño de los estudiantes de esta Universidad. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La desviación típica poblacional es $\sigma=3$ horas

Para el nivel de confianza del 95%, el valor crítico es: $z_{\alpha/2}=1{,}96$

El radio del intervalo (error máximo admisible) es: $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1{,}96\cdot\frac{3}{\sqrt{40}}=0{,}9297\cong 0{,}93$

Por tanto: $\left(7-0{,}93 \ , \ 7+0{,}93\right)=\left(6{,}07 \ , \ 7{,}93\right)$ es decir, entre 6,07 y 7,93 horas.

Septiembre 2002.

OPCIÓN A.

1. *Una empresa se dedica a la producción de dos tipos de tejidos A y B utilizando como materias primas algodón, poliéster y seda. Se dispone de 60 unidades de algodón, de 35 de seda y de 80 de poliéster y se sabe que las unidades de cada materia prima necesarias para la producción de 1 rollo de cada tipo de tejido vienen dadas en la siguiente tabla*

	algodón	*poliéster*	*seda*
A	*1*	*2*	*0*
B	*3*	*2*	*1*

a) Calcular el beneficio total máximo, sabiendo que el beneficio obtenido de un rollo del tejido A es de 50 euros y del B es de 70. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. *(7 puntos)*
b) ¿Se obtendría excedente de alguna materia prima?. En caso afirmativo, decir cuántas unidades. *(2 puntos)*
c) ¿Cambiaría la solución del apartado a) si al menos hubiera que producir 15 rollos del tejido A?. Razona la respuesta. *(1 punto)*

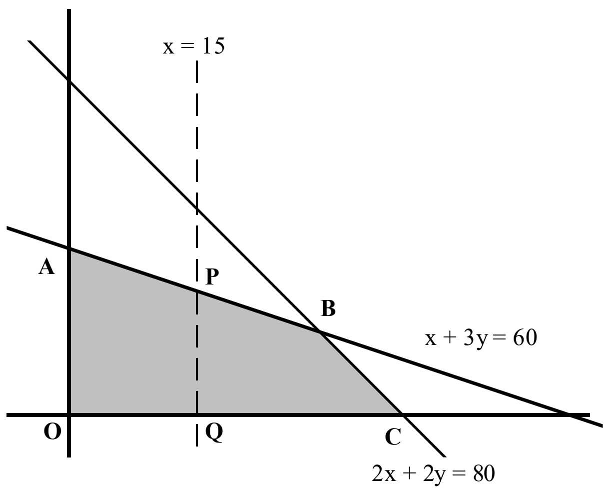
SOLUCIÓN.

Tejido	nº de rollos	algodón	poliéster	seda	Beneficio
A	x	x	2x	0x	50x
B	y	3y	2y	y	70y
	$x \geq 0$; $y \geq 0$	≤ 60	≤ 80	≤ 35	F(x, y)

Función objetivo: F(x , y) = 50x+70y
Restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 60 \\ 2x + 2y \leq 80 \\ y \leq 35 \end{cases}$$

a) Construyamos la región factible (solución del conjunto de restricciones):



Calculemos las coordenadas de los vértices de la región factible OABC:

Vértice O: O (0 , 0)

Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ x + 3y = 60 \end{cases} \Rightarrow A(0, 20)$

Vértice B: $\begin{cases} x + 3y = 60 \\ 2x + 2y = 80 \end{cases} \Rightarrow B(30, 10)$

Vértice C: $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 2y = 80 \end{cases} \Rightarrow C(40, 0)$

El valor que toma la función objetivo en los vértices de la región factible es:

F(0 , 0) = 0 , F(0 , 20) = 1400 ,
F(30 , 10) = 2200 , F(40 , 0) = 2000

Luego la función objetivo se maximiza en el punto (30 , 10), es decir deben fabricarse 30 rollos del tejido A y 10 del B y el beneficio obtenido será de 2200 euros.

b) Se utilizarán $30 + 3 \cdot 10 = 60$ unidades de algodón, $2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 = 80$ de poliéster y $0 \cdot 30 + 10 = 10$ de seda, luego sobrarán 25 unidades de seda.

c) Si se añade la condición $x \geq 15$ la solución sigue siendo la misma. La región factible es ahora PBCQ y la función objetivo sigue maximizándose en el vértice B: $P(15, 15) \Rightarrow f(15, 15) = 1800$, $Q(15, 0) \Rightarrow f(15, 0) = 750$

2. *La demanda de un bien en función de su precio viene dada por* $D(p) = \dfrac{30p+10}{p}$.

a) Demostrar que al aumentar el precio disminuye la demanda. *(2 puntos)*
b) Suponiendo que el precio aumenta indefinidamente, decir qué ocurrirá con la demanda. *(3 puntos)*
c) Escribir los ingresos de una empresa en función del precio suponiendo que dicha empresa es la única que produce este bien. *(1 punto)*
d) Calcular el precio para que la empresa del apartado anterior maximice sus beneficios sabiendo que los costes vienen dados por $C(p) = p^2/4$. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Se trata de comprobar que la función demanda es decreciente. Para ello veamos el signo de su función derivada:

$D'(p) = \dfrac{30p - 30p - 10}{p^2} = -\dfrac{10}{p^2} < 0 \quad \forall p \;\Rightarrow$ la función es decreciente y, por tanto, cuando p aumenta D disminuye.

b) $\lim\limits_{p \to \infty} \dfrac{30p+10}{p} = 30 \;\Rightarrow$ la demanda tenderá a 30

c) $I(p) = D(p) \cdot p = \dfrac{30p+10}{p} \cdot p = 30p + 10$

d) Los beneficios son la diferencia entre los ingresos y los costes:

$$B(p) = I(p) - C(p) = 30p + 10 - \frac{p^2}{4} = -\frac{1}{4}p^2 + 30p + 10$$

Veamos para qué valor de p la función B(x) alcanza su máximo:

$B'(p) = -\dfrac{1}{2}p + 30 = 0 \;\Rightarrow\; p = 60$ (valor crítico). Comprobemos que este valor de p maximiza los beneficios:

$B''(p) = -\dfrac{1}{2} < 0 \;\Rightarrow$ máximo , luego, en efecto a un precio de 60 los beneficios serán máximos

3. *Se lanzan un dado azul y tres rojos. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) En todos los dados rojos se obtiene la misma puntuación que en el azul. *(3 puntos)*
b) Al menos en uno de los rojos se obtiene la misma puntuación que en el azul. *(3,5 puntos)*
c) Todas las puntuaciones obtenidas son pares o todas son múltiplos de 3. *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) El suceso equivale a que en los cuatro dados se obtenga la misma puntuación: $p = 6 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = \dfrac{1}{6^3} = \dfrac{1}{216} = 0{,}0046$

b) La probabilidad de que en los tres dados rojos salga una puntuación distinta que la puntuación obtenida en el azul es de: $\dfrac{1}{6} \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 \cdot 6 = \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{125}{216} = 0{,}5787 \;\Rightarrow$ la probabilidad de que en algún dado rojo salga la misma puntuación que la obtenida en el azul es: $1 - \dfrac{125}{216} = \dfrac{91}{216} = 0{,}4213$.

c) $p\left(\dot{2} \cup \dot{3}\right) = p\left(\dot{2}\right) + p\left(\dot{3}\right) - p\left(\dot{2} \cap \dot{3}\right) = \left(\dfrac{3}{6}\right)^4 + \left(\dfrac{2}{6}\right)^4 - \left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = 0{,}074$

Septiembre 2002.

OPCIÓN B.

1. *a) Se considera el sistema* $\begin{cases}(a-3)x+by+cz=-5\\ bx-ay+10z=17\\ ax+z=c+6\end{cases}$. *Calcular, mediante el método de Gauss, los posibles valores que pueden tomar los parámetros a, b y c para que el sistema tenga por solución x = 1, y = -3, z = -1.* *(7 puntos)*

b) Con las matrices $A=\begin{pmatrix}2&-1\\5&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4\\4&4\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&1\\2&-1\end{pmatrix}$ *comprobar la propiedad asociativa del producto de matrices.* *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si las soluciones han de ser las que se indican, las podemos sustituir en el sistema dado y después resolver el sistema que queda (donde las incógnitas serán los parámetros):

$$\begin{cases}a-3-3b-c=-5\\ b+3a-10=17\\ a-1=c+6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a-3b-c=-2\\ 3a+b=27\\ a-c=7\end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}a-3b-c=-2\\ \quad 10b+3c=33\\ \quad\quad 3b=9\end{cases} \Leftrightarrow \; b=3\ ,\ c=1\ ,\ a=8$$

Transformaciones elementales: (1) E_2-3E_1 , E_3-E_1

b) Hay que comprobar que $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$:

$$(A\cdot B)\cdot C=\left[\begin{pmatrix}2&-1\\5&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&4\\4&4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\27&32\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-2\\118&-5\end{pmatrix}$$

$$A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix}2&-1\\5&3\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}3&4\\4&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\2&-1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2&-1\\5&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14&-1\\16&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-2\\118&-5\end{pmatrix}$$

luego, en efecto, se cumple la propiedad asociativa del producto para estas matrices.

2. *Se considera* $f(x)=ax^4-\dfrac{9x^2}{2}+b$

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que f(x) tenga un mínimo en el punto (3 , -8). *(6 puntos)*
b) Para a = 4 y b = 0, calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). *(4 puntos)*

SOLUCIÓN

a) Si f(x) tiene un mínimo en el punto $(3,-8)$, debe ocurrir: $f(3)=-8$ y $f'(3)=0$. Tenemos: $f'(x)=4ax^3-9x$
Exigiendo que se cumplan las dos condiciones citadas:

$$\begin{cases}81a-\dfrac{81}{2}+b=-8\\ 108a-27=0\end{cases} \Rightarrow\ a=\frac{27}{108}=\frac{1}{4}\ ,\ b=-8-\frac{81}{4}+\frac{81}{2}=\frac{49}{4} \quad \text{es decir: } a=\frac{1}{4}\ \text{ y }\ b=\frac{49}{4}$$

b) La función es $f(x)=4x^4-\dfrac{9}{2}x^2 \;\Rightarrow\; f'(x)=16x^3-9x$. El estudio del crecimiento y decrecimiento es el estudio del signo de f´(x): $f'(x)=0 \Leftrightarrow 16x^3-9x=x(16x^2-9)=0 \;\Rightarrow\; x=0\ ,\ x=\pm\dfrac{3}{4}$.

Se tiene:

$f'(x) < 0$		$f'(x) > 0$		$f'(x) < 0$		$f'(x) > 0$
	$-3/4$		0		$3/4$	

luego la función es:

decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{3}{4}\right) \mathrm{Y} \left(0, \dfrac{3}{4}\right)$ y creciente en $\left(-\dfrac{3}{4}, 0\right) \mathrm{Y} \left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$

3. *En una población, por cada persona que fuma 4 no lo hacen. Calcular el tamaño mínimo que debe tener una muestra de dicha población para que, con un nivel de confianza del 95%, la proporción muestral y la poblacional no difieran en más de 0,04. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La proporción de fumadores en la población es $pr = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ y la proporción de no fumadores será de $1 - pr = 0{,}8$.

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico que debemos utilizar es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible entre los datos de la muestra y de la población es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot (1 - pr)}{n}} \;\Rightarrow\; \frac{E^2}{z^2_{\alpha/2}} = \frac{pr \cdot (1 - pr)}{n} \;\Rightarrow\; n = \frac{z^2_{\alpha/2} \cdot pr \cdot (1 - pr)}{E^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}04^2} = 2501$$

luego la muestra debe estar formada por un mínimo de 2501 personas.

Junio 2003.

OPCIÓN A.

1. *Una empresa edita un libro en dos tipos de formato, "normal" y de "bolsillo". De un ejemplar del primer formato se obtiene un beneficio de 5 unidades monetarias y de un ejemplar del segundo 3. La producción de un ejemplar normal requiere 8 unidades de materia prima y 4 unidades de tiempo y la de bolsillo 4 unidades de materia prima y 3 de tiempo, disponiendo para ello de 800 unidades de materia prima y 480 unidades de tiempo.*

a) ¿Cuántos ejemplares de cada formato se han de editar para que el beneficio total sea máximo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. *(8 puntos)*
b) Si el beneficio de producir un ejemplar normal fuera de 4 unidades monetarias, ¿cambiaría la solución del apartado anterior?. Razonar la respuesta. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Organicemos en forma de tabla las condiciones que indica el problema:

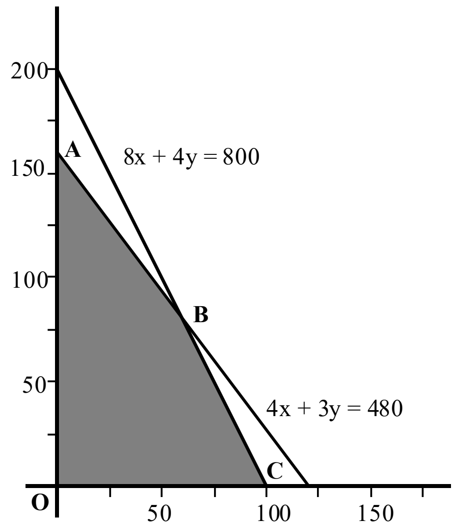
Formato	Nº ejemplares	M. prima	Tiempo	Beneficio
Normal	x	8x	4x	5x
bolsillo	y	4y	3y	3y
	∃ 0	# 800	# 480	F. objetivo

X La función objetivo (máxima) es:

$$F\,(x\,,\mathrm{y}) = 5x + 3y$$

X Las restricciones son:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 4y \leq 800 \\ 4x + 3y \leq 480 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema de inecuaciones para construir la región factible:



Representamos las rectas de ecuaciones $8x + 4y = 800$ y $4x + 3y = 480$.
La región factible (solución del sistema de inecuaciones formado por las restricciones) es el cuadrilátero OABC. Calculemos las coordenadas de sus vértices:

Vértice O: O (0 , 0)

Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 4x + 3y = 480 \end{cases} \Rightarrow A(0\,,160)$

Vértice B: $\begin{cases} 8x + 4y = 800 \\ 4x + 3y = 480 \end{cases} \Rightarrow B(60\,,80)$

Vértice C: $\begin{cases} y = 0 \\ 8x + 4y = 800 \end{cases} \Rightarrow C(100\,,0)$

La función objetivo (beneficios) alcanza su máximo en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos el valor de dicha función en cada uno de ellos: $F(0\,,0) = 0$, $F(0\,,160) = 480$, $F(60\,,80) = 540$, $F(100\,,0) = 500$ luego para que el beneficio sea máximo deben editarse 60 ejemplares en formato normal y 80 de bolsillo.

b) Ahora la función objetivo es $F\,(x\,,y) = 4x + 3y$. Como las restricciones no se modifican, la región factible es la misma. Veamos cuál es el valor de la nueva función objetivo en los vértices de la región factible:

$$F\,(0\,,0) = 0 \;\;,\;\; F\,(0\,,160) = 480 \;\;,\;\; F\,(60\,,80) = 480 \;\;,\;\; \mathrm{F}\,(100\,,0) = 400$$

a la vista de los resultados, cualquier punto del segmento AB (con coordenadas enteras) será solución del problema.

2. *Se considera la función* $f(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x}$, *con a y b parámetros reales.*

a) Determinar si para a = 1, existe algún valor de b para el que f(x) tenga un mínimo en x = 1. *(4 puntos)*
b) Si b = 1, ¿existe algún valor de a para el que f(x) tenga un punto de inflexión en x = 2? *(3 puntos)*
c) Para a = 2 y b = 0, calcular $\int_0^2 f(x)\,dx$ *e interpretar geométricamente el resultado.* *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) La función es: $f(x) = x^2 + \dfrac{b}{x}$ y su función derivada: $f'(x) = 2x - \dfrac{b}{x^2}$

Si f(x) tiene un mínimo en x = 1, debe ser f´(1) = 0: $f'(1) = 2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$

b) La función es: $f(x) = ax^2 + \dfrac{1}{x}$ y sus dos primeras funciones derivada: $f'(x) = 2ax - \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 2a + \dfrac{2}{x^3}$

Si f(x) tiene un punto de inflexión en x = 2, debe ser f´´(2) = 0: $f''(2) = 2a + \dfrac{2}{8} = 0 \Rightarrow 16a + 2 = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{8}$

c) La función es: $f(x) = 2x^2$. $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 2x^2\,dx = \left[\dfrac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \dfrac{16}{3}$ es la medida del área limitada por la función f(x), el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 2.

3. *La probabilidad de que un ciudadano conteste a una carta en la que se le ofrece una "multipropiedad" es igual a 0,2. Si recibe a lo largo de un mes 3 cartas, calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) Contesta a las tres cartas. *(2,5 puntos)*
b) Contesta solamente a la segunda. *(2,5 puntos)*
c) No contesta a ninguna carta. *(2,5 puntos)*
d) Contesta al menos a una carta. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sea S_i el suceso "contesta a la carta i-ésima" y N_i el suceso "no contesta a la carta i-ésima". Se tiene:

$$p(S_i) = 0{,}2 \text{ y } p(N_i) = 0{,}8$$

Como los sucesos son independientes:

a) $p(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = p(S_1)\cdot p(S_2)\cdot p(S_3) = 0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2 = 0{,}008$

b) $p(N_1 \cap S_2 \cap N_3) = p(N_1)\cdot p(S_2)\cdot p(N_3) = 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8 = 0{,}128$

c) $p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}512$

d) El suceso "contesta a alguna carta" es el suceso contrario de "no contesta a ninguna carta", por tanto:

p (contesta a alguna carta) $= 1 - 0{,}512 = 0{,}488$

NOTA: El problema se podría haber resuelto teniendo en cuenta de que se trata de una distribución binomial B (3 , 0,2)

Junio 2003.

OPCIÓN B.

1. *Se considera la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$, *siendo a un parámetro real.*

a) Calcular el rango de A según los valores del parámetro a. *(3,5 puntos)*

b) Discutir si existe solución del sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *según los valores de a. En caso afirmativo, resolverlo.* *(3,25 puntos)*

c) Para a = 6, discutir si existe solución del sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *(3,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Utilicemos las transformaciones elementales para conseguir una matriz triangular que tenga el mismo rango que la dada:

$$rg\ A = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & \mathrm{a} \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-6 \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \mathrm{Si\ a} = 6:\ \mathrm{rg\ A} = 2 \\ \bullet\ \mathrm{Si\ a} \neq 6:\ \mathrm{rg\ A} = 3 \end{cases}$$

Transformaciones elementales:
(1) $F_2 - F_1$, $F_3 - F_1$
(2) $F_3 - F_2$

b) Se tiene: $$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & \mathrm{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{x + 2y + 3z = 0} \\ \mathrm{y} = 0 \\ (a-6)z = 0 \end{cases}$$

X Si a □ 6: el sistema tiene una única solución que es la solución trivial x = y = z = 0
X Si a = 6: el sistema tiene infinitas soluciones: $x = -3\lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$

c) Se tiene: $$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{x + 2y + 3z = 0} \\ x + 3y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

(1) $E_2 - E_1$
$E_3 - 2E_1$

que es un sistema incompatible porque da dos soluciones distintas para y.

2. *El precio unitario de un bien, en función de la cantidad q que se oferta en el mercado, viene dado por la función* $p(q) = \dfrac{1000 + 3q}{2q}$

a) Demostrar que al aumentar la cantidad ofertada, disminuye el precio. *(2 puntos)*
b) Decir cuál será el precio de ese bien si la cantidad que hay en el mercado es ilimitada, por ejemplo si se puede importar cualquier cantidad por grande que sea. *(1,5 puntos)*
c) Escribir, en función de la cantidad ofertada, los ingresos que genera ese bien, si se vende toda la cantidad que hay en el mercado. *(1 punto)*
d) Calcular el precio para el que una empresa maximiza sus beneficios, suponiendo que es la única que ofrece ese bien y que los costes vienen dados por la función $C(q) = 4(q + 100) - 150\ \ln\ q$. *(5,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Se trata de demostrar que la función p(q) que expresa el precio por unidad según el número q de unidades ofertadas es decreciente:

$$p(q)=\frac{1000+3q}{2q} \Rightarrow p'(q)=\frac{3\cdot 2q-(1000+3q)\cdot 2}{4q^2}=\frac{6q-2000-6q}{4q^2}=-\frac{500}{q^2}<0\ \ \forall q \Rightarrow \text{ p(q) es decreciente}$$

b) Si $q\to\infty$, el precio por unidad será: $\lim\limits_{q\to\infty}\dfrac{1000+3q}{2q}=\dfrac{3}{2}$

c) Los ingresos que se obtienen es el producto del precio unitario por el número de bienes que se ofrecen y se venden:

$$I(q)=\frac{1000+3q}{2q}\cdot q=\frac{1000+3q}{2}=500+\frac{3}{2}q$$

d) La función beneficio es la diferencia entre la función de ingresos y la función de gastos:

$$B(q)=I(q)-C(q)=500+\frac{3}{2}q-4q-400+150\cdot\ln q=-\frac{5}{2}q+150\cdot\ln q-400$$

Veamos para qué valor de q la función beneficio es máxima: $B'(q)=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{150}{q}=0 \Rightarrow \dfrac{150}{q}=\dfrac{5}{2} \Rightarrow q=60$

Comprobemos que B(q) es máxima: $B''(q)=-\dfrac{150}{q^2}<0 \Rightarrow$ máximo

Por tanto el precio que maximiza el beneficio es: $p\,(60)=\dfrac{1000+180}{120}\approx 9{,}83$

3. *En una multinacional, la desviación típica de la edad media de sus trabajadores es de 5 años. Una muestra aleatoria de 200 trabajadores revela una edad media de 40 años. ¿Se puede afirmar con un nivel de significación del 0,05 que la edad media de los trabajadores es de 41 años?. Explicar cada uno de los pasos realizados.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

Calculemos un intervalo de confianza para la media de edad:

La desviación típica poblacional es $\sigma=5\ años$

Un nivel de significación del 0,05 se corresponde con un nivel de confianza del 95% $\Rightarrow z_{\alpha/2}=1{,}96$

El error máximo admisible (radio del intervalo) es: $E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.96\cdot\dfrac{5}{\sqrt{200}}=0{,}693$

Por tanto, se puede afirmar que la media poblacional está en el intervalo $(40-0{,}693\ ,\ 40+0{,}693)=(39{,}3\ ,\ 40{,}69)$ por lo que no resulta aceptable afirmar que la edad media de los trabajadores sea de 41 años.

Septiembre 2003.

OPCIÓN A.

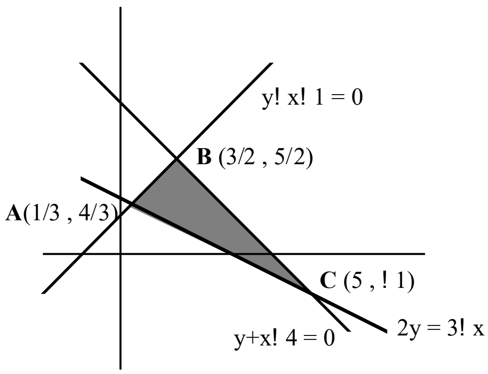
1. *Sea T la región del plano determinada por las siguientes inecuaciones:*

$$y - x - 1 \le 0 \qquad y + x - 4 \le 0 \qquad 2y \ge 3 - x$$

a) Representar gráficamente la región T. *(3 puntos)*
b) Se considera la función f(x,y) = 2y + x. Calcular, si existen, los puntos (x , y) que dan el valor máximo de f(x,y) y los que dan el valor mínimo de f(x,y) en T. *(5 puntos)*
c) ¿Cuál sería la respuesta del apartado anterior si se agrega la desigualdad y ∃ 0?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Representamos las rectas $y - x - 1 = 0$ que pasa por los puntos $(0,1)$ y $(-1,0)$, $y + x - 4 = 0$ que pasa por los puntos $(4,0)$ y $(0,4)$ y $2y = 3 - x$ que pasa por los puntos $(3,0)$ y $(1,1)$. La solución de la inecuación $y - x - 1 \le 0$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas; la solución de $y + x - 4 \le 0$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas; y la solución de la inecuación $2y \ge 3 - x$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas. La región T es la que aparece en gris en la figura adjunta.



b) La función f(x , y) alcanza el valor máximo y el valor mínimo en alguno de los vértices de T. Obtengamos las coordenadas de dichos vértices:

Vértice A: $\begin{cases} y - x - 1 = 0 \\ 2y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

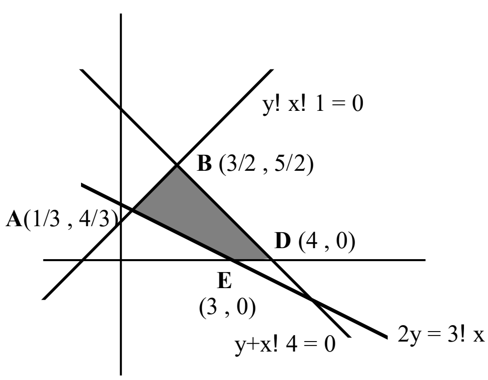
Vértice B: $\begin{cases} y - x - 1 = 0 \\ y + x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ Vértice C: $\begin{cases} y + x - 4 = 0 \\ 2y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow C(5, -1)$

Calculemos es el valor de la función f(x , y) = 2y + x en los vértices de T:

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = 3 \ , \ f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{13}{2} = 6{,}5 \ , \ f(5, -1) = 3$$

luego alcanza el máximo en $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ y el valor mínimo en cualquier punto del segmento AC.

c) Ahora la región en la que hay que buscar el máximo y el mínimo es:



Veamos el valor de la función en los nuevos vértices D y E (en A y B ya lo conocemos):

$$f(4, 0) = 4 \ , \ f(3, 0) = 3$$

Por tanto, en la nueva región, la función alcanza su máximo en $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ y el mínimo en cualquier punto del segmento AE.

2. *Se considera la función* $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x}$

a) Calcular su dominio de definición. Razonar la respuesta. *(1 punto)*
b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x). Razonar si existen máximos y mínimos de f(x), y, en caso afirmativo, decir cuáles son. *(4,5 puntos)*
c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de f(x). Razonar si existe punto de inflexión. *(4,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Se trata de una función racional cuyo dominio es el conjunto de los números reales excepto los que anulen el denominador. En este caso: $Dom\,(f)=\Re-\{4\}$

b) El crecimiento y decrecimiento de la función dependen del signo de la función derivada:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(4-x)-x^2\cdot(-1)}{(4-x)^2}=\frac{-x^2+8x}{(4-x)^2}=\frac{x\cdot(-x+8)}{(4-x)^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x\cdot(-x+8)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=8$ luego f´(x) cambia de signo en x = 0 y x = 8. Se tiene:

f´(x) < 0		f´(x) > 0		f´(x) < 0
	0		8	

es decir f(x) es decreciente en $(-\infty\,,0)\,\mathrm{Y}\,(8\,,\infty)$ y creciente en $(0\,,8)$.

Los posibles puntos de máximo o de mínimo son los que anulan la primera derivada, es decir: x = 0 y x = 8. Puesto que en x = 0 la función pasa de decreciente a creciente, se trata de un mínimo: (0 , 0). Y como en x = 8 la función pasa de creciente a decreciente, se tratará de un máximo: (8 , !16)

c) La concavidad y convexidad depende del signo de la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{(-2x+8)\cdot(4-x)^2-(-x^2+8x)\cdot 2\,(4-x)(-1)}{(4-x)^4}=\frac{(4-x)\cdot\left[(-2x+8)\cdot(4-x)+2\cdot(-x^2+8x)\right]}{(4-x)^4}=\frac{32}{(4-x)^3}$$

Se tiene:

f´´(x) > 0		f´´(x) < 0
	4	

luego la función es cóncava en $(-\infty\,,4)$ y convexa en $(4\,,\infty)$.

La función no tiene puntos de inflexión pues $f''(x)\neq 0\ \ \forall x$

3. *De una baraja española de 40 cartas falta el rey de copas. Si, de esta baraja de 39 cartas, se extraen sucesivamente y sin reposición dos cartas, calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) La primera carta es un rey y la segunda un as. *(2 puntos)*
b) Una carta es de copas y la otra de oros. *(3 puntos)*
c) Ninguna carta es un as. *(2 puntos)*
d) Al menos una carta es un caballo. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $p\,(R\ \mathrm{I}\ A)=p\,(R)\cdot p\,(A\,/\,R)=\dfrac{3}{39}\cdot\dfrac{4}{38}=\dfrac{12}{1482}=0{,}008$

b) $p\,[(\mathrm{C}\ \mathrm{I}\ O)\,\mathrm{Y}\,(O\ \mathrm{I}\ C)]=\dfrac{9}{39}\cdot\dfrac{10}{38}+\dfrac{10}{39}\cdot\dfrac{9}{38}=\dfrac{180}{1482}=0{,}12$

c) $p\,(\overline{A})=\dfrac{35}{39}\cdot\dfrac{34}{38}=\dfrac{1190}{1482}=0{,}803$

d) $p=1-p\,(\overline{C})=1-0{,}803=0{,}197$

Septiembre 2003.

OPCIÓN B.

1. *Una empresa de juguetes fabrica bicicletas, triciclos y coches. Se sabe que va a necesitar 945 ruedas, que desea fabricar 280 juguetes en total y que se fabricarán 10 bicicletas menos que triciclos.*

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de juguetes de cada tipo que va a fabricar. *(3 puntos)*
b) Resolver el sistema anterior por el método de Gauss. *(5 puntos)*
c) ¿Cuál es la relación entre el número de bicicletas y el de coches que se van a fabricar si no se considera la última condición? *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sea x el nº de bicicletas, y el de triciclos y z el de coches. Se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=280 \\ 2x+3y+4z=945 \\ x+10=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=280 \\ 2x+3y+4z=945 \\ x-y=-10 \end{cases}$$

b) El método de Gauss consiste en aplicar las transformaciones elementales al sistema dado hasta conseguir un sistema escalonado equivalente:

$$\begin{cases} x+y+z=280 \\ 2x+3y+4z=945 \\ x-y=-10 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=280 \\ y+2z=385 \\ -2y-z=-290 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=280 \\ y+2z=385 \\ 3z=480 \end{cases} \Rightarrow\ z=160\ ,\ y=65\ ,\ x=55$$

Transformaciones elementales: (1) E_2-2E_1 E_3-E_1 (2) E_3+2E_2

luego fabricará 55 bicicletas, 65 triciclos y 160 coches.

c) El sistema tendrá ahora dos ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{cases} x+y+z=280 \\ 2x+3y+4z=945 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=280 \\ y+2z=385 \end{cases} \Leftrightarrow\ y=385-2z\ \Rightarrow\ x+385-2z+z=280\ \Rightarrow\ z-x=105$$ es decir,

se fabricarán 105 coches más que bicicletas.

2. *Sea* $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si } x<2 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

a) Calcular los valores del parámetro a para los que f(x) es continua en x = 2. *(2,5 puntos)*
b) ¿Para qué valor del parámetro a la función f(x) tiene un máximo o mínimo en x = !1?. Determinar si es máximo o mínimo. *(3,5 puntos)*
c) Para a = 4, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x). *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Para que la función sea continua en x = 2 deben cumplirse las siguientes condiciones:

i) $\exists\, f(2)=\dfrac{2}{2}=1$

ii) $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\left(x^2 + ax\right) = \lim\limits_{x\to 2}\frac{2}{x} \Leftrightarrow 4 + 2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

iii) $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

luego para que la función sea continua en x = 2, debe ser $a = -\frac{3}{2}$

b) Para x = !1, la función es $f(x) = x^2 + ax$ y para que la función tenga un máximo o un mínimo en x = !1 debe ser: $f'(-1) = 0$.

X $f'(x) = 2x + a \;\Rightarrow\; f'(-1) = -2 + a = 0 \;\Rightarrow\; a = 2$

X Como $f''(x) = 2 > 0$ $\forall$x $\Rightarrow$ En x = !1 la función tiene un mínimo.

c) Ahora la función es: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{si x} < 2 \\ \dfrac{2}{\text{x}} & \text{si x} \geq 2 \end{cases}$ y su función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si x} < 2 \\ -\dfrac{2}{x^2} & \text{si x} \geq 2 \end{cases}$

Los signos de f´(x) son:

f´(x) < 0	f´(x) > 0	f´(x) < 0
	-2	2

luego la función es:

decreciente en $(-\infty, -2)$ Y $(2, \infty)$ y creciente en $(-2, 2)$.

3. *Se sabe que la desviación típica del peso de las sandías de una plantación es de 750 gramos. Calcular el número mínimo de sandías que se han de elegir para, con un nivel de confianza del 95%, estimar el peso medio de cada una con un error menor que 300 gr. Explicar los pasos seguidos para obtener el resultado.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La desviación típica de la población es: $\sigma = 750\ gr$.

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible debe ser E = 300 gr

Queremos calcular el número mínimo de una muestra de sandías con todas estas condiciones. Se tiene: $E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; n = \frac{z_{\alpha/2}^2\cdot\sigma^2}{E^2} = \frac{1{,}96^2\cdot 750^2}{300^2} = 24{,}01 \;\Rightarrow$ el número mínimo de sandías debe ser de 25.

Junio 2004.

OPCIÓN A.

1. *Se consideran las matrices* $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$

a) Calcular AB y BA. *(4 puntos)*

b) Discutir si existe solución del sistema $AB\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 0\end{pmatrix}$. *En caso afirmativo, resolverlo utilizando el método de Gauss.* *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -4\\ -3 & -8 & -10\\ 2 & 7 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -11 & -3\end{pmatrix}$

b) La matriz de los coeficientes ampliada con los términos independientes es: $\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & -4 & 2\\ -3 & -8 & -10 & 5\\ 2 & 7 & 0 & 0\end{array}\right)$. Calculemos y comparemos sus rangos: $rg\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & -4 & 2\\ -3 & -8 & -10 & 5\\ 2 & 7 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{(1)}{=}rg\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 7 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 2\\ -3 & -8 & -10 & 5\end{array}\right)\overset{(2)}{=}rg\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 7 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 5 & -20 & 10\end{array}\right)\overset{(3)}{=}$

$=rg\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 7 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ $\Rightarrow$ rg A = rg B < nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

Transformaciones elementales utilizadas: (1) Cambio de orden en las filas. (2) $2F_3+3F_1$ (3) F_3-5F_2

El sistema escalonado equivalente es : $\left\{\begin{array}{l}2x+7y\quad\;\;=0\\ \quad\;\; y-4z=2\\ \quad\quad\;\; 0z=0\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}2x+7y=0\\ \quad\; y-4z=2\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $z=\lambda$ $\Rightarrow$ $y=2+4\lambda$ $\Rightarrow$

$x=-\dfrac{7y}{2}=-\dfrac{14+28\lambda}{2}=-7-14\lambda$ es decir: $\boxed{x=-7-14\lambda\ ,\ y=2+4\lambda\ ,\ z=\lambda}$

2. *Sea* $f(x)=\begin{cases}x^3-3x+2 & \text{si } x<3\\ \dfrac{10}{a-x} & \text{si } x\geq 3\end{cases}$

a) Calcular los valores del parámetro a para los que f(x) es continua en x = 3. *(2,5 puntos)*
b) Para a = 0, calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). *(4,5 puntos)*
c) Para a = 4, calcular las asíntotas verticales y horizontales de f(x). *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Para que la función sea continua debe suceder:

X $\exists f(3)=\dfrac{10}{a-3}$

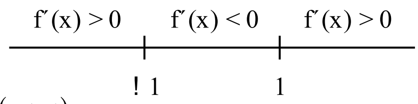
X $\exists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^3-3x+2\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{10}{a-x}$ $\Rightarrow$ $20=\dfrac{10}{a-3}$ $\Rightarrow$ $a=\dfrac{7}{2}$

X Además, para este valor de a se verifica que $f(3) = \lim_{x\to 3} f(x)$ por lo que la función es continua.

b) La función ahora es: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & \text{si } x < 3 \\ -\dfrac{10}{x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ y su función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si x} < 3 \\ \dfrac{10}{\text{x}^2} & \text{si x} \geq 3 \end{cases}$

El crecimiento y decrecimiento dependen del signo de f´(x):

X Para x < 3, la función derivada es $f'(x) = 3\,(x+1)\,(x-1) \;\Rightarrow$



luego la función es creciente en $(-\infty\,, -1) \cup (1\,, 3)$ y decreciente en $(-1\,, 1)$

X Para x ∃ 3, la función derivada es siempre positiva por lo que la función es creciente en $(3\,, \infty)$

c) La función es: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{10}{4-x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$.

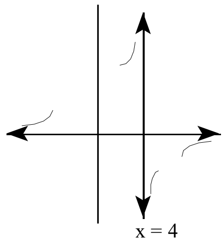
X Para x < 3, la función no tiene asíntotas porque es polinómica.
X Para x ∃ 3:
- la función tiene una asíntota vertical de ecuación x = 4 porque $\lim_{x\to 4} f(x) = \infty$. Además:

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{10}{4-x} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to 4^+} \frac{10}{4-x} = -\infty$$

- El eje de abscisas y = 0 es una asíntota horizontal de la función pues $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Además:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{10}{4-x} = 0^+ \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{10}{4-x} = 0^-$$

por lo que la posición relativa de la curva respecto a sus asíntotas es:

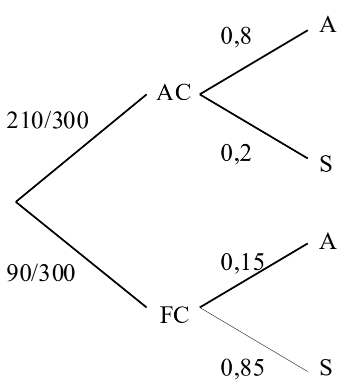


3. *En una asignatura de primer curso de una titulación universitaria, asisten a clase, regularmente, 210 alumnos de los 300 que hay matriculados. Además se sabe que aprueban el 80% de los alumnos que asisten a clase y el 15% de los que no asisten. Calcular la probabilidad de los cuatro sucesos siguientes:*

a) Se elige al azar un alumno matriculado y resulta que:
i) Ha asistido a clase. *(1,5 puntos)*
ii) No ha asistido a clase y ha aprobado. *(2 puntos)*
iii) Ha aprobado. *(3 puntos)*
b) Se elige al azar un alumno de entre los que han aprobado y resulta que ha asistido a clase. *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Confeccionemos el diagrama en árbol (AC = "asiste a clase", FC = "falta a clase", A = "Aprueba", S = "Suspende"):



a) i) $p\,(AC) = \dfrac{210}{300} = 0{,}7$

ii) $p\,(FC \text{ I } A) = \dfrac{90}{300} \cdot 0{,}15 = 0{,}3 \cdot 0{,}15 = 0{,}045$

iii) $p\,(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}15 = 0{,}605$

b) Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p\,(AC\,/\,A) = \frac{p\,(AC) \cdot p\,(A\,/\,AC)}{p\,(AC) \cdot p\,(A\,/\,AC) + p\,(FC) \cdot p\,(A\,/\,FC)} = \frac{0{,}56}{0{,}605} = 0{,}926$$

Junio 2004.

OPCIÓN B.

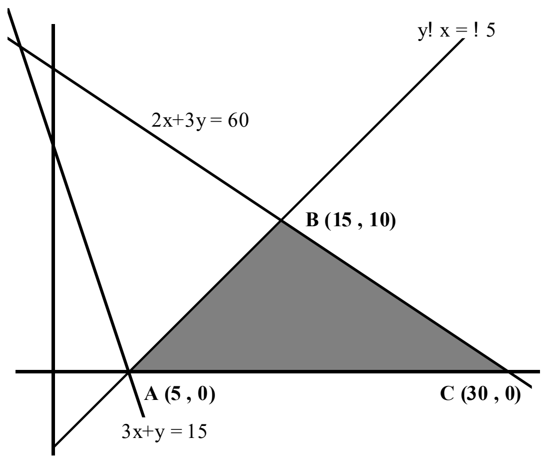
1. *Se considera la función f(x , y) = x – y*

a) Representar el conjunto $A = \{(x\,,y)\ /\ 3x + y \geq 15\ ,\ y - x \leq -5\ ,\ 2x + 3y \leq 60\ ,\ y \geq 0\}$ *y calcular el valor máximo de f(x , y) en A. ¿Alguna de las desigualdades que definen el conjunto A se podría eliminar de forma que siguiera siendo el mismo conjunto?* *(7 puntos)*

b) Decir si la función f(x , y) alcanza valor máximo en el conjunto $B = \{(x\,,y)\ /\ 3x + y \leq 15\ ,\ x - y \geq 5\ ,\ x \geq 0\}$. *En caso afirmativo, calcular dicho valor.* *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a)



Calculemos las coordenadas de los vértices de la región factible:

Vértice A: $\begin{cases} y = 0 \\ y - x = -5 \end{cases} \Rightarrow A(5\,,0)$

Vértice B: $\begin{cases} y - x = -5 \\ 2x + 3y = 60 \end{cases} \Rightarrow B(15\,,10)$

Vértice C: $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y = 60 \end{cases} \Rightarrow C(30\,,0)$

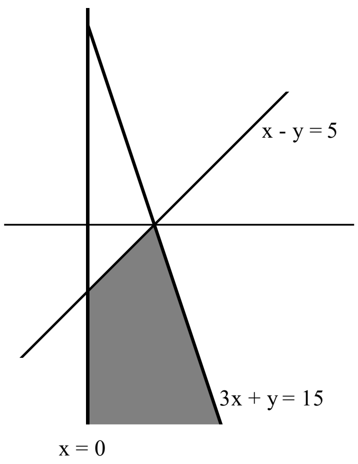
X El valor máximo de la función se alcanza en alguno de los vértices de la región factible:

$$f(5\,,0) = 5\quad,\quad f(15\,,10) = 5\quad,\quad f(30\,,0) = 30$$

luego el máximo se alcanza en el punto (30 , 0).

X Se puede eliminar la desigualdad $3x + y \geq 15$ porque no forma parte de la región factible.

b) Representemos gráficamente el conjunto B:



La función no alcanzará un máximo en el conjunto B pues la región es abierta. Cuanto mayor sea la abscisa de un punto de la recta 3x + y = 15 mayor valor alcanzará en él la función f(x , y).

2. *Sea* $f(x) = x \cdot e^{-ax}$*, con a un parámetro real.*

a) Calcular los valores del parámetro a para que f(x) tenga un máximo o un mínimo en x = 3. Para estos valores del parámetro, decir si x = 3 es máximo o mínimo. *(4 puntos)*

b) Para a = !2, escribir los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de f(x). *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si f(x) tiene un máximo o un mínimo en x = 3, debe ser f´(3) = 0: $f'(x) = e^{-ax} + x\,e^{-ax}(-a) = e^{-ax}(1-ax)$

Se tiene entonces: $f'(3) = e^{-3a}(1-3a) = 0 \;\Rightarrow\; 1-3a = 0 \;\Rightarrow\; a = \dfrac{1}{3}$

La función, para el valor de a encontrado es: $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{3}x}$ y su derivada: $f'(x) = e^{-\frac{1}{3}x}\left(1 - \dfrac{1}{3}x\right)$

Para saber si se trata de un máximo o de un mínimo, sustituyamos x = 3 en f´´(x):

$f''(x) = -\dfrac{1}{3}\, e^{-\frac{1}{3}x}\left(1-\dfrac{1}{3}x\right) + e^{-\frac{1}{3}x}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}\, e^{-\frac{1}{3}x}\left(2-\dfrac{1}{3}x\right) \;\Rightarrow\; f''(3) = -\dfrac{1}{3}e^{-1}(2-1) = -\dfrac{1}{3e} < 0$ luego se trata de un máximo.

b) La función es: $f(x) = x \cdot e^{2x}$ y sus derivadas primera y segunda:

$f'(x) = e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x}(1+2x)$ $\qquad$ $f''(x) = 2\,e^{2x}(1+2x) + e^{2x}\cdot 2 = 2\,e^{2x}(2+2x) = 4\,e^{2x}(1+x)$

X Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 1+2x = 0 \quad (\text{pues } e^{2x} > 0) \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{1}{2}$. Se tiene:

f ´< 0 | f ´> 0

! 1/2

luego la función es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$

X Los intervalos de concavidad y convexidad dependen del signo de la segunda derivada:

$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; 1 + x = 0 \;\Rightarrow\; x = -1$. Se tiene:

f ´´< 0 | f ´´ > 0

! 1

luego la función es convexa en $(-\infty, -1)$ y cóncava en $(-1, \infty)$

3. *En un país se selecciona aleatoriamente una muestra de 900 personas. A la salida de los colegios electorales se les preguntó si habían votado al partido político X y 289 contestaron que sí y el resto que no. Determinar un intervalo que nos dé el porcentaje de votos del partido X con un nivel de confianza del 95%, explicando los pasos realizados para su obtención.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La proporción de votantes en la muestra es: $pr = \dfrac{289}{900} = 0{,}32$ y la proporción de no votantes es: $1 - pr = 0{,}68$

Para un nivel de confianza del 95% el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pr \cdot (1-pr)}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}32 \cdot 0{,}68}{900}} = 0{,}03$

Por tanto, el intervalo es: $(pr - E\,,\, pr + E) = (0{,}29\;,\;0{,}35)$ es decir, entre el 29% y el 35%

Septiembre 2004.

OPCIÓN A.

1. *Un industrial comercializa botijos decorados y botijos sin decorar. El tiempo necesario para fabricar un botijo es de una hora y para decorarlo se necesita otra hora. El beneficio por botijo es de 10 euros si está decorado y de 6 euros si no lo está y se trabaja un máximo de 500 horas mensuales.*

a) Plantear y resolver un problema de programación lineal que permita calcular cuántos botijos de cada tipo se han de fabricar al mes para que el beneficio total sea máximo. *(5 puntos)*
b) ¿Cambiaría la solución del apartado anterior si no se desean fabricar más de 300 botijos sin decorar?. En caso afirmativo, calcularla. *(3 puntos)*
c) Calcular la solución del apartado a) y decir en qué puntos se alcanza, si el beneficio por botijo no decorado es de 5 euros. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de Programación Lineal. Organicemos los datos del problema en una tabla:

tipo de botijo	número	horas mensuales	beneficio
decorado	x	2x	10x
sin decorar	y	y	6y
	$x \geq 0$ $y \geq 0$	$2x + y \leq 500$	$f(x, y) = 10x + 6y$

Se tiene:
X La función objetivo (que debe ser máxima) es:
$$f(x, y) = 10x + 6y$$
X El conjunto de restricciones es:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 500 \end{cases}$$

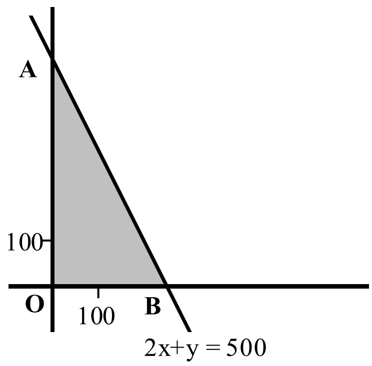
Resolvamos gráficamente el sistema de restricciones para encontrar la región factible:

- La ecuación $x = 0$ corresponde al eje de ordenadas. La solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.
- La ecuación $y = 0$ corresponde al eje de abscisas. La solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.
- La ecuación $2x + y = 500$ corresponde a una recta que pasa por los puntos $(250,\ 0)$ y $(0,\ 500)$. La solución de la inecuación $2x + y \leq 500$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

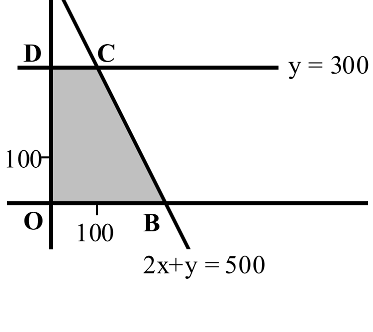
La región factible es el triángulo de vértices: $O(0,\ 0)$, $A(0,\ 500)$ y $B(250,\ 0)$. En alguno de estos dos vértices deberá maximizarse la función objetivo. Veamos en cuál:

$f(0,\ 0) = 0$; $f(0,\ 500) = 3000$; $f(250,\ 0) = 2500$

luego la función objetivo es máxima en el vértice A, lo que significa que conviene fabricar 500 botijos sin decorar.



b) Al incluir la restricción $y \leq 300$, se modifica la región factible:



Ahora es el cuadrilátero de vértices $O(0,\ 0)$, $B(250,\ 0)$, $C(100,\ 300)$ y $D(0,\ 300)$. Veamos en cuál de los vértices se maximiza la función objetivo:
$f(0,\ 0) = 0$; $f(250,\ 0) = 2500$; $f(100,\ 300) = 2800$;
$f(0,\ 300) = 1800$
luego la función objetivo es máxima en el vértice C. Conviene entonces fabricar 100 botijos decorados y 300 sin decorar.

c) Se modifica la función objetivo: $g(x,\ y) = 10x + 5y$. La región factible es la del apartado a). Se comprueba que la nueva función objetivo se maximiza en cualquier punto (de coordenadas enteras) del segmento AB.

2. *Se considera la función* $f(x)=\dfrac{2x}{x+5}$

a) Razonar a qué es igual el dominio de definición de f(x). *(1,25 puntos)*
b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x). *(2,5 puntos)*
c) Determinar los intervalos de concavidad y de convexidad de f(x) y los puntos de inflexión. *(3,25 puntos)*
d) Determinar los valores de a y b para que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto $x=-3$ *sea* $y=ax+b$ *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Como se trata de una función racional, el dominio estará formado por todos los números reales excepto los que anulan el denominador, es decir: $Dom\,(f)=\Re-\{-5\}$

b) El crecimiento y decrecimiento de la función dependen del signo de la primera derivada:

$f\,'(x)=\dfrac{2\cdot(x+5)-2x}{(x+5)^2}=\dfrac{10}{(x+5)^2}>0\quad\forall x\;\Rightarrow$ la función es creciente en todo su dominio

c) La concavidad y convexidad dependen del signo de la segunda derivada:

$f\,''(x)=\dfrac{-10\cdot 2\,(x+5)}{(x+5)^4}=\dfrac{-20}{(x+5)^3}\;\Rightarrow$

f´´(x) > 0 | f´´(x) < 0
! 5

es decir: la función es cóncava en $(-\infty,-5)$ y convexa en $(-5,\infty)$.

Un punto de inflexión anula la segunda derivada. Como en este caso $f\,''(x)=\dfrac{-20}{(x+5)^3}\neq 0\;\forall x$, la función no tiene puntos de inflexión.

d) Calculemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x=-3$ y démosle la forma $y=ax+b$:

La pendiente es $a=f\,'(-3)=\dfrac{10}{(-3+5)^2}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}\;\Rightarrow$ la ecuación de la tangente es: $y=\dfrac{5}{2}x+b$

Como además pasa por el punto $(-3,-3)$: $-3=\dfrac{5}{2}\cdot(-3)+b\;\Rightarrow\; b=-3+\dfrac{15}{2}=\dfrac{9}{2}$

Por tanto: $a=\dfrac{5}{2}$, $b=\dfrac{9}{2}$

3. *Un dado está cargado de forma que la probabilidad de obtener 6 puntos es ½ y que las probabilidades de obtener cada una de las otras caras son iguales. Se lanza el dado, calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:*
a) Se obtiene un dos. *(2 p)*
b) No se obtiene un tres. *(3 p)*
c) Se obtiene un número par. *(3 p)*
d) Se obtiene un número impar. *(2 p)*

SOLUCIÓN.

Si la probabilidad de obtener un 6 es $\dfrac{1}{2}$, $p\,(6)=\dfrac{1}{2}$, la probabilidad de obtener cada uno de los restantes resultados (equiprobables) será $\dfrac{1}{2}:5=\dfrac{1}{10}$, es decir: $p\,(1)=p\,(2)=p\,(3)=p\,(4)=p\,(5)=\dfrac{1}{10}$. Se tiene:

a) $p\,(2)=\dfrac{1}{10}=0{,}1$

b) $p\,(\overline{3})=1-p\,(3)=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}=0{,}9$

c) $p\,(par)=p\,(2\text{ Y }4\text{ Y }6)=p\,(2)+p\,(4)+p\,(6)=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{10}=0{,}7$

d) $p\,(impar)=1-p\,(par)=1-0{,}7=0{,}3$

Septiembre 2004.

OPCIÓN B.

1. *Se consideran las matrices* $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&2&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-3&-1&0\\1&0&4\\2&1&3\end{pmatrix}$.

a) Utilizando la matriz inversa de A, determinar una matriz X tal que $AX=B+C$ *(6,5 puntos)*

b) Discutir si existe solución del sistema $B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. *En caso afirmativo, resolverlo utilizando el método de Gauss.* *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $AX=B+C \;\Rightarrow\; A^{-1}AX=A^{-1}(B+C) \;\Rightarrow\; X=A^{-1}(B+C)$

Calculemos A^{-1}: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\1&2&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&2&2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&0&1&2&-1\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2:2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

Por tanto: $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-3&2&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&-1&0\\1&0&4\\2&1&3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6&1&0\\1&1&6\\2&3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&1&0\\-3&0&3\\7&1&0\end{pmatrix}$

b) Calculemos el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada:

$rg\left(\begin{array}{ccc|c}-3&2&0&2\\0&1&2&1\\0&2&3&2\end{array}\right)\overset{(1)}{=}rg\left(\begin{array}{ccc|c}-3&2&0&2\\0&1&2&1\\0&0&-1&0\end{array}\right)\Rightarrow rg\,A=rg\,B=n^{o}\,de\,incógnitas\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

Transformaciones elementales utilizadas: (1) F_3-2F_2

El sistema escalonado equivalente es: $\begin{cases}-3x+2y\quad\;=2\\ \quad\;\; y+2z=1\\ \qquad\;\; -z=0\end{cases}\Rightarrow\; z=0\;,\;\; y=1\;,\;\; x=0$

2. *Se considera la función* $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ *, con a y b parámetros reales.*
a) ¿Existen valores de a y b para los que f(x) tenga un máximo en $x = 1$ *y un mínimo en* $x = -1$ *?* *(5 puntos)*
b) Determinar los valores de a y b para que f(x) tenga un punto de inflexión en $(2\,,\,1)$. *(3 puntos)*
c) Para $a = b = 1$ *, ¿existen asíntotas verticales de f(x)?, y ¿asíntotas horizontales?.* *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si f(x) tiene un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = -1$, deben ser $f'(1) = 0$ y $f'(-1) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ y por tanto: $\begin{cases} 3 + 2a + b = 0 \\ 3 - 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 6 + 2b = 0 \Rightarrow b = -3$ y sustituyendo en cualquiera de las dos igualdades: $a = 0$

b) Si f(x) tiene un punto de inflexión en $(2\,,\,1)$ deben ser: $f(2) = 1$ y $f''(2) = 0$.

Se tiene: $f''(x) = 6x + 2a$ luego: $\begin{cases} 8 + 4a + 2b + 2 = 1 \\ 12 + 2a = 0 \end{cases}$

De la segunda ecuación obtenemos $a = -6$ y sustituyendo en la primera: $8 - 24 + 2b + 2 = 1 \Rightarrow 2b = 15 \Rightarrow b = \dfrac{15}{2}$

c) La función es: $f(x) = x^3 + x^2 + x + 2$ que no tiene asíntotas de ningún tipo por tratarse de una función polinómica.

3. *En una gran empresa, la varianza del número de horas no trabajadas al año por un trabajador es 16. Calcular, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo para la media del número de horas no trabajadas al año por un empleado, sabiendo que de una muestra de 100 trabajadores se ha obtenido una media de 12 horas no trabajadas al año. Explicar cada uno de los pasos realizados.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La desviación típica poblacional es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{16} = 4$ horas
La media muestral es $\overline{X} = 12$ horas.

El intervalo de confianza de la media poblacional μ es: $\left(\overline{X} - E\,,\,\overline{X} + E\right)$ donde E (error máximo admitido) se calcula de la siguiente forma:

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{100}} = 1{,}96 \cdot 0{,}4 = 0{,}784$ luego el intervalo de confianza es: $(11{,}216\,,\,12{,}784)$

es decir, la media de la población estará entre 11,216 horas y 12,784 horas con un nivel de confianza del 95%.

Junio 2005.

OPCIÓN A

1. *En un taller de joyería se fabrican collares con 50, 75 y 85 perlas y para ello se utilizan en su totalidad 17500 perlas y 240 cierres.*

a) ¿Cuántos collares de cada tamaño se han de fabricar si se desean tantos collares de tamaño mediano como la media aritmética del número de collares grandes y pequeños? *(6 puntos)*
b) Sin tener en cuenta la condición del apartado anterior, ¿es posible fabricar el mismo número de collares de cada tamaño? *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sea x el número de collares con 50 perlas, y el número de collares con 75 perlas, z el número de collares con 85 perlas.

a) Como se utiliza un cierre por cada collar, se tiene: $x + y + z = 240$ (*)
El número de perlas utilizadas es: $50x + 75y + 85z = 17500$ (*)
Como y debe ser igual a la media aritmética de x y z: $y = \dfrac{x+z}{2} \Leftrightarrow x - 2y + z = 0$ (*)

Las igualdades (*) forman un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que vamos a resolver por el método de Gauss. Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 50 & 75 & 85 & 17500 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 10 & 15 & 17 & 3500 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 0 & 5 & 7 & 1100 \\ 0 & -3 & 0 & -240 \end{array}\right) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 0 & 5 & 7 & 1100 \\ 0 & 0 & 21 & 2100 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = 60 \\ y = 80 \\ z = 100 \end{array}$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $\dfrac{F_2}{5}$ (2) $F_2 - 10F_1$; $F_3 - F_1$ (3) $5F_3 + 3F_2$

Luego se han de fabricar 60 collares de 50 perlas, 80 de 75 perlas y 100 collares de 85 perlas.

b) Al eliminar la tercera condición, el sistema es de dos ecuaciones con tres incógnitas. El sistema escalonado equivalente es:

$$\begin{cases} x + y + z = 240 \\ 5y + 7z = 1100 \end{cases}$$

Si es posible fabricar el mismo número de collares de cada tamaño, debe ser $x = y = z$, es decir: $\begin{cases} 3z = 240 \\ 12z = 1100 \end{cases}$ y cada una de las dos ecuaciones da un valor de z distinto. La conclusión es que no se puede fabricar el mismo número de collares de cada tamaño pues son incompatibles las condiciones sobre el total de cierres y el total de perlas.

2. *Se considera la función* $f(x) = a \ln x + x^3$*, siendo a un parámetro real.*

a) Escriba el dominio de definición de f(x). *(0,75 puntos)*
b) Compruebe si hay algún valor de a para el que f(x) tiene punto de inflexión en x = 1. *(3,25 puntos)*
c) Para $a = -3$ *calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función f(x).* *(3,5 puntos)*
d) Para a = 1 calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

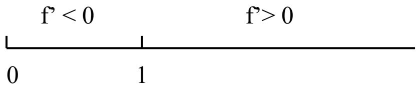
a) El dominio de f(x) es el de $y = \ln x$: $D(f) = (0, +\infty)$

b) Para que la función tenga un punto de inflexión en x = 1 debe ser $f''(1) = 0$:

Se tiene: $f'(x) = \dfrac{a}{x} + 3x^2 \Rightarrow f''(x) = -\dfrac{a}{x^2} + 6x \Rightarrow f''(1) = -a + 6 = 0 \Rightarrow a = 6$

c) Para a = !3, la función es: $f(x) = -3 \ln x + x^3$. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada: $f'(x) = -\dfrac{3}{x} + 3x^2$

Se tiene: $-\dfrac{3}{x} + 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = \dfrac{3}{x} \Rightarrow 3x^3 = 3 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$ es decir:



luego es decreciente en $(0, 1)$ y creciente en $(1, \infty)$.

La función tiene un posible máximo o mínimo en x = 1. Como $f''(x) = \dfrac{3}{x^2} + 6x \Rightarrow f''(1) > 0 \Rightarrow$ la función tiene un mínimo relativo en x = 1.

También se podría haber argumentado así: f(x) es una función continua que es decreciente hasta x = 1 y creciente a partir de x = 1 por lo que debe tener un mínimo relativo en ese punto.

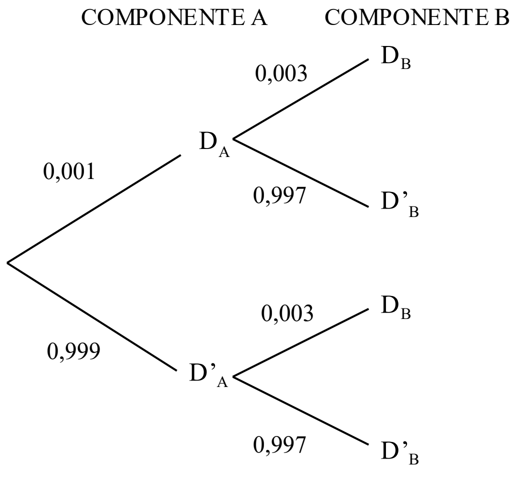
d) La función es ahora: $f(x) = \ln x + x^3$. Se tiene: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln x + x^3\right) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0} \left(\ln x + x^3\right) = -\infty$

3. *Una fábrica produce un elemento mecánico ensamblando dos componentes A y B. Se sabe que la probabilidad de que el componente A sea defectuoso es de 0'001 y la de que B no lo sea es de 0'997. Se elige al azar un elemento, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) Solamente el componente A es defectuoso. *(2,5 puntos)*
b) Ninguno de los componentes es defectuoso *(2,5 puntos)*
c) Ambos componentes son defectuosos. *(2,5 puntos)*
d) Solamente uno de los componentes es defectuoso. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Organicemos todas las situaciones posibles mediante un diagrama en árbol:



Sean: D_A el suceso "el componente A es defectuoso", D'_A el suceso "el componente A no es defectuoso, D_B el suceso "el componente B es defectuoso" y D'_B el suceso "el componente B no es defectuoso". Se tiene:

a) $p(D_A \text{ I } D'_B) = 0{,}001 \cdot 0{,}997 = 0{,}000997$

b) $p(D'_A \text{ I } D'_B) = 0{,}999 \cdot 0{,}997 = 0{,}996003$

c) $p(D_A \text{ I } D_B) = 0{,}001 \cdot 0{,}003 = 0{,}000003$

d) $p\left[(D_A \text{ I } D'_B) \text{ Y } (D'_A \text{ I } D_B)\right] =$

$= p(D_A \text{ I } D'_B) + p(D'_A \text{ I } D_B) =$

$= 0{,}001 \cdot 0{,}997 + 0{,}999 \cdot 0{,}003 = 0{,}003994$

Junio 2005

OPCIÓN B

1. *Sea T la región del plano determinada por las siguientes inecuaciones:* $-2 \le y \qquad y \le 2x+2 \qquad y+2x \le 6$

a) Representa gráficamente la región T. *(2 puntos)*

b) Se considera la función $f(x,y) = \dfrac{2x-y}{2}$. *Calcule, si existen, los puntos* (x,y) *que dan el valor máximo de* $f(x,y)$ *y los que dan el valor mínimo de* $f(x,y)$ *en T.* *(3,5 puntos)*

c) Calcule las respuestas del apartado anterior si en T se cambia la desigualdad $y \le 2x+2$ *por* $x \ge 2$. *(4,5 puntos)*

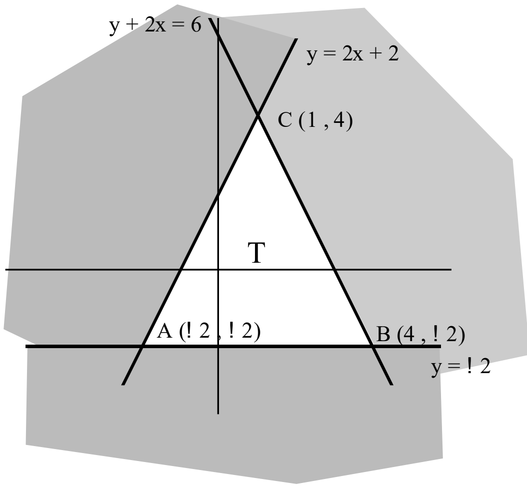
SOLUCIÓN.

a) XLa inecuación $-2 \le y$ tiene por solución los puntos del semiplano superior limitado por la recta $y=-2$.

X La recta $y = 2x+2$ pasa por los puntos $(0,2)$ y $(-1,0)$. El semiplano solución de la inecuación $y \le 2x+2$ es el que contiene al origen de coordenadas, pues: $0 \le 0+2$.

X La recta $y+2x=6$ pasa por los puntos $(0,6)$ y $(3,0)$. El semiplano solución de la inecuación $y+2x \le 6$ es el que contiene al origen de coordenadas, pues: $0 \le 6$.

La región T es el triángulo de vértices A, B y C.



b) La función objetivo $f(x,y) = \dfrac{2x-y}{2}$ se maximiza o minimiza en los vértices de la región T. Obtengamos las coordenadas de dichos vértices y el valor de la función en cada uno de ellos:

X El vértice A es el punto de corte de las rectas $y=2x+2$ y $y=-2$: $\begin{cases} y = 2x+2 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow A(-2,-2) \Rightarrow$

$f(-2,-2) = \dfrac{-4+2}{2} = -1$

X Las coordenadas del vértice B son las soluciones del sistema $\begin{cases} y=-2 \\ y+2x=6 \end{cases} \Rightarrow B(4,-2) \Rightarrow f(4,-2)=5$

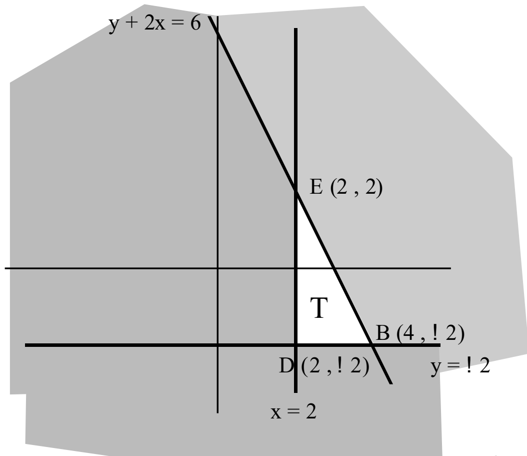
X Las coordenadas de C son las soluciones del sistema $\begin{cases} y=2x+2 \\ y+2x=6 \end{cases} \Rightarrow C(1,4) \Rightarrow f(1,4)=-1$

Por tanto, a la vista de los resultados, la función es máxima en el punto $B(4,-2)$ y mínima en cualquier punto del segmento AC.

c) Al cambiar la desigualdad $y \le 2x+2$ por la $x \ge 2$, la región T es ahora:

X El vértice D es $D(2,-2) \Rightarrow f(2,-2)=3$
X El vértice B es $B(4,-2) \Rightarrow f(4,-2)=5$
X El vértice E es $E(2,2) \Rightarrow f(2,2)=1$

luego la función es máxima en el punto $B(4,-2)$ y mínima en el punto $E(2,2)$.



2. *Se sabe que la función de beneficios de una empresa es de la forma* $B(x) = ax + b\sqrt{x}$ *, siendo x el número de unidades producidas y a y b parámetros reales.*

a) Calcule, si existen, los valores de los parámetros a y b para que una producción de x = 100 proporcione un beneficio de 50 unidades monetarias y que además sea el máximo que se puede obtener. *(6 puntos)*
b) Para $a = -1$ *y* $b = 16$*, calcule las cantidades que se han de producir para que el beneficio aumente o disminuya (intervalos de crecimiento y decrecimiento) y los puntos de inflexión de B(x), si existen.* *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Se tiene: $B(100) = 50 \Rightarrow 50 = 100a + 10b$ (*)
Como, además, es el máximo: $B'(100) = 0$.

Se tiene: $B'(x) = a + \dfrac{b}{2\sqrt{x}} \Rightarrow B'(100) = a + \dfrac{b}{20} = 0 \Rightarrow 20a + b = 0$ (*)

De las ecuaciones (*) se obtiene: $\begin{cases} 100a + 10b = 50 \\ 20a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a + b = 5 \\ 20a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\dfrac{5}{10} = -\dfrac{1}{2}$ y $b = 10$

b) La función es: $B(x) = -x + 16\sqrt{x}$. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada: $B'(x) = -1 + \dfrac{16}{2\sqrt{x}} = -1 + \dfrac{8}{\sqrt{x}}$.

Igualamos a cero la derivada: $-1 + \dfrac{8}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow -\sqrt{x} + 8 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 8 \Rightarrow x = 64$. Se tiene:

f' > 0		f' < 0
	64	

Es decir, la función beneficio es creciente (aumenta) hasta x = 64 y es decreciente (disminuye) desde x = 64.

Los puntos de inflexión satisfacen $B''(x) = 0$. En nuestro caso: $B''(x) = 0 + \dfrac{-8 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{-4}{x\sqrt{x}}$ que es distinto de 0 para todo valor de x. Por tanto, la función no tiene puntos de inflexión.

3. *En una gran ciudad la desviación típica del gasto medio semanal de los jóvenes es de 6 euros. Elegidos 100 jóvenes, su gasto medio semanal es de 25 euros. Determine el intervalo de confianza del 95% para dicho gasto medio, explicando los pasos realizados para obtener el resultado.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

El radio del intervalo es $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. En este caso: $\sigma = 6$ y $n = 100$ por lo que:

$$E = 1{,}96 \cdot \frac{6}{\sqrt{100}} = 1{,}176 .$$

Y, por tanto, el intervalo de confianza es: $(25 - 1{,}176 \ , \ 25 + 1{,}176) = (23{,}824 \ , \ 26{,}176)$, es decir, en un 95% de las muestras, el gasto medio estará entre 23,82 euros y 26,18 euros.

Septiembre 05.

OPCIÓN A

1. *Un agricultor dispone de 9 hectáreas para sembrar dos productos A y B. Para el producto A desea destinar como mucho 8 hectáreas. Por cada hectárea sembrada con A y B se obtiene respectivamente un beneficio de 150 y 100 euros.*

a) Si se quiere que la superficie correspondiente a B no sea mayor que la mitad que ocupará A, plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita averiguar el número de hectáreas que se han de dedicar a cada producto para maximizar el beneficio total. *(6 puntos)*

b) ¿Cuál es la solución si el beneficio por hectárea es de 125 euros independientemente de que esté sembrada con A o con B y no se tiene en cuenta la restricción del apartado a)? *(4 puntos)*

SOLUCIÓN

a) Organicemos los datos y condiciones del problema en una tabla:

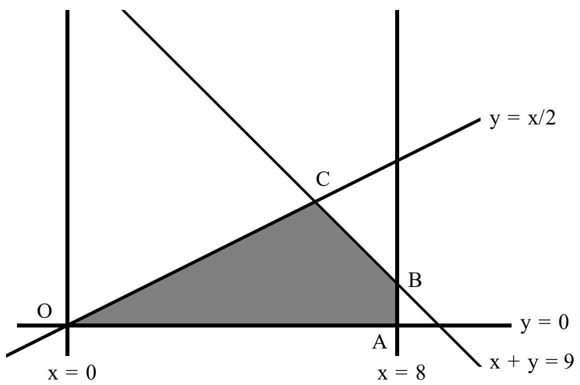
PRODUCTO	**HECTÁREAS**	**BENEFICIO**
A	x	150x
B	y	100y
	$0 \le x \le 8$ $y \ge 0$ $x + y \le 9$ $y \le \frac{x}{2}$	

∃ La función objetivo, que debe maximizarse, es:

$$F(x, y) = 150x + 100y$$

∃ Las restricciones de la solución son: $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x \le 8 \\ x + y \le 9 \\ y \le \frac{x}{2} \end{cases}$

La región factible (puntos del plano que satisfacen al conjunto de restricciones) es el cuadrilátero OABC:



La función objetivo se optimiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos sus coordenadas y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

Vértice O: $O(0, 0) \Rightarrow F(0, 0) = 0$ €

Vértice A: $A(8, 0) \Rightarrow F(8, 0) = 1200$ €

Vértice B: $\begin{cases} x = 8 \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow B(8, 1) \Rightarrow F(8, 1) = 1300$ €

Vértice C: $\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow C(6, 3) \Rightarrow F(6, 3) = 1200$ €

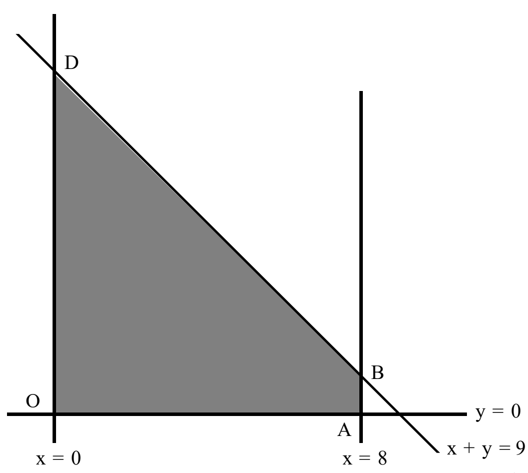
Por tanto, para maximizar el beneficio se deben dedicar 8 hectáreas al producto A y 1 hectárea al producto B.

b) Ahora la función objetivo es: $G(x, y) = 125x + 125y$
y las restricciones: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x \le 8$, $x + y \le 9$

La nueva región factible es el cuadrilátero OABD. Sus vértices y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos son:

$O(0, 0) \Rightarrow F(0, 0) = 0$ €
$A(8, 0) \Rightarrow F(8, 0) = 1000$ €
$B(8, 1) \Rightarrow F(8, 1) = 1125$ €
$D(0, 9) \Rightarrow F(0, 9) = 1125$ €

Luego la solución es cualquier punto del segmento BD.



2. *Se considera la función* $f(x) = -\dfrac{x^4}{2} + 5x^3 - 18x^2 + 28x + 9$

a) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos *(4,75 puntos)*
b) Determine los intervalos de concavidad y de convexidad y los puntos de inflexión. *(3,75 puntos)*
c) Escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto x = 1. *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Como van a ser utilizadas a lo largo del ejercicio, obtengamos las sucesivas derivadas de la función:

$$f'(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 28 \ , \ f''(x) = -6x^2 + 30x - 36 \ , \ f'''(x) = -12x + 30$$

a) Como la función es continua por ser polinómica, los intervalos de crecimiento y decrecimiento están separados por los puntos de máximo y de mínimo:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 15x^2 - 36x + 28 = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} -2\cdot(x-2)^2\cdot\left(x - \frac{7}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 2 \ , \ x = \frac{7}{2} \quad \text{(puntos críticos)}$$

(1)

	B2	15	B36	28
2		B4	22	B28
	B2	11	B14	0

Ψ

$$-2x^3 + 15x^2 - 36x + 28 = (x-2)\cdot(-2x^2 + 11x - 14) =$$
$$= (x-2)\cdot(-2)\cdot(x-2)\cdot\left(x - \frac{7}{2}\right) = -2\cdot(x-2)^2\cdot\left(x - \frac{7}{2}\right)$$

$f''(2) = 0 \ , \ f''(2) \neq 0 \Rightarrow$ en x = 2 la función tiene un punto de inflexión

$f''\left(\frac{7}{2}\right) = -6\cdot\frac{49}{4} + 30\cdot\frac{7}{2} - 36 = -\frac{147}{2} + \frac{210}{2} - \frac{72}{2} = -\frac{9}{2} < 0 \Rightarrow$ en $x = \frac{7}{2}$ la función tiene un máximo relativo.

Por tanto, en $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$ la función es creciente y en $\left(\frac{7}{2}, \infty\right)$ es decreciente.

b) Los posibles puntos de inflexión anulan la segunda derivada: $-6x^2 + 30x - 36 = 0 \Rightarrow x = 2 \ , \ x = 3$. Se tiene:

$f'' < 0$		$f'' > 0$		$f'' < 0$
Convexa	2	Cóncava	3	Convexa

En x = 2 y x = 3 la función tiene sendos puntos de inflexión pues $f'''(2) \neq 0$ y $f'''(3) \neq 0$

c) La pendiente es $f'(1) = 5$ y además pasa por el punto de tangencia, cuyas coordenadas son: x = 1 , $y = f(1) = \frac{47}{2}$

luego la ecuación es: $y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \Leftrightarrow y - \frac{47}{2} = 5\cdot(x-1) \Leftrightarrow 10x - 2y + 37 = 0$

3. *En un Instituto de Idiomas se expiden dos certificados: el A (de nivel básico) y el B (de nivel superior). Para su obtención es necesario pasar una prueba o examen, pudiendo una persona presentarse a la prueba del B aunque no tenga el certificado A. Se sabe que la prueba para el certificado B la pasan 80 de cada 100 personas que tienen el A y 40 de cada 100 que no lo tienen. Dos amigos se presentan a la prueba para obtener el certificado B, uno tiene el A y el otro no. Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) Ambos obtienen el certificado. *(2,5 puntos)*
b) Solamente obtiene el certificado el que ya tiene el A. *(2,5 puntos)*
c) Solamente obtiene el certificado el que no tiene el A. *(2,5 puntos)*
d) Solamente uno obtiene el certificado. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $p(B/A \ I \ B/\overline{A}) = p(B/A)\cdot p(B/\overline{A}) = 0{,}8\cdot 0{,}4 = 0{,}32$

b) $p(B/A \ I \ \overline{B}/\overline{A}) = p(B/A)\cdot p(\overline{B}/\overline{A}) = 0{,}8\cdot 0{,}6 = 0{,}48$

c) $p(\overline{B}/A \ I \ B/\overline{A}) = p(\overline{B}/A)\cdot p(B/\overline{A}) = 0{,}2\cdot 0{,}4 = 0{,}08$

d) $p(B/A \ I \ \overline{B}/\overline{A}) + p(\overline{B}/A \ I \ B/\overline{A}) = 0{,}48 + 0{,}08 = 0{,}56$

Septiembre 05.

OPCIÓN B

1. *a) Mediante cálculo matricial, discuta y resuelva el sistema:* $\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 2x + 7y - 3z = 5 \end{cases}$ *(5 puntos)*

b) Calcule la matriz X solución de la ecuación $2X + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Escribamos las matrices de los coeficientes y ampliada y apliquemos las transformaciones elementales necesarias para triangularizar las matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 8 & -4 & 8 \end{array}\right) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{ el sistema es compatible indeterminado}$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $F_2 - F_1$, $F_3 - F_1$ (2) F_3 ! $2F_2$

El sistema escalonado equivalente al dado es: $\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 2y - z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y \quad = -3 - \lambda \\ 2y \quad = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{2+\lambda}{2}$;

$2x = -3 - \lambda + \dfrac{2+\lambda}{2} = \dfrac{-4-\lambda}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{4+\lambda}{4}$. Es decir: $x = -\dfrac{4+\lambda}{4}$, $y = \dfrac{2+\lambda}{2}$, $z = \lambda$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$

Se tiene: $2X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -11 \\ 13 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -11 \\ 13 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & 6 \end{pmatrix}$

2. *Sea* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & si \;\; x < 0 \\ \dfrac{2x-1}{x+a} & si \;\; x \ge 0 \end{cases}$

a) ¿Existe algún valor del parámetro a para el que f(x) sea continua en x = 0? *(2,5 puntos)*

b) Para $a = \dfrac{1}{2}$*, calcule los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de f(x).* *(6 puntos)*

c) Para a = 2, compruebe si $x = \dfrac{1}{2}$ *es asíntota vertical de f(x).* *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Para que la función sea continua en x = 0 debe ocurrir:

∃ ∃ $f(0) = -\dfrac{1}{a}$

∃ ∃ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 - 2\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-1}{x+a} \Leftrightarrow -2 = -\dfrac{1}{a} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

∃ Para este valor del parámetro, se tiene: $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ es decir, la función es continua en x = 0.

b) La función es: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x-1}{x+\frac{1}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

La función derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f' < 0$		$f' > 0$
DECRECIENTE	0	CRECIENTE

La función segunda derivada: $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{4}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f'' > 0$		$f'' < 0$
CÓNCAVA	0	CONVEXA

c) La función es: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x-1}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

La recta $x = \dfrac{1}{2}$ no es una asíntota vertical de la función porque: $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{x+2} = 0$

3. *Se ha obtenido que el intervalo de confianza correspondiente al 95% de una variable es* $(6'66\,,\ 8'34)$. *Calcule la media y el tamaño de la muestra que se ha estudiado para obtener el intervalo sabiendo que la desviación típica es igual a 3. Explique cada uno de los pasos realizados.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La media es el valor central del intervalo: $\overline{X} = \dfrac{6{,}66 + 8{,}34}{2} = 7{,}5$

El radio del intervalo (error máximo admitido) es: $E = 7{,}5 - 6{,}66 = 0{,}84$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es: $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Se tiene: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0{,}84 = 1{,}96 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0{,}84 \cdot \sqrt{n} = 5{,}88 \Rightarrow \sqrt{n} = 7 \Rightarrow n = 49$

OPCIÓN A

1. *Un fabricante comercializa 2 modelos de pantalón vaquero, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 12 euros por unidad y otro para hombre con beneficio unitario de 20 euros. El próximo mes desea fabricar entre 50 y 750 pantalones para mujer y siempre un número no inferior al que fabrica para hombre. Además no tiene posibilidades de fabricar mensualmente más de 1000 unidades en total.*

a) *Plantee un programa lineal que permita calcular el número de unidades de cada modelo que ha de fabricar para maximizar el beneficio total.* *(2 puntos)*
b) *Resolviendo el programa anterior diga el máximo beneficio y cuántas unidades de cada modelo se han de comercializar.* *(5,5 puntos)*
c) *Diga la solución del apartado anterior si el beneficio unitario es de 15 euros para cada uno de los dos modelos.* *(2,5 puntos)*

NOTA: No es necesario considerar que las cantidades fabricadas sean números enteros.

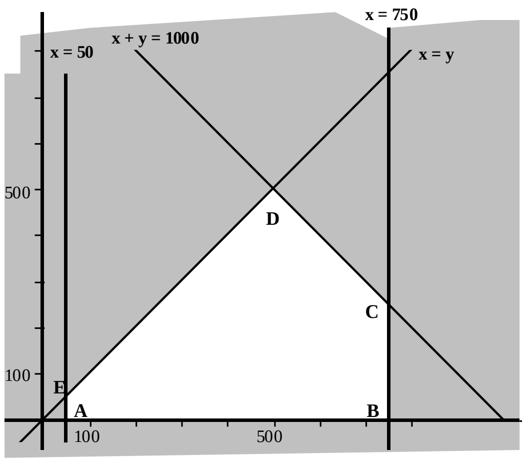
SOLUCIÓN.

a) Sea *x* el número de pantalones de mujer e *y* el número de pantalones de hombre que deben fabricarse.
La función objetivo (función de beneficios) es $F(x\,,\ y)=12x+20y$ que debe maximizarse.

Las restricciones a que está sometida la solución son: $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 50\leq x\leq 750 \\ x\geq y \\ x+y\leq 1000 \end{cases}$

b) Representemos la región factible (puntos del plano que son solución del sistema de restricciones):

• La recta $x=0$ es el eje de ordenadas y la inecuación $x\geq 0$ tiene por solución el semiplano de la derecha. La recta $y=0$ es el eje de abscisas y la inecuación $y\geq 0$ es el semiplano superior.
• Las rectas $x=50$ y $x=750$ son rectas paralelas al eje de ordenadas y la parte del plano solución a las inecuaciones $x\geq 50$ y $x\leq 750$ es la comprendida entre ambas.
• La recta $x=y$ es la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. La inecuación $x\geq y$ tiene por solución el semiplano al que pertenece el punto $(100\,,\,0)$ por ejemplo.
• La recta $x+y=1000$ pasa por los puntos $(200\,,\,800)$ y $(500\,,\,500)$, por ejemplo. El semiplano solución de la inecuación $x+y\leq 1000$ es el que contiene al origen de coordenadas.
• La región factible es el pentágono de extremos A, B, C, D y E de la figura.



La solución óptima se tiene en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos las coordenadas de dichos vértices y el valor en cada uno de ellos de la función objetivo:

$A(50\,,\,0)\ \Rightarrow\ F(50\,,\,0)=600\ €$; $B(750\,,\,0)\ \Rightarrow\ F(750\,,\,0)=9000\ €$; $C(750\,,\,250)\ \Rightarrow\ F(750\,,\,250)=14000\ €$
$D(500\,,\,500)\ \Rightarrow\ F(500\,,\,500)=16000\ €$; $E(50\,,\,50)\ \Rightarrow\ F(50\,,\,50)=1600\ €$

Por tanto, deben comercializarse 500 pantalones de cada uno de los modelos y el beneficio que se obtendrá es de 16000 euros.

c) La región factible no varía y la nueva función objetivo es $F(x\,,\ y)=15x+15y$. El valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible es:

$F(50,0)=750$ € ; $F(750,0)=11250$ € ; $F(750,250)=15000$ € ; $F(500,500)=15000$ € ; $F(50,50)=1500$ €

Luego ahora la solución es la pareja de coordenadas de cualquier punto del segmento CD de la región factible. El beneficio será de 15000 euros.

2. *Se considera la función* $f(x)=ax^3+b\cdot \ln x$ *siendo a y b parámetros reales.*

a) Determine los valores de a y b sabiendo que $f(1)=2$ *y que la derivada de* $f(x)$ *es nula en* $x=1$. *(3 puntos)*

b) Para $a=4/3$ *y* $b=1$, *determine los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de* $f(x)$ *(5 puntos)*

c) Para $a=b=-2$, *calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. *(2 puntos)*

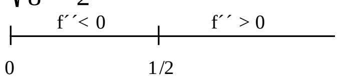
SOLUCIÓN.

a) $f(1)=2 \Rightarrow a+b\cdot 0=2 \Rightarrow a=2$

$f'(x)=3ax^2+\dfrac{b}{x}$ y como $f'(1)=0 \Rightarrow 3a+b=0 \Rightarrow 6+b=0 \Rightarrow b=-6$

b) Para los valores de a y b dados, la función es $f(x)=\dfrac{4}{3}x^3+\ln x$. La concavidad y convexidad dependen del signo de $f''(x)$: $f'(x)=\dfrac{4}{3}\cdot 3x^2+\dfrac{1}{x}=4x^2+\dfrac{1}{x} \Rightarrow f''(x)=8x-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{8x^3-1}{x^2}$.

El denominador de $f''(x)$ es positivo $\forall x$. El numerador: $8x^3-1=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}=\dfrac{1}{2}$ y como el dominio de definición de la función es $(0,\infty)$ la segunda derivada tiene los siguientes signos:



Luego la función es convexa en $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ y cóncava en $\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$ y como la función es continua en todo su dominio, en $x=\dfrac{1}{2}$ hay un punto de inflexión.

c) Ahora la función es: $f(x)=-2x^3-2\cdot \ln x$.

Dando valores a x cada vez más grandes y positivos: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Dando a x valores cada vez más próximos a cero (positivos): $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

3. *Una empresa tiene dos fábricas, en la primera son mujeres el 60% de los trabajadores y en la segunda son hombres el 55% de los trabajadores. Se elige al azar un trabajador de cada fábrica para pertenecer al comité de empresa.*

a) Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

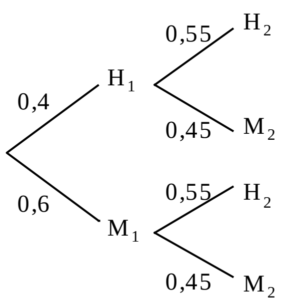
A = Ambos son hombres (2 puntos)

B = Sólo uno es mujer (3 puntos)

C = Ambos son mujeres (2 puntos)

b) Razone si el suceso contrario del suceso C es el A, el B, el $A\cap B$, *el* $A\cup B$ *o algún otro suceso y calcule su probabilidad. (3 puntos)*

SOLUCIÓN.



Sean H_1 y M_1 los sucesos "el trabajador elegido en la primera fábrica es hombre" y "el trabajador elegido en la primera fábrica es mujer" y H_2 y M_2 los sucesos correspondientes en la segunda fábrica. El diagrama en árbol de las posibles situaciones que pueden darse y sus correspondientes probabilidades es:

a) Se tiene:

$$p(A)=p(H_1\cap H_2)=p(H_1)\cdot p(H_2)=0{,}4\cdot 0{,}55=0{,}22$$

$$p(B)=p(H_1)\cdot p(M_2)+p(M_1)\cdot p(H_2)=0{,}4\cdot 0{,}45+0{,}6\cdot 0{,}55=0{,}51$$

$$p(C)=p(M_1\cap M_2)=p(M_1)\cdot p(M_2)=0{,}6\cdot 0{,}45=0{,}27$$

b) El suceso contrario del suceso "ambos son mujeres" es el suceso "alguno es hombre" y éste es el suceso que se verifica cuando "los dos son hombres" o cuando "uno es hombre y el otro mujer" luego:

$$\overline{C} = A \cup B \quad y \quad p(\overline{C}) = p(A \cup B) = 1 - 0{,}27 = 0{,}73$$

OPCIÓN B

1. *Discuta y resuelva el siguiente sistema para todos los valores del parámetro a. (Utilice el método de Gauss para su resolución).*

$$\begin{cases} 4x + ay - 2z = -1 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + (2a+2)z = 6 - a \end{cases}$$

(10 puntos)

SOLUCIÓN.

Discusión del sistema: escribamos las matrices de los coeficientes A y ampliada B para comparar sus rangos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{array}\right) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -1 \\ 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{array}\right) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -1 \\ 0 & a-4 & 4a-2 & 3 \\ 0 & 0 & 3a+2 & 7-a \end{array}\right)$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $F_1 \leftrightarrow F_2$ (2) $F_2 - 4F_1$, $F_3 - F_1$

- Si $3a + 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$: rg A =2 y rg B=3 $\Rightarrow$ rg A $\neq$ rg B $\Rightarrow$ el sistema es incompatible
- Si $a \neq -\frac{2}{3}$, 4 : rg A = rg B = 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 4$: $\text{rg}\,A = \text{rg}\,B = 2 <$ nº incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado

Resolución del sistema:

- Para $a \neq -\frac{2}{3}$, debemos resolverlo en función del parámetro a.

El sistema dado es equivalente al sistema escalonado: $\begin{cases} x + y - az = -1 \\ (a-4)y + (4a-2)z = 3 \\ (3a+2)z = 7-a \end{cases}$

que resolveremos de abajo hacia arriba.

De la tercera ecuación: $z = \dfrac{7-a}{3a+2}$. Sustituimos este valor en la segunda ecuación y despejamos y:

$$(a-4)y = 3 - (4a-2)\cdot\frac{7-a}{3a+2} = \frac{9a + 6 - 28a + 4a^2 + 14 - 2a}{3a+2} = \frac{4a^2 - 21a + 20}{3a+2} \Rightarrow y = \frac{4a^2 - 21a + 20}{(a-4)(3a+2)} = \frac{4a-5}{3a+2}$$

Por último sustituimos en la primera ecuación y despejamos x:

$$x = -1 - y + az = -1 - \frac{4a-5}{3a+2} + \frac{7a - a^2}{3a+2} = \frac{-3a - 2 - 4a + 5 + 7a - a^2}{3a+2} = \frac{-a^2 + 3}{3a+2}$$

- Para $a = 4$, el sistema escalonado equivalente es: $\begin{cases} x + y - 4z = -1 \\ 14z = 3 \end{cases} \Rightarrow z = \dfrac{3}{14}$; $x = -\dfrac{1}{7} - \lambda$; $y = \lambda$

2. *Se considera la función* $f(x) = (x^2 + a) \cdot e^{ax}$ *siendo a un parámetro real.*

a) Razone a qué es igual el dominio de $f(x)$. *(1,25 puntos)*

b) Determine el valor de a para que la gráfica de $f(x)$ *pase por el punto* $(0, -4)$ *(1,25 puntos)*

c) Para $a = -2$, *determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de* $f(x)$. *¿Existen máximos y mínimos relativos de* $f(x)$ *?, en caso afirmativo, decir dónde se alcanzan y su valor.* *(7,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) El dominio de f(x) es R (la recta real) porque es el producto de una función polinómica, cuyo dominio es R, y de una función exponencial cuyo dominio es R.

b) Debe ser $f(0) = -4$: $a \cdot e^0 = -4 \Leftrightarrow a = -4$

c) La función es $f(x) = (x^2 - 2) \cdot e^{-2x}$. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de $f'(x)$:

$f'(x) = 2x \cdot e^{-2x} + (x^2 - 2) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = 2e^{-2x}(x - x^2 + 2) = 0 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$, $x = 2$. Se tiene:

$f' < 0$	$f' > 0$	$f' < 0$
	-1	2

Es decir, la función es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ y creciente en $(-1, 2)$.

Puesto que se trata de una función continua $\forall x$, en $x = -1$ hay un mínimo relativo con $f(-1) = -e^2$ y en $x = 2$ hay un máximo relativo con $f(2) = 2 \cdot e^{-4} = \dfrac{2}{e^4}$.

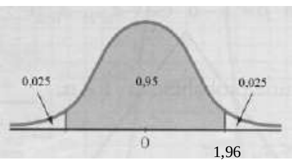
3. *En una determinada comunidad autónoma se sabe que la desviación típica del número de días que dura un contrato temporal es igual a 57 días. Diga el número mínimo de contratos en los que se ha de mirar su duración para que el intervalo, con un nivel de confianza del 95%, que da la duración media de un contrato de ese tipo tenga una amplitud que no sea mayor que 10 días. Especifique los pasos realizados para obtener el resultado.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

Se trata de obtener el tamaño mínimo de una muestra en una población cuyos datos son la duración de los contratos temporales y de la que se conoce: la desviación típica, $\sigma = 57$ días, y el radio del intervalo de confianza de la media (error máximo admisible), $E = 5$ días (la mitad de la amplitud), para un nivel de confianza del 95%.

Se tiene: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2$

Calculemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ para el nivel de confianza del 95%:



$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow 1 - 0,025 = 0,975$

y mirando la tabla: $F(1,96) = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

Tenemos: $n = \left(\dfrac{1,96 \cdot 57}{5} \right)^2 = 499,25 \Rightarrow$ el nº mínimo de contratos que deben revisarse es de 500.

Septiembre 2006

OPCIÓN A

1. *Se consideran las matrices* $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}4 & 20\\ 16 & 5\end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2 y $\left(A^2\right)^{-1}$. *(5 puntos)*

b) Despeje X de la ecuación matricial $A^2\cdot X=B$. *(2 puntos)*

c) *Calcule X.* *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}7 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{7F_2-3F_1}{\approx}\left(\begin{array}{cc|cc}7 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 25 & -3 & 7\end{array}\right)\overset{25F_1-F_2}{\approx}\left(\begin{array}{cc|cc}175 & 0 & 28 & -7\\ 0 & 25 & -3 & 7\end{array}\right)\overset{F_1:175;\ F_2:25}{\approx}\left(\begin{array}{cccc}1 & 0 & \frac{28}{175} & -\frac{7}{175}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{25} & \frac{7}{25}\end{array}\right)$$

Luego $\left(A^2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{25} & -\frac{1}{25}\\ -\frac{3}{25} & \frac{7}{25}\end{pmatrix}$

b) $A^2\cdot X=B\ \Leftrightarrow\ \left(A^2\right)^{-1}\cdot A^2\cdot X=\left(A^2\right)^{-1}\cdot B\ \Leftrightarrow\ I\cdot X=\left(A^2\right)^{-1}\cdot B\ \Leftrightarrow\ X=\left(A^2\right)^{-1}\cdot B$

c) $X=\begin{pmatrix}\frac{4}{25} & -\frac{1}{25}\\ -\frac{3}{25} & \frac{7}{25}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 20\\ 16 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

2. *Se considera la función* $f(x)=\dfrac{x^2}{a-bx}$ *siendo a y b parámetros reales.*

a) Determine los valores de los parámetros a y b para los que $f(2)=-4$ *y la recta tangente a la gráfica de f(x) en* $x=6$ *es horizontal.* *(4 puntos)*

b) Para $a=1$ *y* $b=-1$.

b_1) Razone cuál es el dominio de f(x) y la existencia de asíntotas verticales. *(2 puntos)*

b_2) Determine los intervalos de concavidad y de convexidad y los puntos de inflexión de f(x) *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) X $f(2)=-4\ \Rightarrow\ \dfrac{4}{a-2b}=-4\ \Rightarrow\ a-2b=-1\ \Rightarrow\ a=2b-1$ (*)

$f'(x)=\dfrac{2x\,(a-bx)+bx^2}{(a-bx)^2}=\dfrac{2ax-bx^2}{(a-bx)^2}$

X Tangente en x = 6, horizontal: $f'(6)=0\ \Rightarrow\ \dfrac{12a-36b}{(a-6b)^2}=0\ \Rightarrow\ 12a-36b=0\ \Rightarrow\ a=3b$ (*)

De las igualdades (*): $2b - 1 = 3b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = -3$

b) La función es $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

b$_1$) Siendo una función racional, el dominio está formado por los valores de x que no anulen el denominador. Es decir: $D(f) = \Re - \{-1\}$.

La recta $x = -1$ es una asíntota vertical de la función pues $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{1+x} = \infty$

b$_2$) $f'(x) = \dfrac{2x\,(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \dfrac{2x + 2x^2 - x^2}{(1+x)^2} = \dfrac{2x + x^2}{(1+x)^2}$

$$f''(x) = \frac{(2+2x)\cdot(1+x)^2 - (2x+x^2)\cdot 2\,(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2 + 2x + 2x + 2x^2 - 4x - 2x^2}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$\forall x \in (-\infty,\ -1)$: $f' < 0 \Rightarrow$ la función es convexa en el intervalo $(-\infty,\ -1)$.
$\forall x \in (-1,\ \infty)$: $f' > 0 \Rightarrow$ la función es cóncava en el intervalo $(-1,\ \infty)$

La función no tiene puntos de inflexión pues aunque pasa de convexa a cóncava en $x = -1$, este punto no pertenece al dominio de la función.

3. *De una baraja española de 40 cartas se retiran los oros y los ases. De las 27 cartas que quedan se extraen dos cartas al azar (sin devolver la primera), calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) Ambas son del mismo palo. *(3 puntos)*
b) Al menos una es figura. *(4 puntos)*
c) Únicamente la segunda carta es una figura. *(3 puntos)*

SOLUCÓN.

En la baraja quedan 9 cartas de copas, 9 de espadas y 9 de bastos. La extracción de la segunda carta está condicionada por la primera extracción al ser sin devolución.

a) Puesto que la composición de la baraja es homogénea en cuanto a los tres palos que quedan, la probabilidad de que las dos cartas sean de copas, de espadas o de bastos es la misma. Sea P_1 el suceso “la primera carta es de un determinado palo” y P_2 el suceso “la segunda carta es del mismo palo”. Se tiene:

$$p\,(\text{mismo palo}) = 3 \cdot p\,(P_1 \cap P_2) = 3 \cdot p\,(P_1) \cdot p(P_2 / P_1) = 3 \cdot \frac{9}{27} \cdot \frac{8}{26} = \frac{8}{26} = \frac{4}{13} \cong 0{,}3077$$

b) El suceso “al menos una carta es figura” es el suceso contrario al A = “ninguna de las dos cartas es figura”. Sea F_1 el suceso “la primera carta es una figura” y F_2 el suceso “la segunda carta es una figura”

$$p\,(A) = p\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right) = p\left(\overline{F_1}\right) \cdot p\left(\overline{F_2} / \overline{F_1}\right) = \frac{18}{27} \cdot \frac{17}{26} = \frac{17}{39} \Rightarrow p\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{17}{39} = \frac{22}{39} \cong 0{,}5641$$

c) Nos piden: $p\left(\overline{F_1} \cap F_2\right) = p\left(\overline{F_1}\right) \cdot p\left(F_2 / \overline{F_1}\right) = \dfrac{18}{27} \cdot \dfrac{9}{26} = \dfrac{3}{13} \cong 0{,}23$

Septiembre 2006

OPCIÓN B

1. *Sean* $T = \{(x,\ y)\ /\quad y + 3x \geq 6\ ,\quad y + 1 \leq 0\ ,\quad 8x - 3y \leq 67\ \}$ *y* $f(x,\ y) = 3y - 8x$

a) *Represente gráficamente la región T.* *(3,5 puntos)*

b) *Calcule el valor máximo y el mínimo, si existen, de la función* $f(x,\ y)$ *en T y diga en qué puntos se alcanzan.* *(4 puntos)*

c) *Represente gráficamente la región* $S = \{(x,\ y)\ /\quad y + 3x \geq 6\ ,\quad y + 1 \leq 0\}$ *y calcule el valor máximo y el mínimo, si existen, de la función* $f(x,\ y)$ *en S y diga en qué puntos se alcanzan.* *(2,5 puntos)*

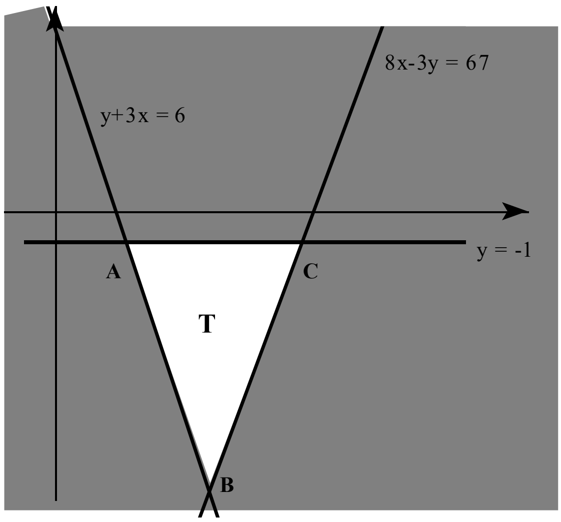
SOLUCIÓN.

a) Representemos el semiplano solución de cada una de las inecuaciones. La intersección de todos ellos es la región T.

X $y + 3x = 6$ es la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(2,\ 0)$ y $(0,\ 6)$. El semiplano solución de la inecuación es el que no contiene al origen de coordenadas.

X $y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ es la recta paralela al eje OX que pasa por el punto $(0,\ -1)$. El semiplano solución de la inecuación es el que no contiene al origen de coordenadas.

X $8x - 3y = 67$ es una recta que pasa por los puntos $(5,\ -9)$ y $(8,\ -1)$, por ejemplo. El semiplano solución de la inecuación es el que contiene al origen de coordenadas.



La región T es la parte del plano que queda en blanco. Se trata de un triángulo de vértices:

Vértice A: $\begin{cases} y = -1 \\ y + 3x = 6 \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{7}{3}\ ,\ -1\right)$

B: $\begin{cases} y + 3x = 6 \\ 8x - 3y = 67 \end{cases} \Rightarrow 8x - 3(6 - 3x) = 67 \Rightarrow 8x - 18 + 9x = 67 \Rightarrow 17x = 85 \Rightarrow x = 5\ ,\ y = -9 \Rightarrow B(5,\ -9)$

C: $\begin{cases} y = -1 \\ 8x - 3y = 67 \end{cases} \Rightarrow 8x + 3 = 67 \Rightarrow 8x = 64 \Rightarrow x = 8\ ,\ y = -1 \Rightarrow C(8,\ -1)$

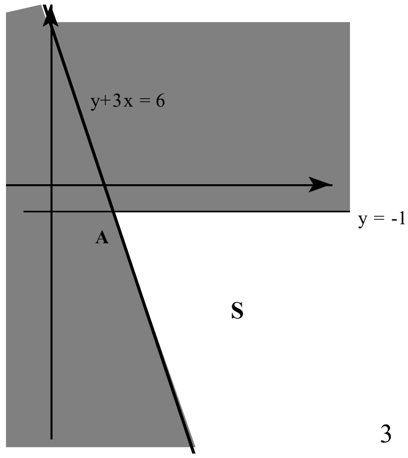
b) La función objetivo $f(x,\ y) = 3y - 8x$ se maximiza o minimiza en alguno de los vértices de T. Veamos qué valores alcanza la función en dichos vértices:

En A: $f\left(\dfrac{7}{3}\ ,\ -1\right) = -3 - \dfrac{56}{3} = -\dfrac{65}{3}$; En B: $f(5,\ -9) = -27 - 40 = -67$

En C: $f(8,\ -1) = -3 - 64 = -67$

Por tanto, el mayor valor lo alcanza en $A\left(\dfrac{7}{3}\ ,\ -1\right)$ y el mínimo en cualquiera de los puntos del segmento BC.

c) Ahora, la región S es abierta con un único vértice $A\left(\dfrac{7}{3}\ ,\ -1\right)$ en el que la función alcanza el máximo. El mínimo no se alcanza nunca.



2. *En una factoría la función de costes es* $C(x) = x^3 - 3 \cdot \ln x$*, donde* $x > 0$ *es el número de toneladas que se producen.*

a) Calcule el coste mínimo, si existe, y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste. *(5 puntos)*

b) Si la función de ingresos es $I(x) = x^3 + 12x$ *escriba la función de beneficios.* *(1 punto)*

c) Calcule los intervalos en los que la función de beneficios es creciente o decreciente y diga si existe beneficio máximo y en caso afirmativo el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho beneficio. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $C'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x} = \dfrac{3x^3 - 3}{x} = 0 \;\Rightarrow\; 3x^3 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 = 1 \;\Rightarrow\; x = 1$ (valor crítico)

$C''(x) = \dfrac{9x^3 - 3x^3 + 3}{x^2} = \dfrac{6x^3 + 3}{x^2} \;\Rightarrow\; C''(1) > 0 \;\Rightarrow\;$ Para $x = 1$ los costes son mínimos.

Por tanto, se ha de producir 1 tonelada y el coste es de $C(1) = 1 - 3 \cdot 0 = 1$

b) La función de beneficios es: $B(x) = I(x) - C(x) = x^3 + 12x - x^3 + 3 \cdot \ln x = 12x + 3 \cdot \ln x$

c) $B'(x) = 12 + \dfrac{3}{x} = \dfrac{12x + 3}{x} = 0 \;\Rightarrow\; 12x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{1}{4}$ que no forma parte del dominio de la función pues x debe ser mayor que 0.

Como para $x > 0$, $B'(x) > 0 \;\Rightarrow\;$ la función de beneficios es siempre creciente.

3. *En una gran ciudad se ha preguntado a 625 personas el gasto efectuado en medicinas el pasado año, obteniéndose un gasto medio de 75 euros. Se sabe que la desviación típica de esta variable es igual a 50. Calcule el intervalo que da el gasto medio con un nivel de confianza del 95%. Especifique los pasos realizados para obtener el resultado.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

Se tiene una muestra de 625 personas (n = 625) en la que la media muestral es $\bar{x} = 75$ euros. La desviación típica poblacional es $\sigma = 50$ euros.

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ con lo que el intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad , \quad \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(75 - 1{,}96 \cdot \frac{50}{\sqrt{625}} \quad , \quad 75 + 1{,}96 \cdot \frac{50}{\sqrt{625}} \right) = (71{,}08 \;,\; 78{,}92)$$

Es decir, la media de la población está entre 71,08 euros y 78,92 euros con un nivel de confianza del 95%.

Junio 2007.

OPCIÓN A

1. *a) Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, con a un parámetro real no nulo, compruebe que* $A^{-1}\cdot B=A$. *(1,5 puntos)*

b) Calcule el rango de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$ *según los valores del parámetro real m.* *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $A^{-1}\cdot B=A \iff A\cdot A^{-1}\cdot B=A\cdot A \iff B=A^2$ es decir, comprobar que $A^{-1}\cdot B=A$ es equivalente a comprobar que $A^2=B$:

$$A^2=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix}=B$$

b) $$\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}\overset{(1)}{=}\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & m+5 \end{pmatrix}\overset{(2)}{=}\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & m+5 \end{pmatrix}\overset{(3)}{=}\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m+15 \end{pmatrix}$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) F_2+3F_1, F_3-5F_1 (2) $F_2:3$ (3) F_3+5F_2

Se tiene entonces:
- Si $m\neq -15$: el rango de la matriz es 3
- Si $m=-15$: el rango de la matriz es 2

2. *a) Derive las funciones* $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$, $g(x)=\dfrac{6-x^5}{x^6}$, $h(x)=e^{x^3}$ *(1,5 puntos)*

b) Razone a qué es igual el dominio y calcule los valores de x, si existen, para los que f(x) alcanza máximo o mínimo relativo. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

$$g'(x)=\frac{-5x^4\cdot x^6-\left(6-x^5\right)\cdot 6x^5}{x^{12}}=\frac{x^5\cdot\left(-5x^5-36+6x^5\right)}{x^{12}}=\frac{x^5-36}{x^7}$$

$$h'(x)=3x^2\cdot e^{x^3}$$

b) • El dominio de f(x) es $\mathbb{R}^+$ pues $\forall x>0\ \exists f(x)$ ya que existen $\sqrt{x}$ y $\ln x$.

• Los puntos críticos (posibles extremos relativos) satisfacen la ecuación $f'(x)=0$, es decir: $\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow x=1$

$$f''(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x-\sqrt{x}+1}{x^2}=\frac{x-2x+2\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-x}{2x^2\sqrt{x}} \Rightarrow f''(1)=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}>0 \Rightarrow$$ x = 1 es un punto de mínimo relativo.

3. *Pilar y Carmen son aficionadas al tiro con arco. Pilar da en el blanco 3 de cada 5 veces y Carmen da en el blanco 5 de cada 8. Si ambas tiran al blanco a la vez, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:*

A = "únicamente Pilar ha dado en el blanco", B = "ambas han dado en el blanco", C = "al menos una ha dado en el blanco". *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sean los sucesos: P = "Pilar da en el blanco" y Q = "Carmen da en el blanco". Ambos sucesos son independientes.

Se tiene:

- $p(A) = p(P \cap Q') = p(P) \cdot p(Q') = \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{5}{8}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{40}$

- $p(B) = p(P \cap Q) = p(P) \cdot p(Q) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

- $p(C) = p(P' \cap Q')' = 1 - p(P' \cap Q') = 1 - p(P') \cdot p(Q') = 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$

OPCIÓN B

1. *Una empresa fabrica dos calidades de un bien, teniendo que producir en total un mínimo de 100 unidades y un máximo de 200. El coste de producción de una unidad de la primera calidad es de 15 euros y se obtiene un beneficio unitario de 100 euros. El coste de producción de una unidad de la segunda calidad es de 10 euros y se obtiene un beneficio unitario de 50 euros.*

a) Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el coste total mínimo para obtenerse un beneficio total de al menos 12500 euros. *(2 puntos)*

b) Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el beneficio total máximo con un coste total no superior a 2550 euros. *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Organicemos en una tabla los datos del problema:

	Número	**Coste**	**Beneficio**
Primera calidad	x	15x	100x
Segunda calidad	y	10y	50y
	$x + y \geq 100$ $x + y \leq 120$	$F(x, y) = 15x + 10y$ $15x + 10y \leq 2550$	$100x + 50y \geq 12500$ $G(x, y) = 100x + 50y$

a) • Función objetivo: $F(x, y) = 15x + 10y$

• Restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 100 \\ x + y \leq 200 \\ 100x + 50y \geq 12500 \end{cases}$

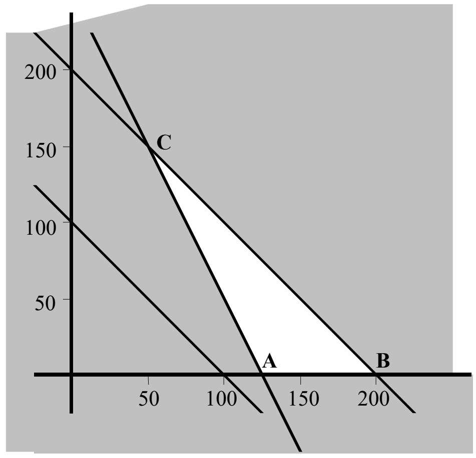
• Dibujemos la región factible:

La recta $x + y = 100$ pasa por los puntos $(100, 0)$ y $(0, 100)$ -por ejemplo- y la solución de la inecuación $x + y \geq 100$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

La recta $x + y = 200$ pasa por los puntos $(200, 0)$ y $(0, 200)$ -por ejemplo- y la solución de la inecuación $x + y \leq 200$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La recta $100x+50y=12500$ pasa por los puntos $(100,50)$ y $(50,150)$ -por ejemplo- y la solución de la inecuación $100x+50y\geq 12500$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

La región factible es el triángulo ABC cuyos vértices son: $A(125,0)$, $B(200,0)$ y $C(50,150)$



La función objetivo se minimiza en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos el valor de la función en cada uno de ellos:

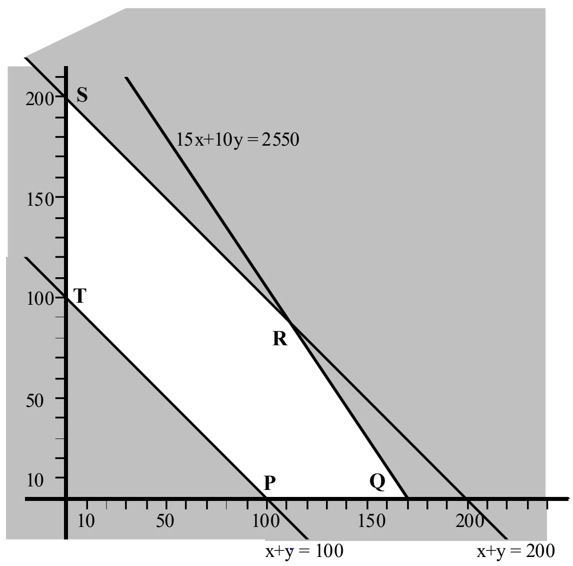
$$F(125,0)=15\cdot 125+10\cdot 0=1875 \text{ €}$$
$$F(200\ ,0)=15\cdot 200+10\cdot 0=3000 \text{ €}$$
$$F(50,150)=15\cdot 50+10\cdot 150=2250 \text{ €}$$

Por tanto, el coste mínimo es de 1875 € que se obtendrá produciendo 125 bienes de primera calidad y ninguno de segunda calidad.

b) Para maximizar el beneficio, la función objetivo es ahora: $G(x,y)=100x+50y$

y las restricciones: $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+y\geq 100 \\ x+y\leq 200 \\ 15x+10y\leq 2550 \end{cases}$

Dibujemos la región factible (conjunto solución del sistema de restricciones). La recta $15x+10y=2550$ pasa por los puntos $(150,30)$ y $(50,180)$ -por ejemplo- y la solución de la inecuación $15x+10y\leq 2550$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas. La región factible es entonces el pentágono PQRST cuyos vértices son los puntos:



$P(100,0)$, $Q(170,0)$, $R(110,90)$, $S(0,200)$ y $T(0,100)$.

El valor de la función objetivo en cada uno de los vértices es:

$G(170,0)=17000$ € ; $G(100,0)=10000$ €

$G(110,90)=15500$ € ; $G(0,200)=10000$ €

$G(0,100)=5000$ €

Por tanto, el beneficio total máximo es de 17000 € que se obtiene produciendo 170 bienes de primera calidad

2. *a) Derive las funciones* $f(x)=\dfrac{x^3}{4}-8$, $g(x)=\sqrt{x^3}$, $h(x)=x^2-e^x$ *(1,5 puntos)*

b) Diga si la función $m(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } 0\leq x\leq 4 \\ g(x) & \text{si } 4<x \end{cases}$ *es continua en x = 4* *(0,75 puntos)*

c) Escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función m(x) en x = 9. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2$ $\qquad g'(x)=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3x^2\sqrt{x}}{2x}=\dfrac{3}{2}x\sqrt{x}$ $\qquad h'(x)=2x-e^x$

b) $m(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x^3-8 & \text{si } 0\le x\le 4\\ \sqrt{x^3} & \text{si } x>4\end{cases}$

- $\exists\, m(4)=8$
- $\exists \lim\limits_{x\to 4} m(x)$: $\quad \begin{rcases} \lim\limits_{x\to 4^-} m(x)=\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{4}x^3-8\right)=8 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} m(x)=\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x^3}\right)=\sqrt{64}=8 \end{rcases} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 4} m(x)=8$
- $\lim\limits_{x\to 4} m(x)=m(4)$ $\Rightarrow$ la función m(x) es continua en x = 4.

c) Para x = 9, $m(x)=\sqrt{x^3}$ $\Rightarrow$ $m(9)=\sqrt{9^3}=27$ luego el punto de tangencia es el $(9,27)$.

$m'(x)=\dfrac{3}{2}x\sqrt{x}$ y la pendiente de la tangente es por tanto: $m'(9)=\dfrac{3}{2}\cdot 9\cdot 3=\dfrac{81}{2}$

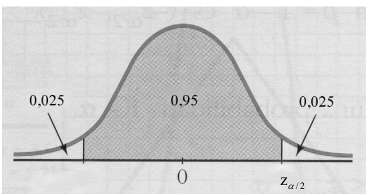
La ecuación de la tangente es entonces:

$$y-y_0=m\cdot(x-x_0) \;\Rightarrow\; y-27=\frac{81}{2}\cdot(x-9) \;\Leftrightarrow\; 2y-54=81x-729 \;\Leftrightarrow\; 81x-2y-675=0$$

3. *En un gran supermercado se ha obtenido que el número medio de toneladas descargadas diariamente en los últimos 100 días ha sido igual a 10. Determine el intervalo, con un nivel de confianza del 95%, en el que estará la media si la desviación típica es igual a 6. Explique los pasos realizados para obtener el resultado.* *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

El intervalo de confianza de la media de la población μ es $\left(\overline{x}-z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\;,\;\overline{x}+z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ donde $\overline{x}=10$ es la media obtenida en la muestra, $\sigma=6$ es la desviación típica y $n=100$ es el tamaño de la muestra.



El valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente a un nivel de confianza del 95% es:

$$1-\alpha=0,95 \;\Rightarrow\; \alpha=0,05 \;\Rightarrow\; \alpha/2=0,025$$

$0,025+0,95=0,975$ y en la tabla: $F(1,96)=0,975$ $\Rightarrow$ $z_{\alpha/2}=1,96$.

Así pues, el intervalo de confianza pedido es:

$$\left(10-1,96\cdot\frac{6}{10}\;,\;10+1,96\cdot\frac{6}{10}\right)=(10-1,176\;,\;10+1,176)=(8,824\;,\;11,176)$$

Septiembre 2007

OPCIÓN A

1. *A primera hora de la mañana en un cajero automático se desea que haya 800 billetes (de 10, 20 y 50 euros) con un valor total de 16000 euros. Sabiendo que pos cada 3 billetes de 50 euros son necesarios 4 de 20, plantee un sistema de ecuaciones lineales para averiguar cuántos billetes de cada cantidad ha de haber y resuélvalo por el método de Gauss.* *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sea *x* el número de billetes de 10 €, *y* el de billetes de 20 € y *z* el de billetes de 50 €. Se tiene:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=800 \\ 10x+20y+50z=16000 \\ \dfrac{z}{y}=\dfrac{3}{4} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x+y+z=800 \\ x+2y+5z=1600 \\ 3y-4z=0 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{c} x+y+z=800 \\ y+4z=800 \\ 3y-4z=0 \end{array}\right\} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{c} x+y+z=800 \\ y+4z=800 \\ -16z=-2400 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) E_2 ! E_1 (2) E_3 ! $3E_2$

$z=150$; $y=200$; $z=450$ es decir, habrá 450 billetes de 10 €, 200 billetes de 20 € y 150 billetes de 50 €.

2. a) *Derive las funciones* $f(x)=\dfrac{x^2}{3x^2+1}$, $g(x)=x\left(5-x^2\right)^4$, $h(x)=5\sqrt{\ln x}$ *(1,5 puntos)*

b) *La oferta de un bien conocido su precio, p, es* $S(p)=\begin{cases} 30p+200 & \text{si } 0\le p\le 10 \\ p^2-60p+1000 & \text{si } 10<p\le 40 \end{cases}$. *Represéntela y a la vista de su gráfica, diga para qué valor del precio se alcanza la máxima y la mínima oferta y para cuáles la oferta es menor que 200 unidades.* *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\dfrac{2x\cdot\left(3x^2+1\right)-x^2\cdot 6x}{\left(3x^2+1\right)^2}=\dfrac{6x^3+2x-6x^3}{\left(3x^2+1\right)^2}=\dfrac{2x}{\left(3x^2+1\right)^2}$

$$g'(x)=\left(5-x^2\right)^4+x\cdot 4\left(5-x^2\right)^3\cdot(-2x)=\left(5-x^2\right)^4-8x^2\left(5-x^2\right)^3=\left(5-x^2\right)^3\cdot\left(5-x^2-8x^2\right)=\left(5-x^2\right)^3\cdot\left(5-9x^2\right)$$

$$h'(x)=5\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{5}{2x\sqrt{\ln x}}$$

b) En el intervalo $\left[0\,,10\right]$ la función es una recta, $S(p)=30p+200$, que pasa por los puntos: $(0\ ,\ 200)$ y $(10\ ,\ 500)$

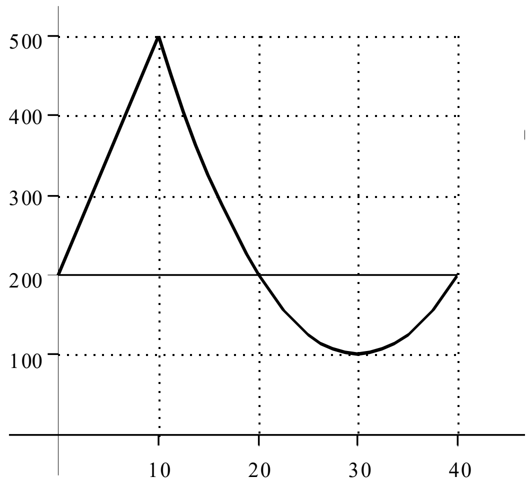
En el intervalo $\left(10\ ,\ 40\right]$ la función es una parábola:

$S(p)=p^2-60p+1000$. Calculemos su vértice:

$S'(p)=2p-60=0 \Rightarrow p=30$, $S(30)=100 \Rightarrow V\left(30\,,100\right)$.

Además pasa por los puntos: $\left(20\,,200\right)$ y $\left(40\,,200\right)$.

La gráfica es entonces (ver dibujo a la derecha):



La máxima oferta se alcanza para un precio de 10 u y la mínima para un precio de 30 u.

La oferta es menor que 200 unidades para un precio comprendido entre 20 y 40 unidades monetarias.

3. *En un barrio hay dos institutos, en el primero el 60% de los alumnos estudia inglés y en el segundo el 45% no lo estudia. Se sortea un viaje a Londres en cada uno de los institutos, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) Los dos alumnos agraciados no estudian inglés. (1 punto)
b) Sólo estudia inglés el del primer instituto. (1 punto)
c) Al menos uno estudia inglés. (1 punto)

SOLUCIÓN.

Sea I_1 el suceso "el alumno del primer instituto estudia inglés" e I_2 el suceso "el alumno del segundo instituto estudia inglés". Se tiene: $p\left(I_1\right) = 0,6$ y $p\left(I_2\right) = 0,55$ y ambos sucesos son independientes.

a) $p\left(\overline{I_1} \cap \overline{I_2}\right) = p\left(\overline{I_1}\right) \cdot p\left(\overline{I_2}\right) = 0,4 \cdot 0,45 = 0,18$

b) $p\left(I_1 \cap \overline{I_2}\right) = p\left(I_1\right) \cdot p\left(\overline{I_2}\right) = 0,6 \cdot 0,45 = 0,27$

c) El suceso "al menos uno estudia inglés" es el contrario del suceso "ninguno estudia inglés" cuya probabilidad se ha obtenido en el apartado a). Por tanto: $p = 1 - 0,18 = 0,82$

OPCIÓN B

1. *Un camionero transporta dos tipos de mercancías, X e Y, ganando 60 y 50 euros por tonelada respectivamente. Al menos debe transportar 8 toneladas de X y como mucho el doble de cantidad que de Y. ¿A cuánto asciende su ganancia total máxima si dispone de un camión que puede transportar hasta 30 toneladas? (3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Organicemos los datos del problema en una tabla:

Tipo de mercancía	Nº de toneladas	Ganancias
X	x	60x
Y	y	50y
	$x \geq 8$ $x \leq 2y$ $x + y \leq 30$	$F(x , y) = 60x + 50y$

X La función objetivo, que debe ser máxima, es:

$$F\ (x\ ,\ y) = 60x + 50y$$

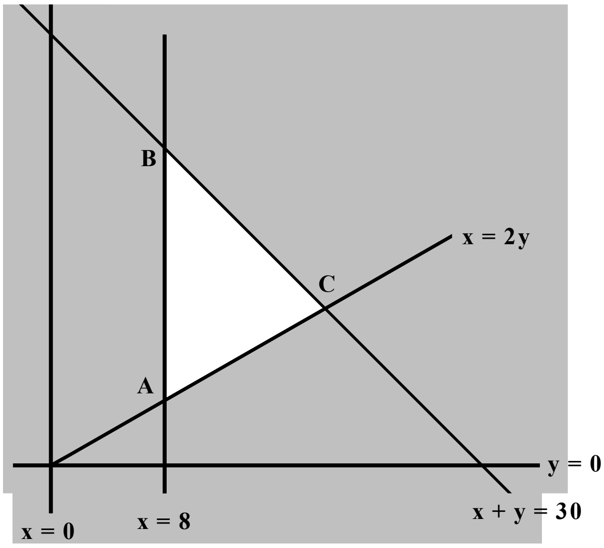
X Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 8 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 30 \end{cases}$$

X Dibujemos la región factible, es decir la solución del sistema de inecuaciones (en cada inecuación se ensombrece el semiplano que no es solución de la misma):

- El semiplano solución de la inecuación $x \geq 0$ está incluido en el semiplano solución de $x \geq 8$ que es el que se encuentra a la derecha de la recta $x = 8$.
- El semiplano solución de la inecuación $y \geq 0$ es el que está por encima del eje de abscisas.
- El semiplano solución de la inecuación $x \leq 2y$ es el que contiene al punto $(0 , 1)$ por ejemplo.
- El semiplano solución de la inecuación $x + y \leq 30$ es al que pertenece el origen de coordenadas.

Por tanto, la región factible es el triángulo ABC:



La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos pues las coordenadas de los vértices y el valor de la función objetivo en los mismos:

Vértice A:

$$\left.\begin{array}{l} x=8 \\ x=2y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A\left(8\,,\,4\right) \quad \Rightarrow \quad F\left(8\,,\,4\right)=680$$

Vértice B:

$$\left.\begin{array}{l} x=8 \\ x+y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B\left(8\,,\,22\right) \quad \Rightarrow \quad F\left(8\,,\,22\right)=1580$$

Vértice C:

$$\left.\begin{array}{l} x=2y \\ x+y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C\left(20\,,10\right) \quad \Rightarrow \quad F\left(20\,,10\right)=1700$$

Es decir, la ganancia total máxima es de 1700 euros que conseguirá transportando 20 toneladas de X y 10 toneladas de Y.

2. *a) Derive las funciones* $f(x)=\frac{x}{6}-8x^2+\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{x}{\ln x}$, $h(x)=x\,e^{3x}$ *(1,5 puntos)*

b) Razone a qué es igual el dominio de la función f(x) y calcule los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de dicha función. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\frac{1}{6}-16x-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-96x^3-6}{6x^2}=\frac{-96x^3+x^2-6}{6x^2}$; $g'(x)=\frac{\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$

$h'(x)=e^{3x}+x\cdot e^{3x}\cdot 3=e^{3x}\left(3x+1\right)$

b) X La función f(x) está formada por la suma de tres funciones más simples: $f_1(x)=\frac{x}{6}$, $f_2(x)=-8x^2$ y $f_3(x)=\frac{1}{x}$.

El dominio de las dos primeras es ¡ y el de la tercera es ¡ $-\left\{0\right\}$. La función f(x) tiene por dominio la intersección de los dominios de las tres funciones y, por tanto, es: ¡ $-\left\{0\right\}$.

X Los intervalos de concavidad y convexidad dependen del signo de la segunda derivada: $f''(x)=-16-\frac{-2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}-16$

$\frac{2}{x^3}-16=0 \;\Rightarrow\; 2-16x^3=0 \;\Rightarrow\; x^3=\frac{1}{8} \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{2}$ luego la segunda derivada puede tener un cambio de signo en $x=\frac{1}{2}$. Como además en $x=0$ la función no está definida, también debemos considerar la posibilidad de que haya en él un cambio de signo. En definitiva, tenemos:

$f'' < 0$	$f'' > 0$	$f'' < 0$
	0	1/2

Por tanto, la función es convexa en $(-\infty\,,0)\,\mathrm{U}\left(\frac{1}{2}\,,+\infty\right)$ y cóncava en $\left(0\,,\frac{1}{2}\right)$.

De los dos puntos donde la segunda derivada cambia el signo, el único que es un punto de inflexión es $x=\frac{1}{2}$ (la función pasa de cóncava a convexa). Aunque en $x=0$ también hay un cambio de signo de la segunda derivada, no se trata de un punto de inflexión de la función pues no pertenece al dominio de la misma.

3. *El número medio de veces que una persona de una determinada ciudad utiliza mensualmente el transporte público tiene una desviación típica igual a 20. Determine el número mínimo de personas que se han de elegir para obtener un intervalo en el que estará la media, con un nivel de confianza del 95% y con un radio no mayor que 1,4. Explique los pasos realizados para obtener el resultado. (3 puntos)*

SOLUCIÓN.

Se trata de hallar el tamaño de la muestra necesaria para estimar la media μ en una población cuya desviación típica es $\sigma = 20$ con un error máximo admisible de $E = 1,4$ y un nivel de confianza del 95%. Se tiene:

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad\Rightarrow\quad n=\left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1,96$ (se puede obtener también de la tabla) y por tanto:

$$n=\left(\frac{1,96\cdot 20}{1,4}\right)^2 = 784$$

Es decir, se necesita un mínimo de 784 personas para estimar la media en las condiciones fijadas.

JUNIO 2008

<u>CUESTIÓN A1</u>: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

a) Calcule $A\cdot B$ *(0,75 puntos)*

b) Calcule la matriz inversa de B y utilícela para resolver la ecuación $X\cdot B=B+A$ *(2,75 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&2\\7&-2&-2\\-3&0&0\end{pmatrix}$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-1&1&0&0\\3&-2&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{(1)}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&0&-1\\3&-2&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{(2)}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&0&-1\\0&-2&6&-3&1&3\\0&0&3&-1&0&2\end{array}\right)\overset{(3)}{\approx}$$

$$\overset{(3)}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&0&-1\\0&1&-3&3/2&-1/2&-3/2\\0&0&1&-1/3&0&2/3\end{array}\right)\overset{(4)}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&0&1/3\\0&1&0&1/2&-1/2&1/2\\0&0&1&-1/3&0&2/3\end{array}\right)\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&0&1/3\\1/2&-1/2&1/2\\-1/3&0&2/3\end{pmatrix}$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) F_1-F_3 (2) F_2-3F_1 ; F_3-F_1 (3) $F_2:(-2)$; $F_3:3$ (4) F_1+2F_3 ; F_2+3F_3

$$X\cdot B=B+A\ \Rightarrow\ X=(B+A)\cdot B^{-1}=B\cdot B^{-1}+A\cdot B^{-1}=I+A\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/3&0&1/3\\1/2&-1/2&1/2\\-1/3&0&2/3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2/3&0&7/3\\7/6&-1/2&7/6\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&0&7/3\\7/6&1/2&7/6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

<u>CUESTIÓN A2</u>: Un agricultor desea plantar 750 cerezos, 700 perales y 650 manzanos. En el vivero Agro ofrecen un lote de 15 cerezos, 30 perales y 10 manzanos por 700 euros y en el vivero Ceres el lote de 15 cerezos, 10 perales y 20 manzanos cuesta 650 euros.

a) Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el número de lotes que ha de comprar en cada vivero para que pueda plantar los árboles que desea y para que el coste total de adquisición sea mínimo. *(3 puntos)*
b) ¿Utiliza el agricultor todos los árboles que ha adquirido?, en caso negativo diga cuántos no ha plantado y de qué tipo son. *(0,5 puntos)*

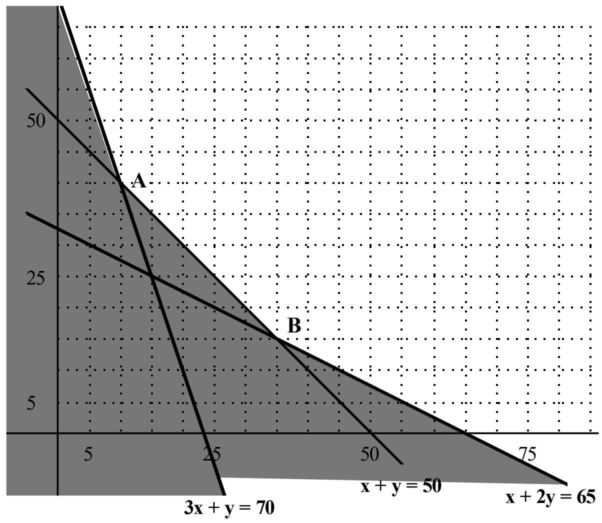
SOLUCIÓN.
Aunque en el enunciado no se explicita, debemos entender que el número de árboles de cada clase es el **mínimo** que el agricultor desea plantar.
Organicemos los datos del problema en una tabla:

	nº de lotes	**nº cerezos**	**nº perales**	**nº manzanos**	**Precio**
AGRO	x	15x	30x	10x	700x
CERES	y	15y	10y	20y	650y
	≥ 0	≥ 750	≥ 700	≥ 650	$F(x,y)$

a) La función objetivo, que en este caso debe ser mínima, es: $F(x, y) = 700x + 650y$

Las restricciones a que deben someterse la solución del problema son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 15x + 15y \geq 750 \\ 30x + 10y \geq 700 \\ 10x + 20y \geq 650 \end{cases}$

Dibujemos la región factible:



X La recta $x = 0$ es el eje de ordenadas y el semiplano solución de $x \geq 0$ es el de la derecha.

X La recta $y = 0$ es el eje de abscisas y el semiplano solución de $y \geq 0$ es el superior.

X La recta $15x + 15y = 750 \Leftrightarrow x + y = 50$ pasa por los puntos $(50, 0)$ y $(0, 50)$. La solución de la inecuación $15x + 15y \geq 750$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

X La recta $30x + 10y = 700 \Leftrightarrow 3x + y = 70$ pasa por los puntos $(10, 40)$ y $(20, 10)$. La solución de la inecuación $30x + 10y \geq 700$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

X La recta $10x + 20y = 650 \Leftrightarrow x + 2y = 65$ pasa por los puntos $(65, 0)$ y $(5, 30)$. La solución de la inecuación $10x + 20y \geq 650$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

Por tanto, la región factible es una región abierta con dos vértices: A y B. Obtengamos sus coordenadas:

Vértice A: $\begin{cases} x + y = 50 \\ 3x + y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -50 \\ 3x + y = 70 \end{cases} \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10, \ y = 40 \Rightarrow A(10, 40)$

Vértice B: $\begin{cases} x + y = 50 \\ x + 2y = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -50 \\ x + 2y = 65 \end{cases} \Rightarrow y = 15, \ x = 35 \Rightarrow B(35, 15)$

Veamos en cuál de los vértices de la región factible es mínima la función objetivo:

$\left.\begin{array}{l} F(10, 40) = 700 \cdot 10 + 650 \cdot 40 = 33000 \\ F(35, 15) = 700 \cdot 35 + 650 \cdot 15 = 34250 \end{array}\right\} \Rightarrow$ El precio es mínimo con 10 lotes de Agro y 40 de Ceres.

b) El número de cerezos comprados es: $15 \cdot 10 + 15 \cdot 40 = 750$ luego utiliza todos.
El número de perales comprados es: $30 \cdot 10 + 10 \cdot 40 = 700$ luego también utiliza todos los perales comprados.
El número de manzanos comprados es: $10 \cdot 10 + 20 \cdot 40 = 900$ luego deja de utilizar 250 manzanos.

<u>CUESTIÓN B1</u>: a) Derive las funciones $f(x) = x^2 \cdot \ln(1 - x)$, $g(x) = \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{8}{x^2}$, $h(x) = 2^{2x-1}$ *(1,5 puntos)*

b) La velocidad (en metros/minuto) de un juguete viene dada por $V(t) = \begin{cases} 10t - t^2 & \text{si } t \in [0,2] \cup [8,10] \\ 16 & \text{si } t \in (2, 8) \end{cases}$, siendo la variable t el número de minutos transcurrido desde que se pone en marcha.

b_1) Represente la función velocidad. *(0,75 puntos)*

b_2) A la vista de la gráfica, diga cuál es la velocidad máxima y en qué momento o momentos se alcanza. *(0,5 puntos)*

b_3) Calcule la velocidad del juguete pasados 30 segundos desde su puesta en marcha. ¿Hay algún otro momento en el que lleva la misma velocidad?, en caso afirmativo, diga en cuál. *(0,75 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = 2x \cdot \ln(1-x) + x^2 \cdot \dfrac{1}{1-x} \cdot (-1) = 2x \cdot \ln(1-x) - \dfrac{x^2}{1-x}$

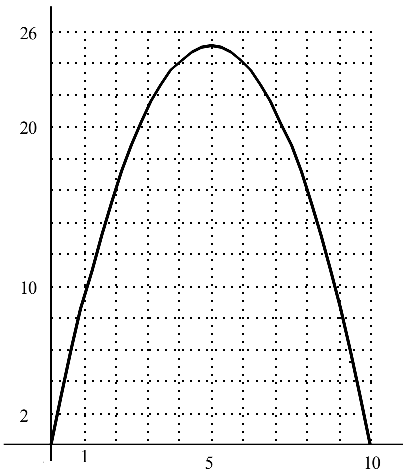
$g(x) = \dfrac{1}{8}x^2 - 8x^{-2} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \dfrac{1}{4}x + 16x^{-3} = \dfrac{x}{4} + \dfrac{16}{x^3}$

$h'(x) = 2^{2x-1} \cdot 2 \cdot \ln 2$

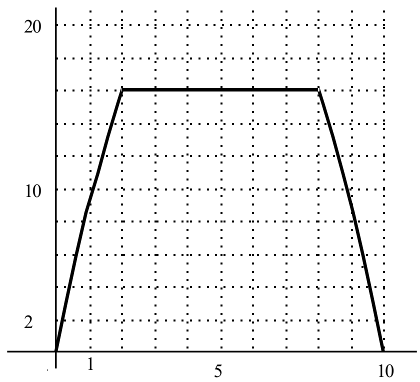
b) La función tiempo – velocidad es una función definida a trozos formada por una parábola y una función constante.

b_1) Representemos la función $V(t) = 10t - t^2$ en los intervalos en que está definida.

$V'(t) = 10 - 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 5$ y como $V''(t) = -2 \quad \Rightarrow$ En $t = 5$ la función tiene un máximo en $(5\,,25)$.
Como además pasa por los puntos $(0\,,0)$ y $(10\,,0)$, la gráfica es:



Considerando la parábola en los intervalos $[0\,,2]$ y $[8\,,10]$ y la función constante $V(t) = 16$ en $(2\,,8)$:



b_2) La velocidad máxima es de 16 m/min y se alcanza entre los minutos 2 y 8.

b_3) A los 30 segundos, $t = 0{,}5$ min $\quad \Rightarrow \quad V(0{,}5) = 10 \cdot 0{,}5 - (0{,}5)^2 = 4{,}75$ m/min .
Dada la simetría de la parábola, volverá a tener la misma velocidad a los 9 min. 30 seg.

<u>**CUESTIÓN B2**</u>**:** a) Derive las funciones $f(x) = 7x - x^2 + \dfrac{9}{x}$, $g(x) = (1-x)^2 \cdot e^x$, $h(x) = \dfrac{1}{(x+1)^{20}}$

(1,5 puntos)

b) Razone a qué es igual el dominio de la función $f(x)$ del apartado anterior, y diga los puntos en los que alcanza máximo o mínimo relativo. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = 7 - 2x - \dfrac{9}{x^2}$

$g'(x) = 2(1-x)(-1) \cdot e^x + (1-x)^2 \cdot e^x = (1-x) \cdot e^x \cdot (-2+1-x) = (1-x) \cdot e^x \cdot (-1-x) = (x^2-1) \cdot e^x$

$h(x) = (x+1)^{-20} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = -20 \cdot (x+1)^{-21} = -\dfrac{20}{(x+1)^{21}}$

b) El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}-\{0\}$ porque para $x=0$ no es calculable el sumando $\frac{9}{x}$ y por tanto no existe $f(0)$.

Calculemos los puntos de máximo o de mínimo de la función $f(x)$:

$f'(x)=7-2x-\frac{9}{x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad 7x^2-2x^3-9=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3-7x^2+9=0$.

Busquemos la primera raíz por la regla de Ruffini:

	2	−7	0	9
−1		−2	9	−9
	2	−9	9	0

luego $x=-1$ es una primera solución de la ecuación $f'(x)=0$. Otras posibles soluciones son:

$$2x^2-9x+9=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{4}=\frac{9\pm 3}{4}= \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Tenemos entonces tres puntos críticos. Comprobemos si se trata de máximos o de mínimos:

$f''(x)=-2-\frac{-9\cdot 2x}{x^4}=-2+\frac{18}{x^3}$

$f''(-1)=-2-18<0 \quad \Rightarrow \quad$ En $x=-1$ la función tiene un máximo relativo.

$f''(3)=-2+\frac{18}{27}<0 \quad \Rightarrow \quad$ En $x=3$ la función tiene un máximo relativo.

$f''\left(\frac{3}{2}\right)=-2+\frac{18}{\frac{27}{8}}=-2+\frac{144}{27}>0 \quad \Rightarrow \quad$ En $x=\frac{3}{2}$ tiene un mínimo relativo.

<u>CUESTIÓN C1</u>: Se tienen dos urnas A y B. En la primera hay 2 bolas blancas, 3 negras y 1 roja y en la segunda hay 3 bolas blancas, 1 negra y 1 verde.

a) Se extrae una bola de cada urna, calcule la probabilidad de que ambas sean del mismo color. *(1,5 puntos)*
b) Se lanza una moneda, si se obtiene cara se extraen dos bolas de la urna A y si se obtiene cruz se extraen dos bolas de la urna B, calcule la probabilidad de que ambas bolas sean blancas. *(1,5 puntos)*

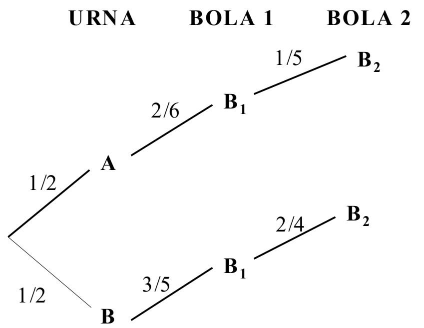
SOLUCIÓN.

a) Sean los sucesos: B_1 = "la bola extraída de la urna A es blanca", B_2 = "la bola extraída de la urna B es blanca", N_1 = "la bola extraída de la urna A es negra" y N_2 = "la bola extraída de la urna B es negra".

Se tiene: $p\left[(B_1\cap B_2)\cup(N_1\cap N_2)\right]=p(B_1\cap B_2)+p(N_1\cap N_2)=p(B_1)\cdot p(B_2)+p(N_1)\cdot p(N_2)=$

$$=\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{6}{30}+\frac{3}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}=0{,}3$$

b) Organicemos los casos que pueden presentarse en un diagrama en árbol:



Se tiene: $p(B_1\cap B_2)=$

$=p(A)\cdot p(B_1/A)\cdot p(B_2/A\cap B_1)+p(B)\cdot p(B_1/B)\cdot p(B_2/B\cap B_1)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{30}+\frac{3}{20}=\frac{11}{60}=0{,}18$

CUESTIÓN C2: La vida media de un determinado modelo de bombilla sigue una distribución normal con desviación típica igual a 60 días. Elegida una muestra y con un nivel de confianza del 98% se obtiene el intervalo $(388'68\,,\,407'32)$ para la vida media. Calcule la media y el tamaño de la muestra elegida. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. *(3 puntos)*

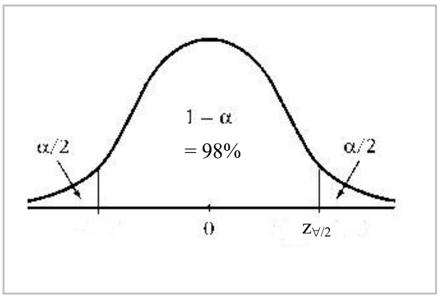
NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en caso de que los valores por exceso o por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN.

La vida media en la muestra ocupa el centro del intervalo de confianza: $\overline{X} = \dfrac{388'68 + 407'32}{2} = 398$ horas

El error máximo admisible es $E = 407'32 - 398 = 9,32$ y la desviación típica poblacional $\sigma = 60$ horas.

Obtengamos el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 98%:



$1 - \alpha = 0,98 \;\Rightarrow\; \alpha = 0,02 \;\Rightarrow\; \alpha/2 = 0,01 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; P(z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - 0,01 = 0,99$ y buscando en la tabla de la normal $N(0\,,1)$ el valor más próximo que encontramos es 0,9901 al que corresponde un valor crítico: $z_{\alpha/2} = 2,33$

Tenemos entonces: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\dfrac{2,33 \cdot 60}{9,32}\right)^2 = 225$ luego la muestra elegida ha sido de 225 bombillas.

Desarrolle clara y razonadamente tres cuestiones, eligiendo una del par (A1,A2), otra de (B1,B2) y otra de (C1,C2).

<u>Cuestión A1</u>: Sea $T = \left\{ (x\,,y)\ /\ \frac{x}{5}+\frac{y}{8} \geq 5\ ,\ \frac{x}{10}+\frac{y}{6} \leq 5\ ,\ 2x+5y \leq 110\ ,\ y \geq 0 \right\}$

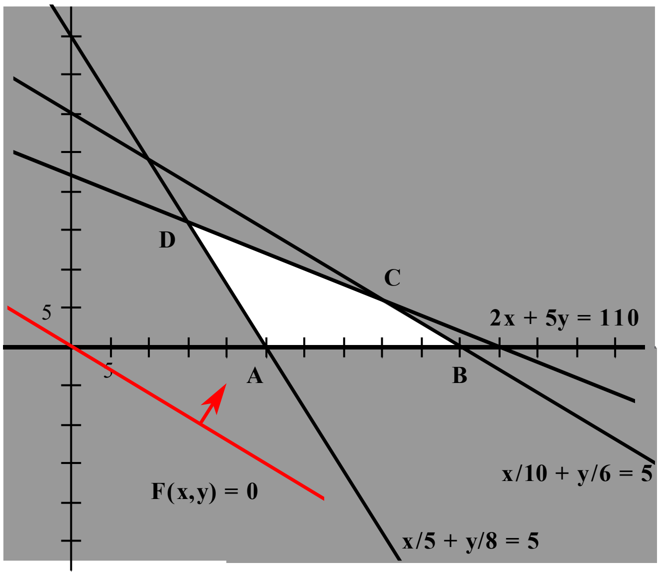
a) Represente gráficamente la región T. *(1 punto)*

b) Se considera la función $f(x\,,y) = 3x+5y$. Calcular, si existen, los puntos $(x\,,y)$ que dan el valor máximo de $f(x\,,y)$ y los que dan el valor mínimo de $f(x\,,y)$ en T. *(1,75 puntos)*

c) ¿Cuál sería la respuesta del apartado anterior si se elimina la desigualdad $y \geq 0$? *(0,75 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) X La recta de ecuación $\frac{x}{5}+\frac{y}{8}=5 \iff 8x+5y=200$ pasa por los puntos $(25\,,0)$ y $(0\,,40)$. La solución de la inecuación es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.



X La recta de ecuación $\frac{x}{10}+\frac{y}{6}=5 \iff 3x+5y=150$ pasa por los puntos $(50\,,0)$ y $(0\,,30)$. La solución de la inecuación es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

X La recta de ecuación $2x+5y=110$ pasa por los puntos $(55\,,0)$ y $(5\,,20)$. La solución de la inecuación es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

X La recta $y=0$ es el eje de abscisas y la solución de la inecuación es el semiplano superior.

La región factible T es la intersección de las soluciones de todas las inecuaciones (en blanco). Sus vértices son:

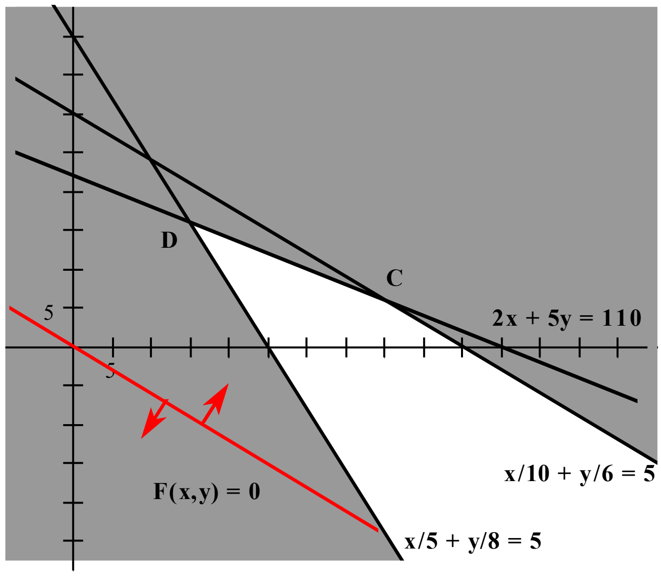
$A(25\,,0)\ ,\ B(50\,,0)\ ,\ C(40\,,6)\ ,\ D(15\,,16)$

Coordenadas de C: $\begin{cases} 3x+5y=150 \\ 2x+5y=110 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+5y=150 \\ -2x-5y=-110 \end{cases} \Rightarrow x=40\ ,\ y=6$

Coordenadas de D: $\begin{cases} 8x+5y=200 \\ 2x+5y=110 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x+5y=200 \\ -2x-5y=-110 \end{cases} \Rightarrow 6x=90 \Rightarrow x=15\ ,\ y=16$

b) Dibujamos la recta de nivel 0 asociada a la función objetivo: $F(x\,,y)=0 \iff 3x+5y=0$ que pasa por los puntos $(0\,,0)$ y $(25\,,-15)$. La desplazamos paralelamente a sí misma hasta barrer la región factible. El primer punto de T que toca es el vértice $A(25\,,0)$ que es donde la función objetivo se minimiza. Los últimos puntos de T que toca son los del segmento BC pues las rectas $3x+5y=0$ y $\frac{x}{10}+\frac{y}{6}=5 \iff 3x+5y=150$ son paralelas y, por tanto, la función se maximiza en cualquiera de los puntos de BC.

c) Si se elimina la desigualdad $y \geq 0$ la región factible es ahora abierta:



Ahora, para barrer la región T podemos desplazar la recta $F(x\,,y)=0$ tanto hacia "arriba" como hacia "abajo".

Al desplazarla hacia "abajo" no encontramos un punto de T que sea el "último" común entre la correspondiente recta de nivel y la región factible por lo que no existe solución que minimice la función objetivo.

Cuando la desplazamos hacia "arriba" los últimos puntos comunes entre T y la correspondiente recta de nivel son los de la semirrecta de origen C y ecuación $\frac{x}{10}+\frac{y}{6}=5$, luego cualquiera de ellos maximizaría la función objetivo.

<u>Cuestión A2</u>: Raquel, Paula y Sara salen de compras y cada una adquiere una camiseta. El precio medio de las prendas es de 14 euros. La diferencia entre el precio de la camiseta de Sara y la de Paula es el doble de la diferencia entre el precio de la camiseta de Paula y la de Raquel. Si a Raquel le hubiera costado su camiseta el doble, sobrepasaría en un euro el precio de la de Sara.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales para calcular el precio de cada una de las camisetas y resuélvalo por el método de Gauss. *(2,5 puntos)*

b) ¿Es posible saber el precio de las camisetas si la última condición se cambia por "Si a Paula le hubiera costado su camiseta el cuádruple, sobrepasaría en 42 euros el precio de la de Raquel"?. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

Sean x = precio de la camiseta de Raquel, y = precio de la camiseta de Paula y z = precio de la camiseta de Sara.

a) Se tiene: X "el precio medio de las prendas es de 14 euros" : $\frac{x+y+z}{3}=14 \iff x+y+z=42$

X "la diferencia entre el precio de la camiseta de Sara y la de Paula es el doble de la diferencia entre el precio de la camiseta de Paula y la de Raquel" : $z-y=2(y-x) \iff z-y=2y-2x \iff 2x-3y+z=0$

X "si a Raquel le hubiera costado su camiseta el doble, sobrepasaría en un euro el precio de la de Sara" : $2x=z+1 \iff 2x-z=1$.

Se tiene por tanto el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ 2x-3y+z=0 \\ 2x \quad -z=1 \end{array}\right. \overset{(1)}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ -5y-z=-84 \\ -2y-3z=-83 \end{array}\right. \overset{(2)}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ -10y-2z=-168 \\ 10y+15z=415 \end{array}\right. \overset{(3)}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ -10y-2z=-168 \\ 13z=247 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} z=19 \\ y=13 \\ x=10 \end{array}}$$

Luego la camiseta de Raquel cuesta 10 €, la de Paula 13 € y la de Sara 19 €.

Transformaciones elementales utilizadas: (1) E2 – 2E1 , E3 – 2E1 (2) E2 A 2 , E3 A (!5) (3) E3 + E2

b) El nuevo sistema será:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ 2x-3y+z=0 \\ 4y \quad -x=42 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ 2x-3y+z=0 \\ -x+4y \quad =42 \end{array}\right. \overset{(1)}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ -5y-z=-84 \\ 5y+z=84 \end{array}\right. \overset{(2)}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ -5y-z=-84 \\ 0z=0 \end{array}\right.$$

que es un sistema compatible indeterminado y, por tanto, con infinitas soluciones por lo que no es posible conocer el precio de las camisetas.

Transformaciones elementales: (1) E2 – 2E1 , E3 + E1 (2) E3 + E2

<u>Cuestión B1</u>: a) Derive las funciones $f(x)=\dfrac{2x-2}{x+1}$, $g(x)=\sqrt{1-5x^4}$ *(1 punto)*

b) Razone a qué es igual el dominio y calcule los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x)$ del apartado anterior, así como los puntos de inflexión. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $$f'(x)=\frac{2\left(x+1\right)-\left(2x-2\right)}{\left(x+1\right)^2}=\frac{\cancel{2x}+2-\cancel{2x}+2}{\left(x+1\right)^2}=\frac{4}{\left(x+1\right)^2}$$

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-5x^4}}\cdot\left(-20x^3\right)=-\frac{10x^3}{\sqrt{1-5x^4}}$$

b) X Puesto que la función $f(x)$ es racional, su dominio estará formado por todos los números reales excepto los que anulen a la función denominador. Es decir: $D(f)=$ ¡ $-\{-1\}$

X Los intervalos de concavidad y convexidad dependen del signo de $f''(x)$: $f''(x)=\dfrac{-4\cdot 2\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^4}=-\dfrac{8}{\left(x+1\right)^3}$

f'' > 0 f'' < 0

! 1

Luego la función es cóncava en $\left(-\infty,-1\right)$ y convexa en $\left(-1,+\infty\right)$

No tiene puntos de inflexión pues $f''(x)\neq 0 \quad \forall x\in D(f)$.

<u>Cuestión B2</u>: a) Derive las funciones $f(x)=x-8x^2+\dfrac{9}{x}$, $g(x)=\left(2x-1\right)^2\cdot \ln x$ *(1 punto)*

b) Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{3} & \text{si } x\in\left(-6,-1\right)\\ x-1 & \text{si } x\in\left[-1,4\right]\end{cases}$

b$_1$) Razone si $f(x)$ es continua o discontinua en $x=-1$ y en $x=4$. *(1,25 puntos)*

b$_2$) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para los valores $x\in\left(-6,-1\right)$. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=1-16x-\dfrac{9}{x^2}$ $\qquad g'(x)=2\left(2x-1\right)2\cdot\ln x+\left(2x-1\right)^2\cdot\dfrac{1}{x}=\left(2x-1\right)\left[4\ln x+\dfrac{2x-1}{x}\right]$

b)

b$_1$) X Continuidad en $x=-1$:

- $\exists\, f(-1)=-1-1=-2$

- $\exists \lim\limits_{x\to -1} f(x)$: $\quad \begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{3}\right)=-3-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{10}{3}\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\left(x-1\right)=-2\end{array} \;\Bigg|\; \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -1} f(x)$

Luego la función es discontinua en $x=-1$

X Continuidad en $x=4$: la función es continua en este punto aunque sólo por su izquierda porque es una función polinómica la que está definida en dicho punto y también a su izquierda.

b$_2$) La función que está definida en el intervalo de estudio es $f(x)=\dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{3}$:

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{3} = \frac{x^2-9}{3x^2} = \frac{(x+3)(x-3)}{3x^2}$$

En $(-6,-3)$: $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente

En $(-3,-1)$: $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente

<u>Cuestión C1</u>: Pilar tiene en un cajón de su armario 3 bufandas rojas, 2 negras y una blanca y en otro tiene 4 gorros rojos, 2 verdes y 5 negros.

a) Si elige al azar un gorro y una bufanda ¿Cuál es la probabilidad de que ambas prendas sean del mismo color? *(1,5 puntos)*

b) Si elige al azar dos bufandas ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean del mismo color? *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sean los sucesos: B_R = "extraer una bufanda roja" , B_N = "bufanda negra" , B_B = "bufanda blanca"

G_R = "extraer un gorro rojo" , G_V = "gorro verde" , G_N = "gorro negro"

a) Nos piden $p\left[(B_R \cap G_R)\cup(B_N \cap G_N)\right] = p(B_R \cap G_R) + p(B_N \cap G_N) = p(B_R)\cdot p(G_R) + p(B_N)\cdot p(G_N) =$

$$= \frac{3}{6}\cdot\frac{4}{11} + \frac{2}{6}\cdot\frac{5}{11} = \frac{12}{66} + \frac{10}{66} = \frac{22}{66} = \frac{1}{3}$$

b) Sean los sucesos: R_1 = "la primera bufanda es roja" , R_2 = "la segunda bufanda es roja"
N_1 = "la primera bufanda es negra" , N_2 = "la segunda bufanda es negra"
B_1 = "la primera bufanda es blanca" , B_2 = "la segunda bufanda es blanca" = $\varnothing$

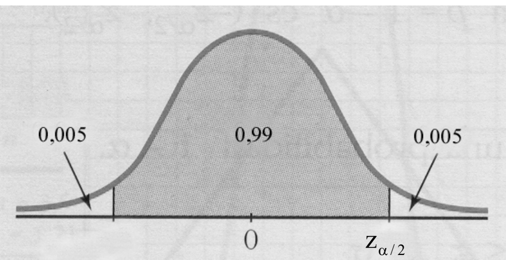
$$p\left[(R_1 \cap R_2)\cup(N_1 \cap N_2)\right] = p(R_1)\cdot p(R_2/R_1) + p(N_1)\cdot p(N_2/N_1) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{6}{30} + \frac{2}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

<u>Cuestión C2</u>: En Aragón se seleccionan 625 jóvenes, obteniéndose que su estatura media es de 175 cm. Determine el intervalo, con un nivel de confianza del 99%, en el que estará la media si la desviación típica es igual a 10. Detalle los pasos realizados. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

El intervalo característico está centrado en la media $\mu = 175$ y su radio es $E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ donde $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 99% (que luego obtendremos), $\sigma = 10$ es la desviación típica y $n = 625$ es el tamaño de la muestra.

Obtengamos el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 99%:



$1-\alpha = 0,99 \Rightarrow \alpha = 1-0,99 = 0,01 \Rightarrow \alpha/2 = 0,005 \Rightarrow$
$p\left[z \le z_{\alpha/2}\right] = 1-0,005 = 0,995 \Rightarrow$ buscando en la tabla:
$z_{\alpha/2} = 2,575$ (valor medio de 2,57 y 2,58)

Entonces: $E = 2,575\cdot\frac{10}{\sqrt{625}} = 1,03$.

Por tanto, el intervalo característico es: $(175-1,03\ ,\ 175+1,03) = (173'97\ ,\ 176'03)$

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS - JUNIO DE 2009

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

Se valorará el buen uso del vocabulario y la adecuada notación científica, que los correctores podrán bonificar con un máximo de un punto. Por los errores ortográficos, la falta de limpieza en la presentación y la redacción defectuosa podrá bajarse la calificación hasta un punto; en casos extremadamente graves, podrá penalizarse la puntuación hasta con dos puntos.

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Desarrolle clara y razonadamente tres cuestiones, eligiendo una del par (A1, A2), otra de (B1, B2) y otra de (C1, C2).

Cuestión A1

Sea $T = \{(x, y) \mid x + 3y \leq 9,\ 2x + y \leq 8,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

a) Represente gráficamente el conjunto T. (1 punto)

b) Consideramos la función $f(x, y) = 3x + 3y$. Calcular, si existen, los puntos del conjunto T que dan el valor máximo y el valor mínimo de la función. (1,75 puntos)

c) ¿Cuál sería la respuesta al apartado anterior si eliminamos en el conjunto T la restricción $y \geq 0$? (0,75 puntos)

Cuestión A2

Una tienda posee tres tipos de conservas A, B, C. El precio medio de las tres conservas es de 1€. Un cliente compra 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, pagando por ello 60€. Otro compra 20 unidades de A y 25 de C, paga por ello 45€.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales para calcular el precio de cada una de las conservas y resuélvalo por el método de Gauss (2,5 puntos)

b) ¿Es posible determinar el precio de cada una de las conservas si cambiamos la tercera condición por "*otro cliente compra 20 unidades de A y 10 de B, pagando por ello 30€*"? (1 punto)

Cuestión B1

a) Derive las funciones $f(x) = 4\sqrt{x} - \ln x^2$, $g(x) = (x-1)e^{x^2}$, $h(x) = \dfrac{x^6}{3 - x^3}$ (1,5 puntos)

b) Razone a qué es igual el dominio y calcule los valores de x, si existen, para los que la función $f(x)$ del apartado anterior, alcanza máximo o mínimo relativo. (2 puntos)

Cuestión B2

a) Derive las funciones $f(x) = \ln \sqrt{x}$, $g(x) = x^2(5 - x^3)$, $h(x) = 3^{5x-1}$ (1,5 puntos)

b) La demanda de un bien conocido su precio, p, viene dada por:

$$D(p) = \begin{cases} 40p - p^2 & si\ 20 \leq p \leq 30 \\ 600 - 10p & si\ 30 < p \leq 40 \end{cases}$$

Represéntela. A la vista de su gráfica diga para qué valor del precio se alcanza la máxima y la mínima demanda y para cuáles la demanda es mayor que 375 unidades. (2 puntos)

Cuestión C1

Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 bolas negras y 4 bolas verdes. Se extraen al azar 3 bolas sin reposición.

a) Calcule la probabilidad de que salgan todas las bolas del mismo color. (1 punto)

b) Calcule la probabilidad de que salgan más bolas blancas o verdes. (1 punto)

c) Calcule la probabilidad de que dos bolas sean blancas y una verde. (1 punto)

Cuestión C2

El peso medio de 700 adultos de una determinada población es de 80kg. Determine el intervalo, con un nivel de confianza del 98%, en el que estará la media si la desviación típica es igual a 15. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. (3 puntos)

k	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $p(z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

Para la corrección del ejercicio se tendrán en cuenta los siguientes criterios generales:

- Se valorará el uso del vocabulario y la notación científica.
- En las preguntas prácticas primará el correcto planteamiento del problema y se valorarán positivamente las explicaciones claras y precisas, y negativamente la ausencia de explicaciones o las explicaciones incorrectas.
- Si se comete un error que tenga que ver con resultados ulteriores de la misma pregunta, se ha de tener en cuenta si existe coherencia con el resultado erróneo. En caso afirmativo, **se valorará el resto** de las cuestiones de la misma pregunta; aunque si el error conduce a problemas más simples de los inicialmente propuestos disminuirá la calificación.
- No se dará especial importancia a los errores en las operaciones, excepto que sean reiterativos.
- Por errores ortográficos graves, desorden, falta de limpieza y mala redacción podrá bajarse la calificación del ejercicio hasta un punto, incluso más en casos extremos.

Cuestión A1

a) Representar cada una de las rectas que determinan el conjunto distintas de los ejes: 0,5 puntos.

b) Cálculo de cada vértice del conjunto: 0,25 puntos. Determinar el máximo: 0,5 puntos. Determinar el mínimo: 0,25 puntos

c) Representar el nuevo conjunto: 0,25 puntos. Concluir que no tiene mínimo: 0,5 puntos.

Cuestión A2

a) Plantear el sistema lineal: 0,75 puntos (0,25 puntos cada ecuación). Escalonar la matriz: 1 punto. Calcular la solución: 0,75 puntos.

b) Escribir la nueva ecuación: 0,5 puntos. Concluir que no se puede determinar el precio: 0,5 puntos.

Cuestión B1

a) Cada derivada: 0,5 puntos.

b) Determinar el dominio de f: 0,75 puntos. Calcular los valores que anulan la primera derivada: 0,75 puntos. Concluir que $x=1$ mínimo: 0,5 puntos.

Cuestión B2

a) Cada derivada: 0,5 puntos

b) Representación gráfica: 0,75 puntos. Determinar precios para demandas máxima y mínima: 0,25 puntos cada uno. Determinar el precio para demanda mayor que 375: 0,75 puntos.

Cuestión C1

a) 1 punto, b) 1 punto, c) 1 punto.

Cuestión C2

Determinar el valor crítico para el nivel de confianza del 98%: 0, 75. Determinar el intervalo: 2,25 puntos.

JUNIO 2009

Desarrolle clara y razonadamente tres cuestiones, eligiendo una del par $(A1, A2)$, otra de $(B1, B2)$ y otra de $(C1, C2)$.

<u>CUESTIÓN A1</u>:

Sea $T = \{ (x, y) \mid x + 3y \le 9,\ 2x + y \le 8,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \}$

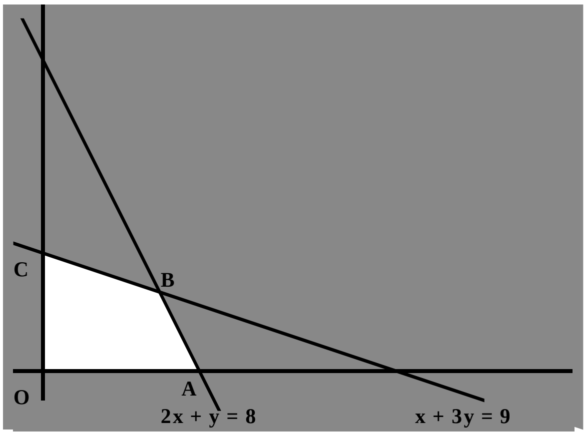
a) Represente gráficamente el conjunto T. *[1 punto]*

b) Consideramos la función $f(x, y) = 3x + 3y$. Calcular, si existen, los puntos del conjunto T que dan el valor máximo y el valor mínimo de la función. *[1,75 puntos]*

c) ¿Cuál sería la respuesta al apartado anterior si eliminamos en el conjunto T la restricción $y \ge 0$? *[0,75 puntos]*

SOLUCIÓN.

a)
- La recta $x + 3y = 9$ pasa por los puntos $(9, 0)$ y $(0, 3)$. El semiplano solución de la inecuación es el que contiene al origen de coordenadas.



- La recta $2x + y = 8$ pasa por los puntos $(4, 0)$ y $(0, 8)$. El semiplano solución de la inecuación es el que contiene al origen de coordenadas.
- La recta $x = 0$ es el eje de ordenadas. La solución de la inecuación $x \ge 0$ es el semiplano de la derecha.
- La recta $y = 0$ es el eje de abscisas. La solución de la inecuación $y \ge 0$ es el semiplano superior.

El conjunto T es el cuadrilátero OABC (en blanco).

b) La función objetivo se maximiza o minimiza en los vértices de T.

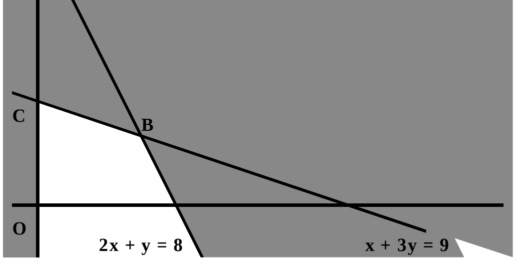
- $O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0$
- $A(4, 0) \Rightarrow f(4, 0) = 12$
- $B(3, 2) \Rightarrow f(3, 2) = 15$

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow y = 8 - 2x \Rightarrow x + 24 - 6x = 9 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3,\ y = 2 \Rightarrow B(3, 2)$$

- $C(0, 3) \Rightarrow f(0, 3) = 9$

Luego la función $f(x, y)$ es máxima en $B(3, 2)$ y es mínima en $O(0, 0)$.

c) Si eliminamos la restricción $y \ge 0$, el conjunto T es ahora una región abierta que seguirá alcanzando su máximo en el vértice $B(3, 2)$ pero no alcanzará un mínimo.



<u>CUESTIÓN A2</u>:
Una tienda posee tres tipos de conservas A, B, C. El precio medio de las tres conservas es de 1 €. Un cliente compra 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, pagando por ello 60 €. Otro compra 20 unidades de A y 25 de C y paga por ello 45 €.
a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales para calcular el precio de cada una de las conservas y resuélvalo por el método de Gauss. *[2,5 puntos]*
b) ¿Es posible determinar el precio de cada una de las conservas si cambiamos la tercera condición por *"otro cliente compra 20 unidades de A y 10 de B, pagando por ello 30 €"*? *[1 punto]*

SOLUCIÓN.

a) Sea *x* el precio unitario de A, *y* el de B y *z* el de C. Se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x+y+z}{3}=1\\ 30x+20y+10z=60\\ 20x+25z=45\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x+y+z=3\\ 3x+2y+z=6\\ 4x\quad +5z=9\end{array}\right. \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}x+y+z=3\\ -y-2z=-3\\ -4y+z=-3\end{array}\right. \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}x+y+z=3\\ y+2z=3\\ 9z=9\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z=1\ ,\ y=1\ ,\ x=1$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) F_2-3F_1 ; F_3-4F_1
(2) F_3-4F_2

b) El sistema será ahora: $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x+y+z}{3}=1\\ 30x+20y+10z=60\\ 20x+10y=30\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x+y+z=3\\ 3x+2y+z=6\\ 2x+y=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x+y+z=3\\ -y-2z=-3\\ -y-2z=-3\end{array}\right.$ que es un sistema compatible indeterminado por lo que no será posible determinar el precio de cada conserva.

<u>CUESTIÓN B1</u>:

a) Derive las funciones $f(x)=4\sqrt{x}-\ln x^2$, $g(x)=(x-1)e^{x^2}$, $h(x)=\dfrac{x^6}{3-x^3}$ *[1,5 puntos]*

b) Razone a qué es igual el dominio y calcule los valores de x, si existen, para los que la función $f(x)$ del apartado anterior, alcanza máximo o mínimo relativo. *[2 puntos]*

SOLUCIÓN.

a) C $f'(x)=\dfrac{4}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2x}{x^2}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2\sqrt{x}-2}{x}$

C $g'(x)=e^{x^2}+(x-1)e^{x^2}\cdot 2x=e^{x^2}\left(1+2x^2-2x\right)$

C $h'(x)=\dfrac{6x^5\left(3-x^3\right)-x^6\left(-3x^2\right)}{\left(3-x^3\right)^2}=\dfrac{18x^5-6x^8+3x^8}{\left(3-x^3\right)^2}=\dfrac{18x^5-3x^8}{\left(3-x^3\right)^2}=\dfrac{3x^5\left(6-x^3\right)}{\left(3-x^3\right)^2}$

b) La función es la diferencia de dos funciones: $f_1(x)=4\sqrt{x}$ cuyo dominio es $[0,\infty)$ y $f_2(x)=\ln x^2$ cuyo dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$. El dominio de $f(x)$ es la intersección de ambos dominios y por tanto $D(f)=(0,\infty)$

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x}-2}{x}=0 \ \Rightarrow\ 2\sqrt{x}-2=0 \ \Rightarrow\ \sqrt{x}=1 \ \Rightarrow\ x=1 \quad \text{(valor crítico)}$$

$$f''(x)=\frac{2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x-\left(2\sqrt{x}-2\right)}{x^2}=\frac{\sqrt{x}-2\sqrt{x}+2}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+2}{x^2} \ \Rightarrow\ f''(1)>0 \ \Rightarrow\ x=1 \text{ es un mínimo relativo}$$

<u>CUESTIÓN B2</u>:

a) Derive las funciones $f(x) = \ln\sqrt{x}$, $g(x) = x^2\left(5 - x^3\right)$, $h(x) = 3^{5x-1}$ *[1,5 puntos]*

b) La demanda de un bien conocido su precio, p, viene dada por $D(p) = \begin{cases} 40p - p^2 & \text{si } 20 \le p \le 30 \\ 600 - 10p & \text{si } 30 < p \le 40 \end{cases}$.

Represéntela. A la vista de su gráfica diga para qué valor del precio se alcanza la máxima y la mínima demanda y para cuáles la demanda es mayor que 375 unidades. *[2 puntos]*

SOLUCIÓN.

a) C $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x}$

C $g(x) = 5x^2 - x^5 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 10x - 5x^4$

C $h'(x) = 3^{5x-1} \cdot 5 \cdot \ln 3$

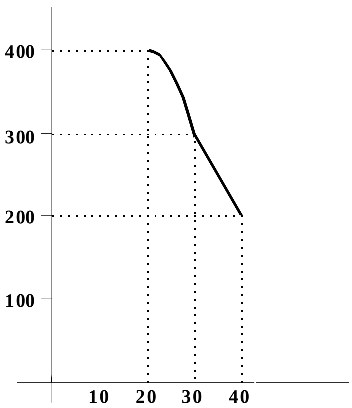
b) C La función $D(p) = 40p - p^2$ definida en $[20, 30]$ es una parábola que corta al eje de abscisas en los puntos:

$$40p - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p(40 - p) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0 \ , \ p = 40 \quad \Rightarrow \quad (0, 0) \ \text{y} \ (40, 0)$$

Su vértice está en: $D'(p) = 40 - 2p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 20 \quad \Rightarrow \quad (20, 400)$ y como $D''(p) = -2 < 0 \quad \Rightarrow$ se trata de un máximo.

C La función $D(p) = 600 - 10p$ definida en $(30, 40]$ es una recta que pasa por los puntos $(30, 300)$ y $(40, 200)$.

C Considerando los intervalos en que están definidas cada una de las funciones, la gráfica es:



A la vista de la gráfica, la máxima demanda se tiene para un precio de 20 unidades monetarias y la mínima demanda para 40 unidades monetarias.

Veamos el precio para el que la demanda es de al menos 375 unidades:

$$375 = 40p - p^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 - 40p + 375 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1500}}{2} = \frac{40 \pm 10}{2} =$$

$$= \left\langle \begin{array}{l} 25 \\ 15 \end{array} \right.$$

Puesto que $p = 15$ está fuera del intervalo en que está definida la función, el valor útil es $p = 25$ y, por tanto, la demanda se mantiene por encima de 375 unidades para un precio $p \in (20, 25)$.

CUESTIÓN C1:
Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 bolas negras y 4 bolas verdes. Se extraen al azar 3 bolas sin reposición.
a) Calcule la probabilidad de que salgan todas las bolas del mismo color. *[1 punto]*
b) Calcule la probabilidad de que salgan más bolas blancas o verdes. *[1 punto]*
c) Calcule la probabilidad de que dos bolas sean blancas y una verde. *[1 punto]*

SOLUCIÓN.

a) $p\left[(B_1\cap B_2\cap B_3)\cup(N_1\cap N_2\cap N_3)\cup(V_1\cap V_2\cap V_3)\right]=$

$$=p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)\cdot p(B_3/B_1\cap B_2)+p(N_1)\cdot p(N_2/N_1)\cdot p(N_3/N_1\cap N_2)+p(V_1)\cdot p(V_2/V_1)\cdot p(V_3/V_1\cap V_2)=$$

$$=\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{8}{18}+\frac{6}{20}\cdot\frac{5}{19}\cdot\frac{4}{18}+\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{2}{18}=\frac{720+120+24}{6840}=\frac{864}{6840}=0{,}1263$$

b) Sea H el suceso “sacar una bola blanca o verde, cuya probabilidad es $p(H)=\frac{14}{20}$. Se tiene:

$$p=p(H_1\cap H_2\cap H_3)+p(H_1\cap H_2\cap N_3)+p(H_1\cap N_2\cap H_3)+p(N_1\cap H_2\cap H_3)=$$

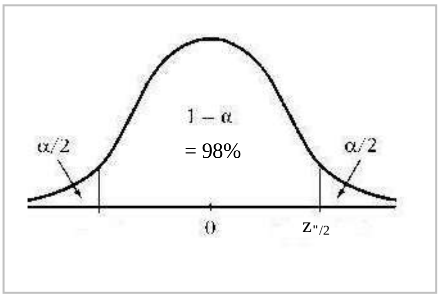
$$=\frac{14}{20}\cdot\frac{13}{19}\cdot\frac{12}{18}+\frac{14}{20}\cdot\frac{13}{19}\cdot\frac{6}{18}+\frac{14}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{13}{18}+\frac{6}{20}\cdot\frac{14}{19}\cdot\frac{13}{18}=\frac{2184}{6840}+3\cdot\frac{1092}{6840}=\frac{5460}{6840}=0{,}7982$$

c) $p[2B\cap 1V]=p(B_1\cap B_2\cap V_3)+p(B_1\cap V_2\cap B_3)+p(V_1\cap B_2\cap B_3)=$

$$=\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{4}{18}+\frac{10}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{9}{18}+\frac{4}{20}\cdot\frac{10}{19}\cdot\frac{9}{18}=\frac{3\cdot 10\cdot 9\cdot 4}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{1080}{6840}=0{,}1579$$

CUESTIÓN C2:
El peso medio de 700 adultos de una determinada población es de 80 kg. Determine el intervalo, con un nivel de confianza del 98%, en el que estará la media si la desviación típica es igual a 15. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. *[3 puntos]*

SOLUCIÓN.



El radio del intervalo de confianza de la media es: $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

donde $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98%, $\sigma=15$ es la desviación típica poblacional y $n=700$ es el número de individuos de la muestra.

Obtengamos a partir de la tabla, el valor de $z_{\alpha/2}$:

$$1-\alpha=0{,}98 \;\Rightarrow\; \alpha=1-0{,}98=0{,}02 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2}=0{,}01 \;\Rightarrow\; 1-\frac{\alpha}{2}=0{,}99$$

En la tabla encontramos: $p\left(z\le z_{\alpha/2}\right)=0{,}99 \;\Rightarrow\; z_{\alpha/2}=2{,}33$

Por tanto $E=2{,}33\cdot\frac{15}{\sqrt{700}}=1{,}32$ y el intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x}-E\,,\,\bar{x}+E)=(80-1.32\,,\,80+1.32)=(78.68\;,\;81.32)$$

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS - SEPTIEMBRE DE 2009

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

Se valorará el buen uso del vocabulario y la adecuada notación científica, que los correctores podrán bonificar con un máximo de un punto. Por los errores ortográficos, la falta de limpieza en la presentación y la redacción defectuosa podrá bajarse la calificación hasta un punto; en casos extremadamente graves, podrá penalizarse la puntuación hasta con dos puntos.

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Desarrolle clara y razonadamente tres cuestiones, eligiendo una del par (A1, A2), otra de (B1, B2) y otra de (C1, C2).

Cuestión A1

a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&2\\4&1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&4&1\\3&1&1\end{pmatrix}$.

Calcular la matriz $(A^2)^{-1}$. Resolver la ecuación $AX+B=C$. (2 puntos)

b) Resolver por el método de Gauss el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases}x-9y+5z=33\\x+3y-z=-9\\x-y+z=5\end{cases}$$ (1,5 puntos)

Cuestión A2

El señor Álvarez deja su fortuna a sus tres hijos en herencia con las siguientes condiciones:

1. El mayor recibe la media aritmética de lo que reciben los otros dos más 30.000€.
2. El mediano recibe 10.000€ más que la diferencia entre lo que recibe el mayor y lo que recibe el pequeño.
3. El pequeño recibirá la media aritmética de lo que reciben los otros dos menos 30.000€.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que permita calcular que cantidad recibe cada uno de los hijos del señor Álvarez. Resuélvalo por el método de Gauss. (2 puntos)

b) ¿Es posible saber que cantidad recibe cada uno de los hijos del señor Álvarez si sustituimos la condición 2 por: "*al mediano le deja la media aritmética de lo que reciben los otros dos*"? (1,5 puntos)

Cuestión B1

a) Derive las funciones $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x-2}$ y $g(x)=(x-5)^2\ln x$ (1 punto)

b) Sea la función $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1} & si\ x\in(-2,2)\\ \dfrac{x+2}{x-1} & si\ x\in[2,4]\end{cases}$

b1) Razonar si f es continua en $x=2$ y en $x=4$. (1,25 puntos)

b2) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para los valores $x\in(-2,2)$ (1,25 puntos)

Cuestión B2

a) Derive las funciones $f(x)=(1-x)^3e^x$, $g(x)=x+8x^2+\dfrac{1}{x}$, $h(x)=\dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{x-2}$ (1,5 puntos)

b) Razone a que es igual el dominio de la función $g(x)$ del apartado anterior y calcule sus intervalos de concavidad y convexidad, así como sus puntos de inflexión. (2 puntos)

SIGUE AL DORSO

Cuestión C1

A partir de 5 matemáticos y 7 físicos hay que construir una comisión formada por 4 miembros elegidos al azar.

a) Calcule la probabilidad de que todos los miembros sean matemáticos. (1 punto)

b) Calcule la probabilidad de que la comisión acabe formada por 2 físicos y 2 matemáticos. (1 punto)

c) Calcule la probabilidad de que no haya ningún matemático. (1 punto)

Cuestión C2

La cantidad de hemoglobina en sangre del ser humano sigue una ley normal con una desviación típica de 2g/dl. Elegida una muestra y con un nivel de confianza del 98% se obtiene el intervalo (13, 15) para la cantidad media de hemoglobina en sangre. Calcule la media y el tamaño de la muestra poblacional elegida. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. (3 puntos)

k	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $p(z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN - EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**

Para la corrección del ejercicio se tendrán en cuenta los siguientes criterios generales:

- Se valorará el uso del vocabulario y la notación científica.
- En las preguntas prácticas primará el correcto planteamiento del problema y se valorarán positivamente las explicaciones claras y precisas, y negativamente la ausencia de explicaciones o las explicaciones incorrectas.
- Si se comete un error que tenga que ver con resultados ulteriores de la misma pregunta, se ha de tener en cuenta si existe coherencia con el resultado erróneo. En caso afirmativo, **se valorará el resto** de las cuestiones de la misma pregunta; aunque si el error conduce a problemas más simples de los inicialmente propuestos disminuirá la calificación.
- No se dará especial importancia a los errores en las operaciones, excepto que sean reiterativos.
- Por errores ortográficos graves, desorden, falta de limpieza y mala redacción podrá bajarse la calificación del ejercicio hasta un punto, incluso más en casos extremos.

Cuestión A1

a) Calcular $(A^2)^{-1}$: 1 punto. Despejar X: 0,5 puntos. Calcular X: 0,5 puntos.

b) Escalonar la matriz: 0,75 puntos. Calcular la solución: 0,75 puntos.

Cuestión A2

a) Plantear el sistema: 0,75 puntos. Escalonar la matriz: 0,75 puntos. Calcular la solución: 0,5 puntos.

b) Plantear la nueva ecuación: 0,75 puntos. Concluir que no se puede determinar el precio: 0,75 puntos.

Cuestión B1

a) Cada derivada: 0,5 puntos.

b) b1) Límites laterales: 0,75 puntos. Concluir que f no es continua en x = 2: 0,25 puntos. Continuidad en x=4: 0,25 puntos. b2) Calcular la derivada: 0,5 puntos. Calcular punto crítico: 0,25 puntos. Intervalos de crecimiento y decrecimiento: 0,5 puntos.

Cuestión B2

a) Cada derivada: 0,5 puntos.

b) Dominio: 0,5 puntos. Derivada segunda: 0,25 puntos. Punto de inflexión: 0,5 puntos. Intervalos de concavidad: 0,75 puntos

Cuestión C1

a) 1 punto, b) 1 punto, c) 1 punto.

Cuestión C2

Determinar el valor crítico para el nivel de confianza del 98%: 1. Determinar el tamaño de la población: 1 punto. Determinar la media: 1 punto.

Desarrolle clara y razonadamente tres cuestiones, eligiendo una del par (A1,A2), otra de (B1,B2) y otra de (C1,C2).

<u>Cuestión A1</u>:

a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&2\\4&1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&4&1\\3&1&1\end{pmatrix}$.

Calcular la matriz $\left(A^2\right)^{-1}$. Resolver la ecuación $AX+B=C$. *(2 puntos)*

b) Resolver por el método de Gauss el siguiente sistema lineal: $\begin{cases}x-9y+5z=33\\x+3y-z=-9\\x-y+z=5\end{cases}$ *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) • Calculemos la matriz A^2: $\quad A^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

y ahora su inversa: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&-1&0\\1&2&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&-1&0\\0&3&-1&-1&2&0\\0&1&0&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-2F_3}$

$\xrightarrow{F_2-2F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&-1&0\\0&1&-1&1&0&-2\\0&1&0&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&-2\\0&1&-1&1&0&-2\\0&1&0&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&-2\\0&1&-1&1&0&-2\\0&-3&1&-2&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{F_2+F_3}$

$\xrightarrow{F_2+F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&-2\\0&1&0&-1&1&1\\0&0&1&-2&1&3\end{array}\right)\quad\Rightarrow\quad\left(A^2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&1\\-2&1&3\end{pmatrix}$

• $AX+B=C \;\Rightarrow\; AX=C-B \;\Rightarrow\; A^{-1}AX=A^{-1}(C-B) \;\Rightarrow\; X=A^{-1}(C-B)$

Calculemos A^{-1}: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3+F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_3}$

$\xrightarrow{F_2-F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&0&0&0&-1\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&-1&0&0&0&-1\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\cdot(-1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\;\Rightarrow\; A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

Por tanto: $\quad X=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&2&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&0&0\\0&1&-3\end{pmatrix}$

b) $\begin{cases}x-9y+5z=33\\x+3y-z=-9\\x-y+z=5\end{cases}\overset{\substack{E_2-E_1\\E_3-E_1}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x-9y+5z=33\\12y-6z=-42\\8y-4z=-28\end{cases}\overset{\substack{E_2:6\\E_3:4}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x-9y+5z=33\\2y-z=-7\\2y-z=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-9y+5z=33\\2y-z=-7\end{cases}\Rightarrow\; z=\lambda:$

$$y=\frac{-7+\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-63+9\lambda}{2}+33-5\lambda=\frac{-63+9\lambda+66-10\lambda}{2}=\frac{3-\lambda}{2}$$

Luego se trata de un sistema compatible indeterminado cuyas soluciones son: $x=\frac{3-\lambda}{2}$; $y=\frac{-7+\lambda}{2}$; $z=\lambda$

Cuestión A2:

El señor Álvarez deja su fortuna a sus tres hijos en herencia con las siguientes condiciones:

1. El mayor recibe la media aritmética de los que reciben los otros dos más 30.000 €.
2. El mediano recibe 10.000 € más que la diferencia entre lo que recibe el mayor y lo que recibe el pequeño.
3. El pequeño recibirá la media aritmética de lo que reciben los otros dos menos 30.000 €.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que permita calcular qué cantidad recibe cada uno de los hijos del señor Álvarez. Resuélvalo por el método de Gauss. *(2 puntos)*

b) ¿Es posible saber qué cantidad recibe cada uno de los hijos del señor Álvarez si sustituimos la condición 2 por: "al mediano le deja la media aritmética de lo que reciben los otros dos"? *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sea x la cantidad que recibe el mayor, y la que recibe el mediano, z la que recibe el pequeño. Se tiene:

$$\begin{cases} x=\dfrac{y+z}{2}+30000 \\ y=x-z+10000 \\ z=\dfrac{x+y}{2}-30000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z=60000 \\ x-y-z=-10000 \\ x+y-2z=60000 \end{cases} \overset{\text{cambio de orden}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-2z=60000 \\ 2x-y-z=60000 \\ x-y-z=-10000 \end{cases} \overset{\substack{E_2-2E_1 \\ E_3-E_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-2z=60000 \\ -3y+3z=-60000 \\ -2y+z=-70000 \end{cases} \overset{E_2:(-3)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{E_2:(-3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-2z=60000 \\ y-z=20000 \\ -2y+z=-70000 \end{cases} \overset{E_3+2E_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-2z=60000 \\ y-z=20000 \\ -z=-30000 \end{cases} \Rightarrow z=30000 \ , \ y=50000 \ , \ x=70000$$

Por tanto, el mayor recibe 70.000 €, el mediano 50.000 € y el pequeño 30.000 €.

b) En la nueva situación:

$$\begin{cases} 2x-y-z=60000 \\ y=\dfrac{x+z}{2} \\ x+y-2z=60000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z=60000 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=60000 \end{cases} \overset{\text{cambio de orden}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y-2z=60000 \\ 2x-y-z=60000 \end{cases} \overset{\substack{E_2-E_1 \\ E_3-2E_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3y-3z=60000 \\ 3y-3z=60000 \end{cases}$$

Tenemos un sistema compatible indeterminado que no nos permite obtener una única solución para el problema.

Cuestión B1:

a) Derive las funciones $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x-2}$ y $g(x)=(x-5)^2\ln x$ *(1 punto)*

b) Sea la función $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+1} & \text{si } x\in(-2\,,\,2) \\ \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si } x\in[2\,,\,4] \end{cases}$

b1) Razonar si f es continua en $x=2$ y en $x=4$. *(1,25 puntos)*

b2) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para los valores $x\in(-2\,,\,2)$. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $$f'(x)=\frac{2x(x-2)-(x^2+4)}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2-4}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-4}{(x-2)^2}$$

$$g'(x)=2(x-5)\ln x+(x-5)^2\frac{1}{x}=(x-5)\left(2\ln x+\frac{x-5}{x}\right)$$

b1) C Estudiemos la continuidad en $x = 2$:

$$\exists f(2) = \frac{2+2}{2-1} = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{5} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x-1} = 4 \end{array}\right| \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow \text{ no existe } \lim_{x\to 2} f(x) \Rightarrow f(x) \text{ es discontinua}$$

en $x = 2$ con una discontinuidad no evitable.

C Estudiemos la continuidad en $x = 4$:

$$\exists f(4) = \frac{4+2}{4-1} = 2 \qquad ; \qquad \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{x+2}{x-1} = 2$$

y como $f(4) = \lim\limits_{x\to 4} f(x) \Rightarrow$ la función es continua en $x = 4$ aunque sólo por la izquierda.

b2) Se trata de estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \sqrt{x^2+1}$:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Se tiene:

	f ´ < 0		**f ´ > 0**	
!2		0		2

luego: $f(x)$ es decreciente en $(-2, 0)$ y creciente en $(0, 2)$.

Cuestión B2

a) Derive las funciones $f(x) = (1-x)^3\, e^x$, $g(x) = x + 8x^2 + \dfrac{1}{x}$, $h(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{x-2}$ *(1,5 puntos)*

b) Razone a qué es igual el dominio de la función $g(x)$ del apartado anterior y calcule sus intervalos de concavidad y convexidad, así como sus puntos de inflexión. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = 3(1-x)^2(-1)e^x + (1-x)^3 e^x = (1-x)^2 e^x (-3+1-x) = (1-x)^2 (-2-x)\, e^x$

$$g'(x) = 1 + 16x - \frac{1}{x^2}$$

$$h'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = -\frac{3}{x^2} - \frac{2}{(x-2)^2}$$

b) C La función $g(x)$ es la suma de una función polinómica cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y de una función racional cuyo dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$. Por tanto su dominio es la intersección de ambos dominios, es decir: $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$

C Los intervalos de concavidad y convexidad dependen del signo de $g''(x)$:

$$g'(x) = 1 + 16x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow g''(x) = 16 - \frac{-2x}{x^4} = 16 + \frac{2}{x^3} = \frac{16x^3+2}{x^3} = 0 \Rightarrow 16x^3 + 2 = 0 \Rightarrow x^3 = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Se tiene:

g'' > 0		g'' < 0		g'' > 0
	! 1/2		0	

Es decir: $\left(-\infty\,,-\dfrac{1}{2}\right) \rightarrow$ cóncava , $\left(-\dfrac{1}{2}\,,0\right) \rightarrow$ convexa , $\left(0\,,+\infty\right) \rightarrow$ cóncava .

De los dos puntos donde cambia la curvatura, sólo $x=-\dfrac{1}{2}$ es un punto de inflexión pues $x=0$ no pertenece al dominio de la función.

<u>Cuestión C1</u>:
A partir de 5 matemáticos y 7 físicos hay que construir una comisión formada por 4 miembros elegidos al azar.
a) Calcule la probabilidad de que todos los miembros sean matemáticos. *(1 punto)*
b) Calcule la probabilidad de que la comisión acabe formada por 2 físicos y 2 matemáticos. *(1 punto)*
c) Calcule la probabilidad de que no haya ningún matemático. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

Sea M el suceso "un miembro de la comisión es matemático" y sea F el suceso "un miembro de la comisión es físico".

a)
$$p\left(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4\right) = p\left(M_1\right)\cdot p\left(M_2 / M_1\right)\cdot p\left(M_3 / M_1 \cap M_2\right)\cdot p\left(M_4 / M_1 \cap M_2 \cap M_3\right) = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{99} \simeq 0{,}01$$
b)
$$p\left(M_1 \cap M_2 \cap F_3 \cap F_4\right) + p\left(M_1 \cap F_2 \cap M_3 \cap F_4\right) + p\left(M_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap M_4\right) + p\left(F_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap F_4\right) + p\left(F_1 \cap M_2 \cap F_3 \cap M_4\right) +$$
$$p\left(F_1 \cap F_2 \cap M_3 \cap M_4\right) = 6\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{14}{33} \simeq 0{,}42$$
c) $p\left(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4\right) = \dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{6}{11}\cdot\dfrac{5}{10}\cdot\dfrac{4}{9} = \dfrac{7}{99} \simeq 0{,}07$

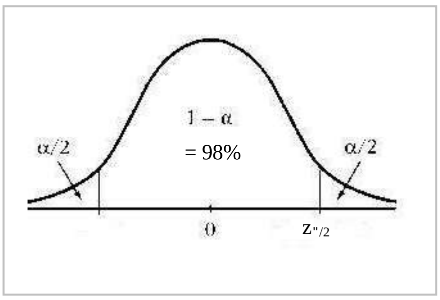
<u>Cuestión C2</u>
La cantidad de hemoglobina en sangre del ser humano sigue una ley normal con una desviación típica de 2 g/dl. Elegida una muestra y con un nivel de confianza del 98% se obtiene el intervalo $\left(13\,,15\right)$ para la cantidad media de hemoglobina en sangre. Calcule la media y el tamaño de la muestra poblacional elegida. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

El intervalo de confianza está centrado en la media. Por tanto, $\overline{X} = 14$ g/dl .

El radio del intervalo (error máximo admisible) es: $E = 1 = z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; n = \left(z_{\alpha/2}\cdot\sigma\right)^2 = \left(2\cdot z_{\alpha/2}\right)^2$

Calculemos, mediante la tabla de la normal, el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98%:



$1-\alpha = 0{,}98 \;\Rightarrow\; \alpha = 1-0{,}98 = 0{,}02 \;\Rightarrow\; \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}01 \;\Rightarrow\; 1-\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}99$

En la tabla encontramos: $p\left(z \le z_{\alpha/2}\right) = 0{,}99 \;\Rightarrow\; z_{\alpha/2} = 2{,}33$

Por tanto: $n = \left(2\cdot 2{,}33\right)^2 = 4{,}66^2 = 21{,}7 \;\Rightarrow$ debe haberse elegido una muestra de 22 personas.

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El ejercicio presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir y desarrollar una de ellas, sin mezclar contenidos.

OPCIÓN A

1. Un número de tres cifras es tal que la suma de las centenas y las unidades con el doble de las decenas es 23, la diferencia entre el doble de las centenas y la suma de las decenas más las unidades es 9 y la media de las centenas y las decenas más el doble de las unidades es 15.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales para calcular dicho número y resuélvalo por el método de Gauss. *(2,5 puntos)*

b) ¿Es posible encontrar un número de tres cifras si cambiamos la tercera condición por "el triple de las centenas más las decenas es 25"? *(1 punto)*

2. a) Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x), \qquad g(x) = \ln \frac{x^2}{\sqrt{x+3}}, \qquad h(x) = \sqrt{e^{3x} - \frac{5+\ln x}{3x+5}}.$$

b) Razone cual es el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 6}$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de f en su dominio. *(2 puntos)*

3. En una fiesta en la que hay 85 mujeres y 90 hombres se eligen 4 personas al azar.

a) Calcule la probabilidad de que ninguna sea hombre. *(1 punto)*

b) Calcule la probabilidad de que haya exactamente un hombre. *(1 punto)*

c) Calcule la probabilidad de que haya más de un hombre. *(1 punto)*

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero sólo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 80 € y el de uno pequeño 60 €.

a) ¿Cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible? *(2 puntos)*

b) Si la empresa dispusiera de 5 conductores más, ¿cuál sería el número de autocares de cada tipo que habría que contratar para que la excursión fuera lo más barata posible? *(1,5 puntos)*

2. a) Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x)=\frac{\sqrt{3x^3}-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x^3}}, \qquad g(x)=\ln\frac{3x^2}{x-5}, \qquad h(x)=e^{5x}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

b) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le 2 \\ \dfrac{x+3}{x^2-3} & \text{si } x>2 \end{cases}$

Estudie la continuidad de f en $x=2$. Analice el crecimiento de la función $f(x)$ si $x>2$. ¿Tiene f algún máximo o mínimo relativo si $x>2$?. *(2 puntos)*

3. El consumo bimestral de energía eléctrica de una población de 100 personas se distribuye normalmente con una media de 59 Kwh y una desviación típica de 6 Kwh. Calcule el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza del 97%. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. *(3 puntos)*

k	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $p(z\le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCION

Para la corrección del ejercicio se tendrán en cuenta los siguientes criterios generales:

- Se valorará el uso del vocabulario y la notación científica.
- En aquellas preguntas en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.
- En las preguntas prácticas primará el correcto planteamiento del problema y se valorarán positivamente las explicaciones claras y precisas, y negativamente la ausencia de explicaciones o las explicaciones incorrectas.
- Si se comete un error que tenga relación con resultados ulteriores de la misma pregunta, se ha de tener en cuenta si existe coherencia con el resultado erróneo. En caso afirmativo, **se valorará el resto** de las cuestiones de la misma pregunta, aunque si el error conduce a problemas más simples de los inicialmente propuestos disminuirá la calificación.
- Se podrán usar calculadoras aunque no sean necesarias para la resolución de los ejercicios. Se exigirá que todos los resultados analíticos y gráficos estén paso a paso justificados. (Utilización de fórmulas, obtención de gráficas, cálculo de derivadas).
- A la hora de corregir la prueba, se tendrá en cuenta la falta de acuerdo sobre los conceptos de convexidad y concavidad en la Bibliografía.

Se valorará el buen uso de la lengua y la adecuada notación científica, que los correctores podrán bonificar con un máximo de un punto. Por los errores ortográficos, la falta de limpieza en la presentación y la redacción defectuosa podrá bajarse la calificación hasta un punto.

OPCIÓN A

Ejercicio 1: **a)** Plantear el sistema 0,75 puntos (0,25 puntos cada ecuación). Escalonar la matriz 1 punto. Dar la solución 0,75 puntos.

b) Escribir la nueva ecuación 0,5 puntos. Concluir que no existe solución 0,5 puntos.

Ejercicio 2: a) Cada derivada 0,5 puntos.

b) Dominio 0,75 puntos. Calcular la derivada y encontrar el punto crítico 0,75 puntos. Concluir que es mínimo 0,5 puntos.

Ejercicio 3: Cada apartado 1 punto.

OPCIÓN B

Ejercicio 1: a) Plantear el programa lineal 0,75 puntos. Dibujar el recinto 0,5 puntos. Calcular los vértices del conjunto 0,5 puntos. Calcular el mínimo 0,25 puntos.

b) Dibujar el nuevo recinto 0,75 puntos. Calcular el mínimo 0,75 puntos.

Ejercicio 2: a) Cada derivada 0,5 puntos.

b) Cada límite lateral 0,5 puntos. Cálculo de la derivada 0,25 puntos. Concluir que f es decreciente 0,5 puntos. Concluir que no tiene extremos 0,25 puntos

Ejercicio 3: Determinar el valor crítico para el nivel de confianza 1 punto. Determinar el intervalo 2 puntos.

El ejercicio presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir y desarrollar una de ellas, sin mezclar contenidos.

OPCIÓN A

1. Un número de tres cifras es tal que la suma de las centenas y las unidades con el doble de las decenas es 23, la diferencia entre el doble de las centenas y la suma de las decenas más las unidades es 9 y la media de las centenas y las decenas más el doble de las unidades es 15.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales para calcular dicho número y resuélvalo por el método de Gauss. *(2,5 puntos)*

b) ¿Es posible encontrar un número de tres cifras si cambiamos la tercera condición por "el triple de las centenas más las decenas es 25"? *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) Sea x la cifra de las centenas, y la de las decenas, z la de las unidades. Se tiene:

$$\begin{cases} x+z+2y=23 \\ 2x-(y+z)=9 \\ \dfrac{x+y}{2}+2z=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=23 \\ 2x-y-z=9 \\ x+y+4z=30 \end{cases} \overset{\substack{E_2-2E_1 \\ E_3-E_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2y+z=23 \\ -5y-3z=-37 \\ -y+3z=7 \end{cases} \overset{E_2\leftrightarrow E_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2y+z=23 \\ -y+3z=7 \\ 5y+3z=37 \end{cases} \overset{E_3+5E_2}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=23 \\ -y+3z=7 \\ 18z=72 \end{cases} \Rightarrow \quad z=4\ ,\ y=5\ ,\ x=9$$ luego el número buscado es el 954.

b) La tercera ecuación cambia. El nuevo sistema es:

$$\begin{cases} x+z+2y=23 \\ 2x-(y+z)=9 \\ 3x+y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=23 \\ 2x-y-z=9 \\ 3x+y=25 \end{cases} \overset{\substack{E_2-2E_1 \\ E_3-3E_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+2y+z=23 \\ -5y-3z=-37 \\ -5y-3z=-44 \end{cases}$$ y el sistema es incompatible (ver la segunda y tercera ecuaciones) por lo que no podremos resolverlo.

2. **a)** Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x)=\ln^2 x-\ln(\ln x)\ , \qquad g(x)=\ln\frac{x^2}{\sqrt{x+3}}\ , \qquad h(x)=\sqrt{e^{3x}-\frac{5+\ln x}{3x+5}}$$

b) Razone cuál es el dominio de la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de f en su dominio. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a)
- $f'(x)=2\cdot\ln x\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}\left(2\ln x-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\dfrac{2\ln^2 x-1}{x\ln x}$

- $g(x)=2\ln x-\dfrac{1}{2}\ln(x+3) \Rightarrow g'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{4(x+3)-x}{2x(x+3)}=\dfrac{3x+3}{2x^2+6x}$

- $h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{e^{3x}-\dfrac{5+\ln x}{3x+5}}}\cdot\left(3e^{3x}-\dfrac{\dfrac{1}{x}(3x+5)-3(5+\ln x)}{(3x+5)^2}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{e^{3x}-\dfrac{5+\ln x}{3x+5}}}\cdot\left(3e^{3x}-\dfrac{-12x+5-3x\ln x}{x(3x+5)^2}\right)$

b) Se trata de una función racional. Su dominio está formado por todos los números reales excepto los que anulen el denominador:

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D(f) = \mathbb{R} - \{-2\,,\,3\}$$

C Estudiemos los máximos o mínimos relativos de la función:

$$f\,'(x) = \frac{-2x+1}{\left(x^2 - x - 6\right)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{(punto crítico)}$$

$$f\,''(x) = \frac{-2\left(x^2 - x - 6\right)^2 - (-2x+1)\,2\left(x^2 - x + 6\right)(2x-1)}{\left(x^2 - x - 6\right)^4} \quad \Rightarrow \quad f\,''\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{en el punto } \left(\frac{1}{2}\,,\,-\frac{4}{25}\right) \text{ la función tiene un máximo relativo.}$$

3. En una fiesta en la que hay 85 mujeres y 90 hombres se eligen 4 personas al azar.

a) Calcule la probabilidad de que ninguna sea hombre. *(1 punto)*
b) Calcule la probabilidad de que haya exactamente un hombre. *(1 punto)*
c) Calcule la probabilidad de que haya más de un hombre. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

El problema puede resolverse con ayuda de un diagrama en árbol.

Sean los sucesos: M_1 6 "la primera persona es una mujer", H_1 6 "la primera persona es un hombre", M_2 6 "la segunda persona es una mujer", etc. Se tiene:

a) $$p\left(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4\right) = p(M_1) \cdot p(M_2 / M_1) \cdot p(M_3 / M_1 \cap M_2) \cdot p(M_4 / M_1 \cap M_2 \cap M_3) =$$
$$= \frac{85}{175} \cdot \frac{84}{174} \cdot \frac{83}{173} \cdot \frac{82}{172} \simeq 0{,}0536$$

b) $$p\left(H_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4\right) + p\left(M_1 \cap H_2 \cap M_3 \cap M_4\right) + p\left(M_1 \cap M_2 \cap H_3 \cap M_4\right) + p\left(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap H_4\right) =$$
$$= \frac{90}{175} \cdot \frac{85}{174} \cdot \frac{84}{173} \cdot \frac{83}{172} + \frac{85}{175} \cdot \frac{90}{174} \cdot \frac{84}{173} \cdot \frac{83}{172} + \frac{85}{175} \cdot \frac{84}{174} \cdot \frac{90}{173} \cdot \frac{83}{172} + \frac{85}{175} \cdot \frac{84}{174} \cdot \frac{83}{173} \cdot \frac{90}{172} = 4 \cdot \frac{90}{175} \cdot \frac{85}{174} \cdot \frac{84}{173} \cdot \frac{83}{172} =$$
$$= 0{,}2355$$

c) El suceso "haya más de un hombre" es el contrario de "haya ningún hombre o uno sólo". Por tanto:

$$p\left(\text{haya más de un hombre}\right) = 1 - 0{,}0536 - 0{,}2355 = 0{,}7109$$

OPCIÓN B

1. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero sólo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 80 € y el de uno pequeño 60 €.

a) ¿Cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible? *(2 puntos)*

b) Si la empresa dispusiera de 5 conductores más, ¿cuál sería el número de autocares de cada tipo que habría que contratar para que la excursión fuera lo más barata posible? *(1,5 puntos)*

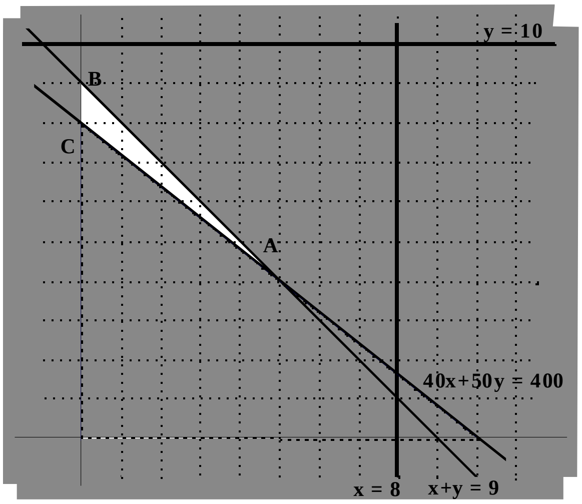
SOLUCIÓN.

a) Se trata de un problema de programación lineal. Sea ***x*** el número de autocares de 40 plazas e ***y*** el de autocares de 50 plazas. Las restricciones a que está sometida la solución son:

$0 \le x \le 8$ (número de autocares de 40 plazas)
$0 \le y \le 10$ (número de autocares de 50 plazas)
$x + y \le 9$ (número máximo de autocares que pueden circular por el número de conductores de que se dispone)
$40x + 50y \ge 400$ (Los autocares deben garantizar un mínimo de 400 plazas)

La función objetivo es el coste: $F(x\,,\,y) = 60x + 80y$ que en este caso debe ser mínima.

Obtengamos la región factible (solución del sistema de inecuaciones):



C $0 \le x \le 8$ tiene como solución la parte del plano comprendida entre las rectas $x = 0$ y $x = 8$.

C $0 \le y \le 10$ tiene como solución la parte del plano comprendida entre las rectas $y = 0$ e $y = 10$.

C La recta $x + y = 9$ pasa por los puntos $(9\,,\,0)$ y $(0\,,\,9)$. La inecuación $x + y \le 9$ tiene como solución el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

C La recta $40x + 50y = 400 \Leftrightarrow 4x + 5y = 40$ pasa por los puntos $(10\,,\,0)$ y $(0\,,\,8)$. La inecuación $40x + 50y \ge 400$ tiene como solución el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

La solución común de todas las inecuaciones es el triángulo ABC (en blanco).

Como la función objetivo se minimiza en alguno de los vértices de la región factible, obtenemos sus coordenadas y calculamos el valor de la función objetivo en los mismos:

Vértice A: $\left\{ \begin{array}{c} x + y = 9 \\ 4x + 5y = 40 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -4x - 4y = -36 \\ 4x + 5y = 40 \end{array} \right. \Rightarrow y = 4\ ,\ x = 5 \Rightarrow A(5\,,\,4) \Rightarrow F(5\,,\,4) = 384$ €

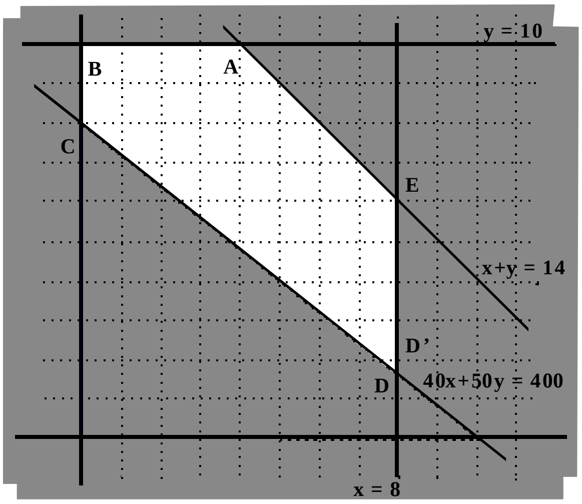
Vértice B: $B(0\,,\,9) \Rightarrow F(0\,,\,9) = 720$ €

Vértice C: $C(0\,,\,8) \Rightarrow F(0\,,\,8) = 640$ €

Por tanto, para que el coste sea el menor posible dentro de las condiciones existentes deben contratarse 5 autocares pequeños y 4 autocares grandes.

b) Si el número de conductores pasara a ser de 14, la restricción $x+y\le 9$ se convierte en $x+y\le 14$.

La recta $x+y=14$ pasa por los puntos $(10,4)$ y $(4,10)$ y la inecuación $x+y\le 14$ tiene como solución el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas. De este modo la región factible es ahora el pentágono ABCDE en alguno de cuyos vértices la función objetivo se minimizará:



Vértice A: $\begin{cases} y=10 \\ x+y=14 \end{cases} \Rightarrow x=4\ ,\ y=10 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(4,10) \Rightarrow F(4,10)=1040$ €

Vértice B: $B(0,10) \Rightarrow F(0,10)=800$ €

Vértice C: $C(0,8) \Rightarrow F(0,8)=640$ €

Vértice D: $\begin{cases} x=8 \\ 4x+5y=40 \end{cases} \Rightarrow x=8\ ,\ y=\frac{8}{5}=1{,}6 \simeq 2$

$\Rightarrow D'(8,2) \Rightarrow F(8,2)=640$ €

(aproximamos el valor de y al nº natural más próximo que además pertenece a la región factible)

Vértice E: $\begin{cases} x=8 \\ x+y=14 \end{cases} \Rightarrow x=8\ ,\ y=6 \Rightarrow$

$\Rightarrow D(8,6) \Rightarrow F(8,6)=960$ €

Podríamos entonces elegir entre dos soluciones: 8 autocares de 50 plazas o 8 autocares de 40 plazas y 2 de 50 plazas.

2. **a)** Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x)=\frac{\sqrt{3x^3}-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x^3}}\ ,\qquad g(x)=\ln\frac{3x^2}{x-5}\ ,\qquad h(x)=e^{5x}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

b) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le 2 \\ \dfrac{x+3}{x^2-3} & \text{si } x>2 \end{cases}$

Estudie la continuidad de f en $x=2$. Analice el crecimiento de la función $f(x)$ si $x>2$. ¿Tiene f algún máximo o mínimo relativo si $x>2$?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) • $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^3}-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x^3}}=\dfrac{\sqrt{3x^3}}{\sqrt{x^3}}-\dfrac{\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x^3}}=\sqrt{3}-\sqrt[6]{\dfrac{4x^2}{x^9}}=\sqrt{3}-\sqrt[6]{\dfrac{4}{x^7}}=\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}\cdot x^{-\frac{7}{6}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)=-\sqrt[3]{2}\cdot\left(-\frac{7}{6}\right)\cdot x^{-\frac{13}{6}}=\frac{7\sqrt[3]{2}}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{x^{13}}}=\frac{7\sqrt[3]{2}}{6x^2\sqrt[6]{x}}$$

• $g(x)=\ln\dfrac{3x^2}{x-5}=\ln\left(3x^2\right)-\ln(x-5) \Rightarrow g'(x)=\dfrac{6x}{3x^2}-\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{2x-10-x}{x(x-5)}=\dfrac{x-10}{x^2-5x}$

• $h'(x)=5e^{5x}+\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}\cdot\dfrac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{(x-1)^2}=5e^{5x}-\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\cdot(x-1)^2}=5e^{5x}-\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{(x+1)(x-1)^4}{x-1}}}=$

$$=5e^{5x}-\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$$

b) C Continuidad de $f(x)$ en $x = 2$:

$\exists\, f(2) = 5$

$$\exists \lim_{x\to 2} f(x): \quad \left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \left(x^2+1\right) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x^2-3} = 5 \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \quad \Rightarrow$ la función es continua en $x = 2$.

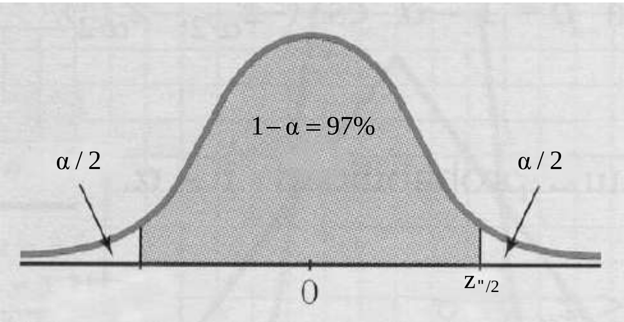
C Para $x > 2$: $\quad f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{x^2-3-(x+3)2x}{\left(x^2-3\right)^2} = \dfrac{-x^2-6x-3}{\left(x^2-3\right)^2} = -\dfrac{x^2+6x+3}{\left(x^2-3\right)^2} < 0 \quad \forall\, x > 2$

luego la función es decreciente.

C No, pues la función es decreciente $\forall\, x > 2$.

3. El consumo bimestral de energía eléctrica de una población de 100 personas se distribuye normalmente con una media de 59 kwh y una desviación típica de 6 kwh. Calcule el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza del 97%. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.



El radio del intervalo de confianza es $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ donde $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 97%, $\sigma = 6$ es la desviación típica poblacional y $n = 100$ es el número de individuos de la muestra.

Obtengamos, a partir de la tabla, el valor de $z_{\alpha/2}$: $\quad 1-\alpha = 0{,}97 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1-0{,}97 = 0{,}03 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}015 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 1-\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}985$. En la tabla encontramos: $\quad p\left(z \le z_{\alpha/2}\right) = 0{,}985 \quad \Rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 2{,}17$

Por tanto: $\quad E = 2{,}17 \cdot \dfrac{6}{10} = 1{,}302$ y el intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - E\,,\, \bar{x} + E\right) = \left(59 - 1.302\,,\, 59 + 1.302\right) = \left(57.698\,,\, 60.302\right)$$

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El ejercicio presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir y desarrollar una de ellas, sin mezclar contenidos.

OPCIÓN A

1. Encuentre una matriz X tal que $X\,A=B$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$. *(1 punto)*

2. Sean $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calcule B^{-1}. *(1 punto)*

b) Utilizando B^{-1}, calcule X tal que $X\,B=A+B$. *(1,5 puntos)*

3. a) Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x)=\ln\frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}, \qquad g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}, \qquad h(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}$$

b) Razone cuál es el dominio de definición de la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+x^2$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de f. ¿Tiene algún punto de inflexión?. *(2 puntos)*

4. En un colegio hay 60 alumnos de bachillerato. De ellos 40 estudian inglés, 24 estudian francés y 12 los dos idiomas. Se elige un alumno al azar.

a) Calcule la probabilidad de que estudie al menos un idioma. *(1 punto)*

b) Calcule la probabilidad de que estudie francés sabiendo que también estudia inglés. *(1 punto)*

c) Calcule la probabilidad de que no estudie inglés. *(1 punto)*

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Las del tipo A precisan 1 gr. de oro y 1,5 gr. de plata, obteniendo un beneficio en la venta de cada una de 40 euros. Para la fabricación de las de tipo B emplea 1,5 gr. de oro y 1 gr. de plata y obtiene un beneficio en la venta de cada una de 50 euros. El orfebre tiene sólo en el taller 750 gr. de cada uno de los metales. ¿Cuántas joyas ha de fabricar de cada clase para obtener un beneficio máximo? *(2,5 puntos)*

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}$, y $C=\begin{pmatrix}2&4\\5&10\end{pmatrix}$, encuentre una matriz X que resuelva la ecuación $AX+B=C$. *(1 punto)*

3. a) Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x}\right),\qquad g(x)=e^{x^3}\ln\left(x^2+1\right),\qquad h(x)=\ln\left(e^x+\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)$$

b) Considere la función: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & \text{si } -1\le x\le 3\\ \dfrac{2x}{x^2-6} & \text{si } \ 3<x\le 10\end{cases}$

b1) Estudie la continuidad de f en $x=3$. *(0,75 puntos)*

b2) Calcule la recta tangente a $f(x)$ en $x=4$. *(1,25 puntos)*

4. La temperatura durante los meses de verano en una ciudad sigue una distribución normal con una desviación típica de 5º. Elegida una muestra y con un nivel de confianza del 98%, se obtiene el intervalo (25º, 30º). Calcule la media y el tamaño de la muestra elegida. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. *(3 puntos)*

k	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $p(z\le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

Para la corrección del ejercicio se tendrán en cuenta los siguientes criterios generales:

Se valorará el uso del vocabulario y la notación científica.

- En aquellas preguntas en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.
- En las preguntas prácticas primará el correcto planteamiento del problema y se valorarán positivamente las explicaciones claras y precisas, y negativamente la ausencia de explicaciones o las explicaciones incorrectas.
- Si se comete un error que tenga relación con resultados ulteriores de la misma pregunta, se ha de tener en cuenta si existe coherencia con el resultado erróneo. En caso afirmativo, se valorará el resto de las cuestiones de la misma pregunta, aunque si el error conduce a problemas más simples de los inicialmente propuestos disminuirá la calificación.
- Se podrán usar calculadoras aunque no sean necesarias para la resolución de los ejercicios. Se exigirá que todos los resultados analíticos y gráficos estén paso a paso justificados. (Utilización de fórmulas, obtención de gráficas, cálculo de derivadas).
- A la hora de corregir la prueba, se tendrá en cuenta la falta de acuerdo sobre los conceptos de convexidad y concavidad en la Bibliografía.

Se valorará el buen uso de la lengua y la adecuada notación científica, que los correctores podrán bonificar con un máximo de un punto. Por los errores ortográficos, la falta de limpieza en la presentación y la redacción defectuosa podrá bajarse la calificación hasta un punto.

OPCIÓN A

Ejercicio 1: 1 punto.

Ejercicio 2: a) 1 punto; **b)** Despejar X 0,75 puntos. Calcular X 0,75 puntos.

Ejercicio 3: a) Cada derivada 0,5 puntos; **b)** Determinar el dominio de f 0,25 puntos. Calcular los valores que anulan la primera derivada 0,5 puntos. Concluir que $x=1$ y $x=-1$ son mínimos 0,75 puntos. Concluir que no tiene puntos de inflexión 0,5 puntos.

Ejercicio 4: Cada apartado 1 punto.

OPCIÓN B

Ejercicio 1: Representar cada una de las rectas que determinan el conjunto distintas de los ejes 0,5 puntos. Cálculo de los vértices del conjunto 0,75 puntos. Determinar el máximo 0,75 puntos.

Ejercicio 2: Plantear la ecuación 0,5 puntos. Resolver la ecuación 0,5 puntos.

Ejercicio 3: a) Cada derivada: 0,5 puntos; **b) i)** Cada límite lateral 0,25 puntos. Concluir que f es continua 0,25. **ii)** Calcular la derivada 0,25 puntos. Calcular $f'(4)$ 0,25 puntos. Ecuación de la recta tangente 0,75 puntos.

Ejercicio 4: Determinar el valor crítico para el nivel de confianza del 98% 1 punto. Determinar la media 1 punto. Determinar el tamaño de la muestra 1 punto.

El ejercicio presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir y desarrollar una de ellas, sin mezclar contenidos.

OPCIÓN A

1. Encuentre una matriz X tal que $X\,A = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

$X\,A = B \;\Rightarrow\; X\,A\,A^{-1} = B\,A^{-1} \;\Rightarrow\; X = B\,A^{-1} \quad (*)$

Calculemos A^{-1}: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2-2F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \;\Rightarrow\; A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y sustituyendo en (*):

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- **a)** Calcule B^{-1}. *(1 punto)*
- **b)** Utilizando B^{-1}, calcule X tal que $X\,B = A + B$. *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2-F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3+F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{-F_2 \\ F_3/2}}{\approx}$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \overset{F_2+F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \overset{F_1-F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) $X\,B = A + B \;\Rightarrow\; X\,B\,B^{-1} = (A+B)\cdot B^{-1} \;\Rightarrow\; X = (A+B)\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow\; X = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 3/2 & -1/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

3. **a)** Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x)=\ln\frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}} \qquad\qquad g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}} \qquad\qquad h(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}$$

b) Razone cuál es el dominio de definición de la función $f(x)=\frac{1}{x^2}+x^2$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de f. ¿Tiene algún punto de inflexión?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a)
- $f(x)=\ln\frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}=3\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right) \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{x}-\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}x}{x^2+2}=\frac{3}{x}-\frac{x}{x^2+2}=\frac{2x^2+6}{x\left(x^2+2\right)}$
- $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{2\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{2\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$
- $h'(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}=\frac{x\cdot e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x\cdot\sqrt{x^2+1}\cdot e^{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$

b)
- $D\left(f\right)=\mathbb{R}-\left\{0\right\}$ pues $x=0$ es el único valor real para el que no es calculable el primer sumando y por tanto $\nexists f\left(0\right)$
- $f'(x)=\frac{-2x}{x^4}+2x=\frac{-2}{x^3}+2x=\frac{-2+2x^4}{x^3}=0 \Rightarrow -2+2x^4=0 \Rightarrow x^4=1 \Rightarrow x=\pm1$ (puntos críticos)

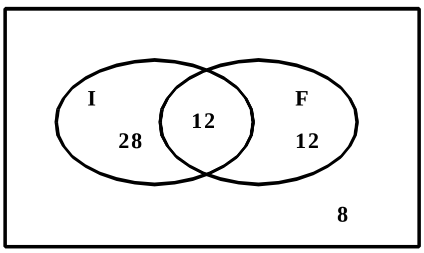
  $f''(x)=\frac{8x^6-\left(-2+2x^4\right)3x^2}{x^6}=\frac{2x^4+6}{x^4}$ y como $f''(-1)>0$ y $f''(1)>0 \Rightarrow$ En $x=-1$ y en $x=1$ la función tiene sendos mínimos relativos: $\left(-1,2\right)$ y $\left(1,2\right)$
- Como $f''(x)\neq0\ \ \forall x$ la función no tiene puntos de inflexión.

4. En un colegio hay 60 alumnos de bachillerato. De ellos 40 estudian inglés, 24 estudian francés y 12 los dos idiomas. Se elige un alumno al azar.

a) Calcule la probabilidad de que estudie al menos un idioma. *(1 punto)*
b) Calcule la probabilidad de que estudie francés sabiendo que también estudia inglés. *(1 punto)*
c) Calcule la probabilidad de que no estudie inglés. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

Sea I el conjunto de los alumnos que estudian inglés y F el de los que estudian francés. El diagrama de la situación es:



a) El suceso "estudiar algún idioma" es el suceso contrario al de "estudiar ningún idioma" y por tanto:

$$p=1-\frac{8}{60}=\frac{52}{60}=\frac{13}{15}$$

b) $p\left(F/I\right)=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$

c) $p\left(I'\right)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$

OPCIÓN B

1. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Las del tipo A precisan 1 gr de oro y 1,5 gr de plata, obteniendo un beneficio en la venta de cada una de 40 euros. Para la fabricación de las de tipo B emplea 1,5 gr de oro y 1 gr de plata y obtiene un beneficio en la venta de cada una de 50 euros. El orfebre tiene sólo en el taller 750 gramos de cada uno de los metales. ¿Cuántas joyas ha de fabricar de cada clase para obtener un beneficio máximo? *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

Tipo	Número	Oro	Plata	Beneficio
A	x	x	1,5x	40x
B	y	1,5y	y	50y
	$x \geq 0 \quad y \geq 0$	$x + 1,5y \leq 750$	$1,5x + y \leq 750$	$F(x,y) = 40x + 50y$

La función objetivo es la función de beneficios que debe ser máxima: $F(x,y) = 40x + 50y$

Las restricciones a las que debe someterse la solución son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 1,5y \leq 750 \\ 1,5x + y \leq 750 \end{cases}$

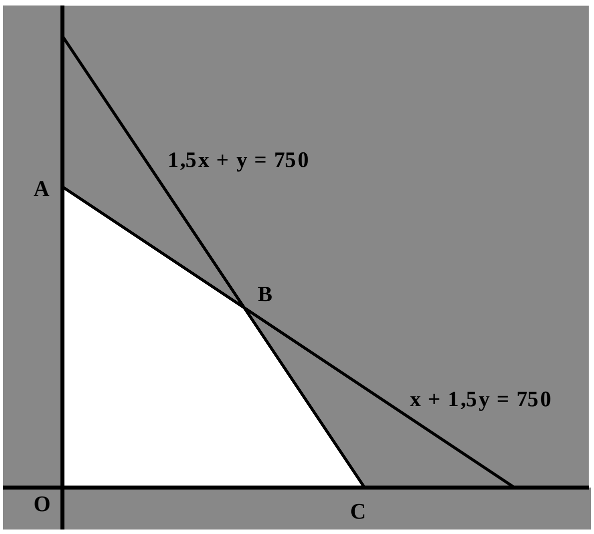
Estudiemos la solución gráfica al problema:

Las rectas $x = 0$ e $y = 0$ son los ejes de ordenadas y abscisas respectivamente. Los semiplanos soluciones de las inecuaciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$ son el derecho y el superior respectivamente.

La recta $x + 1,5y = 750$ pasa por los puntos $(750, 0)$ y $(0, 500)$ por ejemplo. La solución de la inecuación $x + 1,5y \leq 750$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La recta $1,5x + y = 750$ para por los puntos $(500, 0)$ y $(0, 750)$ por ejemplo. La solución de la inecuación $1,5x + y \leq 750$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La región factible (solución del sistema de restricciones) es la región en blanco del plano:



La solución que maximiza la función objetivo está en alguno de los vértices de la región factible. Veamos en cuál:

El vértice O es el origen de coordenadas $O(0,0)$ y la función objetivo es igual a 0 en él: $F(0,0) = 0$

En el vértice $A(500, 0) \Rightarrow F(500, 0) = 20000$

El vértice B es la solución del sistema $\begin{cases} x + 1,5y = 750 \\ 1,5x + y = 750 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1,5x + 2,25y = 1125 \\ -1,5x - y = -750 \end{cases} \Leftrightarrow y = 300$, $x = 300$ es decir $B(300, 300) \Rightarrow F(300, 300) = 27000$

En el vértice $C(0, 500) \Rightarrow F(0, 500) = 25000$

Por tanto, los beneficios son máximos cuando se fabrican 300 unidades de cada uno de los dos tipos.

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&4\\5&10\end{pmatrix}$, encuentre una matriz X que resuelva la ecuación $A\,X+B=C$. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

La matriz A es (2×1) por lo que la matriz X debe ser (1×2) para que sean multiplicables y su producto sea una matriz (2×2). Sea entonces: $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_0 & x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\5&10\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{pmatrix}x_0&x_1\\2x_0&2x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\5&10\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{cases}x_0+1=2 \;\Rightarrow\; x_0=1\\ x_1+1=4 \;\Rightarrow\; x_1=3\\ 2x_0+3=5 \;\Rightarrow\; x_0=1\\ 2x_1+4=10 \;\Rightarrow\; x_1=3\end{cases}$$

Por tanto: $X=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$

3. **a)** Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x}\right) \qquad g(x)=e^{x^3}\ln\left(x^2+1\right) \qquad h(x)=\ln\left(e^x+\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)$$

b) Considere la función: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & \text{si } -1\le x\le 3\\ \dfrac{2x}{x^2-6} & \text{si } 3<x\le 10\end{cases}$

b1) Estudie la continuidad de f en $x=3$. *(0,75 puntos)*
b2) Calcule la recta tangente a $f(x)$ en $x=4$. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) - $f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{x}\right)+x\,\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}=\ln\left(x+\sqrt{x}\right)+\dfrac{x\left(2\sqrt{x}+1\right)}{2x\sqrt{x}+2x}=\ln\left(x+\sqrt{x}\right)+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+2}$

- $g'(x)=3x^2e^{x^3}\ln\left(x^2+1\right)+e^{x^3}\dfrac{2x}{x^2+1}=x\,e^{x^3}\left[3x\ln\left(x^2+1\right)+\dfrac{2}{x^2+1}\right]$

- $h'(x)=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}}\cdot\left(e^x+\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}}\cdot\dfrac{x-x+1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}}\cdot\left(e^x+\dfrac{1}{2x^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}}\right)$

b1) - $\exists\, f(3)=2$

- $\exists \lim\limits_{x\to3} f(x)$: $\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x+1}=2\\ \lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x}{x^2-6}=2\end{array}\right.\;\Rightarrow\;\exists\lim\limits_{x\to3} f(x)=2$

- Por tanto: $f(3)=\lim\limits_{x\to3} f(x)\;\Rightarrow\;$ la función es continua en $x=3$

b2) Para $x=4$, $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-6}\;\Rightarrow\; f(4)=\dfrac{4}{5}\;\Rightarrow$ punto de tangencia: $\left(4,\dfrac{4}{5}\right)$

La pendiente de la recta tangente es: $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2-6\right)-4x^2}{\left(x^2-6\right)^2}=\dfrac{-2x^2-12}{\left(x^2-6\right)^2}\;\Rightarrow\; m=f'(4)=-\dfrac{44}{100}=-\dfrac{11}{25}$

Y su ecuación: $y-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{11}{25}(x-4)\;\Leftrightarrow\;25y-20=-11x+44\;\Leftrightarrow\;11x+25y-64=0$

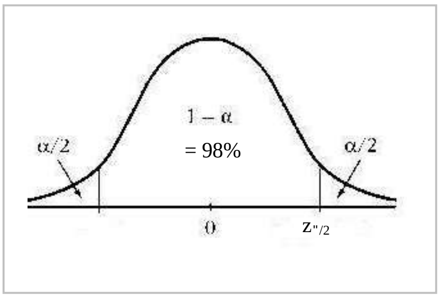
4. La temperatura durante los meses de verano en una ciudad sigue una distribución normal con una desviación típica de 5º. Elegida una muestra y con un nivel de confianza del 98%, se obtiene el intervalo $(25^{\circ}, 30^{\circ})$. Calcule la media y el tamaño de la muestra elegida. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

El intervalo de confianza está centrado en la media. Por tanto, $\overline{X} = 27,5^{\circ}$.

El radio del intervalo (error máximo admisible) es: $E = 2,5 = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2,5\sqrt{n} = z_{\alpha/2} \cdot \sigma \Rightarrow n = \left(\dfrac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{2,5}\right)^2$

Calculemos, mediante la tabla de la normal, el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98%:



$1-\alpha = 0,98 \Rightarrow \alpha = 1-0,98 = 0,02 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,01 \Rightarrow 1-\dfrac{\alpha}{2} = 0,99$

En la tabla encontramos: $p\left(z \le z_{\alpha/2}\right) = 0,99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,33$

Por tanto: $n = \left(\dfrac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{2,5}\right)^2 = \left(\dfrac{5 \cdot 2,33}{2,5}\right)^2 = 21,7$

La muestra contiene 22 datos.

El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. Una perfumería desea liquidar 100 frascos de perfume y 150 barras de labios que han quedado descatalogados en sus firmas, para ello lanza dos ofertas A y B. La oferta A consiste en un lote de un frasco de perfume y una barra de labios que se vende a 30€. La oferta B consiste en un frasco de perfume y dos barras de labios, se vende a 40€. No desea ofrecer menos de 10 lotes de la oferta A ni menos de 20 de la oferta B.

a) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar la ganancia? *(2,5 puntos)*

b) ¿Cambiaría la respuesta al apartado a) si eliminamos el hecho de que desee ofrecer al menos 20 lotes de la oferta B? *(1 punto)*

2. a) Derive las funciones $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $g(x)=\frac{1}{1+e^{1/x}}$. *(1 punto)*

b) Calcule $\int_1^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)dx$. *(0,5 puntos)*

3. Halle el dominio de definición, los máximos y mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\ln(1-x^2)$. *(2 puntos)*

4. En el departamento textil de unos grandes almacenes se encuentran mezcladas y a la venta 100 camisetas de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que una camiseta tenga tara es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige una camiseta al azar.

a) Calcule la probabilidad de que la camiseta tenga tara. *(1 punto)*

b) Calcule la probabilidad de que la camiseta sea de la marca B. *(1 punto)*

c) Sabiendo que la camiseta elegida tiene tara, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B? *(1 punto)*

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

a) Calcule la matriz inversa de la matriz $B-I_3$ con $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. *(0,75 puntos)*

b) Calcule una matriz X tal que $BX-4A=X$. *(1,25 puntos)*

2. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&-3\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.

a) Calcule el rango de la matriz A. *(0,5 puntos)*

b) Aplicar el apartado a) para resolver el sistema lineal $AX=0$. *(1 punto)*

3. a) Calcule las derivadas de las funciones $f(x)=\ln\frac{x^2}{\sqrt{x+3}}$, $g(x)=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}$. *(1 punto)*

b) Calcule $\int_0^1 (x-e^{-2x})dx$. *(0,5 puntos)*

4. Estudios realizados han permitido determinar que el nivel medio diario de monóxido de carbono, *CO_2*, en el aire en partes por millón (ppm), en una ciudad está relacionado con la población *p* expresada en miles de habitantes, por la siguiente expresión $C(p)=\sqrt{\frac{p^2}{2}+17}$. La evolución del tamaño de población en esta ciudad en t años se estima que está dado por la relación, $p(t)=3{,}1+0{,}1t^2$ en miles de habitantes. ¿Con qué rapidez estará variando la concentración de *CO_2* en esta ciudad dentro de 3 años? *(2 puntos)*

5. La edad a la que obtienen el permiso de conducir los habitantes de una determinada población es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 24 años y desviación típica 4 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 habitantes de dicha población. Sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad de obtención del permiso de conducir.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$? *(1 punto)*

b) Halle el intervalo de confianza al 90% para $\overline{X}$. *(2 puntos)*

k	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $p(z\le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

Para la corrección del ejercicio se tendrán en cuenta los siguientes criterios generales:

Se valorará el uso del vocabulario y la notación científica.

- En aquellas preguntas en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.
- En las preguntas prácticas primará el correcto planteamiento del problema y se valorarán positivamente las explicaciones claras y precisas, y negativamente la ausencia de explicaciones o las explicaciones incorrectas.
- Si se comete un error que tenga relación con resultados ulteriores de la misma pregunta, se ha de tener en cuenta si existe coherencia con el resultado erróneo. En caso afirmativo, se valorará el resto de las cuestiones de la misma pregunta, aunque si el error conduce a problemas más simples de los inicialmente propuestos disminuirá la calificación.
- Se podrán usar calculadoras aunque no sean necesarias para la resolución de los ejercicios. Se exigirá que todos los resultados analíticos y gráficos estén paso a paso justificados. (Utilización de fórmulas, obtención de gráficas, cálculo de derivadas).
- A la hora de corregir la prueba, se tendrá en cuenta la falta de acuerdo sobre los conceptos de convexidad y concavidad en la Bibliografía.

Se valorará el buen uso de la lengua y la adecuada notación científica, que los correctores podrán bonificar con un máximo de un punto. Por los errores ortográficos, la falta de limpieza en la presentación y la redacción defectuosa podrá bajarse la calificación hasta un punto.

OPCIÓN A

1. a) Cada una de las restricciones 0,25 puntos. Función de beneficios 0,25 puntos. Dibujar el conjunto factible 0,5 puntos. Calcular los vértices 0,5 puntos. Calcular el máximo 0,25 puntos.

b) Dibujar el nuevo recinto 0,5 puntos. Concluir que no varía el máximo 0,5 puntos.

2. a) Cada derivada 0,5 puntos.

b) Calcular la primitiva 0,25 puntos. Aplicar la fórmula de Barrow 0,25 puntos.

3. Dominio de definición 0,75 puntos. Calcular los intervalos de crecimiento 0,75 puntos. Concluir que x=0 es un máximo 0,5 puntos.

4. a) 1 punto. **b)** 1 punto. **c)** 1 punto.

OPCIÓN B

1. a) 0,75 puntos.

b) Despejar *X* 0,75 puntos. Calcular *X* 0,5 puntos.

2. a) 0,5 puntos.

b) Concluir a partir de a) que tiene una única solución 1 punto. Resolver el sistema sin utilizar a) 0,5 puntos.

3. a) Cada derivada 0,5 puntos.

b) Calcular la primitiva 0,25 puntos. Aplicar la fórmula de Barrow 0,25 puntos.

4. Sustituir p en la función 0,75 puntos. Derivar la función con respecto al tiempo 0,75 puntos. Evaluar en t=3 0,5 puntos.

5. a) 1 punto. **b)** Cada extremo del intervalo 1 punto.

El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. Una perfumería desea liquidar 100 frascos de perfume y 150 barras de labios que han quedado descatalogados en sus firmas, para ello lanza dos ofertas A y B. La oferta A consiste en un lote de un frasco de perfume y una barra de labios que se vende a 30 €. La oferta B consiste en un frasco de perfume y dos barras de labios que se vende a 40 €. No desea ofrecer menos de 10 lotes de la oferta A ni menos de 20 de la oferta B.

a) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar la ganancia? *(2,5 puntos)*

b) ¿Cambiaría la respuesta al apartado a) si eliminamos el hecho de que desee ofrecer al menos 20 lotes de la oferta B? *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en forma de tabla para escribir cómodamente la función objetivo y las restricciones:

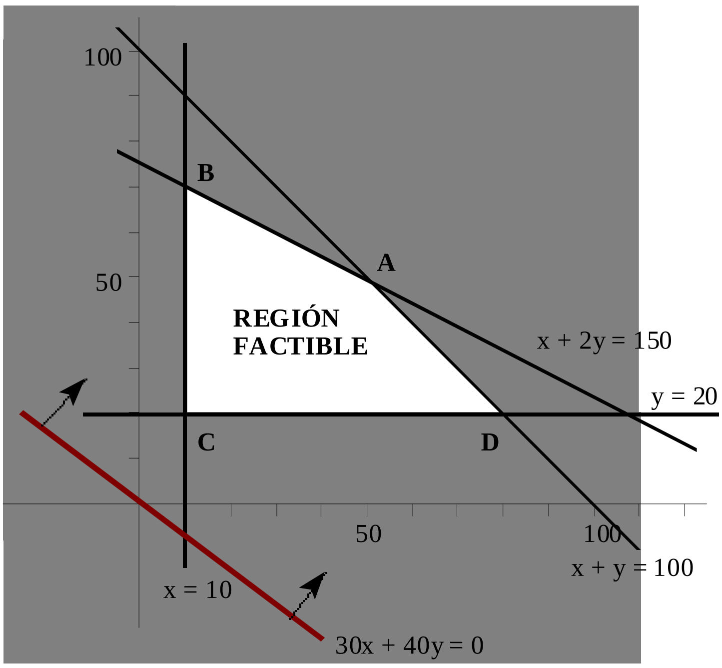
LOTES	NÚMERO	FRASCOS P.	BARRAS L.	VENTA
A	x	x	x	30x
B	y	y	2y	40y
	$x \geq 10$ $y \geq 20$	$x+y \leq 100$	$x+2y \leq 150$	$f(x,y) = 30x+40y$

La función objetivo, que debe maximizarse, es $f(x,y) = 30x+40y$

El conjunto de restricciones es: $\{\ x \geq 10\ ;\ y \geq 20\ ;\ x+y \leq 100\ ,\ x+2y \leq 150\ \}$

Dibujemos la región factible:

- La inecuación $x \geq 10$ tiene por solución el semiplano a la derecha de la recta $x = 10$
- La inecuación $y \geq 20$ tiene por solución el semiplano que está por encima de la recta $y = 20$
- La recta $x+y = 100$ pasa por los puntos $(100\,,0)$ y $(0\,,100)$. El semiplano al que pertenece el origen de coordenadas es la solución de la inecuación $x+y \leq 100$
- La recta $x+2y = 150$ pasa por los puntos $(10\,,70)$ y $(90\,,30)$ por ejemplo. El semiplano solución es el que contiene al origen de coordenadas.



El nivel 0 de la función objetivo: $f(x,y) = 0 \iff 30x+40y = 0$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas $(0\,,0)$ y por el punto $(40\,,-30)$.

Al trasladarla, paralelamente a sí misma, hacia la región factible, el último vértice que toca es el $A(50\,,50)$ que es el que maximiza a la función objetivo.

Por tanto, debe vender 50 lotes de cada oferta.

b) Desaparece una restricción: $y \geq 20$. La región factible es ahora abierta pero la solución no cambia pues el último vértice de la misma que toca $f(x,y) = 0$ al trasladarse hacia la derecha sigue siendo el A.

2. **a)** Derive las siguientes funciones $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}}\right)$, $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{x}}}}$, *(1 punto)*

b) Calcule $\int_1^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)dx$. *(0,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a)

- $f'(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x+\frac{x}{\sqrt{x}}}=-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+x\right)}=-\frac{1}{2x\left(\sqrt{x}+1\right)}$

- $g'(x)=\frac{-e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(x+xe^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

b) Obtengamos una primitiva de la función: $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)dx=\int x^{-1/2}\,dx-\int\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}-\ln|x|=2\sqrt{x}-\ln|x|$

y entonces: $\int_1^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)dx=\left[2\sqrt{x}-\ln|x|\right]_1^3=2\sqrt{3}-\ln 3-2$

3. Halle el dominio de definición, los máximos y mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

- Dominio de definición: $1-x^2>0 \;\Rightarrow\; (1+x)(1-x)>0 \;\Rightarrow\; x\in(-1,1)$. Por tanto: $D(f)=(-1,1)$
- Máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento: $f'(x)=\frac{-2x}{1-x^2}=0 \;\Rightarrow\; x=0$

f’ > 0		f’ < 0	
!1	0		1

Es creciente en $(-1,0)$ y decreciente en $(0,1)$ y como se trata de una función continua en su dominio, en $x=0$ tiene un máximo relativo.

4. En el departamento textil de unos grandes almacenes se encuentran mezcladas y a la venta 100 camisetas de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que una camiseta tenga tara es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige una camiseta al azar.
a) Calcule la probabilidad de que la camiseta tenga tara. *(1 punto)*
b) Calcule la probabilidad de que la camiseta sea de la marca B. *(1 punto)*
c) Sabiendo que la camiseta elegida tiene tara, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

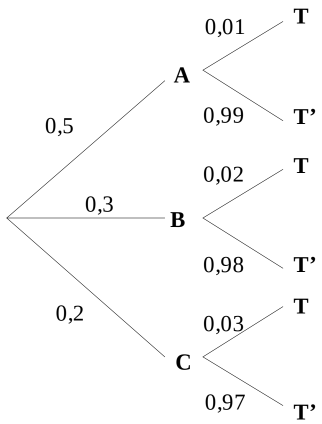
Sea A el suceso “la camiseta elegida es de la marca A. Su probabilidad es: $\mathrm{p}(\mathrm{A})=\frac{100}{200}=0{,}5$

Sea B el suceso “la camiseta elegida es de la marca B” cuya probabilidad es: $\mathrm{p}(\mathrm{B})=\frac{60}{200}=0{,}3$

Sea C el suceso “la camiseta elegida es de la marca C” cuya probabilidad es: $\mathrm{p}(\mathrm{C})=\frac{40}{200}=0{,}2$

Sea T el suceso "la camiseta elegida tiene tara" y T' su suceso contrario "la camiseta elegida no tiene tara".

Organicemos las posibles situaciones mediante un diagrama de árbol:



a) Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(T) = p(A)\cdot p(T/A) + p(B)\cdot p(T/B) + p(C)\cdot p(T/C) =$$

$$= 0,5\cdot 0,01 + 0,3\cdot 0,02 + 0,2\cdot 0,03 = 0,017$$

b) $p(B) = 0,3$

c) Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p(B/T) = \frac{p(B)\cdot p(T/B)}{p(T)} = \frac{0,3\cdot 0,02}{0,017} = 0,353$$

OPCIÓN B

1. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule la matriz inversa de la matriz $B - I_3$ con $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *(0,75 puntos)*

b) Calcule una matriz X tal que $BX - 4A = X$. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{F_3 - 2F_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{F_1+F_3 \\ F_2+F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{-F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow (B - I_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $BX - 4A = X \Leftrightarrow BX - X = 4A \Leftrightarrow (B - I_3)X = 4A \Leftrightarrow X = (B - I_3)^{-1}\cdot 4A$

Por lo tanto: $$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule el rango de la matriz A. *(0,5 puntos)*
b) Aplicar el apartado a) para resolver el sistema lineal $AX=0$. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) $\text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{2F_2-F_1 \\ 2F_3-F_1}}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \overset{F_2\leftrightarrow F_3}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \overset{F_3+3F_2}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}\,A=3$

b) Puesto que el rango de la matriz de los coeficientes es 3, el sistema homogéneo es compatible determinado y su única solución es la trivial: $x=y=z=0$

3. **a)** Calcule las derivadas de las funciones $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{x+3}}$, $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}}$. *(1 punto)*

b) Calcule $\int_0^1 \left(x-e^{-2x}\right)dx$. *(0,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) - $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{x+3}}=2\ln x-\dfrac{1}{2}\ln\left(x+3\right) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2\left(x+3\right)}=\dfrac{4x+12-x}{2x\left(x+3\right)}=\dfrac{3x+12}{2x^2+6x}$

- $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}}=x^{-\frac{3}{4}} \Rightarrow g'(x)=-\dfrac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}=-\dfrac{3}{4\,x\sqrt[4]{x^3}}$

b) Calculemos una primitiva de la función:

$$\int\left(x-e^{-2x}\right)dx=\int x\,dx-\int e^{-2x}\,dx=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\left(-2\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{e^{-2x}}{2}=\frac{x^2+e^{-2x}}{2}$$

Y por tanto: $\int_0^1\left(x-e^{-2x}\right)dx=\left[\dfrac{x^2+e^{-2x}}{2}\right]_0^1=\dfrac{1+e^{-2}}{2}-\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{e^{-2}}{2}=\dfrac{1}{2e^2}$

4. Estudios realizados han permitido determinar que el nivel medio diario de monóxido de carbono, CO_2, en el aire en partes por millón (ppm) en una ciudad, está relacionado con la población p expresada en miles de habitantes por la siguiente expresión $C(p)=\sqrt{\dfrac{p^2}{2}+17}$. La evolución del tamaño de población en esta ciudad en t años se estima que está dado por la relación $p(t)=3{,}1+0{,}1t^2$ en miles de habitantes. ¿Con qué rapidez estará variando la concentración de CO_2 en esta ciudad dentro de 3 años?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

El nivel medio diario de CO_2 al cabo de t años es: $C(t)=\sqrt{\dfrac{\left(3{,}1+0{,}1t^2\right)^2}{2}+17}$. La velocidad de variación, al cabo de 3 años, será $C'(3)$. Tenemos:

$$C'(t)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\left(3{,}1+0{,}1t^2\right)^2}{2}+17}}\cdot\frac{1}{2}\,2\left(3{,}1+0{,}1t^2\right)0{,}2t=\frac{0{,}2t\left(3{,}1+0{,}1t^2\right)}{2\sqrt{\frac{\left(3{,}1+0{,}1t^2\right)^2}{2}+17}}\quad\Rightarrow\quad C'(3)=\frac{2{,}4}{10}=0{,}24\text{ ppm}$$

5. La edad a la que obtienen el permiso de conducir los habitantes de una determinada población es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 24 años y desviación típica 4 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 habitantes de dicha población. Sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad de obtención del permiso de conducir.

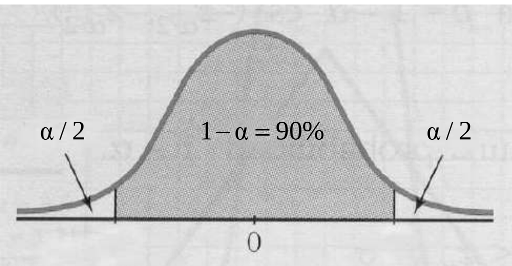
a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$? *(1 punto)*

b) Halle el intervalo de confianza al 90% para $\overline{X}$. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Por el teorema central del límite, las medias muestrales se distribuyen según una normal de media $\mu_{\overline{X}}=\mu=24$ años y desviación típica $\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{4}{10}=0{,}4$. Es decir, la media de las muestras se distribuyen mediante una normal $N(24\,;0{,}4)$. La media es entonces de 24 años y como la varianza es el cuadrado de la desviación típica: $\operatorname{var}\left(\overline{X}\right)=0{,}4^2=0{,}16$.

b) Obtengamos el valor crítico correspondiente a una probabilidad del 90%:



$$1-\alpha=0{,}9\quad\Rightarrow\quad\alpha=0{,}1\quad\Rightarrow\quad\frac{\alpha}{2}=0{,}05\quad\Rightarrow\quad1-\frac{\alpha}{2}=0{,}95$$

Observando la tabla: $z_{\alpha/2}=1{,}645$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\mu-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \mu+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Es decir: $\left(24-1{,}645\cdot0{,}4\ ;\ 24+1{,}645\cdot0{,}4\right)=\left(23{,}342\ ;\ 24{,}658\right)$

El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

a) Calcule una matriz X tal que $A^2X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. *(1,25 puntos)*

b) Calcule una matriz X tal que $A+XB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. *(1,25 puntos)*

2. Razonar la existencia de solución del sistema lineal:

$$\begin{aligned} x+3y+z&=6\\ x-2y-z&=5\\ 2x+11y+4z&=10 \end{aligned}$$

(1 punto)

3. a) Derive las funciones $f(x)=\ln^2(1+x)$, $g(x)=\left(\dfrac{x}{(x^3-x+1)^2}\right)^3$. *(1 punto)*

b) Calcule $\int_1^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)dx$. *(0,5 puntos)*

4. Halle los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x)=(x-2)^2(x-1)$. Calcule sus intervalos de crecimiento y decrecimiento así como los de concavidad y convexidad. *(2 puntos)*

5. Una caja de doce bombones contiene dos de licor. Se eligen cuatro bombones al azar.

a) Calcule la probabilidad de no coger ninguno de licor. *(1 punto)*

b) Calcule la probabilidad de coger exactamente uno de licor. *(1 punto)*

c) Calcule la probabilidad de coger al menos uno de licor. *(1 punto)*

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. Una fábrica textil quiere fabricar pantalones y faldas. La fábrica posee dos secciones: sección de corte y sección de confección. Cada pantalón requiere 6 minutos en la sección de corte y 4 en la de confección, mientras que cada falda requiere 4 minutos en la sección de corte y 6 en la de confección. La sección de corte no puede funcionar más de 6 horas al día y la de confección no más de 8 horas al día. Si cada pantalón deja a la empresa un beneficio de 10€ y cada falda de 6€:

a) ¿Cuántos pantalones y cuántas faldas se han de fabricar si se quiere maximizar el beneficio? *(2,5 puntos)*

b) Si se pudiera disponer de 1 hora más de funcionamiento en la sección de corte, ¿cuál sería la respuesta al apartado anterior? *(1 punto)*

2. a) Derive las funciones $f(x)=\sqrt{x^3e^{-x}}$, $g(x)=\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$. *(1 punto)*

b) Calcule $\int_2^4\left(x^{1/2}+x^2\right)dx$. *(0,5 puntos)*

3. Determine el dominio de definición de la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Halle sus intervalos de concavidad y convexidad así como sus puntos de inflexión. *(2 puntos)*

4. El tiempo diario de conexión a internet de los alumnos de cierto instituto sigue una distribución normal con desviación típica 15 minutos. Para estimar la media del tiempo de conexión se toma una muestra y se obtiene, con un nivel de confianza del 95%, el intervalo de confianza (38 min., 46 min.). Calcular la media y el tamaño de la muestra. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. *(3 puntos)*

k	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $p(z\le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

Para la corrección del ejercicio se tendrán en cuenta los siguientes criterios generales:

Se valorará el uso del vocabulario y la notación científica.

- En aquellas preguntas en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.
- En las preguntas prácticas primará el correcto planteamiento del problema y se valorarán positivamente las explicaciones claras y precisas, y negativamente la ausencia de explicaciones o las explicaciones incorrectas.
- Si se comete un error que tenga relación con resultados ulteriores de la misma pregunta, se ha de tener en cuenta si existe coherencia con el resultado erróneo. En caso afirmativo, se valorará el resto de las cuestiones de la misma pregunta, aunque si el error conduce a problemas más simples de los inicialmente propuestos disminuirá la calificación.
- Se podrán usar calculadoras aunque no sean necesarias para la resolución de los ejercicios. Se exigirá que todos los resultados analíticos y gráficos estén paso a paso justificados. (Utilización de fórmulas, obtención de gráficas, cálculo de derivadas).
- A la hora de corregir la prueba, se tendrá en cuenta la falta de acuerdo sobre los conceptos de convexidad y concavidad en la Bibliografía.

Se valorará el buen uso de la lengua y la adecuada notación científica, que los correctores podrán bonificar con un máximo de un punto. Por los errores ortográficos, la falta de limpieza en la presentación y la redacción defectuosa podrá bajarse la calificación hasta un punto.

OPCIÓN A

1. a) Despejar X 0,5 puntos. Calcular $\left(A^2\right)^{-1}$ 0,75 puntos.

b) Plantear el sistema 0,5 puntos. Ver que existen infinitas soluciones 0,5 puntos. Encontrar una matriz 0,25 puntos.

2. Escalonar la matriz 0,5 puntos. Razonar que no tiene solución 0,5 puntos.

3. a) Cada derivada 0,5 puntos.

b) Calcular la primitiva 0,25 puntos. Aplicar la fórmula de Barrow 0,25 puntos.

4. Máximo, mínimo y punto de inflexión 0,25 puntos cada uno. Estudio del crecimiento y decrecimiento 0,75 puntos. Estudio de la concavidad y convexidad 0,5 puntos.

5. a) 1 punto. **b)** 1 punto. **c)** 1 punto.

OPCIÓN B

1. a) No negatividad de las variables 0,25 puntos. Cada una de las dos restricciones 0,25 puntos. Dibujar el recinto 0,5 puntos. Calcular los vértices 0,75 puntos. Encontrar el máximo 0,5 puntos.

b) Modificar las restricciones y dibujar el nuevo recinto 0,5 puntos. Calcular los vértices y encontrar el nuevo máximo 0,5 puntos.

2. a) Cada derivada 0,5 puntos.

b) Calcular la primitiva 0,25 puntos. Aplicar la fórmula de Barrow 0,25 puntos.

3. Determinar el dominio de definición 0,5 puntos. Intervalos de convexidad 1 punto. Calcular punto de inflexión 0,5 puntos.

4. Determinar el valor crítico para el nivel de confianza del 95% 0,75 puntos. Calcular la media 1 punto. Calcular el tamaño de la muestra 1,25 puntos.

El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calcule una matriz X tal que $A^2X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *(1,25 puntos)*

b) Calcule una matriz X tal que $A + XB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Obtengamos la matriz A^2: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Tenemos: $A^2X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^2\right)^{-1} A^2X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot I = \left(A^2\right)^{-1}$

Debemos obtener entonces la matriz inversa de A^2 que coincidirá con la matriz X:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F1-F2}{\cap} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F2-2F1}{\cap} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \overset{F1-F2}{\cap} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(A^2\right)^{-1} = X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Para calcular X como en el apartado anterior, deberemos calcular B^{-1}. Pero B no tiene matriz inversa porque sus filas son proporcionales y su rango es 1. Debemos utilizar entonces otro procedimiento.

X, si existe, debe ser una matriz 2×2: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Se verifica:

$$A + XB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2b & 2a+4b \\ c+2d & 2c+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=-1 \\ 2a+4b=-2 \\ c+2d=-1 \\ 2c+4d=-2 \end{cases}$$

La primera y segunda ecuación son equivalentes y también la tercera y cuarta. Podremos obtener entonces dos de las incógnitas en función de las otras dos: $a = -2b-1$; $c = -2d-1$.

Las matrices que verifican la ecuación matricial dada son de la forma: $\begin{pmatrix} -2b-1 & b \\ -2d-1 & d \end{pmatrix}$

2. Razonar la existencia de solución del sistema lineal:

$$\begin{aligned} x+3y+z&=6 \\ x-2y-z&=5 \\ 2x+11y+4z&=10 \end{aligned}$$

(1 punto)

SOLUCIÓN.

Obtengamos los rangos de la matriz de los coeficientes A y de la matriz ampliada B:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & 11 & 4 & 10 \end{array}\right) \overset{\substack{F2-F1 \\ F3-2F1}}{\cap} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -2 \end{array}\right) \overset{F3+F2}{\cap} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \text{rg}\,A = 2 \\ \text{rg}\,B = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \text{rg}\,A \neq \text{rg}\,B \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ el sistema es incompatible, no tiene solución.

3. a) Derive las funciones: $f(x) = \ln^2(1+x)$, $g(x) = \left(\dfrac{x}{(x^3 - x + 1)^2} \right)^3$. *(1 punto)*

b) Calcule $\int_1^2 \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \right) dx$. *(0,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = 2\ln(1+x) \cdot \dfrac{1}{1+x}$

$$g'(x) = 3\left(\frac{x}{(x^3 - x + 1)^2} \right)^2 \cdot \frac{(x^3 - x + 1)^2 - x \cdot 2(x^3 - x + 1) \cdot (3x^2 - 1)}{(x^3 - x + 1)^4} = \frac{3x^2 (x^3 - x + 1)\left[x^3 - x + 1 - 2x(3x^2 - 1) \right]}{(x^3 - x + 1)^8} =$$

$$= \frac{3x^2(-5x^3 + x + 1)}{(x^3 - x + 1)^7}$$

b) Obtengamos una primitiva de la función: $\int \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \right) dx = \int \dfrac{1}{x}\, dx - \int x^{-2}\, dx = \ln x - \dfrac{x^{-1}}{-1} = \ln x + \dfrac{1}{x}$

Tenemos entonces: $\int_1^2 \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \right) dx = \left[\ln x + \dfrac{1}{x} \right]_1^2 = \left(\ln 2 + \dfrac{1}{2} \right) - (\ln 1 + 1) = \ln 2 + \dfrac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$

4. Halle los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x) = (x-2)^2 (x-1)$. Calcule sus intervalos de crecimiento y decrecimiento así como los de concavidad y convexidad. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

$f'(x) = 2(x-2)(x-1) + (x-2)^2 = (x-2)(3x-4)$; $f''(x) = (3x-4) + 3(x-2) = 6x - 10$

- Calculemos los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = (x-2)(3x-4) = 0 \Rightarrow x = 2$, $x = \dfrac{4}{3}$ (puntos críticos)

$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow$ En $x = 2$ la función tiene un mínimo: $(2, 0)$

$f''\left(\dfrac{4}{3}\right) = -2 < 0 \Rightarrow$ En $x = \dfrac{4}{3}$ la función tiene un máximo: $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{27} \right)$

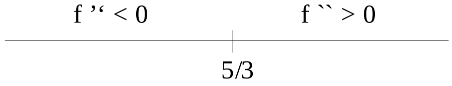
Como la función es continua, los puntos de máximo y de mínimo separan los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

Creciente: $\left(-\infty, \dfrac{4}{3} \right) \cup (2, +\infty)$

Decreciente: $\left(\dfrac{4}{3}, 2 \right)$

- Calculemos los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad:

$f''(x) = 6x - 10 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$ y como $f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ En $x = \dfrac{5}{3}$ la función tiene un punto de inflexión.



Convexa: $\left(-\infty, \dfrac{5}{3} \right)$

Cóncava: $\left(\dfrac{5}{3}, +\infty \right)$

5. Una caja de doce bombones contiene dos de licor. Se eligen cuatro bombones al azar.

a) Calcule la probabilidad de no coger ninguno de licor. *(1 punto)*

b) Calcule la probabilidad de coger exactamente uno de licor. *(1 punto)*

c) Calcule la probabilidad de coger al menos uno de licor. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

Sea L_i el suceso "el bombón cogido en i-ésimo lugar es de licor" y L_i' el suceso "el bombón cogido en i-ésimo lugar no es de licor".

a) $p(L_1' \cap L_2' \cap L_3' \cap L_4') = p(L_1') \cdot p(L_2'/L_1') \cdot p(L_3'/L_1' \cap L_2') \cdot p(L_4'/L_1' \cap L_2' \cap L_3') = \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} =$

$= \frac{56}{132} = \frac{14}{33} \cap 0,42$

b) Se trata de calcular la probabilidad de coger uno de licor y los otros tres no. Hay que tener en cuenta que:

$p(L_1 \cap L_2' \cap L_3' \cap L_4') = \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{132} = \frac{4}{33}$

y como el bombón de licor puede salir también en 2º, 3º o 4º lugar con la misma probabilidad que en primer lugar, la probabilidad de coger uno de licor y tres no es: $4 \cdot \frac{4}{33} = \frac{16}{33} \cap 0,48$

c) El suceso "coger al menos uno de licor" es el contrario del suceso "no coger ninguno de licor" cuya probabilidad hemos obtenido en el apartado a). Por tanto: $p = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33} \cap 0,58$

OPCIÓN B

1. Una fábrica textil quiere fabricar pantalones y faldas. La fábrica posee dos secciones: sección de corte y sección de confección. Cada pantalón requiere 6 minutos en la sección de corte y 4 en la de confección, mientras que cada falda requiere 4 minutos en la sección de corte y 6 en la de confección. La sección de corte no puede funcionar más de 6 horas al día y la de confección no más de 8 horas al día. Si cada pantalón deja a la empresa un beneficio de 10 € y cada falda de 6 €:

a) ¿Cuántos pantalones y cuántas faldas se han de fabricar si se quiere maximizar el beneficio? *(2,5 puntos)*

b) Si se pudiera disponer de 1 hora más de funcionamiento en la sección de corte, ¿cuál sería la respuesta al apartado anterior? *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

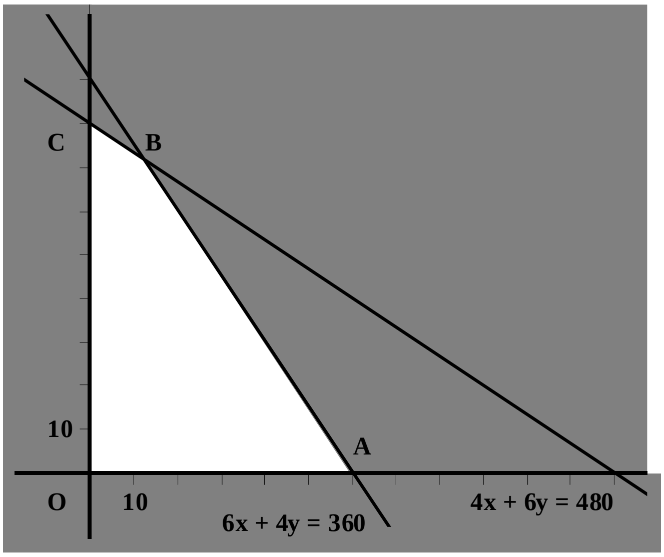
a) Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

	Nº	**Corte**	**Confección**	**Beneficio**
pantalones	x	6x	4x	10x
faldas	y	4y	6y	6y
	$x \geq 0$, $y \geq 0$	$6x + 4y \leq 360$	$4x + 6y \leq 480$	$F(x, y) = 10x + 6y$

La función objetivo es la función de beneficios que debe ser máxima: $F(x, y) = 10x + 6y$

Las restricciones a las que debe someterse la solución son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 4y \leq 3600 \\ 4x + 6y \leq 480 \end{cases}$

Estudiemos la solución gráfica al problema:



Las rectas $x=0$ e $y=0$ son los ejes de ordenadas y abscisas respectivamente. Los semiplanos soluciones de las inecuaciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$ son el derecho y el superior respectivamente.

La recta $6x+4y=360$ pasa por los puntos $(60,0)$ y $(0,90)$ por ejemplo. La solución de la inecuación $6x+4y \leq 360$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La recta $4x+6y=480$ pasa por los puntos $(120,0)$ y $(0,80)$ por ejemplo. La solución de la inecuación $4x+6y \leq 480$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La región factible (solución del sistema de restricciones) es el cuadrilátero OABC (en blanco).

La solución que maximiza la función objetivo está en alguno de los vértices de la región factible. Veamos en cuál:

El vértice O es el origen de coordenadas $O(0,0)$ y la función objetivo es igual a 0 en él: $F(0,0)=0$

En el vértice $A(60,0) \Rightarrow F(60,0)=600$

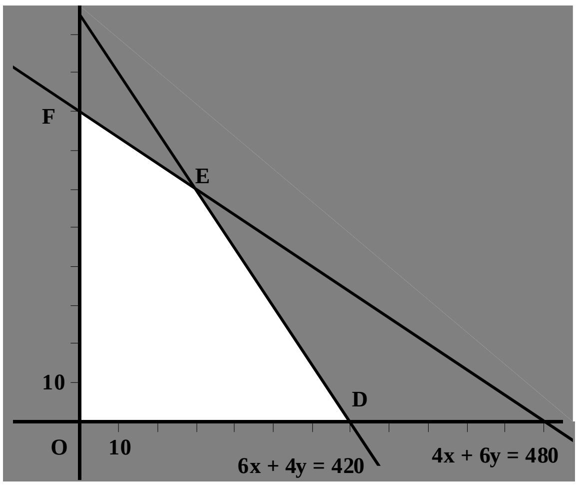
El vértice B es la solución del sistema $\begin{cases} 6x+4y=360 \\ 4x+6y=480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=180 \\ 2x+3y=240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x+6y=540 \\ -4x-6y=-480 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 5x=60 \quad \Rightarrow \quad x=12 \ , \ y=72 \quad \Rightarrow \quad B(12\ ,72) \quad \Rightarrow \quad F(12\ ,72)=552$

En el vértice $C(0,80) \Rightarrow F(0,80)=480$

Por tanto, los beneficios son máximos cuando se fabrican 60 pantalones.

b) Ahora la restricción $6x+4y \leq 360$ se convierte en $6x+4y \leq 420$. La recta $6x+4y=420$ pasa por los puntos $(70\ ,0)$ y $(10\ ,90)$ por ejemplo. La solución de la inecuación $6x+4y \leq 420$ sigue siendo el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas. La región factible es ahora el cuadrilátero ODEF cuyos vértices y el valor de la función objetivo en ellos son:



$O(0\ ,0) \Rightarrow F(0\ ,0)=0$

$D(70\ ,0) \Rightarrow F(70\ ,0)=700$

$\begin{cases} 4x+6y=480 \\ 6x+4y=420 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=240 \\ 3x+2y=210 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x-6y=-480 \\ 9x+6y=630 \end{cases} \Rightarrow 5x=150 \Rightarrow x=30\ ,\ y=60$

$E(30\ ,60) \Rightarrow F(30\ ,60)=660$

$F(0\ ,80) \Rightarrow F(0\ ,80)=480$

Por tanto, la función objetivo se maximiza en D, es decir conviene fabricar 70 pantalones.

2. a) Derive las funciones $f(x)=\sqrt{x^3e^{-x}}$, $g(x)=\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$ *(1 punto)*

b) Calcule $\int_2^4 \left(x^{\frac{1}{2}}+x^2\right)dx$. *(0,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\dfrac{3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}}{2\sqrt{x^3e^{-x}}}=\dfrac{x^2e^{-x}(3-x)}{2x\sqrt{x\,e^{-x}}}=\dfrac{xe^{-x}(3-x)}{2\sqrt{x\,e^{-x}}}=\dfrac{x(3-x)}{2e^{x}\sqrt{x\,e^{-x}}}$

$g'(x)=5\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^4\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)$

b) Obtengamos una primitiva de la función $f(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^2$: $\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^2\right)dx=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}x^3=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+\dfrac{1}{3}x^3$

Se tiene entonces: $\int_2^4\left(x^{\frac{1}{2}}+x^2\right)dx=\left[\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+\dfrac{1}{3}x^3\right]_2^4=\left(\dfrac{16}{3}+\dfrac{64}{3}\right)-\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}+\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{72-4\sqrt{2}}{3}=24-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

3. Determine el dominio de definición de la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Halle sus intervalos de concavidad y convexidad así como sus puntos de inflexión. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

- El dominio de $y=\ln x$ es $\cap^{+}=(0,+\infty)$. El dominio de $f(x)$ es por tanto: $\cap^{+}=(0,+\infty)$.

- $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$; $f''(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\dfrac{-x(1+2-2\ln x)}{x^4}=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}=0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; -3+2\ln x=0 \;\Rightarrow\; \ln x=\dfrac{3}{2} \;\Rightarrow\; x=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^3}=e\sqrt{e}$

Se tiene:

$f''<0$	$f''>0$
0	$e\sqrt{e}$

La función es convexa en $(0,e\sqrt{e})$ y cóncava en $(e\sqrt{e},+\infty)$.

Como la función es continua en su dominio en $x=e\sqrt{e}$ tiene un punto de inflexión.

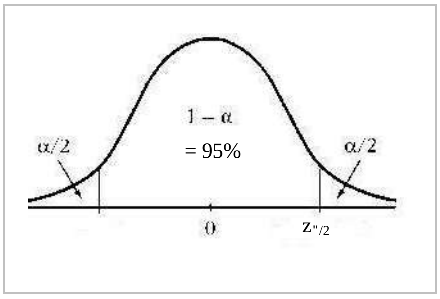
4. El tiempo diario de conexión a internet de los alumnos de cierto instituto sigue una distribución normal con desviación típica 15 minutos. Para estimar la media del tiempo de conexión se toma una muestra y se obtiene, con un nivel de confianza del 95%, el intervalo de confianza $(38\text{ min.}, 46\text{ min.})$. Calcular la media y el tamaño de la muestra. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

El intervalo de confianza está centrado en la media. Por tanto, $\overline{X}=42$ minutos .

El radio del intervalo (error máximo admisible) es: $E = 4 = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad 4\sqrt{n} = z_{\alpha/2} \cdot \sigma \quad \Rightarrow \quad n = \left(\dfrac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{4} \right)^2$

Calculemos, mediante la tabla de la normal, el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98%:



$1 - \alpha = 0,95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\alpha}{2} = 0,025 \quad \Rightarrow \quad 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975$

En la tabla encontramos: $p\left(z \le z_{\alpha/2}\right) = 0,975 \quad \Rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 1,96$

Por tanto: $n = \left(\dfrac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{4} \right)^2 = \left(\dfrac{15 \cdot 1,96}{4} \right)^2 = 54,02 \cap 54$ alumnos

El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. Considerar las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) *(0,75 puntos)* Calcular la matriz A^{-1}.

b) *(1 punto)* ¿Cuantas filas y cuantas columnas ha de tener una matriz D para que la ecuación $AD=B$ tenga solución? Resolver la ecuación $AD=B$.

c) *(0,25 puntos)* Estudiar el rango de la matriz C.

d) *(1,5 puntos)* Utilizando los apartados a) y c) resolver el sistema lineal $(AC)X=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

2. a) *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}}$. **a2)** $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$.

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\int_0^1 xe^{5x^2}dx$.

c) Un fondo de inversión genera una rentabilidad que depende de la cantidad invertida según la fórmula $R(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{5x}$, donde x representa la cantidad invertida en miles de euros.

c1) *(1 punto)* ¿Qué cantidad de dinero se debería de invertir para obtener el máximo rendimiento?

c2) *(1 punto)* ¿Es posible perder dinero con este fondo de inversión?

3. La cantidad de horas que duermen los vecinos de un pueblo de Zaragoza se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 0,64. Se toma una muestra aleatoria simple y se obtienen los siguientes datos (en horas que duermen cada noche):

6,9	7,6	6,5	6,2	7,8	7,0	5,5	7,6
7,3	6,6	7,1	6,9	6,7	6,5	7,2	5,8

a) *(0,5 puntos)* Calcular la media muestral del número de horas que se duerme cada noche.

b) *(2,5 puntos)* Determinar el nivel de confianza para el cual el intervalo de confianza para la media de horas que se duerme cada noche es (6,65 , 7). Detallar los pasos realizados para obtener los resultados.

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. Se va a organizar una planta en una empresa de electrodomésticos donde van a trabajar mecánicos y electricistas. Por necesidad del mercado es necesario que haya mayor o igual número de electricistas que de mecánicos y que el número de electricistas no supere al doble del de mecánicos. Se necesitan al menos 20 electricistas y no hay más de 30 mecánicos disponibles.

a) *(1 punto)* Plantear un problema lineal que nos permita averiguar cuantos trabajadores de cada clase se deben de contratar para maximizar el beneficio que obtiene la empresa por mes, sabiendo que por cada mecánico se obtienen 2000€ de beneficio mensual y por cada electricista 2500€.

b) *(1,5 puntos)* Calcular cuantos mecánicos y cuantos electricistas se deben de contratar para obtener un beneficio máximo, si el beneficio mensual que se obtiene por cada trabajador es el expuesto en el apartado a).

c) *(1 punto)* Si cada mecánico y cada electricista cuestan a la empresa 300€ mensuales y podemos disponer de todos los mecánicos que se necesiten, ¿cuántos trabajadores de cada clase habrá de contratar la empresa para que el coste sea mínimo?

2. a) *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$. **a2)** $g(x)=e^{\sqrt{x(1-x)}}$.

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\int_1^2 (x^2-5x+\frac{1}{x^2})dx$.

c) Considerar la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{(x-4)(x-5)} & \text{si } x\le 3\\[2mm] \dfrac{x^2-2}{(x+1)(x-3)} & \text{si } x>3\end{cases}$.

c1) *(0,75 puntos)* Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x=3$.

c2) (1,25 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ así como los máximos y mínimos si $x<3$.

3. Tres forofos del Real Zaragoza van al fútbol y desean hacerlo con la bufanda de su equipo, pero solamente tienen una. La ponen en una bolsa junto con otras dos bufandas negras y los tres van sacando, por orden, la bufanda que han de llevar.

a) (2 puntos) ¿Alguno de los tres amigos tiene ventaja?: El que saca la bufanda en primer lugar, el que la saca en segundo lugar o el último. Razonar la respuesta.

b) *(1 punto)* Si se meten tres bufandas negras en la bolsa en lugar de dos, además de la bufanda del equipo, calcular la probabilidad de que ninguno saque la de su equipo.

k	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $p(z\le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

Para la corrección del ejercicio se tendrán en cuenta los siguientes criterios generales:

Se valorará el uso del vocabulario y la notación científica.

- En aquellas preguntas en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.
- En las preguntas prácticas primará el correcto planteamiento del problema y se valorarán positivamente las explicaciones claras y precisas, y negativamente la ausencia de explicaciones o las explicaciones incorrectas.
- Si se comete un error que tenga relación con resultados ulteriores de la misma pregunta, se ha de tener en cuenta si existe coherencia con el resultado erróneo. En caso afirmativo, se valorará el resto de las cuestiones de la misma pregunta, aunque si el error conduce a problemas más simples de los inicialmente propuestos disminuirá la calificación.
- Se podrán usar calculadoras aunque no sean necesarias para la resolución de los ejercicios. Se exigirá que todos los resultados analíticos y gráficos estén paso a paso justificados. (Utilización de fórmulas, obtención de gráficas, cálculo de derivadas).
- A la hora de corregir la prueba, se tendrá en cuenta la falta de acuerdo sobre los conceptos de convexidad y concavidad en la Bibliografía.

Se valorará el buen uso de la lengua y la adecuada notación científica, que los correctores podrán bonificar con un máximo de un punto. Por los errores ortográficos, la falta de limpieza en la presentación y la redacción defectuosa podrá bajarse la calificación hasta un punto.

OPCIÓN A

1. a) Calcular A^{-1} 0,75 ptos.

b) Dimensiones de la matriz D 0,25 ptos. Despejar utilizando a) 0,5 ptos. Calcular D 0,25 ptos. Calcular D sin utilizar a) 0,25 ptos.

c) Rango 0,25 ptos.

d) Multiplicar por A^{-1} para obtener $CX=0$ 0,5 ptos. Concluir que $CX=0$ es un sistema compatible indeterminado utilizando el apartado c) 0,5 ptos. Dar las soluciones 0,5 ptos. Resolver el sistema sin utilizar los apartados anteriores 0,75 ptos.

2. a) Cada derivada 0,5 ptos.

b) La integral 0,5 ptos.

c) c1) Calcular la derivada 0,25 ptos. Calcular el punto crítico 0,25 ptos. Concluir que en ese punto se obtiene el máximo rendimiento 0,5 ptos.

c2) Razonar que perderemos dinero si $R(x)<0$ 0,5 ptos. resolver la inecuación 0,5 ptos.

3. a) Calcular la media 0,5 ptos.

b) Calcular el valor crítico 1 pto. Con el valor crítico encontrar el valor en la tabla 0,75 ptos. Nivel de confianza 0,75 ptos.

En los dos casos si se explican los cálculos y se ponen las fórmulas empleadas. Si no se explican 0,25 ptos. cada apartado

OPCIÓN B

1. a) Plantear las restricciones 0,5 ptos. Variables no negativas 0,25 ptos. Función objetivo 0,25 ptos.

b) Dibujar el recinto 0,5 ptos. Calcular los vértices 0,5 ptos. Encontrar el máximo 0,5 ptos.

c) Dibujar el nuevo recinto 0,25 ptos. Escribir la nueva función objetivo y observar que hay que minimizarla 0,5 ptos. Encontrar el mínimo 0,25 ptos.

2. a) Cada derivada 0,5 ptos.

b) La Integral 0,5 ptos.

c) c1) Calcular el límite por la derecha 0,5 ptos. Concluir que no es continua 0,25 ptos.

c2) Encontrar los puntos críticos 0,25 ptos. Concluir que uno de los dos es mayor que 3 0, 5 ptos. Escribir los intervalos de crecimiento 0,5 ptos. No tener en cuenta que un punto crítico es mayor que tres penaliza 0,25 ptos.

3. a) Calcular la probabilidad de cada forofo 0,5 ptos. Concluir que son iguales 0,5 ptos.

b) Calcular la probabilidad 1 pto.

El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. Considerar las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\2&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&2&2\\1&0&0\end{pmatrix}$

a) *(0,75 puntos)* Calcular la matriz A^{-1}.

b) *(1 punto)* ¿Cuántas filas y cuántas columnas ha de tener una matriz D para que la ecuación $AD=B$ tenga solución? Resolver la ecuación $AD=B$.

c) *(0,25 puntos)* Estudiar el rango de la matriz C.

d) *(1,5 puntos)* Utilizando los apartados a) y c) resolver el sistema lineal $(AC)X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.

a) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&0&-1&0&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{F_2-F_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&-1&-1&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{F_3-F_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&-1&-1&1&0\\0&0&2&1&-1&1\end{array}\right)\overset{\substack{-F_2\\F_3/2}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&1&-1&0\\0&0&1&1/2&-1/2&1/2\end{array}\right)\overset{F_2-F_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&1/2&-1/2&-1/2\\0&0&1&1/2&-1/2&1/2\end{array}\right)\overset{F_1-F_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&1/2&1/2\\0&1&0&1/2&-1/2&-1/2\\0&0&1&1/2&-1/2&1/2\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&1/2&1/2\\1/2&-1/2&-1/2\\1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}$$

b) $D=A^{-1}B$ y como A^{-1} es una matriz 3×3 y B es una matriz 3×2, la matriz D debe ser 3×2, es decir debe tener tres filas y dos columnas.

$$D=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1/2&1/2&1/2\\1/2&-1/2&-1/2\\1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

c) $$\text{rg } C=\text{rg}\begin{pmatrix}2&1&1\\4&2&2\\1&0&0\end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\4&2&2\end{pmatrix}\overset{\substack{F_2-2F_1\\F_3-4F_1}}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\overset{F_3-2F_2}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\text{rg } C=2$$

d) $(AC)X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}ACX=A^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow CX=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ y como $\text{rg}\,C=2\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

El sistema es equivalente a: $$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x=0\\y+z=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}x=0\\y=-\lambda\\z=\lambda\end{matrix}$$

2. a) *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}}$ **a2)** $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\int_0^1 xe^{5x^2}\,dx$.

c) Un fondo de inversión genera una rentabilidad que depende de la cantidad invertida según la fórmula $R(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{5x}$, donde x representa la cantidad invertida en miles de euros.

c1) *(1 punto)* ¿Qué cantidad de dinero se debería de invertir para obtener el máximo rendimiento?

c2) *(1 punto)* ¿Es posible perder dinero con este fondo de inversión?

SOLUCIÓN.

a) **a1)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}}=(1-\ln x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{2}(1-\ln x)^{-\frac{3}{2}}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{2x\sqrt{(1-\ln x)^3}}$

a2) $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=x^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow g'(x)=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}=-\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}=-\dfrac{1}{4x\sqrt[4]{x}}$

b) $\int x\,e^{5x^2}\,dx=\dfrac{1}{10}\int 10x\,e^{5x^2}\,dx=\dfrac{1}{10}e^{5x^2} \Rightarrow \int_0^1 x\,e^{5x^2}\,dx=\left[\dfrac{1}{10}e^{5x^2}\right]_0^1=\dfrac{e^5}{10}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{e^5-1}{10}$

c) **c1)** $R'(x)=\dfrac{\dfrac{5x}{2\sqrt{x}}-5\left(\sqrt{x}-1\right)}{25x^2}=\dfrac{5x-10\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{50x^2\sqrt{x}}=\dfrac{-5x+10\sqrt{x}}{50x^2\sqrt{x}}=\dfrac{-x+2\sqrt{x}}{10x^2\sqrt{x}}=$

$=\dfrac{-x\sqrt{x}+2x}{10x^3}=\dfrac{-\sqrt{x}+2}{10x^2}=0 \Rightarrow -\sqrt{x}+2=0 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$

$R''(x)=\dfrac{-\dfrac{10x^2}{2\sqrt{x}}-20x\left(-\sqrt{x}+2\right)}{100x^4} \Rightarrow R''(4)<0 \Rightarrow x=4$ es un máximo relativo

Se deben invertir 4000 € para obtener el máximo rendimiento

c2) Veamos si para alguna inversión el rendimiento es negativo: $R(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{5x}<0$

Como $x>0$, debe ser $\sqrt{x}-1<0 \Rightarrow \sqrt{x}<1 \Rightarrow x<1$ es decir, se pierde dinero cuando se invierten menos de 1000 euros

3. La cantidad de horas que duermen los vecinos de un pueblo de Zaragoza se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 0,64. Se toma una muestra aleatoria simple y se obtienen los siguientes datos (en horas que duermen cada noche):

6,9	7,6	6,5	6,2	7,8	7,0	5,5	7,6
7,3	6,6	7,1	6,9	6,7	6,5	7,2	5,8

a) *(0,5 puntos)* Calcular la media muestral del número de horas que se duerme cada noche.

b) *(2,5 puntos)* Determinar el nivel de confianza para el cual el intervalo de confianza para la media de horas que se duerme cada noche es $(6,65\ ,\ 7)$. Detallar los pasos realizados para obtener los resultados.

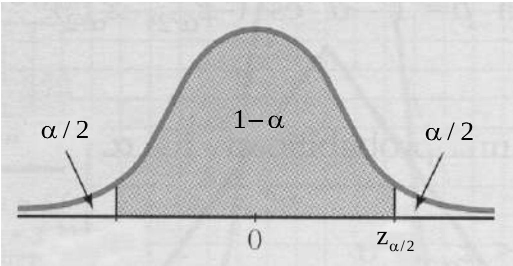
SOLUCIÓN.

a) $\overline{X}=\dfrac{6,9+7,6+6,5+6,2+7,8+7+5,5+7,6+7,3+6,6+7,1+6,9+6,7+6,5+7,2+5,8}{16}=\dfrac{109,2}{16}=6,825$ horas

b) Aunque la muestra tenga menos de 30 elementos, puesto que la distribución del número de horas que duermen los vecinos es normal, la distribución de las medias también lo es.

Si el intervalo de confianza es $(6{,}65\ ,\ 7) \Rightarrow \mu = \dfrac{6{,}65+7}{2} = 6{,}825$ horas y el error máximo admisible es:

$$E = 6{,}825 - 6{,}65 = 0{,}175 \quad \text{y como } E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0{,}175\cdot 4}{0{,}64} = 1{,}09375$$



Miramos en la tabla la probabilidad $p(z \le 1{,}09) = 0{,}8621$

Por tanto:

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}8621 = 0{,}1379 \Rightarrow \alpha = 0{,}2758 \Rightarrow 1-\alpha = 0{,}7242$$

El nivel de confianza es entonces de un 72,42%

OPCIÓN B

1. Se va a organizar una planta en una empresa de electrodomésticos donde van a trabajar mecánicos y electricistas. Por necesidad del mercado es necesario que haya mayor o igual número de electricistas que de mecánicos y que el número de electricistas no supere al doble del de mecánicos. Se necesitan al menos 20 electricistas y no hay más de 30 mecánicos disponibles.

a) *(1 punto)* Plantear un problema lineal que nos permita averiguar cuántos trabajadores de cada clase se deben de contratar para maximizar el beneficio que obtiene la empresa por mes, sabiendo que por cada mecánico se obtienen 2000 € de beneficio mensual y por cada electricista 2500 €.

b) *(1,5 puntos)* Calcular cuántos mecánicos y cuántos electricistas se deben de contratar para obtener un beneficio máximo, si el beneficio mensual que se obtiene por cada trabajador es el expuesto en el apartado a).

c) *(1 punto)* Si cada mecánico y cada electricista cuestan a la empresa 300 € mensuales y podemos disponer de todos los mecánicos que se necesiten, ¿cuántos trabajadores de cada clase habrá de contratar la empresa para que el coste sea mínimo?

SOLUCIÓN.

a) Organicemos los datos del problema en una tabla:

	Número	**Beneficio**	**Coste**
Mecánicos	x	2000x	300x
Electricistas	y	2500y	300y

Las restricciones son:

$x \ge 0$; $y \ge x$; $y \le 2x$; $y \ge 20$; $x \le 30$

La función objetivo para el apartado b) (beneficio máximo) es: $F(x,y) = 2000x + 2500y$

La función objetivo para el apartado c) (coste mínimo) es: $G(x,y) = 300x + 300y$. En este apartado debemos eliminar la última de las restricciones $x \le 30$.

b) Resolvamos el sistema de restricciones para obtener la región factible:

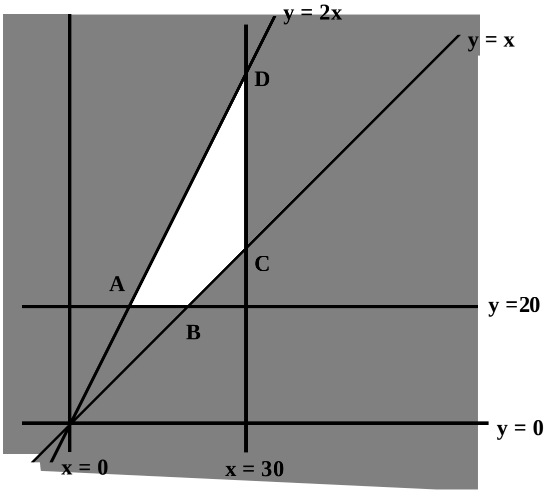
La recta $x = 0$ es el eje de ordenadas y el semiplano solución de la inecuación $x \ge 0$ es el de la derecha (en gris el semiplano no solución).

La recta $y = x$ es la bisectriz del primer cuadrante. El semiplano solución de $y \ge x$ es el que contiene al punto $(1,2)$ por ejemplo.

La recta $y = 2x$ pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,2)$. El semiplano solución de $y \le 2x$ es el que contiene al punto $(1,0)$, por ejemplo.

La recta $y = 20$ es horizontal. El semiplano solución de $y \geq 20$ es el semiplano superior.

La recta $x = 30$ es vertical. La solución de la inecuación $x \leq 30$ es el semiplano de la izquierda.



Dibujados los semiplanos solución del conjunto de restricciones, la solución común a todos ellos (región factible) es el cuadrilátero ABCD.

Como la solución óptima de la función objetivo se obtiene en los vértices de la región factible, calculemos las coordenadas de los mismos y el valor de la función objetivo $F(x, y) = 2000x + 2500y$ en cada uno de ellos:

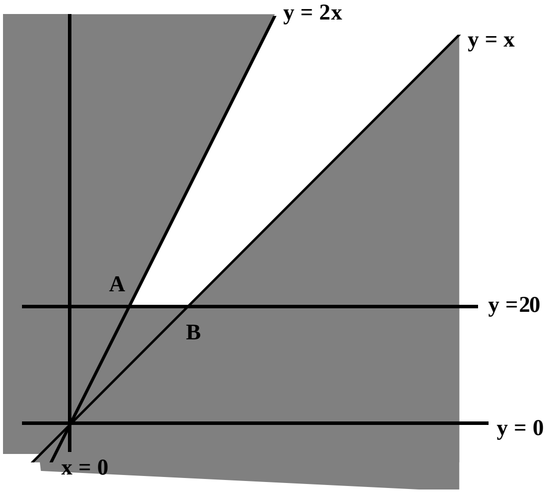
$A(10, 20) \;\Rightarrow\; F(10, 20) = 20000 + 50000 = 70000$ €

$B(20, 20) \;\Rightarrow\; F(20, 20) = 40000 + 50000 = 90000$ €

$C(30, 30) \;\Rightarrow\; F(30, 30) = 60000 + 75000 = 135000$ €

$D(30, 60) \;\Rightarrow\; F(30, 60) = 60000 + 150000 = 210000$ €

Por tanto, para maximizar los beneficios deben contratarse 30 mecánicos y 60 electricistas.



c) Ahora la función objetivo es $G(x, y) = 300x + 300y$ y debemos prescindir de la condición $x \leq 30$

La región factible es abierta. Sus vértices y el valor de la función objetivo en ellos son:

$A(10, 20) \;\Rightarrow\; G(10, 20) = 3000 + 6000 = 9000$ €

$B(20, 20) \;\Rightarrow\; G(20, 20) = 6000 + 6000 = 12000$ €

Por tanto, para minimizar los costes habrá que contratar a 10 mecánicos y 20 electricistas.

2. a) *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$ **a2)** $g(x) = e^{\sqrt{x(1-x)}}$.

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 - 5x + \frac{1}{x^2}\right) dx$.

c) Considerar la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{(x-4)\,(x-5)} & \text{si } x \leq 3 \\ \dfrac{x^2-2}{(x+1)\,(x-3)} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c1) *(0,75 puntos)* Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 3$.

c2) *(1,25 puntos)* Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ así como los máximos y mínimos si $x < 3$.

SOLUCIÓN.

a) **a1)** $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right) = \ln\left(e^x+1\right) - \ln\left(e^x-1\right) \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} - \dfrac{e^x}{e^x-1} = \dfrac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x}{e^{2x}-1} = -\dfrac{2e^x}{e^{2x}-1}$

a2) $g'(x) = e^{\sqrt{x-x^2}} \cdot \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$

b) Calculemos una primitiva de la función: $\int \left(x^2 - 5x + x^{-2}\right) dx = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + \dfrac{x^{-1}}{-1} = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} - \dfrac{1}{x}$

Entonces, por la fórmula de Barrow:

$$\int_1^2 \left(x^2 - 5x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 10 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} - 1\right) = \frac{7}{3} - 7 = -\frac{14}{3}$$

c) **c1)** • $\exists f(3) = 0$

• $\exists \lim\limits_{x\to 3} f(x) : \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{(x-4)(x-5)} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2}{(x+1)(x-3)} = \infty \end{array} \right. \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x) \Rightarrow$ la función es discontinua

c2) Para $x < 3$: $f(x) = \dfrac{x-3}{(x-4)(x-5)} = \dfrac{x-3}{x^2-9x+20}$

$$f'(x) = \frac{x^2-9x+20-(x-3)(2x-9)}{\left(x^2-9x+20\right)^2} = \frac{-x^2+6x-7}{\left(x^2-9x+20\right)^2} = 0 \Rightarrow -x^2+6x-7=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-28}}{-2} = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = 3 - \sqrt{2}$ pues la otra raíz $3+\sqrt{2} > 3$

Se tiene:

$$\underset{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3-\sqrt{2} \qquad\qquad\qquad 3}{\overline{\qquad f' < 0 \qquad\qquad | \qquad f' > 0 \qquad |}}$$

Es decir, la función es decreciente en $\left(-\infty, 3-\sqrt{2}\right)$ y creciente en $\left(3-\sqrt{2}, 3\right)$.

Como la función es continua en $(-\infty, 3)$, en $x = 3-\sqrt{2}$ tiene un mínimo relativo.

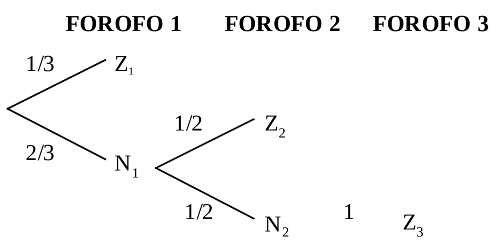
3. Tres forofos del Real Zaragoza van al fútbol y desean hacerlo con la bufanda de su equipo, pero solamente tienen una. La ponen en una bolsa junto con otras dos bufandas negras y los tres van sacando, por orden, la bufanda que han de llevar.

a) *(2 puntos)* ¿Alguno de los tres amigos tiene ventaja?: el que saca la bufanda en primer lugar, el que la saca en segundo lugar o el último?. Razonar la respuesta.

b) *(1 punto)* Si se meten tres bufandas negras en la bolsa en lugar de dos, además de la bufanda del equipo, calcular la probabilidad de que ninguno saque la de su equipo.

SOLUCIÓN.

a) Organicemos la situación en un diagrama en árbol. Z_i representa el suceso "el forofo i-ésimo saca la bufanda del Zaragoza" y N_i el suceso "el forofo i-ésimo saca una bufanda negra"



$p(Z_1) = \dfrac{1}{3}$

$p(Z_2) = p(N_1 \cap Z_2) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$

$p(Z_3) = p(N_1 \cap N_2 \cap Z_3) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{3}$

Luego los tres tienen la misma probabilidad.

b) $p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = p(N_1) \cdot p(N_2 / N_1) \cdot p(N_3 / N_1 \cap N_2) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. La suma de la inversión en acciones de una empresa textil, una empresa de gas y una compañía de telefonía es de 7400€. Las acciones de la empresa textil pagan un 2% de interés anual, las de la empresa de gas un 4% y las de la compañía de telefonía pagan un 5%. La suma del interés anual es de 278€. La inversión en acciones de la compañía de telefonía es de 1000€ menos que la suma de la inversión en acciones de la empresa textil y las acciones de la compañía de gas.

a) *(0,75 puntos)* Plantear un sistema lineal que permita calcular la cantidad invertida en cada una de las acciones.

b) *(0,75 puntos)* Calcular la cantidad invertida en cada una de las acciones.

c) *(1 punto)* ¿Podemos calcular el capital invertido en cada una de las acciones si cambiamos la tercera condición por "*el doble de la inversión en acciones de la compañía de telefonía es de 2000€ menos que la diferencia de la inversión en las acciones de la empresa textil y las acciones de la compañía de gas*"?

d) *(1 punto)* Llamando A a la matriz de coeficientes obtenida en el apartado c), resolver el sistema lineal $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. a) *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. **a2)** $g(x) = \dfrac{x^{3/2}}{(x+1)^3}$.

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\int_1^4 \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

c) Considerar la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

c1) *(0,5 puntos)* Hallar el dominio de definición de f.

c2) *(1 punto)* Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f así como sus máximos y mínimos.

c3) *(0,5 puntos)* Hallar los puntos de inflexión de f.

3. Luis y Ramón son jugadores de baloncesto. Luis encesta 3 de cada 5 tiros y Ramón 5 de cada 8. Si ambos tiran a canasta una sola vez, calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) *(1 punto)* Únicamente Luis ha encestado.

b) *(1 punto)* Ambos han encestado.

c) *(1 punto)* Al menos uno ha encestado.

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. Considerar $T=\left\{(x,y)\,|\,y\geq\frac{1}{3}x, y\leq 4x, 2x+y\leq 4, x+2y\leq 4\right\}$.

a) *(1 punto)* Representar gráficamente el conjunto anterior.

b) *(1,5 puntos)* Calcular los extremos de la función $2x+y$ sobre el conjunto T.

c) *(1 punto)* Calcular los extremos de $2x+y$ si añadimos al conjunto T la restricción $x+y\geq 1$.

2. a) *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x)=\frac{1}{x}+2\ln x-\frac{\ln x}{x}$. **a2)** $g(x)=\frac{e^x}{(x-1)^2}$.

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\int_0^2 (4x^3+e^{3x})dx$.

c) Se ha realizado una encuesta a una determinada población con el fin de determinar el número de personas que utilizarían el sistema de autobuses si la tarifa admitiera distintos importes. Basándose en los resultados de las encuestas, los analistas de sistemas han determinado una función aproximada que expresa el número diario de pasajeros en función de la tarifa. La función demanda viene dada por $D(x)=\sqrt{10+3x-\frac{5}{4}x^2}$, donde x representa la tarifa en euros.

c1) *(1 punto)* ¿Qué tarifa habrá que aplicar para obtener el mayor número de pasajeros?

c2) *(1 punto)* Si la tarifa aplicada está entre 1 y 2 euros, ¿como es la variación en la afluencia de pasajeros? ¿Creciente, decreciente?

3. *(3 puntos)* La cantidad de refresco que se sirve en cada vaso a la entrada de unos cines está normalmente distribuida con una desviación típica de 15 ml. Hemos medido las cantidades en los vasos de los 25 asistentes de una determinada sesión que compraron un refresco y hemos obtenido un promedio de 200.8 ml. Fijado un nivel de confianza del 90%, calcular el intervalo de confianza para la media de la cantidad de refresco que se sirve en cada vaso.

Detallar los pasos realizados para obtener los resultados.

k	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $p(z\leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

Para la corrección del ejercicio se tendrán en cuenta los siguientes criterios generales:

- Se valorará el uso del vocabulario y la notación científica.
- En aquellas preguntas en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.
- En las preguntas prácticas primará el correcto planteamiento del problema y se valorarán positivamente las explicaciones claras y precisas, y negativamente la ausencia de explicaciones o las explicaciones incorrectas.
- Si se comete un error que tenga relación con resultados ulteriores de la misma pregunta, se ha de tener en cuenta si existe coherencia con el resultado erróneo. En caso afirmativo, se valorará el resto de las cuestiones de la misma pregunta, aunque si el error conduce a problemas más simples de los inicialmente propuestos disminuirá la calificación.
- Se podrán usar calculadoras aunque no sean necesarias para la resolución de los ejercicios. Se exigirá que todos los resultados analíticos y gráficos estén paso a paso justificados. (Utilización de fórmulas, obtención de gráficas, cálculo de derivadas).
- A la hora de corregir la prueba, se tendrá en cuenta la falta de acuerdo sobre los conceptos de convexidad y concavidad en la Bibliografía.

Se valorará el buen uso de la lengua y la adecuada notación científica, que los correctores podrán bonificar con un máximo de un punto. Por los errores ortográficos, la falta de limpieza en la presentación y la redacción defectuosa podrá bajarse la calificación hasta un punto.

OPCIÓN A

1.- a) Plantear el sistema lineal 0,75 ptos.(0,25 ptos cada ecuación)

b) Escalonar la matriz 0,25 ptos. Deducir que el sistema es compatible determinado 0,25 ptos. Obtener la única solución 0,25 ptos.

c) Plantear la nueva ecuación 0,25 ptos. Escalonar la matriz 0,25 ptos. Ver que el nuevo sistema es incompatible 0,25 ptos. Concluir que no hay solución 0,25 ptos.

d) Ver que es un sistema compatible indeterminado utilizando c) 0,5 ptos. y sin utilizar c) 0,25 ptos. Dar las soluciones 0,5 ptos

2.- a) Cada derivada 0,5 ptos.

b) La Integral 0,5 ptos.

c) c1) Hallar el dominio 0,5 ptos.

c2) Calcular la derivada 0,25 ptos. Escribir los intervalos de crecimiento 0,5 ptos. Concluir que hay un mínimo 0,25 ptos.

c3) Hallar el punto de inflexión 0,5 ptos.

3.- a) 1 pto., b) 1 pto., c) 1 pto.

OPCIÓN B

1.- a) Cada desigualdad 0,25 ptos.

b) Calcular los vértices 0,5 ptos. Encontrar el mínimo 0,5 ptos. Encontrar los máximos 0,5 ptos.

c) Dibujar el nuevo recinto 0,25 ptos. Encontrar el mínimo 0,5 ptos. Ver que se mantienen los máximos del apartado anterior 0,25 ptos.

2.- a) Cada derivada 0,5 ptos.

b) La integral 0,5 ptos.

c) c1) Calcular la derivada 0,25 ptos, Obtener el punto crítico y ver que está en el dominio de la función 0,5 ptos. Concluir que es máximo 0,25 ptos.

c2) Ver que el punto obtenido en el apartado anterior está entre 1 y 2 0,5 ptos. Dar los intervalos de crecimiento 0,5 ptos.

3.- Valor crítico para el nivel de confianza 1 pto. Intervalo de confianza 2 ptos.

En los dos casos si se explican los cálculos y se ponen las fórmulas empleadas. Si no se explica 0,25 ptos. cada apartado.

El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. La suma de la inversión en acciones de una empresa textil, una empresa de gas y una compañía de telefonía es de 7400 €. Las acciones de la empresa textil pagan un 2% de interés anual, las de la empresa de gas un 4% y las de la compañía de telefonía pagan un 5%. La suma del interés anual es de 278 €. La inversión en acciones de la compañía de telefonía es de 1000 € menos que la suma de la inversión en acciones de la empresa textil y las acciones de la compañía de gas.

a) *(0,75 puntos)* Plantear un sistema lineal que permita calcular la cantidad invertida en cada una de las acciones.

b) *(0,75 puntos)* Calcular la cantidad invertida en cada una de las acciones.

c) *(1 punto)* ¿Podemos calcular el capital invertido en cada una de las acciones si cambiamos la tercera condición por *"el doble de la inversión en acciones de la compañía de telefonía es de 2000 € menos que la diferencia de la inversión en las acciones de la empresa textil y las acciones de la compañía de gas"*?

d) *(1 punto)* Llamando A a la matriz de coeficientes obtenida en el apartado c), resolver el sistema lineal $AX=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN.

a) Sea x la inversión en la empresa textil, y la inversión en la empresa de gas, z la inversión en la compañía de telefonía. Se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=7400 \\ 0,02x+0,04y+0,05z=278 \\ z=x+y-1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=7400 \\ 2x+4y+5z=27800 \\ x+y-z=1000 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema planteado (utilizamos el método de Gauss). Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7400 \\ 2 & 4 & 5 & 27800 \\ 1 & 1 & -1 & 1000 \end{array}\right) \underset{F3-F1}{\overset{F2-2F1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7400 \\ 0 & 2 & 3 & 13000 \\ 0 & 0 & -2 & -6400 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=7400 \\ 2y+3z=13000 \\ 2z=6400 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z=3200 \\ y=1700 \\ x=2500 \end{array}$$

Es decir, se han invertido 2500 € en la empresa textil, 1700 € en la de gas y 3200 € en la compañía de telefonía.

c) Ahora el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x+y+z=7400 \\ 0,02x+0,04y+0,05z=278 \\ 2z=x-y-2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=7400 \\ 2x+4y+5z=27800 \\ x-y-2z=2000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7400 \\ 2 & 4 & 5 & 27800 \\ 1 & -1 & -2 & 2000 \end{array}\right) \underset{F3-F1}{\overset{F2-2F1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7400 \\ 0 & 2 & 3 & 13000 \\ 0 & -2 & -3 & -5400 \end{array}\right) \overset{F3+F2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7400 \\ 0 & 2 & 3 & 13000 \\ 0 & 0 & 0 & 7600 \end{array}\right)$$

El sistema es ahora incompatible pues los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada son distintos. No se puede obtener la cantidad invertida en cada una de las empresas.

d) Se trata de un sistema homogéneo (los términos independientes son nulos) El sistema es compatible indeterminado pues, por el apartado anterior: $\operatorname{rg} A = 2 < \text{nº de incógnitas}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z=\lambda \\ y=-\frac{3}{2}\lambda \\ x=\frac{1}{2}\lambda \end{array}$$

2. a) *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ **a2)** $g(x)=\dfrac{x^{3/2}}{(x+1)^3}$

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

c) Considerar la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

c1) *(0,5 puntos)* Hallar el dominio de definición de f.
c2) *(1 punto)* Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f así como sus máximos y mínimos.
c3) *(0,5 puntos)* Hallar los puntos de inflexión de f.

SOLUCIÓN.

a) a1) $$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=-\frac{1}{(1+x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=-\frac{1}{1+x}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$$

a2) $$g'(x)=\frac{\frac{3}{2}x^{1/2}\cdot(x+1)^3-x^{3/2}\cdot3(x+1)^2}{(x+1)^6}=\frac{3x^{1/2}\cdot(x+1)^2\cdot\left[\frac{1}{2}(x+1)-x^3\right]}{(x+1)^6}=\frac{3\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-x^3\right)}{(x+1)^4}$$

b) $$\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\left|\ \sqrt{x}=t\ \Rightarrow\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=dt\ \right|=2\int e^t\,dt=2e^{\sqrt{x}}\quad\Rightarrow\quad\int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\left[2e^{\sqrt{x}}\right]_1^4=2e^2-2e$$

c) c1) Por tratarse de una función racional, el dominio es el conjunto de los números reales excepto los que anulan el denominador: $D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

c2) $$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{x^2(x-1)[3x-3-2x]}{(x-1)^4}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=0\ \Rightarrow\ \left|\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$$

Se tiene:

f ’ > 0	f ‘ > 0	f ’ < 0	f ’ > 0
0	1	3	

La función es creciente en $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ y decreciente en $(1,3)$

$$f''(x)=\frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-(x^3-3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{3x(x-1)^2[(x-2)(x-1)-x^2+3x]}{(x-1)^6}=\frac{6x}{(x-1)^4}$$

$f''(0)=0$; $f'''(x)=\dfrac{6(x-1)^4-6x\cdot4(x-1)^3}{(x-1)^8}$; $f'''(0)\neq0\ \Rightarrow\ x=0$ es un punto de inflexión

$f''(3)>0\ \Rightarrow\ x=3$ es un mínimo relativo: $\left(3\,,\,\dfrac{27}{4}\right)$

c3) El único punto de inflexión de la función ya ha aparecido en el apartado anterior: $(0\,,0)$

3. Luis y Ramón son jugadores de baloncesto. Luis encesta 3 de cada 5 tiros y Ramón 5 de cada 8. Si ambos tiran a canasta una sola vez, calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) *(1 punto)* Únicamente Luis ha encestado.

b) *(1 punto)* Ambos han encestado.

c) *(1 punto)* Al menos uno ha encestado.

SOLUCIÓN.

Sea L el suceso "Luis ha encestado": $p(L)=\frac{3}{5}=0,6$. Sea R el suceso "Ramón ha encestado": $p(R)=\frac{5}{8}=0,625$.
Los sucesos son independientes.

a) $p\left(L\cap\overline{R}\right)=p(L)\cdot p\left(\overline{R}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{40}=0,225$

b) $p\left(L\cap R\right)=p(L)\cdot p(R)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}=\frac{3}{8}=0,375$

c) El suceso "al menos uno ha encestado" es el suceso contrario a "ninguno ha encestado":

$$p\left(\overline{L}\cap\overline{R}\right)=p\left(\overline{L}\right)\cdot p\left(\overline{R}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{6}{40}=0,15 \quad\Rightarrow\quad p\left(\overline{\overline{L}\cap\overline{R}}\right)=1-0,15=0,85$$

OPCIÓN B

1. Considerar $T=\left\{ (x,y)\,/\ \ y\geq\frac{1}{3}x\ ,\ y\leq 4x\ ,\ 2x+y\leq 4\ ,\ x+2y\leq 4 \right\}$.

a) *(1 punto)* Representar gráficamente el conjunto anterior.

b) *(1,5 puntos)* Calcular los extremos de la función $2x+y$ sobre el conjunto T.

c) *(1 punto)* Calcular los extremos de $2x+y$ si añadimos al conjunto T la restricción $x+y\geq 1$.

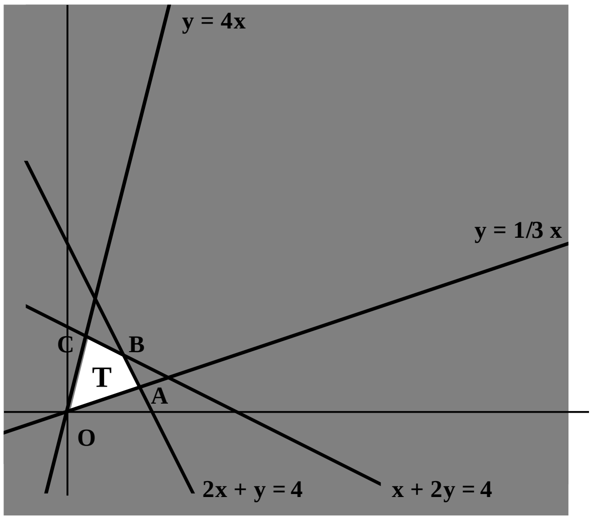
SOLUCIÓN.

a) • La recta $y=\frac{1}{3}x$ pasa por los puntos $(0,0)$ y $(3,1)$. La solución de la inecuación $y\geq\frac{1}{3}x$ es el semiplano que contiene al punto $(0,1)$, por ejemplo.

• La recta $y=4x$ pasa por $(0,0)$ y $(1,4)$. El semiplano solución de $y\leq 4x$ es el que contiene al punto $(1,0)$, por ejemplo.

• La recta $2x+y=4$ pasa por los puntos $(0,4)$ y $(2,0)$. La solución de $2x+y\leq 4$ es el semiplano que contiene al origen de coordenadas.

• La recta $x+2y=4$ pasa por los puntos $(0,2)$ y $(4,0)$. La solución de $x+2y\leq 4$ es el semiplano que contiene al origen de coordenadas.



La intersección de todos los semiplanos soluciones es el cuadrilátero O, A, B y C señalado en blanco.

b) La función $f(x,y)=2x+y$ se optimiza en alguno (algunos) de los vértices de la región factible T. Calculemos las coordenadas de los vértices y el valor de la función en ellos:

• $O(0,0)\ \Rightarrow\ f(0,0)=0$

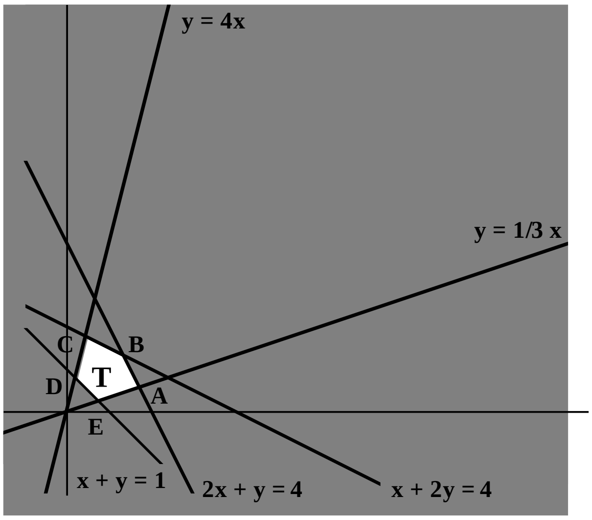
• $\left\{\begin{array}{l} y=1/3\,x \\ 2x+y=4\end{array}\right.\ \Rightarrow\ 2x+\frac{x}{3}=4\ \Rightarrow\ 7x=12\ \Rightarrow\ x=\frac{12}{7}\ ,\ y=\frac{4}{7}\ \Rightarrow\ A\left(\frac{12}{7},\frac{4}{7}\right)\ \Rightarrow\ f\left(\frac{12}{7},\frac{4}{7}\right)=4$

• $\left\{\begin{array}{l} 2x+y=4 \\ x+2y=4\end{array}\right.\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} -2x-y=-4 \\ 2x+4y=8\end{array}\right.\ \Rightarrow\ 3y=4\ \Rightarrow\ y=\frac{4}{3}\ ,\ x=\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ B\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)\ \Rightarrow\ f\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=4$

• $\left\{\begin{array}{l} y=4x \\ x+2y=4\end{array}\right.\ \Rightarrow\ 9x=4\ \Rightarrow\ x=\frac{4}{9}\ ,\ y=\frac{16}{9}\ \Rightarrow\ C\left(\frac{4}{9},\frac{16}{9}\right)\ \Rightarrow\ f\left(\frac{4}{9},\frac{16}{9}\right)=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$

El valor mínimo lo alcanza la función en el origen $O(0,0)$. El valor máximo lo alcanza en cualquiera de los puntos del segmento AB.

c) La recta $x+y=1$ pasa por los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$. La solución de la inecuación $x+y\geq 1$ es el semiplano que no contiene al origen de coordenadas.



Ahora, la región factible T es el pentágono ABCDE. Los vértices A, B y C son los mismos del apartado anterior y los valores de la función $f(x,y)=2x+y$ en ellos ya han sido calculados.

Los nuevos vértices son D y E:

- $\left\{\begin{array}{l} y=4x \\ x+y=1 \end{array}\right. \Rightarrow x=\dfrac{1}{5}\ ,\ y=\dfrac{4}{5} \Rightarrow D\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow$

  $\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{6}{5}$

- $\left\{\begin{array}{l} y=1/3\,x \\ x+y=1 \end{array}\right. \Rightarrow x+\dfrac{1}{3}x=1 \Rightarrow 4x=3 \Rightarrow$

  $\Rightarrow x=\dfrac{3}{4}\ ,\ y=\dfrac{1}{4} \Rightarrow E\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}\right) \Rightarrow f\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{4}$

Ahora el mínimo lo alcanza en el vértice $D\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{4}{5}\right)$ y el máximo sigue alcanzándolo en cualquier punto del segmento AB.

2. a) *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x)=\dfrac{1}{x}+2\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$ **a2)** $g(x)=\dfrac{e^x}{(x-1)^2}$.

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\displaystyle\int_0^2 \left(4x^3+e^{3x}\right)dx$.

c) Se ha realizado una encuesta a una determinada población con el fin de determinar el número de personas que utilizarían el sistema de autobuses si la tarifa admitiera distintos importes. Basándose en los resultados de las encuestas, los analistas de sistemas han determinado una función aproximada que expresa el número diario de pasajeros en función de la tarifa. La función demanda viene dada por $D(x)=\sqrt{10+3x-\dfrac{5}{4}x^2}$, donde x representa la tarifa en euros.

c1) *(1 punto)* ¿Qué tarifa habrá que aplicar para obtener el mayor número de pasajeros?

c2) *(1 punto)* Si la tarifa aplicada está entre 1 y 2 euros, ¿cómo es la variación en la afluencia de pasajeros? ¿Creciente, decreciente?

SOLUCIÓN.

a) **a1)** $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{\dfrac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x^2}=\dfrac{-2+2x+\ln x}{x^2}$

a2) $g'(x)=\dfrac{e^x\cdot(x-1)^2-e^x\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{e^x\cdot(x-1)\cdot[x-1-2]}{(x-1)^4}=\dfrac{e^x\cdot(x-3)}{(x-1)^3}$

b) Una primitiva de la función es: $\displaystyle\int\left(4x^3+e^{3x}\right)dx=4\int x^3\,dx+\frac{1}{3}\int 3e^{3x}\,dx=\frac{4x^4}{4}+\frac{1}{3}e^{3x}=x^4+\frac{1}{3}e^{3x}$ luego:

$$\int_0^2 \left(4x^3+e^{3x}\right)dx=\left[x^4+\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^2=\left(16+\frac{e^6}{3}\right)-\left(0+\frac{1}{3}\right)=\frac{e^6+47}{3}$$

c) **c1)** $D'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{10+3x-\frac{5}{4}x^2}}\cdot\left(3-\frac{5}{2}x\right)=0 \;\Rightarrow\; 3-\frac{5}{2}x=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{6}{5}=1,20\text{ €}$

$$D''(x)=\frac{-\frac{5}{2}\cdot 2\sqrt{10+3x-\frac{5}{2}x^2}-\left(3-\frac{5}{2}x\right)\cdot 2\,\dfrac{1}{2\sqrt{10+3x-\frac{5}{4}x^2}}\left(3-\frac{5}{2}x\right)}{4\left(10+3x-\frac{5}{2}x^2\right)} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; D''\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{-5\cdot\sqrt{10+\frac{18}{5}-\frac{5}{2}\cdot\frac{36}{25}}-0}{4\left(10+\frac{18}{5}-\frac{5}{2}\cdot\frac{36}{25}\right)}<0 \;\Rightarrow\; x=\frac{6}{5}\text{ máximo}$$

La tarifa debe ser de 1,20 € para obtener el mayor número de pasajeros.

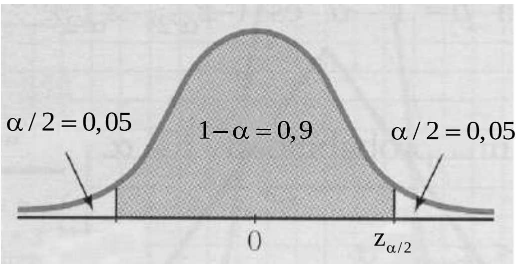
c2) Entre 1 y 1,20 euros, la afluencia de pasajeros será creciente. Entre 1,20 y 2 euros, la afluencia será decreciente.

3. La cantidad de refresco que se sirve en cada vaso a la entrada de unos cines está normalmente distribuida con una desviación típica de 15 ml. Hemos medido las cantidades en los vasos de los 25 asistentes de una determinada sesión que compraron un refresco y hemos obtenido un promedio de 200,8 ml. Fijado un nivel de confianza del 90%, calcular el intervalo de confianza para la media de la cantidad de refresco que se sirve en cada vaso.

Detallar los pasos realizados para obtener los resultados.

SOLUCIÓN.

Como la población es normal, la distribución muestral de medias también lo es.



El nivel de confianza es $1-\alpha=0,9 \;\Rightarrow\; \alpha=0,1 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2}=0,05$

El valor crítico es $F\left(z_{\alpha/2}\right)=0,9+0,05=0,95 \overset{(1)}{\Rightarrow} z_{\alpha/2}=1,645$

(1) obtenido en la tabla de la $N(0,1)$

El radio del intervalo de confianza es:

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1,645\cdot\frac{15}{\sqrt{25}}=4,935$$

por lo que el intervalo de confianza para la media es $(200,8-4,935\,;\,200,8+4,935)=(195,865\,;\,205,735)$ en ml.

Universidad Zaragoza

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2013

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SS. II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)* Discutir, según los valores de a, el sistema:

$$\begin{aligned} x + ay + z &= -1 \\ -x + y + az &= 0 \\ 2x - y + z &= a \end{aligned}$$

Resolverlo para $a = -2$.

2. **a)** *(2 puntos)* Disponemos de 15000 euros para la campaña de publicidad de un producto y los tenemos que invertir entre televisión y radio. Si llamamos x al dinero (en miles de euros) invertido en televisión e y al dinero (en miles de euros) invertido en radio, se estima que las ventas (en miles de unidades del producto) que haremos vendrán dadas por:

$$V = x^2y + 27y + 20$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en televisión y en radio para maximizar las ventas y cuál será el valor máximo de ventas que conseguiremos.

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2}\,dx$$

3. Una máquina fabrica tuercas con un diámetro interior (en milímetros) que es aleatorio, con distribución normal de desviación típica igual a 0,2 milímetros. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del diámetro interior de las tuercas.

a) *(2 puntos)* Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 95% tenga una amplitud menor o igual que 0,06 milímetros.

b) *(1 punto)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 200, medimos el diámetro interior de las 200 tuercas y calculamos su promedio, que vale 2,57 milímetros. Construir el intervalo de confianza del 95% para la media del diámetro interior de las tuercas que fabrica la máquina.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Una empresa fabrica pintura de dos tipos: mate y brillante. Para ello mezcla dos productos A y B en distintas proporciones. Cada kilo de pintura mate necesita 0,4 kilos de producto A y 0,6 kilos de producto B. Cada kilo de pintura brillante necesita 0,2 kilos de producto A y 0,8 kilos de producto B. La empresa no puede usar más de 200 kilos de producto A ni más de 500 kilos de producto B. Además, por razones comerciales, quiere fabricar al menos 200 kilos de pintura mate y al menos 300 kilos de pintura brillante.

El beneficio por kilo de pintura mate es de 4 euros y el beneficio por kilo de pintura brillante es de 5 euros. ¿Qué cantidad de cada tipo de pintura debe fabricar la empresa para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá?

2. Dada la función

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

determinar:

a) *(0,5 puntos)* Su dominio.

b) *(0,5 puntos)* Sus cortes con los ejes.

c) *(1,25 puntos)* Sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

3. En un centro de enseñanza los alumnos pueden hacer uso o no del comedor. La distribución de alumnos en los tres cursos del centro es la siguiente:

	Primer curso	Segundo curso	Tercer curso
Hace uso del comedor	67	60	57
No hace uso del comedor	23	20	18

a) *(1 punto)* Se escoge al azar un alumno del centro; ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo curso y haga uso del comedor?

b) *(1 punto)* Se escoge al azar un alumno de los que hacen uso del comedor; ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo curso?

c) *(1 punto)* Se escogen al azar dos alumnos distintos del centro; ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo curso?

CUESTIONES GENERALES:

En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aún así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.

Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos. Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

OPCIÓN A

1. Discutir el sistema *2 puntos*: si lo hacen por Gauss se puntúa con 1 punto la correcta triangularización y si lo hacen por determinantes se puntúa con 1 punto el cálculo de los determinantes necesarios para llegar a la conclusión. Resolverlo *1,5 puntos* (si la resolución se basa en algún resultado erróneo de la parte de discusión, se dará aquél como bueno a la hora de puntuar la resolución).

2. a) Sustituir correctamente x (o y) *0,25 puntos*. Derivar *0,5 puntos*. Encontrar puntos críticos y deducir cuál es el máximo y mínimo relativo *0,5 puntos*. Deducir que el máximo relativo es absoluto (en particular comparando con lo que ocurre en los extremos del intervalo) *0,5 puntos*. Dar el valor del máximo de ventas *0,25 puntos*.

b) Encontrar la primitiva *1 punto*. Sustituir los límites *0,5 puntos*.

3. a) Saber qué cuantil buscar *0,5 puntos*. Encontrarlo *0,5 puntos*. Poner la fórmula del error *0,5 puntos*. Sustituir y calcular n *0,5 puntos* (si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior entero se restan 0,1 puntos).

b) Calcular el error (semiamplitud del intervalo) *0,5 puntos*; en esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado (a), aunque no lo sea. Poner la fórmula de IC y calcularlo *0,5 puntos*.

OPCIÓN B

1. Escribir la función objetivo *0,75 puntos*. Escribir las restricciones *0,5 puntos*. Dibujar correctamente la región factible *0,5 puntos* y encontrar los puntos extremos *1 punto* (si encuentran los puntos extremos correctamente sin haber dibujado la región factible se asignan los 1,5 puntos). Encontrar el punto óptimo *0,5 puntos*. Dar el valor del beneficio máximo *0,25 puntos*.

2. **a)** *0,5 puntos*.

   b) Corte con el eje OX *0,25 puntos*. Corte con el eje OY *0,25 puntos*.

   c) Asíntota vertical *0,5 puntos*. Asíntota horizontal *0,5 puntos*. Demostrar (o razonar) que no tiene asíntota oblicua *0,25 puntos*.

   d) Calcular la derivada *0,5 puntos*. Deducir que la función es siempre decreciente *0,75 puntos*.

3. **a)** *1 punto* (si calculan bien sólo el numerador o el denominador de la fracción se les puntúa 0,25 puntos).

   b) *1 punto* (si calculan bien sólo el numerador o el denominador de la fracción se les puntúa 0,25 puntos).

   c) *1 punto* (si la respuesta la dejan en función del curso (es decir, dan tres respuestas, una por curso, pero no dan una respuesta final) la puntuación máxima del apartado será 0,5 puntos. Si calculan las probabilidades como si fuera con reemplazamiento, la puntuación máxima del apartado será 0,5 puntos).

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)* Discutir, según los valores de a, el sistema:

$$\begin{aligned} x + ay + z &= -1 \\ -x + y + az &= 0 \\ 2x - y + z &= a \end{aligned}$$

Resolverlo para $a = -2$.

SOLUCIÓN.

Estudiemos y comparemos los rangos de las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 2 & -1 & 1 & a \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1+a & a+1 & -1 \\ 0 & -1-2a & -1 & a+2 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a+1 & a \\ 0 & -1-2a & -1 & a+2 \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a+1 & a \\ 0 & 0 & 4a+4a^2 & 2a^2+2a+2 \end{array}\right)$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $F_2 + F_1$; $F_3 - 2F_1$ (2) $2F_2 + F_3$ (3) $F_3 + (1+2a)\,F_2$

$4a + 4a^2 = 0 \;\Rightarrow\; 4a(1+a) = 0 \;\Rightarrow\; a = 0\,,\; a = -1$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$: $\text{rg}\,A = \text{rg}\,B = 3 \;\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado
- Si $a = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rg}\,A = 2$ y $\text{rg}\,B = 3 \Rightarrow$ el sistema es incompatible
- Si $a = -1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rg}\,A = 2$ y $\text{rg}\,B = 3 \Rightarrow$ el sistema es incompatible
- Para $a = -2$, el sistema es compatible determinado. El sistema escalonado equivalente es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x - 2y + z = -1 \\ y - 3z = -2 \\ 8z = 6 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} z = \frac{3}{4} \\ y = 3z - 2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} \\ x = 2y - z - 1 = \frac{2}{4} - \frac{3}{4} - 1 = -\frac{5}{4} \end{array} \Rightarrow x = -\frac{5}{4}\,,\; y = \frac{1}{4}\,,\; z = \frac{3}{4}$$

2. **a)** *(2 puntos)* Disponemos de 15000 euros para la campaña de publicidad de un producto y los tenemos que invertir entre televisión y radio. Si llamamos x al dinero (en miles de euros) invertido en televisión e y al dinero (en miles de euros) invertido en radio, se estima que las ventas (en miles de unidades del producto) que haremos vendrán dadas por:

$$V = x^2 y + 27y + 20$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en televisión y en radio para maximizar las ventas y cuál será el valor máximo de ventas que obtendremos.

b) *(1,5 puntos)* Calcular $\int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN.

a) Inversión en televisión: x Inversión en radio: $y = 15 - x$

La función de ventas es: $V = x^2(15-x) + 27(15-x) + 20 = -x^3 + 15x^2 - 27x + 405$. Estudiemos cuándo se maximiza:

$$V' = -3x^2 + 30x - 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-30 \pm \sqrt{900-324}}{-6} = \frac{-30 \pm 24}{-6} = \begin{cases} 1 \\ 9 \end{cases}$$

Analicemos cuál de dichos valores críticos hace máxima la función:

$$V'' = -6x + 30 \quad \left| \begin{array}{l} V''(1) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{la función de ventas es mínima} \\ V''(9) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{la función de ventas es máxima} \end{array} \right.$$

Por tanto, debemos invertir 9000 € en televisión y 6000 € en radio.

$V(9,6) = 9^2 \cdot 6 + 27 \cdot 6 + 20 = 668 \quad \Rightarrow \quad$ La venta máxima es de 668000 unidades.

b) Calculemos una primitiva: $\displaystyle\int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{cambio de variable:} \\ x+1 = t \quad \Rightarrow \quad dx = dt \end{array} \right| = 2\int \frac{1}{t^2}\,dt = 2\int t^{-2}\,dt = 2\,\frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{2}{x+1}$

Así pues: $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x+1}\right]_0^1 = \left(-\frac{2}{2}\right) - \left(-\frac{2}{1}\right) = -1 + 2 = 1$

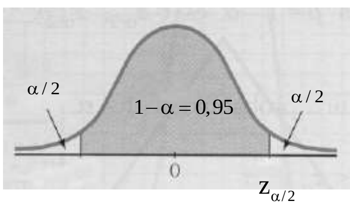
3. Una máquina fabrica tuercas con un diámetro interior (en milímetros) que es aleatorio, con distribución normal de desviación típica igual a 0,2 milímetros. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del diámetro interior de las tuercas.

a) *(2 puntos)* Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 95% tenga una amplitud menor o igual que 0,06 milímetros.

b) *(1 punto)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 200, medimos el diámetro interior de las 200 tuercas y calculamos su promedio, que vale 2,57 milímetros. Construir el intervalo de confianza del 95% para la media del diámetro interior de las tuercas que fabrica la máquina.

SOLUCIÓN.

a) El radio del intervalo de confianza es $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}03$



Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 95%:

$$1 - \alpha = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025 \quad \Rightarrow \quad 1 - 0{,}025 = 0{,}975$$

Buscamos en la tabla el valor 0,975 y se corresponde con un valor crítico de 1,96.

Tenemos entonces:

$z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}06 \quad \Rightarrow \quad 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}2}{\sqrt{n}} = 0{,}03 \quad \Rightarrow \quad n = \left(\dfrac{1{,}96 \cdot 0{,}2}{0{,}03}\right)^2 = 170{,}7 \quad \Rightarrow \quad$ el tamaño de la muestra debe ser de 171 tuercas.

b) El intervalo de confianza es $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \;,\; \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(2{,}57 - 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}2}{\sqrt{200}} \;,\; 2{,}57 + 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}2}{\sqrt{200}}\right) = (2{,}54 \;;\; 2{,}60)$

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Una empresa fabrica pintura de dos tipos: mate y brillante. Para ello mezcla dos productos A y B en distintas proporciones. Cada kilo de pintura mate necesita 0,4 kilos de producto A y 0,6 kilos de producto B. Cada kilo de pintura brillante necesita 0,2 kilos de producto A y 0,8 kilos de producto B. La empresa no puede usar más de 200 kilos de producto A ni más de 500 kilos de producto B. Además, por razones comerciales, quiere fabricar al menos 200 kilos de pintura mate y al menos 300 kilos de pintura brillante.

El beneficio por kilo de pintura mate es de 4 euros y el beneficio por kilo de pintura brillante es de 5 euros. ¿Qué cantidad de cada tipo de pintura debe fabricar la empresa para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá?

SOLUCIÓN.

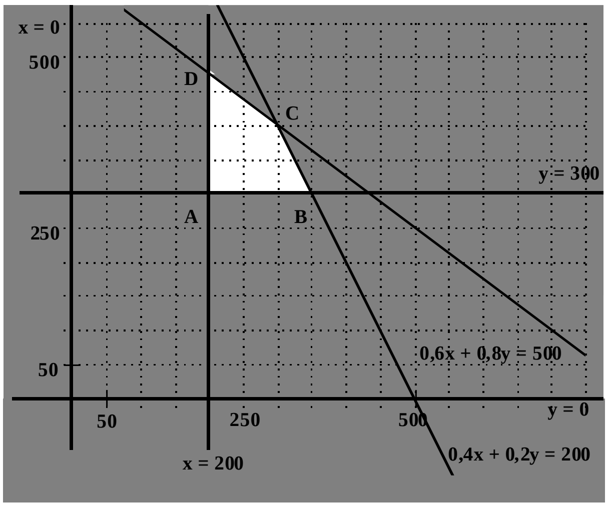
Es un problema de programación lineal. Organicemos en una tabla los datos del problema:

	Cantidad	**A**	**B**	**Beneficio**
Pintura mate	x	0,4x	0,6x	4x
Pintura brillante	y	0,2y	0,8y	5y
	$x \geq 200$ $y \geq 300$	$0,4x + 0,2y \leq 200$	$0,6x + 0,8y \leq 500$	$F(x, y) = 4x + 5y$

Así pues la función objetivo, que debe maximizarse, es: $F(x, y) = 4x + 5y$

El conjunto de restricciones a que debe someterse la solución es: $\begin{cases} x \geq 200 \\ y \geq 300 \\ 0,4x + 0,2y \leq 200 \\ 0,6x + 0,8y \leq 500 \end{cases}$

Dibujemos la región factible, solución del sistema de restricciones:



- La recta $x = 200$ es vertical. El semiplano solución de la inecuación $x \geq 200$ es el que se encuentra a su derecha.
- La recta $y = 300$ es horizontal. El semiplano solución de $y \geq 300$ es el que se encuentra por encima.
- La recta $0,4x + 0,2y = 200$ pasa por los puntos $(500, 0)$ y $(300, 400)$. El semiplano solución de $0,4x + 0,2y \leq 200$ es el que contiene al origen de coordenadas.
- La recta $0,6x + 0,8y = 500$ pasa por los puntos $(100, 550)$ y $(300, 400)$. El semiplano solución de $0,6x + 0,8y \leq 500$ es el que contiene al origen de coordenadas.
- La región factible es el cuadrilátero ABCD (en blanco)
- La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos las coordenadas de los vértices y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

Vértice A: $A(200, 300) \Rightarrow F(200, 300) = 2300$

Vértice B: $\begin{cases} y = 300 \\ 0,4x + 0,2y = 200 \end{cases} \Rightarrow 0,4x = 140 \Rightarrow x = 350 \Rightarrow B(350, 300) \Rightarrow F(350, 300) = 2900$

Vértice C: $\begin{cases} 0,4x + 0,2y = 200 \\ 0,6x + 0,8y = 500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,6x + 0,8y = 800 \\ -0,6x - 0,8y = -500 \end{cases} \Rightarrow x = 300\ ,\ y = \dfrac{200 - 120}{0,2} = 400 \Rightarrow C(300, 400) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad F(300\,,400) = 3200$$

Vértice D: $\begin{cases} x = 200 \\ 0{,}6x + 0{,}8y = 500 \end{cases} \Rightarrow \; y = 475 \;\Rightarrow\; D(200\,,475) \;\Rightarrow\; F(200\,,475) = 3175$

Para obtener el máximo beneficio debe fabricar 300 kilos de pintura mate y 400 kilos de pintura brillante. El beneficio máximo es de 3200 euros.

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$, determinar:

a) *(0,5 puntos)* Su dominio.

b) *(0,5 puntos)* Sus cortes con los ejes.

c) *(1,25 puntos)* Sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

SOLUCIÓN.

a) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

b) • Corte con OX: $\begin{cases} y = \dfrac{x+2}{x+1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \; x = -2 \;\Rightarrow\; (-2\,,0)$

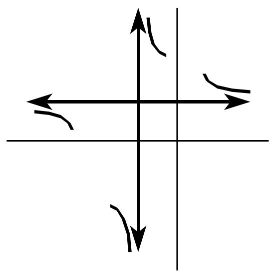
• Corte con OY: $\begin{cases} y = \dfrac{x+2}{x+1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \; y = 2 \;\Rightarrow\; (0\,,2)$

c) • Asíntotas verticales: $x = -1$ pues $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+2}{x+1} = \infty$.

Además: $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x+2}{x+1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x+2}{x+1} = +\infty$

• Asíntota horizontal: $y = 1$ pues $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+2}{x+1} = 1$.

Además: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+2}{x+1} = 1^-$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{x+1} = 1^+$



d) $f'(x) = \dfrac{x+1-x-2}{(x+1)^2} = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0 \;\; \forall x \;\Rightarrow$ la función es decreciente en su dominio.

3. En un centro de enseñanza los alumnos pueden hacer uso o no del comedor. La distribución de alumnos en los tres cursos del centro es la siguiente:

	Primer curso	Segundo curso	Tercer curso
Hace uso del comedor	67	60	57
No hace uso del comedor	23	20	18

a) *(1 punto)* Se escoge al azar un alumno del centro; ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo curso y haga uso del comedor?

b) *(1 punto)* Se escoge al azar un alumno de los que hacen uso del comedor; ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo curso?

c) *(1 punto)* Se escogen al azar dos alumnos distintos del centro; ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo curso?

SOLUCIÓN.

Completemos la tabla de contingencia con los totales:

	Primer curso (P)	Segundo curso (S)	Tercer curso (T)	TOTAL
Hace uso del comedor (C)	67	60	57	184
No hace uso del comedor $(\overline{\mathrm{C}})$	23	20	18	61
TOTAL	90	80	75	245

a) $p(S \cap C) = \dfrac{60}{245} = 0,2449$

b) $p(S / C) = \dfrac{60}{184} = 0,3261$

c) $p\left[(P_1 \cap P_2) \cup (S_1 \cap S_2) \cup (T_1 \cap T_2)\right] = p(P_1 \cap P_2) + p(S_1 \cap S_2) + p(T_1 \cap T_2) =$

$= p(P_1) \cdot p(P_2 / P_1) + p(S_1) \cdot p(S_2 / S_1) + p(T_1) \cdot p(T_2 / T_1) = \dfrac{90}{245} \cdot \dfrac{89}{244} + \dfrac{80}{245} \cdot \dfrac{79}{244} + \dfrac{75}{245} \cdot \dfrac{74}{244} =$

$= \dfrac{8010}{59780} + \dfrac{6320}{59780} + \dfrac{5550}{59780} = \dfrac{19880}{59780} = 0,3326$

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2013

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SS. II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *(1,5 puntos)* Encontrar, si existe, una matriz X tal que $3X + 2A = BC$.

b) *(2 puntos)* Encontrar, si existe, la matriz inversa de A.

2. Tenemos que invertir en un fondo de inversión una cantidad de dinero mayor o igual que 1000 euros y menor o igual que 9000 euros. El beneficio B que se obtiene depende de la cantidad invertida x de la siguiente manera:

$$B(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ -x^2 + 10x - 21 & \text{si } 4 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

donde tanto x como $B(x)$ están expresadas en miles de euros.

a) *(1 punto)* Estudiar la continuidad de la función B en el intervalo $(1,9)$.

b) *(1 punto)* ¿Para qué valores de $x \in [1,9]$ el beneficio es positivo?

c) *(1,5 puntos)* Encontrar el máximo valor que alcanza el beneficio con $x \in [4,9]$.

3. Una madre y su hija lanzan un dado cada una. La que obtiene la puntuación más alta gana y si las dos obtienen la misma puntuación entonces gana la hija.

a) *(1,5 puntos)* Calcular la probabilidad de que gane la hija.

b) *(1,5 puntos)* Si ha ganado la madre, ¿cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida por la hija haya sido 4?

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Una empresa va a invertir en dos productos financieros A y B, para lo cual dispone de un total de 12 millones de euros, aunque no es necesario que invierta todo el dinero. Por razones legales debe invertir al menos 2 millones de euros en cada uno de los dos productos A y B y, además, tiene que invertir en A al menos el doble de lo que invierta en B.

El beneficio que le reporta cada euro invertido en el producto A es de 0,2 euros y el beneficio que le reporta cada euro invertido en el producto B es de 0,4 euros, mientras que por cada euro que no invierta en ninguno de los dos productos tendrá un beneficio de 0,3 euros. ¿Qué cantidad de dinero debe invertir la empresa en cada producto para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá?

2. **a)** *(2 puntos)* Encontrar los extremos absolutos de la función:

$$f(x) = -2x^2 + 12x - 16$$

en el intervalo $x \in [1,4]$

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 6x\right) dx$$

3. El peso (en gramos) de las naranjas de un agricultor es aleatorio, con distribución normal de desviación típica igual a 30 gramos. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las naranjas del agricultor.

a) *(2 puntos)* Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 98% tenga una amplitud menor o igual que 10 gramos.

b) *(1 punto)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 100; pesamos las 100 naranjas y calculamos su promedio, que es igual a 160 gramos. Construir el intervalo de confianza del 98% para la media del peso de las naranjas del agricultor.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes

CUESTIONES GENERALES:

En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aún así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.

Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos. Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

OPCIÓN A

1. a) Calcular la matriz BC *0,5 puntos*. Encontrar la matriz X *1 punto* (si el resultado lo ponen con el 1/3 fuera de la matriz, se les descontará 0,1 puntos, ya que el ejercicio no está completamente terminado).

b) *(2 puntos)* Si lo resuelven por el método de menores: cálculo del determinante *0,5 puntos*, cálculo de los menores *0,5 puntos*, asignar signo correcto dependiendo de la paridad *0,5 puntos*, dividir por el determinante y trasponer la matriz (al final o en el momento de calcular los menores) para llegar a la inversa *0,5 puntos*.

2. a) Justificar que es continua en (1,4) U (4,9) *0,5 puntos*. Justificar que es continua en 4 *0,5 puntos*.

b) Deducir que es positiva en (1,4) *0,5 puntos* (la inclusión de 1 descuenta 0,1 puntos).
Deducir que es positiva en [4,7) *0,5 puntos* (la inclusión de 7 descuenta 0,1 puntos).

c) Calcular la derivada *0,5 puntos*. Encontrar el máximo relativo en $x = 5$ *0,5 puntos*. Deducir que $x = 5$ es el máximo absoluto *0,5 puntos*. Si no se da el valor del beneficio máximo o no se da en las correctas unidades se descontarán 0,25 puntos. Al tratarse de una parábola puede deducirse el máximo sin necesidad de derivar, lo que se considerará correcto si se razona adecuadamente.

3. a) Reconocer la fórmula a utilizar (teorema de la probabilidad total, árbol, casos favorables entre casos posibles con el adecuado espacio muestral...) *0,5 puntos*. Sustituir correctamente y calcular *1 punto*.

b) Reconocer la fórmula a utilizar (teorema de Bayes u otra si es correcta) *0,5 puntos*. Sustituir correctamente y calcular *1 punto*. (Si en el denominador se usa $1 - P$ (apartado (a)) se considerará aquí válido el valor del apartado (a) aunque sea erróneo).

OPCIÓN B

1. Escribir la función objetivo *0,75 puntos* (se penaliza con 0,25 puntos no incorporar correctamente la parte $+0{,}3(12-x-y)$). Escribir las restricciones *0,5 puntos*. Dibujar correctamente la región factible *0,5 puntos* y encontrar los puntos extremos *1 punto* (si encuentran los puntos extremos correctamente sin haber dibujado la región factible se asignan los 1,5 puntos). Encontrar el punto óptimo *0,5 puntos*. Dar el valor del beneficio máximo *0,25 puntos*.

2. a) Hacer la derivada *0,5 puntos*. Encontrar punto crítico y deducir que es máximo relativo *0,5 puntos* (como la función es una parábola pueden deducir que sólo hay un punto crítico, máximo y su valor sin hacer la derivada, en cuyo caso se les asigna 1 punto). Razonar que el máximo relativo es absoluto *0,5 puntos*. Encontrar el mínimo absoluto *0,5 puntos*.

b) Encontrar la primitiva *1 punto* (0,5 puntos por cada sumando). Sustituir los límites *0,5 puntos*.

3. a) Saber qué cuantil buscar *0,5 puntos*. Encontrarlo *0,5 puntos*. Poner la fórmula del error *0,5 puntos*. Sustituir y calcular n *0,5 puntos* (si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior entero se restan 0,1 puntos).

b) Calcular el error (semiamplitud del intervalo) *0,5 puntos*; en esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado (a), aunque no lo sea. Poner la fórmula del IC y calcularlo *0,5 puntos*.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-3&2&3\\-1&3&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\\1&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

a) *(1,5 puntos)* Encontrar, si existe, una matriz X tal que $3X+2A=BC$.

b) *(2 puntos)* Encontrar, si existe, la matriz inversa de A.

SOLUCIÓN.

a) Calculemos BC y 2A: $\quad \mathrm{BC}=\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&1\\-1&0&-1\\3&-1&2\end{pmatrix}\quad ;\quad 2\mathrm{A}=2\begin{pmatrix}1&0&-1\\-3&2&3\\-1&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\-6&4&6\\-2&6&0\end{pmatrix}$

Se tiene: $\quad 3\mathrm{X}+2\mathrm{A}=\mathrm{BC}\ \Rightarrow\ 3\mathrm{X}=\mathrm{BC}-2\mathrm{A}\ \Rightarrow\ \mathrm{X}=\frac{1}{3}(\mathrm{BC}-2\mathrm{A})=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}3&-2&1\\-1&0&-1\\3&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&-2\\-6&4&6\\-2&6&0\end{pmatrix}\right]=$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&3\\5&-4&-7\\5&-7&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&-2/3&1\\5/3&-4/3&-7/3\\5/3&-7/3&2/3\end{pmatrix}$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\-3&2&3&0&1&0\\-1&3&0&0&0&1\end{array}\right)\underset{\mathrm{F3+F1}}{\overset{\mathrm{F2+3F1}}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&2&0&3&1&0\\0&3&-1&1&0&1\end{array}\right)\overset{\mathrm{F2:2}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&0&3/2&1/2&0\\0&3&-1&1&0&1\end{array}\right)\overset{\mathrm{F3-3F2}}{\sim}$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&0&3/2&1/2&0\\0&0&-1&-7/2&-3/2&1\end{array}\right)\overset{-\mathrm{F3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&0&3/2&1/2&0\\0&0&1&7/2&3/2&-1\end{array}\right)\overset{\mathrm{F1+F3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&9/2&3/2&-1\\0&1&0&3/2&1/2&0\\0&0&1&7/2&3/2&-1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}9/2&3/2&-1\\3/2&1/2&0\\7/2&3/2&-1\end{pmatrix}$$

2. Tenemos que invertir en un fondo de inversión una cantidad de dinero mayor o igual que 1000 euros y menor o igual que 9000 euros. El beneficio B que se obtiene depende de la cantidad invertida x de la siguiente manera:

$$B(x)=\begin{cases}x-1 & \text{si } 1\le x<4\\ -x^2+10x-21 & \text{si } 4\le x\le 9\end{cases}$$

donde tanto x como $B(x)$ están expresadas en miles de euros.

a) *(1 punto)* Estudiar la continuidad de la función B en el intervalo $(1,9)$.

b) *(1 punto)* ¿Para qué valores de $x\in[1,9]$ el beneficio es positivo?

c) *(1,5 puntos)* Encontrar el máximo valor que alcanza el beneficio con $x\in[4,9]$.

SOLUCIÓN.

a) Las dos funciones que definen $B(x)$ son polinómicas y por tanto continuas en sus dominios. Veamos si lo es en $x=4$:

· $\exists B(4)=-16+40-21=3$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \lim\limits_{x\to 4^-} B(x)=\lim\limits_{x\to 4}(x-1)=3 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} B(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\left(-x^2+10x-21\right)=3 \end{array}\right| \Rightarrow \exists \lim_{x\to 4} B(x)=3$$

· $\lim\limits_{x\to 4} B(x)=B(4)$

Por tanto, la función $B(x)$ es continua en $(1,9)$

b) · $x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow B(x)>0\ \forall x\in(1,4)$

· $-x^2+10x-21=0 \Rightarrow x=\dfrac{-10\pm\sqrt{100-84}}{-2}=\dfrac{-10\pm 4}{-2}= \begin{cases} 3 \\ 7 \end{cases} \Rightarrow B(x)>0\ \forall x\in[4,7)$

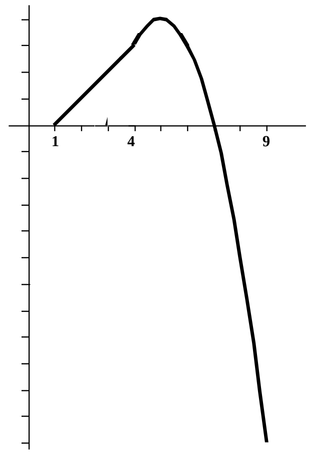
Luego el beneficio es positivo para $x\in(1,7)$

c) Con $x\in[4,9]$: $B(x)=-x^2+10x-21 \Rightarrow B'(x)=-2x+10=0 \Rightarrow x=5$ (punto crítico).

Y como $B''(x)=-2<0 \Rightarrow$ En $x=5$ la función es máxima y de valor $B(5)=4$. Es decir, el beneficio es máximo cuando la inversión sea de 5000 euros y será de 4000 euros.

- Otra forma -

Podríamos haber dado respuesta a todas las cuestiones planteadas a partir de la gráfica de la función $B(x)$:



3. Una madre y su hija lanzan un dado cada una. La que obtiene la puntuación más alta gana y si las dos obtienen la misma puntuación entonces gana la hija.

a) *(1,5 puntos)* Calcular la probabilidad de que gane la hija.

b) *(1,5 puntos)* Si ha ganado la madre, ¿cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida por la hija haya sido 4?

SOLUCIÓN.

Los resultados posibles en el orden (Madre, Hija), y la ganadora en cada caso, son:

$$\begin{array}{cccccc} (1,1)\to H, & (1,2)\to H, & (1,3)\to H, & (1,4)\to H, & (1,5)\to H, & (1,6)\to H \\ (2,1)\to M, & (2,2)\to H, & (2,3)\to H, & (2,4)\to H, & (2,5)\to H, & (2,6)\to H \\ (3,1)\to M, & (3,2)\to M, & (3,3)\to H, & (3,4)\to H, & (3,5)\to H, & (3,6)\to H \\ (4,1)\to M, & (4,2)\to M, & (4,3)\to M, & (4,4)\to H, & (4,5)\to H, & (4,6)\to H \\ (5,1)\to M, & (5,2)\to M, & (5,3)\to M, & (5,4)\to M, & (5,5)\to H, & (5,6)\to H \\ (6,1)\to M, & (6,2)\to M, & (6,3)\to M, & (6,4)\to M, & (6,5)\to M, & (6,6)\to H \end{array}$$

a) $p(H)=\dfrac{21}{36}=0{,}58$

b) $p(H=4/M)=\dfrac{2}{15}=0{,}13$

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Una empresa va a invertir en dos productos financieros A y B, para lo cual dispone de un total de 12 millones de euros, aunque no es necesario que invierta todo el dinero. Por razones legales debe invertir al menos 2 millones de euros en cada uno de los dos productos A y B y, además, tiene que invertir en A al menos el doble de lo que invierta en B.

El beneficio que le reporta cada euro invertido en el producto A es de 0,2 euros y el beneficio que le reporta cada euro invertido en el producto B es de 0,4 euros, mientras que por cada euro que no invierta en ninguno de los dos productos tendrá un beneficio de 0,3 euros. ¿Qué cantidad de dinero debe invertir la empresa en cada producto para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá?

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

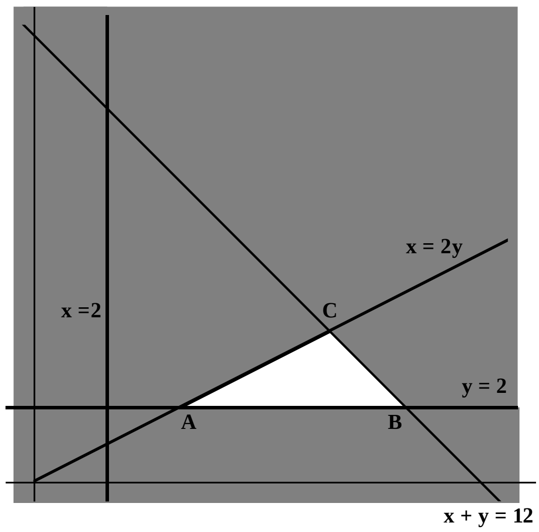
PRODUCTOS	INVERSIÓN	BENEFICIO
A	x euros	0,2x
B	y euros	0,4y

Las condiciones relacionadas con la inversión (restricciones), son:

$$x + y \leq 12$$
$$x \geq 2$$
$$y \geq 2$$
$$x \geq 2y$$

La función objetivo, relacionada con los beneficios, es: $F(x\,,\,y) = 0,2x + 0,4y + 0,3\cdot(12 - x - y) = -0,1x + 0,1y + 3,6$

Obtengamos gráficamente la región factible, solución del sistema de restricciones:



· La recta $x + y = 12$ pasa por los puntos $(12\,,0)$ y $(0\,,12)$. El semiplano solución de la inecuación $x + y \leq 12$ es el que contiene al origen de coordenadas.

· El semiplano solución de $x \geq 2$ es el que está a la derecha de la recta $x = 2$.

· El semiplano solución de $y \geq 2$ es el superior a la recta $y = 2$.

· La recta $x = 2y$ pasa por los puntos $(0\,,0)$ y $(2\,,1)$. El semiplano solución de la inecuación $x \geq 2y$ es el que contiene al punto $(1\,,0)$.

La región factible es el triángulo ABC. En alguno (algunos) de sus vértices se tendrá la solución óptima. Calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$$A(4\,,2) \;\Rightarrow\; F(4\,,2) = 3,4$$
$$B(10\,,2) \;\Rightarrow\; F(10\,,2) = 2,8$$
$$C(8\,,4) \;\Rightarrow\; F(8\,,4) = 3,2$$

Por lo tanto la empresa debe invertir 4 millones de euros en A y 2 millones en B para maximizar sus beneficios que serán de 3,4 millones de euros.

2. a) *(2 puntos)* Encontrar los extremos absolutos de la función:

$$f(x) = -2x^2 + 12x - 16$$

en el intervalo $x \in [1,4]$

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 6x\right) dx$$

SOLUCIÓN.

a) La función es continua y sus extremos absolutos los alcanzará en sus puntos de máximo o de mínimo relativos o en los extremos del intervalo. Obtengamos sus máximos o mínimos relativos:

$f'(x) = -4x + 12 = 0 \;\Rightarrow\; x = 3$ y como $f''(x) = -4 < 0 \;\Rightarrow\;$ en $x = 3$ tiene un máximo relativo: $(3\,,2)$

Veamos el valor de la función en los extremos del intervalo: $f(1) = -6$, $f(4) = 0$

Por lo tanto, el máximo absoluto lo alcanza en $x = 3$ y el mínimo absoluto en $x = 1$.

b) $\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 6x\right) dx = \left[4\ln x - 3x^2\right]_1^2 = (4\ln 2 - 12) - (0 - 3) = 4\ln 2 - 9 \simeq -6{,}227$

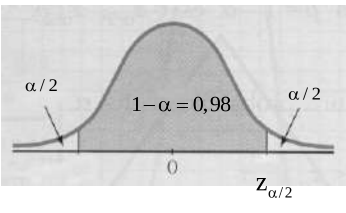
3. El peso (en gramos) de las naranjas de un agricultor es aleatorio, con distribución normal de desviación típica igual a 30 gramos. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las naranjas del agricultor.

a) *(2 puntos)* Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 98% tenga una amplitud menor o igual que 10 gramos.

b) *(1 punto)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 100; pesamos las 100 naranjas y calculamos su promedio, que es igual a 160 gramos. Construir el intervalo de confianza del 98% para la media del peso de las naranjas del agricultor.

SOLUCIÓN.

a) El radio del intervalo de confianza (en este caso, 5 gramos) es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$.



Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 98%:

$1 - \alpha = 0{,}98 \;\Rightarrow\; \alpha = 1 - 0{,}98 = 0{,}02 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}02}{2} = 0{,}01 \;\Rightarrow\; 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

Buscamos en la tabla el valor 0,99 y el valor crítico más próximo es 2,33.

Tenemos entonces:

$n = \left(\frac{2{,}33 \cdot 30}{5}\right)^2 = 195{,}44 \;\Rightarrow\;$ el tamaño de la muestra debe ser de 196 naranjas.

b) El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(160 - 2{,}33 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}}\ ,\ 160 + 2{,}33 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}}\right) = (153{,}01\ ;\ 166{,}99) \text{ en gramos}$$

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2,5 puntos)* Los tres profesores de matemáticas de un instituto, María, Ana y Carlos, tienen edades cuya suma es 120 años. La suma de las edades de María y Ana es el doble que la edad de Carlos. Además, dentro de 4 años, la suma de las edades que tengan Ana y Carlos será el triple de la edad que tenga María. Plantear y resolver un sistema lineal que permita conocer las edades de los tres profesores.

b) *(1 punto)* Encontrar, si existe, la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Dada la función:

$$f = x^2 y$$

definida para $x \geq 0$, $y \geq 0$, encontrar el punto (x, y) que maximiza f sujeto a la restricción $x + y = 36$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 6x} - 2x \right)$$

3. *(3 puntos)* El 47% de las personas de una ciudad son mujeres y el 53% restante hombres. De entre las mujeres, un 28% son jóvenes (entre 0 y 25 años), un 38% son adultas (entre 26 y 64 años) y un 34% son de la tercera edad (65 años o más). De entre los hombres, un 26% son jóvenes, un 43% son adultos y un 31% son de la tercera edad.

a) *(0,75 puntos)* Si elegimos una persona de la ciudad al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de la tercera edad?

b) *(0,75 puntos)* Si elegimos una persona de la ciudad al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la tercera edad?

c) *(0,75 puntos)* Si elegimos una persona de la ciudad al azar de entre las de la tercera edad, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

d) *(0,75 puntos)* Si elegimos una mujer de la ciudad al azar de entre las que tienen 26 años o más, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la tercera edad?

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Un deportista solamente puede tomar para desayunar barritas de chocolate y barritas de cereales. Cada barrita de chocolate proporciona 40 gramos de hidratos de carbono, 30 gramos de proteínas y 200 Kcal, mientras que cada barrita de cereales proporciona 80 gramos de hidratos de carbono, 10 gramos de proteínas y 100 Kcal. El deportista quiere tomar al menos 320 gramos de hidratos de carbono y 90 gramos de proteínas, pero no quiere tomar más de 1000 Kcal. El coste de cada barrita de chocolate es de 2 euros, mientras que el de cada barrita de cereales es de 1 euro. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas barritas de cada tipo tiene que tomar el deportista para desayunar de forma que cumpla las condiciones anteriores y gaste la menor cantidad de dinero.

2. *(3,5 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 5}$$

Calcular:

a) *(0,5 puntos)* Dominio de f.

b) *(1 punto)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) *(0,75 puntos)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

3. *(3 puntos)* Se sabe que el coeficiente intelectual de una población sigue una distribución normal, con desviación típica igual a 20 y queremos construir un intervalo de confianza para su media.

a) *(2 puntos)* ¿Qué tamaño de la muestra debemos elegir para que el intervalo a nivel de confianza del 96% tenga una amplitud no superior a 10?

b) *(1 punto)* Decidimos tomar una muestra de 200 individuos, les medimos el coeficiente intelectual y calculamos su promedio, que es igual a 90. Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media del coeficiente intelectual de la población.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes

CUESTIONES GENERALES:

En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aún así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.

Si se comete un error en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá sin tener en cuenta el error y no se penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2,5 puntos)* Llamando x, y, z a las edades de María, Ana y Carlos respectivamente, se puntúa *0,25 puntos* por escribir la ecuación $x + y + z = 120$, *0,25 puntos* por la ecuación $x + y = 2z$ y *0,5 puntos* por la otra ecuación. Se puntúa *1,5 puntos* la resolución del sistema (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un sistema mucho más sencillo que el original). Si se hace triangulación, la triangulación vale *1 punto* y despejar los valores *0,5 puntos*. Si se hace por Cramer, poner la fórmula adecuada (o aplicarla aun sin escribirla) vale *0,5 puntos* y calcular los determinantes *1 punto* (*0,25 puntos* cada uno).

b) *(1 punto)* Si lo resuelven por el método de menores: cálculo del determinante *0,25 puntos*, cálculo de los menores *0,25 puntos*, asignar signo correcto dependiendo de la paridad *0,25 puntos*, dividir por el determinante y trasponer la matriz (al final o en el momento de calcular los menores) para llegar a la inversa *0,25 puntos*.

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sustituir correctamente x (ó y) *0,25 puntos*. Derivar *0,5 puntos*. Encontrar puntos críticos y deducir cuál es el máximo relativo *0,5 puntos*. Deducir que el máximo relativo es absoluto (en particular comparando con lo que ocurre en los extremos del intervalo) *0,5 puntos*. Encontrar el valor de la variable no calculada (x ó y) *0,25 puntos*.

b) *(1,5 puntos)* Multiplicar y dividir por el numerador cambiado de signo *0,5 puntos*. Calcular el límite *1 punto*.

3. *(3 puntos)* En todos los apartados se puntuará *0,25 puntos* por poner una fórmula correcta y *0,5 puntos* por sustituir correctamente. Si en un apartado se usa un resultado incorrecto de un apartado anterior, no se tendrá en cuenta el error anterior para evaluar el apartado.

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Escribir la función objetivo *0,5 puntos.* Escribir las restricciones *1 punto*. Dibujar correctamente la región factible *0,5 puntos* y encontrar los puntos extremos *1 punto* (si encuentran los puntos extremos correctamente sin haber dibujado la región factible se asignan los *1,5 puntos*). Encontrar el punto óptimo *0,5 puntos*.

2. *(3,5 puntos)*

a) *(0,5 puntos)*

b) *(1 punto)* Factorizar correctamente el numerador *0,25 puntos*. Encontrar los intervalos donde es positiva *0,75 puntos*, rebajándose *0,5 puntos* por un intervalo incorrecto y *0,75 puntos* por más de un intervalo incorrecto. Si algún intervalo se pone cerrado, se rebajan *0,25 puntos*.

c) *(0,75 puntos)* Asíntota vertical *0,25 puntos*. Demostrar que no tiene asíntota horizontal *0,25 puntos*. Asíntota oblicua *0,25 puntos*.

d) *(1,25 puntos)* Calcular la derivada *0,5 puntos*. Factorizar el numerador *0,25 puntos*. Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento *0,5 puntos*, rebajándose *0,25 puntos* por un intervalo incorrecto y *0,5 puntos* por más de un intervalo incorrecto.

3. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Saber qué cuantil buscar *0,5 puntos*. Encontrarlo *0,5 puntos*. Poner la fórmula del error *0,5 puntos*. Sustituir y calcular n *0,5 puntos* (si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior entero se restan *0,1 puntos*).

b) *(1 punto)* Calcular el error (semiamplitud del intervalo) *0,5 puntos*; en esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado (a), aunque no lo sea. Poner la fórmula del IC y calcularlo *0,5 puntos*.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2,5 puntos)* Los tres profesores de matemáticas de un instituto, María, Ana y Carlos, tienen edades cuya suma es 120 años. La suma de las edades de María y Ana es el doble que la edad de Carlos. Además, dentro de 4 años, la suma de las edades que tengan Ana y Carlos será el triple de la edad que tenga María. Plantear y resolver un sistema lineal que permita conocer las edades de los tres profesores.

b) *(1 punto)* Encontrar, si existe, la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) Sea x la edad de María, y la de Ana, z la de Carlos.

$$\begin{cases} x+y+z=120 \\ x+y \quad\;\; =2z \\ y+4+z+4=3(x+4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=120 \\ x+y-2x=0 \\ 3x-y-z=-4 \end{cases} \quad \text{Resolvamos el sistema:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{F_2-F_1}{F_3-3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & -3 & -120 \\ 0 & -4 & -4 & -364 \end{array}\right) \overset{F_2\leftrightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & -4 & -4 & -364 \\ 0 & 0 & -3 & -120 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{F_2:(-4)}{F_3:(-3)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 1 & 91 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} z=40 \\ y=51 \\ x=29 \end{array}$$

Es decir, María tiene 29 años, Ana tiene 51 años y Carlos 40 años.

b) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1-F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2-F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{F_2:(-3)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right) \overset{F_1-F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

Por tanto: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Dada la función:

$$f = x^2 y$$

definida para $x \geq 0,\ y \geq 0$, encontrar el punto (x, y) que maximiza f sujeto a la restricción $x + y = 36$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+6x}-2x\right)$$

SOLUCIÓN.

a) $f = x^2y = x^2(36-x) = 36x^2 - x^3 \Rightarrow f' = 72x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(24-x) = 0 \Rightarrow x = 0\ ,\ x = 24$ (puntos críticos)

$f'' = 72 - 6x$ $\quad\begin{array}{|l} f''(0) = 72 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ minimiza la función} \\ f''(24) = -72 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 24 \text{ maximiza la función} \end{array}$ es decir, el punto que maximiza f es $(24, 12)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+6x}-2x\right) = \infty - \infty = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{4x^2+6x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+6x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+6x}+2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+6x-4x^2}{\sqrt{4x^2+6x}+2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{\sqrt{4x^2+6x}+2x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{\sqrt{4x^2}+2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{2x+2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6\cancel{x}}{4\cancel{x}} = \dfrac{3}{2}$

3. *(3 puntos)* El 47% de las personas de una ciudad son mujeres y el 53% restante hombres. De entre las mujeres, un 28% son jóvenes (entre 0 y 25 años), un 38% son adultas (entre 26 y 64 años) y un 34% son de la tercera edad (65 años o más). De entre los hombres, un 26% son jóvenes, un 43% son adultos y un 31% son de la tercera edad.

a) *(0,75 puntos)* Si elegimos una persona de la ciudad al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de la tercera edad?

b) *(0,75 puntos)* Si elegimos una persona de la ciudad al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la tercera edad?

c) *(0,75 puntos)* Si elegimos una persona de la ciudad al azar de entre las de la tercera edad, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

d) *(0,75 puntos)* Si elegimos una mujer de la ciudad al azar de entre las que tienen 26 años o más, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la tercera edad?

SOLUCIÓN.

Organicemos los datos del problema en una tabla de contingencia. Sobre un total de 100 personas:

	JÓVENES (J)	**ADULTOS (A)**	**TERCERA EDAD (T)**	**TOTAL**
MUJERES (M)	$47\times 0,28 =$ **13,16**	$47\times 0,38 =$ **17,86**	$47\times 0,34 =$ **15,98**	**47**
HOMBRES (H)	$53\times 0,26 =$ **13,78**	$53\times 0,43 =$ **22,79**	$53\times 0,31 =$ **16,43**	**53**
TOTAL	**26,94**	**40,65**	**32,41**	**100**

a) $p(M\cap T) = \dfrac{15,98}{100} = 0,1598$

b) $p(T) = \dfrac{32,41}{100} = 0,3241$

c) $p(M/T) = \dfrac{15,98}{32,41} = 0,4931$

d) $p(T/M\cap A\cap T) = \dfrac{15,98}{17,86+15,98} = \dfrac{15,98}{33,84} = 0,4722$

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Un deportista solamente puede tomar para desayunar barritas de chocolate y barritas de cereales. Cada barrita de chocolate proporciona 40 gramos de hidratos de carbono, 30 gramos de proteínas y 200 Kcal, mientras que cada barrita de cereales proporciona 80 gramos de hidratos de carbono, 10 gramos de proteínas y 100 Kcal. El deportista quiere tomar al menos 320 gramos de hidratos de carbono y 90 gramos de proteínas, pero no quiere tomar más de 1000 Kcal. El coste de cada barrita de chocolate es de 2 euros, mientras que el de cada barrita de cereales es de 1 euro. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas barritas de cada tipo tiene que tomar el deportista para desayunar de forma que cumpla las condiciones anteriores y gaste la menor cantidad de dinero.

SOLUCIÓN.

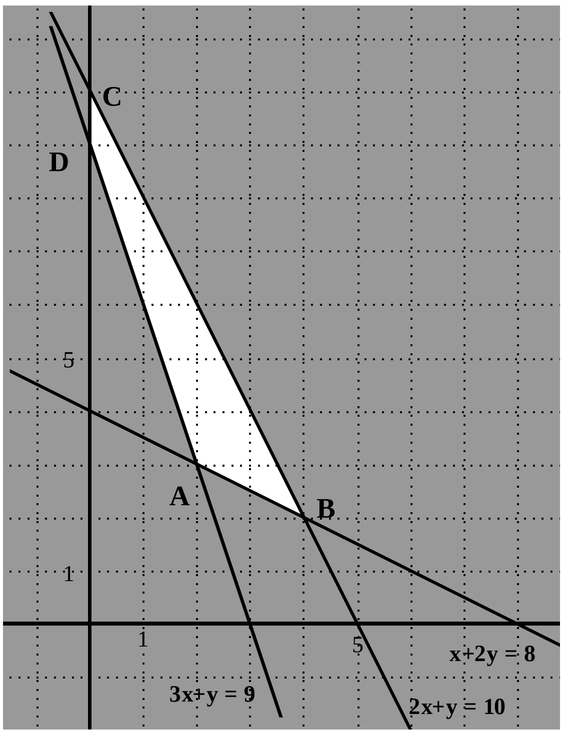
Es un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

	Nº	Hidratos de carbono	Proteínas	Kilocalorías	Coste
B. chocolate	x	40x	30x	200x	2x
B. cereales	y	80y	10y	100y	y
	$x \ge 0$ $y \ge 0$	$40x+80y \ge 320$	$30x+10y \ge 90$	$200x+100y \le 1000$	$F(x,y)=2x+y$

La función objetivo, que debe ser mínima, es el coste: $F(x,y)=2x+y$

El conjunto de restricciones a que debe estar sometida la solución es: $\left\{\begin{array}{c} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 40x+80y \ge 320 \\ 30x+10y \ge 90 \\ 200x+100y \le 1000 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x+2y \ge 8 \\ 3x+y \ge 9 \\ 2x+y \le 10 \end{array}\right.$

Obtengamos la región factible, es decir, el conjunto de puntos (x,y) que verifican todas las restricciones entre los que encontraremos la solución al problema:



La solución de la inecuación $x \ge 0$ es el semiplano situado a la derecha del eje de ordenadas.

La solución de la inecuación $y \ge 0$ es el semiplano situado por encima del eje de abscisas.

La recta de ecuación $x+2y=8$ pasa por los puntos $(0,4)$ y $(8,0)$. La solución de la inecuación $x+2y \ge 8$ es el semiplano al que no pertenece el origen del sistema de coordenadas.

La recta de ecuación $3x+y=9$ pasa por los puntos $(3,0)$ y $(0,9)$. La inecuación $3x+y \ge 9$ tiene por solución el semiplano al que no pertenece el origen.

La recta de ecuación $2x+y=10$ pasa por los puntos $(5,0)$ y $(0,10)$. La solución de la inecuación $2x+y \le 10$ es el semiplano al que pertenece el origen del sistema de coordenadas.

La región factible, solución del conjunto de restricciones, es el cuadrilátero ABCD. Como la solución óptima debe estar en alguno de sus vértices, calculemos las coordenadas de los mismos y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

Vértice A: $\begin{cases} 3x+y=9 \\ x+2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x-2y=-18 \\ x+2y=8 \end{cases} \Rightarrow -5x=-10 \Rightarrow x=2 \ , \ y=3 \Rightarrow f(2,3)=4+3=7$

Vértice B: $\begin{cases} 2x+y=10 \\ x+2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-2y=-20 \\ x+2y=8 \end{cases} \Rightarrow -3x=-12 \Rightarrow x=4 \ , \ y=2 \Rightarrow f(4,2)=10$

Vértice C: $\begin{cases} 2x+y=10 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow x=0 \ , \ y=10 \Rightarrow f(0,10)=10$

Vértice D: $\begin{cases} 3x+y=9 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow x=0 \ , \ y=9 \Rightarrow f(0,9)=9$

La función objetivo se minimiza en el vértice A. El deportista debe tomar entonces 2 barritas de chocolate y 3 barritas de cereales.

2. *(3,5 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2-16}{x-5}$$

Calcular:

a) *(0,5 puntos)* Dominio de f.

b) *(1 punto)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) *(0,75 puntos)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

SOLUCIÓN.

a) Se trata de una función racional cuyo dominio es: $D(f)=\mathbb{R}-\{5\}$

b) $f(x)=\dfrac{(x+4)(x-4)}{x-5}$

<0		>0		<0		>0
$-\cdot-\ /\ -$	-4	$+\cdot-\ /\ -$	4	$+\cdot+\ /\ -$	5	$+\cdot+\ /\ +$

La función es positiva en $(-4\,,4)\cup(5\,,+\infty)$

c) • Asíntotas verticales: $x=5$ pues $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-16}{x-5}=\infty$.

Además: $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{x^2-16}{x-5}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x^2-16}{x-5}=+\infty$

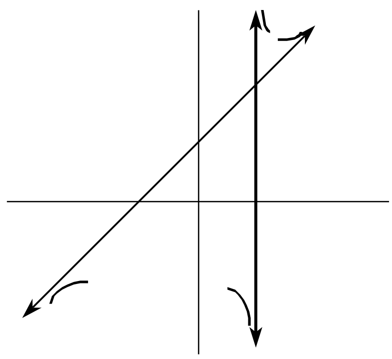
• Asíntotas horizontales u oblicuas: $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-5}=x+5+\dfrac{9}{x-5}$

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & & -16 & x-5 \\ \cline{4-4} -x^2 & +5x & & x+5 \\ \cline{1-2} & 5x & -16 & \\ & -5x & +25 & \\ \cline{2-3} & & 9 & \end{array}$$

$y=x+5$ es una asíntota oblicua.

Además:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9}{x-5}=0^-$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9}{x-5}=0^+$



3. *(3 puntos)* Se sabe que el coeficiente intelectual de una población sigue una distribución normal, con desviación típica igual a 20 y queremos construir un intervalo de confianza para su media.

a) *(2 puntos)* ¿Qué tamaño de la muestra debemos elegir para que el intervalo a nivel de confianza del 96% tenga una amplitud no superior a 10?

b) *(1 punto)* Decidimos tomar una muestra de 200 individuos, les medimos el coeficiente intelectual y calculamos su promedio, que es igual a 90. Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media del coeficiente intelectual de la población.

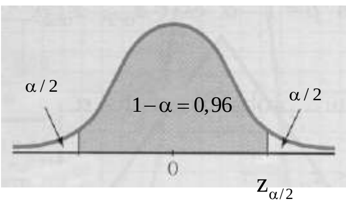
k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes

SOLUCIÓN.

a) El radio del intervalo de confianza (error máximo admisible) es la mitad de su amplitud. En este caso, 5.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5$$



Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 96%:

$$1-\alpha = 0{,}96 \;\Rightarrow\; \alpha = 1-0{,}96 = 0{,}04 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}04}{2} = 0{,}02 \;\Rightarrow\; 1-0{,}02 = 0{,}98$$

Buscamos en la tabla el valor 0,98 y el más próximo (0,9798) se corresponde con un valor crítico de 2,05.

Tenemos entonces:

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 \;\Rightarrow\; 2{,}05 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} = 5 \;\Rightarrow\; n = \left(\frac{2{,}05 \cdot 20}{5}\right)^2 = 67{,}24 \;\Rightarrow\;$$ el tamaño de la muestra debe ser de 68 habitantes.

b) El intervalo de confianza es $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; , \; \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(90 - 2{,}05 \cdot \frac{20}{\sqrt{200}} \; , \; 90 + 2{,}05 \cdot \frac{20}{\sqrt{200}}\right) = (87{,}1 \; ; \; 92{,}9)$

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2,5 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Encontrar, si existe, una matriz X tal que se verifique:

$$AB + 2CX = D$$

b) *(1 punto)* Encontrar el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos) Dada la función:*

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$$

Encontrar los extremos absolutos de f en el intervalo $x \in [1,5]$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\int_1^4 (2 - e^{3x})dx$$

3. *(3 puntos)* Juan tiene dos urnas A y B. En la urna A hay 4 bolas blancas y 2 bolas negras y en la urna B hay 6 bolas blancas y 8 bolas negras. Juan cierra los ojos y mete la mano en la urna A, saca una bola y, sin mirarla, la pasa a la urna B. Así, la urna B queda con 15 bolas: las 14 originales y la que Juan pasó desde la urna A. Después, Juan mete la mano en la urna B, revuelve las bolas, y saca una bola.

a) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que la bola que saca de la urna B sea exactamente la misma que la que pasó desde la urna A?

b) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que la bola que saca de la urna B sea blanca?

c) *(1 punto)* Si la bola que saca de la urna B es blanca, ¿qué probabilidad hay de que la bola que pasó desde la urna A fuera blanca?

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Una empresa tiene dos fábricas A y B en las que produce acero. Por cada hora de funcionamiento de la fábrica A se producen 5 Tm de acero y 3 Tm de desperdicios y se emiten a la atmósfera 2 Tm de dióxido de carbono. Por cada hora de funcionamiento de la fábrica B se producen 6 Tm de acero y 1 Tm de desperdicios y se emiten a la atmósfera 4 Tm de dióxido de carbono. Por normativa medioambiental, la empresa no puede producir (entre las dos fábricas) más de 48 Tm de desperdicios al día ni puede emitir a la atmósfera (entre las dos fábricas) más de 72 Tm de dióxido de carbono al día. Por otra parte, cada una de las fábricas debe funcionar al menos 6 horas al día, y ninguna de las dos puede funcionar más de 18 horas al día. Plantear y resolver un problema de programación lineal que permita determinar cuántas horas al día debe funcionar cada fábrica para maximizar la cantidad de acero producida por la empresa, teniendo en cuenta las restricciones anteriores.

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Dada la función:

$$f = xy$$

definida para $x \in (0,9)$, y $\in (0,3)$, encontrar el punto (x, y) que maximiza f sujeto a la restricción $x + y^2 = 9$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(7x^2 + \frac{3}{x}\right) dx$$

3. *(3 puntos)* Se desea estimar la proporción de individuos con sobrepeso en una población. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple y se va a determinar, de cada individuo, si tiene sobrepeso o no, y a partir de los resultados se construirá un intervalo de confianza para la proporción de individuos con sobrepeso en la población. El intervalo se hará a un nivel de confianza del 96%.

a) *(2 puntos)* Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,1 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?

b) *(1 punto)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 200 individuos, de los cuales 40 tienen sobrepeso. Calcular el intervalo de confianza al 96% para la proporción de individuos con sobrepeso en la población.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes

CUESTIONES GENERALES:

En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aún así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.

Si se comete un error en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá sin tener en cuenta el error y no se penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2,5 puntos)* Calcular AB *0,5 puntos*. Calcular $D - AB$ *0,5 puntos.* Calcular C^{-1}, *1 punto*. Encontrar X *0,5 puntos* (si dejan X con algún factor fuera de la matriz, se descontarán *0,25 puntos*).

b) *(1 punto)* Si lo hacen por Gauss, se valorará con *0,5 puntos* la correcta triangulación. Si lo hacen por determinantes, se valorará con *0,5 puntos* el correcto cálculo de los determinantes. Por razonar que no tiene rango 3, *0,25 puntos*; por razonar que tiene rango 2, *0,25 puntos*.

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Calcular la derivada *0,75 puntos*. Encontrar el valor crítico $x = 2$ y deducir que es mínimo relativo *0,5 puntos*; justificar que es mínimo absoluto *0,25 puntos*. Encontrar máximo absoluto *0,5 puntos*.

b) *(1,5 puntos)* Encontrar la primitiva *1 punto*. Sustituir los límites *0,5 puntos*.

3. *(3 puntos)*

a) *(1 punto)* Se asigna *1 punto* si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado).

b) *(1 punto)* Por poner la fórmula correcta (teorema de la probabilidad total u otra si es correcta) *0,25 puntos*. Sustituir correctamente y calcular *0,75 puntos*.

c) *(1 punto)* Por poner la fórmula correcta (teorema de Bayes u otra si es correcta) *0,25 puntos*. Sustituir correctamente y calcular *0,75 puntos* (si en el denominador se usa el resultado de (b), se dará como bueno en este apartado aunque sea erróneo el del apartado (b)).

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Escribir la función objetivo *0,5 puntos.* Escribir las restricciones *1 punto*. Dibujar correctamente la región factible *0,5 puntos* y encontrar los puntos extremos *1 punto* (si encuentran los puntos extremos correctamente sin haber dibujado la región factible se asignan los *1,5 puntos*). Encontrar el punto óptimo *0,5 puntos*.

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sustituir correctamente x (ó y) *0,25 puntos*. Derivar *0,75 puntos*. Encontrar el punto crítico y deducir que es máximo *0,75 puntos*. Encontrar el valor de la variable no calculada (x ó y) *0,25 puntos*.

b) *(1,5 puntos)* Encontrar la primitiva *1 punto*. Sustituir los límites *0,5 puntos*.

3. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Saber qué cuantil buscar *0,5 puntos*. Encontrarlo *0,5 puntos*. Poner la fórmula del error *0,5 puntos*. Sustituir y calcular n *0,5 puntos* (si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior entero se restan *0,1 puntos*).

b) *(1 punto)* Calcular el error (semiamplitud del intervalo) *0,5 puntos*; en esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado (a), aunque no lo sea. Si se usa en la estimación de la desviación típica un valor distinto a la proporción muestral $0{,}2$, se restarán *0,25 puntos*. Poner la fórmula del IC y calcularlo *0,5 puntos*.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

<u>OPCIÓN A</u>

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2,5 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Encontrar, si existe, una matriz X tal que se verifique:

$$AB + 2CX = D$$

b) *(1 punto)* Encontrar el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) $AB + 2CX = D \;\Rightarrow\; 2CX = D - AB \;\Rightarrow\; X = (2C)^{-1}(D - AB)$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad D - AB = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad 2C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(2C)^{-1} : \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2:2 \\ F_1 \leftrightarrow F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1/2 \\ 4 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{F_2 - 4F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1/2 \\ 0 & -10 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{F_2:(-10)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/10 & 1/5 \end{array}\right) \overset{F_1 - 4F_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/5 & -3/10 \\ 0 & 1 & -1/10 & 1/5 \end{array}\right) \;\Rightarrow\; (2C)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -3/10 \\ -1/10 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $\quad X = \begin{pmatrix} 2/5 & -3/10 \\ -1/10 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

b) Utilizamos el método de Gauss:

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-F_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_3-F_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos) Dada la función:*

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$$

Encontrar los extremos absolutos de f en el intervalo $x \in [1,5]$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\int_1^4 (2 - e^{3x})dx$$

SOLUCIÓN.

a) La función es continua en el intervalo $[1,5]$ pues solo es discontinua en $x=0$ que está fuera del intervalo. Los extremos absolutos los alcanzará en los extremos del intervalo o en los máximos y mínimos relativos que tenga en él.

$f(1)=5$, $f(5)=\dfrac{29}{5}=5{,}8$

Extremos relativos: $f'(x)=\dfrac{2x^2-x^2-4}{x^2}=\dfrac{x^2-4}{x^2}=0 \Rightarrow x=-2$, $x=2$. Comprobamos si en $x=2$ la función tiene un máximo o un mínimo relativo: $f''(x)=\dfrac{2x^3-2x^3+8x}{x^4}=\dfrac{8}{x^3} \Rightarrow f''(2)>0 \Rightarrow x=2$ es un mínimo relativo: $f(2)=4$.

Por tanto: máximo absoluto en $x=5$ y mínimo absoluto en $x=2$.

b) Obtengamos una primitiva de la función: $\int\left(2-e^{3x}\right)dx=\int 2\,dx-\frac{1}{3}\int 3e^{3x}\,dx=2x-\frac{1}{3}e^{3x}$

Por tanto: $\int_1^4\left(2-e^{3x}\right)dx=\left[2x-\dfrac{e^{3x}}{3}\right]_1^4=\left(8-\dfrac{e^{12}}{3}\right)-\left(2-\dfrac{e^3}{3}\right)=6-\dfrac{e^{12}-e^3}{3}$

3. *(3 puntos)* Juan tiene dos urnas A y B. En la urna A hay 4 bolas blancas y 2 bolas negras y en la urna B hay 6 bolas blancas y 8 bolas negras. Juan cierra los ojos y mete la mano en la urna A, saca una bola y, sin mirarla, la pasa a la urna B. Así, la urna B queda con 15 bolas: las 14 originales y la que Juan pasó desde la urna A. Después, Juan mete la mano en la urna B, revuelve las bolas, y saca una bola.

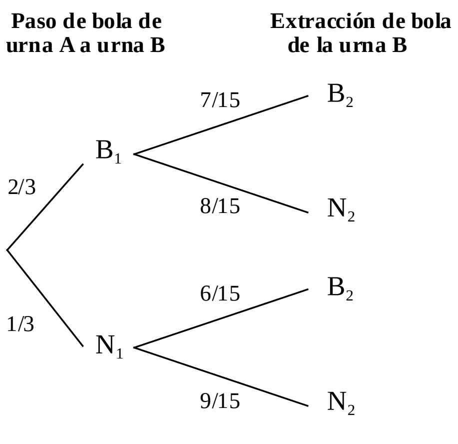
a) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que la bola que saca de la urna B sea exactamente la misma que la que pasó desde la urna A?

b) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que la bola que saca de la urna B sea blanca?

c) *(1 punto)* Si la bola que saca de la urna B es blanca, ¿qué probabilidad hay de que la bola que pasó desde la urna A fuera blanca?

SOLUCIÓN.

Organicemos las posibles situaciones en un diagrama en árbol:



a) Se trata de sacar una bola concreta de entre las quince: $p=\dfrac{1}{15}$

b) Aplicación del teorema de la probabilidad total:

$p(B_2)=p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)+p(N_1)\cdot p(B_2/N_1)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{7}{15}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6}{15}=\dfrac{20}{45}=\dfrac{4}{9}$

c) Aplicación del teorema de Bayes:

$$p(B_1/B_2)=\frac{p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)}{p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)+p(N_1)\cdot p(B_2/N_1)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{15}}{\frac{4}{9}}=\frac{126}{180}=\frac{7}{10}$$

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Una empresa tiene dos fábricas A y B en las que produce acero. Por cada hora de funcionamiento de la fábrica A se producen 5 Tm de acero y 3 Tm de desperdicios y se emiten a la atmósfera 2 Tm de dióxido de carbono. Por cada hora de funcionamiento de la fábrica B se producen 6 Tm de acero y 1 Tm de desperdicios y se emiten a la atmósfera 4 Tm de dióxido de carbono. Por normativa medioambiental, la empresa no puede producir (entre las dos fábricas) más de 48 Tm de desperdicios al día ni puede emitir a la atmósfera (entre las dos fábricas) más de 72 Tm de dióxido de carbono al día. Por otra parte, cada una de las fábricas debe funcionar al menos 6 horas al día, y ninguna de las dos puede funcionar más de 18 horas al día. Plantear y resolver un problema de programación lineal que permita determinar cuántas horas al día debe funcionar cada fábrica para maximizar la cantidad de acero producida por la empresa, teniendo en cuenta las restricciones anteriores.

SOLUCIÓN.

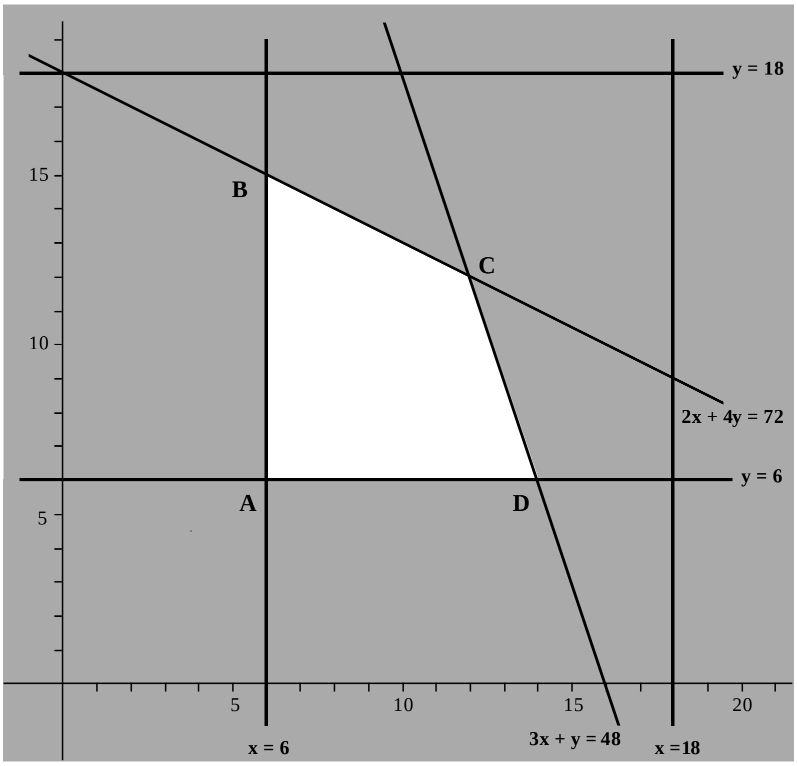
Se trata de un problema de Programación Lineal. Organicemos los datos del problema en una tabla:

FÁBRICA	HORAS/DÍA	ACERO	DESPERDICIOS	EMISIONES
A	x	5x	3x	2x
B	y	6y	y	4y
	$6 \le x \le 18$ $6 \le y \le 18$	F (x , y) maximizar	$3x + y \le 48$	$2x + 4y \le 72$

Así pues, la función objetivo es $F(x, y) = 5x + 6y$ que habrá que maximizar y las restricciones: $6 \le x \le 18$; $6 \le y \le 18$; $3x + y \le 48$; $2x + 4y \le 72$.

Dibujemos la región factible (conjunto de soluciones del sistema de restricciones):

• Las rectas $x = 6$ y $x = 18$ son verticales y pasan por $(6, 0)$ y $(18, 0)$ respectivamente. La solución de la inecuación $x \ge 6$ es el semiplano que está a la derecha de $x = 6$ y la de $x \le 18$ es el semiplano que está a la izquierda de $x = 18$.



• Las rectas $y = 6$ e $y = 18$ son horizontales y pasan por $(0, 6)$ y $(0, 18)$ respectivamente. La solución de $y \ge 6$ es el semiplano que está por encima de $y = 6$ y la de $y \le 18$ es el semiplano que está por debajo de $y = 18$.

• La recta $3x + y = 48$ pasa por los puntos $(16, 0)$ y $(10, 18)$. La solución de la inecuación $3x + y \le 48$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

• La recta $2x + 4y = 72$ pasa por los puntos $(0, 18)$ y $(18, 9)$. La solución de la inecuación $2x + 4y \le 72$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

• La región factible es el cuadrilátero ABCD (en blanco en la figura). Calculemos las coordenadas de los vértices:

Vértice A: $A(6,6)$

Vértice B: $\begin{cases} x=6 \\ 2x+4y=72 \end{cases} \Rightarrow x=6,\ y=15 \Rightarrow B(6,15)$

Vértice C: $\begin{cases} 2x+4y=72 \\ 3x+y=48 \end{cases} \Rightarrow y=48-3x \Rightarrow 2x+192-12x=72 \Rightarrow 10x=120 \Rightarrow x=12\ ,\ y=12 \Rightarrow C(12,12)$

Vértice D: $\begin{cases} y=6 \\ 3x+y=48 \end{cases} \Rightarrow x=14 \Rightarrow D(14,6)$

La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Veamos el valor de la misma en cada uno de ellos:

$F(6,6)=5\cdot 6+6\cdot 6=66\ ;\ F(6,15)=5\cdot 6+6\cdot 15=120\ ;\ F(12,12)=5\cdot 12+6\cdot 12=132\ ;\ F(14,6)=5\cdot 14+6\cdot 6=106$

Luego para maximizar la producción de acero, cada una de las fábricas debe funcionar durante 12 horas al día.

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Dada la función:

$$f = xy$$

definida para $x \in (0,9)$, $y \in (0,3)$, encontrar el punto (x,y) que maximiza f sujeto a la restricción $x+y^2=9$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(7x^2+\frac{3}{x}\right)dx$$

SOLUCIÓN.

a) $x+y^2=9 \Rightarrow x=9-y^2 \Rightarrow f(y)=(9-y^2)y=9y-y^3$

$f'(y)=9-3y^2=0 \Rightarrow y=\sqrt{3}\ ,\ x=6$ (Descartamos el valor $y=-\sqrt{3}\notin(0,3)$)

$f''(y)=-6y \Rightarrow f''(\sqrt{3})<0 \Rightarrow y=\sqrt{3}$ maximiza la función , luego el punto buscado es: $(6,\sqrt{3})$

b) Calculemos una primitiva de la función: $\int\left(7x^2+\frac{3}{x}\right)dx=7\int x^2\,dx+3\int\frac{1}{x}\,dx=\frac{7x^3}{3}+3\ln x$

Por tanto: $\int_1^2\left(7x^2+\frac{3}{x}\right)dx=\left[\frac{7x^3}{3}+3\ln x\right]_1^2=\left(\frac{56}{3}+3\ln 2\right)-\left(\frac{7}{3}+0\right)=\frac{49}{3}+3\ln 2$

3. *(3 puntos)* Se desea estimar la proporción de individuos con sobrepeso en una población. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple y se va a determinar, de cada individuo, si tiene sobrepeso o no, y a partir de los resultados se construirá un intervalo de confianza para la proporción de individuos con sobrepeso en la población. El intervalo se hará a un nivel de confianza del 96%.

a) *(2 puntos)* Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,1 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?

b) *(1 punto)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 200 individuos, de los cuales 40 tienen sobrepeso. Calcular el intervalo de confianza al 96% para la proporción de individuos con sobrepeso en la población.

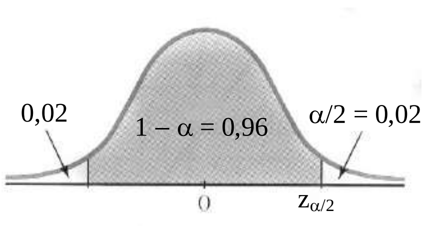
k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de P(Z ≤ k) para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes

SOLUCIÓN.

a) Si la amplitud del intervalo de confianza es de 0,1, el error máximo admisible o cota de error es de $E = \frac{0,1}{2} = 0,05$

Calculemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 96%:



$1-\alpha = 0,96 \;\Rightarrow\; \alpha = 1-0,96 = 0,04 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2} = \frac{0,04}{2} = 0,02 \;\Rightarrow\; 1-0,02 = 0,98$

Buscamos en la tabla el valor 0,98 y el valor crítico más próximo es 2,05.

Estamos ante un supuesto de máxima incertidumbre: $pr = 0,5$.

Tenemos:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} \;\Rightarrow\; n = \frac{z^2_{\alpha/2} \cdot pr \cdot (1-pr)}{E^2} = \frac{2,05^2 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{0,0025} = 420,25$$

Luego debemos coger una muestra de 421 individuos.

b) La proporción de individuos con sobrepeso es ahora $pr = \frac{40}{200} = 0,2$. Para un nivel de confianza del 96%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 2,05$ (obtenido en el apartado anterior).

El radio del intervalo de confianza es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} = 2,05 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{200}} = 0,058$

El intervalo de confianza es entonces: $(0,2-0,058\,,\,0,2+0,058) = (0,142\,;\,0,258)$

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)* Una empresa agroalimentaria produce dos tipos de bebida: A y B. Cada litro de bebida A lleva 0,2 litros de zumo de naranja y 0,4 litros de zumo de mandarina, además de otros componentes. Cada litro de bebida B lleva 0,6 litros de zumo de naranja y 0,2 litros de zumo de mandarina, además de otros componentes, La empresa puede utilizar como máximo 1200 litros de zumo de naranja y 1500 litros de zumo de mandarina. Se quiere que la cantidad producida de tipo A sea mayor o igual que la de tipo B. Sabiendo que el beneficio por litro de bebida de tipo A es de 0,8 euros y por litro de bebida de tipo B es de 1 euro, determinar la cantidad de bebida de cada tipo que tiene que producir para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál será el máximo beneficio?

2. *(3,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + ax + 3$$

calcular, si existe, el valor de a de forma que tenga un mínimo relativo en $x = 2$.

b) *(1 punto)* Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+3}}{2x+5}$$

c) *(1,25 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(x^2 + 3x + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx$$

3. *(3 puntos)* Un 50% de los clientes de un hotel son de España, un 35% son del resto de Europa y un 15% son de fuera de Europa. Se sabe que de los clientes de España, un 20% tiene más de 65 años; de los clientes del resto de Europa, un 40% tiene más de 65 años y de los clientes de fuera de Europa, un 70% tiene más de 65 años.

a) *(1 puntos)* Si elegimos un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de España y tenga más de 65 años?

b) *(1 punto)* Si elegimos un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 65 años?

c) *(1 punto)* Si elegimos un cliente al azar de entre los que tienen más de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea de fuera de Europa?

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2,25 puntos)* Un padre decidió repartir su fortuna de 360 monedas de oro entre sus tres hijas, Isabel, Catalina y Juana, de forma que se cumplieran las siguientes condiciones. La cantidad que recibiera Isabel debía ser igual al doble de la suma de las cantidades que recibieran Catalina y Juana. Además, la suma de las cantidades que recibieran Isabel y Juana debía ser igual al triple de la cantidad que recibiera Catalina. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones para determinar cuántas monedas debía recibir cada hija.

b) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2,5 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{x+3}{2x+3} & \text{si } x \in [0, 2) \\ \dfrac{2x+1}{x^2+12} & \text{si } x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

a.1) *(0,75 puntos)* Estudiar la continuidad de f.

a.2) *(1,75 puntos)* Calcular el máximo valor que toma f para $x \in [4, 6]$.

b) *(1 punto)* Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x+1}-3x\right)$$

3. *(3 puntos)*

a) *(1 punto)* Dados dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$ y $P(A \cap B) = 0{,}2$, calcular $P(A \cup B)$ y $P(A/B)$.

b) *(2 puntos)* Para estimar la proporción de personas con sobrepeso en una población se ha tomado una muestra aleatoria simple de tamaño 100 personas, de las cuales 21 tienen sobrepeso. Calcular el intervalo de confianza al 96% para la proporción de personas con sobrepeso en la población.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de P(Z ≤ k) para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes

CUESTIONES GENERALES:

En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aún así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.

Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)*

Escribir la función objetivo, *0,5 puntos*. Escribir las restricciones, *0,75 puntos*, correspondiendo *0,25 puntos* a cada una de las tres restricciones adicionales a las de no negatividad; no poner las condiciones de no negatividad se penalizará con *0,1 puntos*. Dibujar correctamente la región factible, *0,5 puntos*, y encontrar los puntos extremos, *1 punto* (si encuentran los puntos extremos correctamente sin haber dibujado la región factible se asignan los *1,5 puntos*). Encontrar el punto óptimo, *0,5 puntos*; dar el valor del beneficio máximo, *0,25 puntos*.

2. *(3,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Calcular la derivada, *0,5 puntos*. Sustituir y llegar a la ecuación, *0,25 puntos*. Encontrar el valor de a, *0,25 puntos*. Comprobar que $x = 2$ es mínimo, *0,25 puntos*.

b) *(1 punto)* Se valorará con *0,25 puntos* identificar que es una indeterminación ∞/∞. Calcular el límite, *0,75 puntos*. Si hacen bien el desarrollo (dividiendo por x en numerador y denominador) pero llegan a un valor incorrecto y distinto de 0 y de ∞, se puntuará *0,5 puntos* el apartado.

c) *(1,25 puntos)* Se valora con *1 punto* el cálculo de la primitiva (*0,25 puntos* por cada sumando) y *0,25 puntos* la sustitución correcta de los límites de integración.

3. *(3 puntos)*

En todos los apartados se valorará con *0,25 puntos* identificar correctamente lo que se les pregunta y poner la fórmula adecuada (aunque luego no lo apliquen bien). En todo caso, si responden bien a la pregunta aunque no hayan explicitado la fórmula se les dará la puntuación completa, *1 punto*. Si en un apartado usan algún resultado erróneo de apartados anteriores se les puntuará como si ese resultado hubiera sido correcto.

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2,25 puntos)* Se puntúa *0,25 puntos* plantear cada una de las ecuaciones. Se puntúa *1,5 puntos* la resolución del sistema (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un sistema mucho más sencillo que el original). Si se hace triangularizando, la triangularización vale *1 punto* (un error en la triangularización resta *0,5 puntos* y dos errores *1 punto*) y despejar los valores, *0,5 puntos*. Si se hace por Cramer, poner la fórmula adecuada (o aplicarla aun sin escribirla) vale *0,5 puntos* y calcular los determinantes *1 punto* (*0,25 puntos* cada uno).

b) *(1,25 puntos)* Si lo resuelven por el método de menores: cálculo del determinante, *0,25 puntos*; cálculo de los menores, *0,25 puntos*; asignar signo correcto dependiendo de la paridad, *0,25 puntos*; dividir por el determinante y trasponer la matriz (al final o en el momento de calcular los menores) para llegar a la inversa, *0,5 puntos*. Si se dejan el valor del determinante fuera de la matriz, se les restan *0,1 puntos*.

2. *(3,5 puntos)*

a.1) *(0,75 puntos)* Deducir que es continua en 0, *0,25 puntos*. Deducir que no es continua en 2, *0,25 puntos*. Razonar que es continua en el resto de valores, *0,25 puntos*.

a.2) *(1,75 puntos)* Derivar la función, *0,5 puntos*. Encontrar los valores críticos, *0,25 puntos* y razonar que no entran en el intervalo, *0,25 puntos*. Deducir que el máximo de la función es en $x = 4$, *0,5 puntos*. Dar el valor del beneficio máximo, *0,25 puntos*.

b) *(1 punto)* Multiplicar y dividir por el numerador cambiado de signo, *0,5 puntos*. Calcular el límite, *0,5 puntos.*

3. *(3 puntos)*

a) *(1 punto)* Se valora *0,5 puntos* cada una de las dos probabilidades; no se asignan puntuaciones intermedias.

b) *(2 puntos)* Saber qué cuantil buscar, *0,5 puntos*. Encontrarlo, *0,5 puntos*. Escribir correctamente y calcular $\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$, *0,5 puntos*. Poner la fórmula del IC y calcularlo, *0,5 puntos*.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)* Una empresa agroalimentaria produce dos tipos de bebida: A y B. Cada litro de bebida A lleva 0,2 litros de zumo de naranja y 0,4 litros de zumo de mandarina, además de otros componentes. Cada litro de bebida B lleva 0,6 litros de zumo de naranja y 0,2 litros de zumo de mandarina, además de otros componentes, La empresa puede utilizar como máximo 1200 litros de zumo de naranja y 1500 litros de zumo de mandarina. Se quiere que la cantidad producida de tipo A sea mayor o igual que la de tipo B. Sabiendo que el beneficio por litro de bebida de tipo A es de 0,8 euros y por litro de bebida de tipo B es de 1 euro, determinar la cantidad de bebida de cada tipo que tiene que producir para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál será el máximo beneficio?

SOLUCIÓN

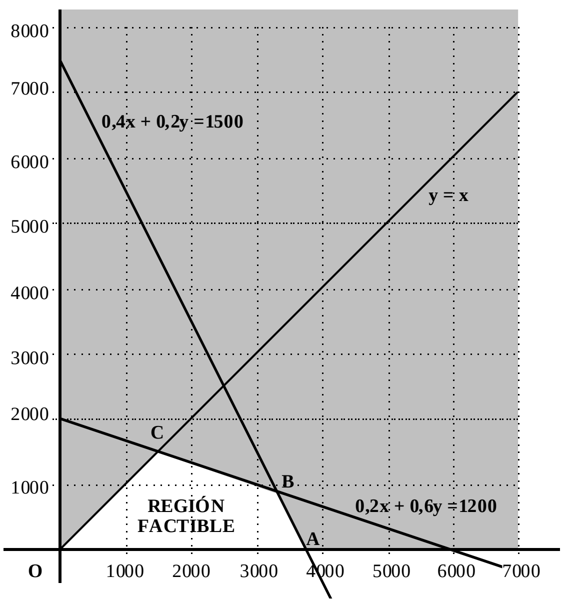
Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

TIPOS DE BEBIDA	Nº DE LITROS	ZUMO DE NARANJA	ZUMO DE MANDARINA	BENEFICIOS
A	X	0,2x	0,4x	0,8x
B	y	0,6y	0,2y	y
Condiciones:	$x \geq y$	$0{,}2x + 0{,}6y \leq 1200$	$0{,}4x + 0{,}2y \leq 1500$	$F(x,y) = 0{,}8x + y$

La función objetivo hace referencia al beneficio (que debe ser máximo): $F(x,y) = 0{,}8x + y$

El conjunto de restricciones al que debe estar condicionada la solución es: $\begin{cases} x \geq y \\ 0{,}2x + 0{,}6y \leq 1200 \\ 0{,}4x + 0{,}2y \leq 1500 \end{cases}$

Dibujemos la región factible:



▪ La recta $x = y$ es la bisectriz del primer cuadrante. El semiplano solución de la inecuación $x \geq y$ es el que se encuentra en la parte inferior-derecha de la recta.

▪ La recta $0{,}2x + 0{,}6y = 1200 \Leftrightarrow x + 3y = 6000$ pasa por los puntos $(0\,,2000)$ y $(6000\,,0)$. El semiplano solución de la inecuación $0{,}2x + 0{,}6y \leq 1200$ es el que contiene al origen de coordenadas.

▪ La recta $0{,}4x + 0{,}2y = 1500 \Leftrightarrow 2x + y = 7500$ pasa por los puntos $(0\,,7500)$ y $(3500\,,500)$. El semiplano solución de la inecuación $0{,}4x + 0{,}2y \leq 1500$ es el que contiene al origen de coordenadas.

▪ La región factible es el cuadrilátero OABC.

La solución óptima está en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos las coordenadas de dichos vértices y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

- El vértice $O(0\ \ 0)$ hace nula la función objetivo.
- Vértice A: $\begin{cases} y=0 \\ 2x+y=7500 \end{cases} \Rightarrow A(3750\,,0) \Rightarrow F(3750\,,0)=3000$
- Vértice B: $\begin{cases} x+3y=6000 \\ 2x+y=7500 \end{cases} \Rightarrow y=900\ ,\ x=3300 \Rightarrow B(3300\,,900) \Rightarrow F(3300\,,900)=3540$
- Vértice C: $\begin{cases} x=y \\ x+3y=6000 \end{cases} \Rightarrow x=y=1500 \Rightarrow C(1500\,,1500) \Rightarrow F(1500\,,1500)=2700$

Por tanto, para maximizar el beneficio deben producirse 3300 litros de la bebida A y 900 litros de la bebida B. El beneficio máximo es de 3540 euros.

2. *(3,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + ax + 3$$

calcular, si existe, el valor de a de forma que tenga un mínimo relativo en $x = 2$.

b) *(1 punto)* Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+3}}{2x+5}$$

c) *(1,25 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(x^2 + 3x + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx$$

SOLUCIÓN

a) Si $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x=2$, debe ser $f'(2)=0$:

$$f'(x)=9x^2+4x+a \Rightarrow f'(2)=36+8+a=0 \Rightarrow a=-44 \Rightarrow f(x)=3x^3+2x^2-44x+3$$

Comprobemos que se trata, en efecto, de un mínimo relativo: $f''(x)=18x+4 \Rightarrow f''(2)=40>0 \Rightarrow$ mínimo.

b) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+3}}{2x+5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2+3}}{x}}{\frac{2x+5}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}}{\frac{2x}{x}+\frac{5}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9+\frac{3}{x^2}}}{2+\frac{5}{x}} = \frac{3}{2}$

c) Obtengamos una primitiva de la función:

$$\int \left(x^2+3x+\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx = \int x^2\,dx + 3\int x\,dx + 6\int \frac{1}{x}\,dx - 2\int x^{-2}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+6\ln x - 2\,\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+6\ln x+\frac{2}{x}$$

Tenemos entonces:

$$\int_1^2 \left(x^2+3x+\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+6\ln x+\frac{2}{x}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3}+6+6\ln 2+1\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+0+2\right) = \frac{7}{3}-\frac{3}{2}+5+6\ln 2 = \frac{35}{6}+6\ln 2$$

3. *(3 puntos)* Un 50% de los clientes de un hotel son de España, un 35% son del resto de Europa y un 15% son de fuera de Europa. Se sabe que de los clientes de España, un 20% tiene más de 65 años; de los clientes del resto de Europa, un 40% tiene más de 65 años y de los clientes de fuera de Europa, un 70% tiene más de 65 años.

a) *(1 puntos)* Si elegimos un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de España y tenga más de 65 años?

b) *(1 punto)* Si elegimos un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 65 años?

c) *(1 punto)* Si elegimos un cliente al azar de entre los que tienen más de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea de fuera de Europa?

SOLUCIÓN

Sean los sucesos: A = “el cliente del hotel es de España”, B = “el cliente es del resto de Europa”, C = “el cliente es de fuera de Europa”, M = “el cliente es mayor de 65 años”.

Se tiene: $P(A)=0{,}5$, $P(B)=0{,}35$, $P(C)=0{,}15$, $P(M/A)=0{,}2$, $P(M/B)=0{,}4$, $P(M/C)=0{,}7$

a) $P(A\cap M)=P(A)\cdot P(M/A)=0{,}5\cdot 0{,}2=0{,}1$

b) $P(M)=P(A)\cdot P(M/A)+P(B)\cdot P(M/B)+P(C)\cdot P(M/C)=0{,}5\cdot 0{,}2+0{,}35\cdot 0{,}4+0{,}15\cdot 0{,}7=0{,}345$

c) $P(C/M)=\dfrac{P(C)\cdot P(M/C)}{P(M)}=\dfrac{0{,}105}{0{,}345}=0{,}3043$

– Otra forma –

Organicemos los datos del problema en una tabla de contingencia. Para un total de 100 clientes:

	A	**B**	**C**	**TOTAL**
M	10	14	10,5	34,5
M’	40	21	4,5	65,5
TOTAL	50	35	15	100

a) $P(A\cap M)=\dfrac{10}{100}=0{,}1$ **b)** $P(M)=\dfrac{34{,}5}{100}=0{,}345$ **c)** $P(C/M)=\dfrac{10{,}5}{34{,}5}=0{,}3043$

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2,25 puntos)* Un padre decidió repartir su fortuna de 360 monedas de oro entre sus tres hijas, Isabel, Catalina y Juana, de forma que se cumplieran las siguientes condiciones. La cantidad que recibiera Isabel debía ser igual al doble de la suma de las cantidades que recibieran Catalina y Juana. Además, la suma de las cantidades que recibieran Isabel y Juana debía ser igual al triple de la cantidad que recibiera Catalina. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones para determinar cuántas monedas debía recibir cada hija.

b) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

a) Sea *x* la cantidad a recibir por Isabel, *y* la de Catalina, *z* la de Juana. Se tiene: $\begin{cases} x+y+z=360 \\ x=2(y+z) \\ x+z=3y \end{cases}$

Resolvamos el sistema de ecuaciones por el método de Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=360 \\ x-2y-2z=0 \\ x-3y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{F2-F1 \\ F3-F1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & -3 & -3 & -360 \\ 0 & -4 & 0 & -360 \end{array}\right) \overset{\substack{F2:(-3) \\ F3:(-4)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 90 \end{array}\right) \overset{F3-F2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & -1 & -30 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+z=360 \\ y+z=120 \\ z=30 \end{cases} \Rightarrow z=30 \Rightarrow y=90 \Rightarrow x=240$$

Por tanto, Isabel debe recibir 240 monedas, Catalina 90 y Juana 30 monedas.

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F2+2F1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{F2:10}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/10 \end{array}\right) \overset{F1-4F2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/10 \end{array}\right) \Rightarrow$

Matriz inversa: $\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/10 \end{pmatrix}$

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2,5 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\in(-\infty,0) \\ \dfrac{x+3}{2x+3} & \text{si } x\in[0,2) \\ \dfrac{2x+1}{x^2+12} & \text{si } x\in[2,+\infty) \end{cases}$$

a.1) *(0,75 puntos)* Estudiar la continuidad de f.

a.2) *(1,75 puntos)* Calcular el máximo valor que toma f para $x\in[4,6]$.

b) *(1 punto)* Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x+1}-3x\right)$$

SOLUCIÓN

a) La función está definida a trozos: $f(x)=2x+1$ (antes de 0), $f(x)=\dfrac{x+3}{2x+3}$ (entre 0 y 2), $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+12}$ (después de 2)

a.1) Las tres funciones que definen a $f(x)$ son continuas en los intervalos en que están definidas. Procede entonces hacer un estudio de la continuidad en los puntos de abscisas $x=0$ y $x=2$:

▪ Continuidad en $x=0$: i) $\exists f(0)=\dfrac{0+3}{0+3}=1$

ii) $\exists\lim\limits_{x\to0}f(x)$: $\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(2x+1)=1\\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+3}{2x+3}=1\end{array}\right.\Rightarrow\ \exists\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$

iii) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)\ \Rightarrow$ La función es continua en $x=0$.

▪ Continuidad en $x=2$: i) $\exists f(2)=\dfrac{4+1}{4+12}=\dfrac{5}{16}$

ii) $\exists\lim\limits_{x\to2}f(x)$: $\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+3}{2x+3}=\dfrac{5}{7}\\ \lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x+1}{x^2+12}=\dfrac{5}{16}\end{array}\right.\Rightarrow\ \nexists\lim\limits_{x\to2}f(x)$

La función es discontinua (salto finito) en $x=2$.

a.2) La función que está definida en el intervalo $[4,6]$ es $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+12}$. El máximo valor lo alcanzará en algún máximo relativo (si lo tiene) o en alguno de los extremos del intervalo.

Estudiemos los posibles extremos relativos:

$$f'(x)=\frac{2\left(x^2+12\right)-(2x+1)\cdot2x}{\left(x^2+12\right)^2}=\frac{2x^2+24-4x^2-2x}{\left(x^2+12\right)^2}=\frac{-2x^2-2x+24}{\left(x^2+12\right)^2}=0\ \Rightarrow\ -x^2-x+12=0\ \Rightarrow$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{-2}=\frac{1\pm7}{-2}=\begin{cases}-4\\3\end{cases}$$

y como $x=-4$ y $x=3$ (posibles extremos relativos) están fuera del intervalo $[4,6]$, el máximo estará en alguno de los extremos del intervalo: $f(4)=\dfrac{9}{28}\simeq 0{,}32$, $f(6)=\dfrac{13}{48}\simeq 0{,}27 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ alcanza su mayor valor en $x=4$: $f(4)=\dfrac{9}{28}$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x+1}-3x\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+4x+1}-3x\right)\cdot\left(\sqrt{9x^2+4x+1}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+4x+1}+3x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+4x+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+4x+1}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{9x^2+4x+1}+3x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+4x+1}}{x}+\frac{3x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+3}=\frac{4}{\sqrt{9}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

3. *(3 puntos)*

a) *(1 punto)* Dados dos sucesos A y B tales que $P(A)=0{,}3$, $P(B)=0{,}6$ y $P(A\cap B)=0{,}2$, calcular $P(A\cup B)$ y $P(A/B)$.

b) *(2 puntos)* Para estimar la proporción de personas con sobrepeso en una población se ha tomado una muestra aleatoria simple de tamaño 100 personas, de las cuales 21 tienen sobrepeso. Calcular el intervalo de confianza al 96% para la proporción de personas con sobrepeso en la población.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes

SOLUCIÓN

a)

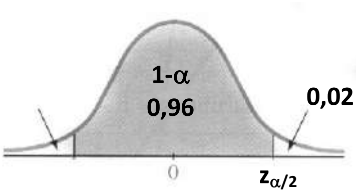
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}3+0{,}6-0{,}2=0{,}7$
- $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}2}{0{,}6}=\dfrac{1}{3}$

b) La proporción obtenida de la muestra es: $pr=\dfrac{21}{100}=0{,}21$

El intervalo de confianza es: $(pr-E\,,\,pr+E)$ donde $E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{pr\cdot(1-pr)}{n}}$

Calculemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 96%:

$1-\alpha=0,96 \quad \Rightarrow \quad \alpha=1-0,96=0,04 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\alpha}{2}=0,02 \quad \Rightarrow \quad 1-\dfrac{\alpha}{2}=1-0,02=0,98$



Buscamos en la tabla el valor más aproximado a $0,98$ y se corresponde con un valor crítico $z_{\alpha/2}=2,05$. Por tanto: $E=2,05\cdot\sqrt{\dfrac{0,21\cdot 0,79}{100}}\simeq 0,08$.

El intervalo de confianza es entonces: $\left(0,21-0,08\ ,\ 0,21+0,08\right)=\left(0,13\ ,\ 0,29\right)$

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2015

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SS. II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de A.

b) *(1,25 puntos)* Encontrar una matriz X, si existe, tal que $2X + B^2 = 3A$.

c) *(1 punto)* Sea $C = A + B$. Calcular el rango de C.

2. *(3,5 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{bx+3}{1-x} & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ x+3 & \text{si } x \in (0,3] \\ \dfrac{ax+3}{x^2+1} & \text{si } x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

a) *(1 punto)* Calcular a para que la función sea continua en $x = 3$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular b para que la función sea derivable en $x = 0$.

c) *(1 punto)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(\frac{3}{x} + e^{5x} + 8x\right) dx$$

3. *(3 puntos)* Disponemos de los siguientes datos sobre el uso de nuevas tecnologías por parte de los estudiantes de una universidad: un 70% de los estudiantes de esa universidad tiene teléfono inteligente, un 50% de los estudiantes de esa universidad tiene ordenador portátil y un 40% de los estudiantes de esa universidad tiene ambos dispositivos (teléfono inteligente y ordenador portátil).

a) *(1 punto)* Si elegimos al azar un estudiante de esa universidad, ¿cuál es la probabilidad de que tenga al menos uno de los dos dispositivos?

b) *(1 punto)* Si elegimos al azar un estudiante de entre los que tienen teléfono inteligente, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ordenador portátil?

c) *(1 punto)* Sea A el suceso "el estudiante tiene teléfono inteligente" y B el suceso "el estudiante tiene ordenador portátil", ¿son los sucesos A y B independientes?

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Un agricultor tiene 40 hectáreas de terreno en las que puede plantar cebada o maíz (o no plantar nada). Cada hectárea de cebada necesitará 5 hectómetros cúbicos de agua mientras que cada hectárea de maíz necesitará 10 hectómetros cúbicos de agua. El agricultor podrá disponer de hasta 225 hectómetros cúbicos de agua. El beneficio que obtendrá por cada hectárea de cebada es de 100 euros mientras que por cada hectárea de maíz obtendrá un beneficio de 160 euros; además, las hectáreas en las que no plante nada las arrendará y obtendrá un beneficio de 50 euros por hectárea. La normativa no le permite plantar más hectáreas de maíz que de cebada. ¿Cuántas hectáreas de cebada y cuántas de maíz tiene que plantar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo?

2. *(3,5 puntos)* Sea la función:

$$f(x) = \frac{2x+5}{x^2-4}$$

Calcular:

a) *(0,5 puntos)* Su dominio.

b) *(1 punto)* ¿Para qué valores de x es $f(x)$ mayor que 0?

c) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

d) *(0,75 puntos)* Sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.

3. *(3 puntos)* La producción en kilos de los naranjos de una variedad es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 5 kilos.

a) *(1,5 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 96% para la media de la producción de los naranjos de esta variedad de forma que su amplitud no sea mayor que 3 kilos. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

b) *(1,5 puntos)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 10. Elegimos 10 naranjos de esta variedad y medimos su producción en kilos, con los siguientes resultados:

82, 90, 87, 75, 78, 83, 92, 77, 85, 86.

Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media de la producción de los naranjos de esta variedad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de P(Z ≤ k) para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes

CUESTIONES GENERALES:

En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aún así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.

Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Si lo resuelven por el método de menores: cálculo del determinante, *0,25 puntos*; cálculo de los menores, *0,25 puntos*; asignar signo correcto dependiendo de la paridad, *0,25 puntos;* dividir por el determinante y trasponer la matriz (al final o en el momento de calcular los menores) para llegar a la inversa, *0,5 puntos*. Si se dejan el valor del determinante fuera de la matriz, se les resta *0,1 puntos*.

b) *(1,25 puntos)* Calcular B^2, *0,5 puntos.* Calcular $3A$, *0,25 puntos.* Calcular $3A$ -B^2, *0,25 puntos.* Calcular X, *0,25 puntos* (si dejan $1/2$ fuera se les resta *0,1 puntos*).

c) *(1 punto)* Calcular C, *0,5 puntos*. Comprobar que tiene rango 2, *0,5 puntos*.

2. *(3,5 puntos)*

a) *(1 punto)* Encontrar el límite por la izquierda, *0,25 puntos*; encontrar el límite por la derecha, *0,25 puntos*; calcular a, *0,5 puntos*.

b) *(1,5 puntos)* Encontrar la derivada por la izquierda, *0,75 puntos*; encontrar la derivada por la derecha, *0,25 puntos*; calcular b, *0,5 puntos*. En este apartado se considera correcto tanto si lo hacen con la definición de derivada (como límite del cociente de los incrementos) como si calculan la expresión de la derivada y sustituyen el valor $x = 0$.

c) *(1 punto)* Se valora con *0,75 puntos* el cálculo de la primitiva (*0,25 puntos* por cada sumando) y *0,25 puntos* la sustitución correcta de los límites de integración.

3. *(3 puntos)*

En los dos primeros apartados se valorará con *0,25 puntos* identificar correctamente lo que se les pregunta y poner la fórmula adecuada (aunque luego no lo apliquen bien). En todo caso, si responden bien a la pregunta aunque no hayan explicitado la fórmula, se les dará la puntuación completa, *1 punto*. En el último apartado se valorará con *0,25 puntos* el explicitar algún criterio de independencia de sucesos. Si en un apartado usan algún resultado erróneo de apartados anteriores se les puntuará como si ese resultado hubiera sido correcto.

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)*

Escribir la función objetivo, *0,5 puntos,* de los cuales *0,25 puntos* corresponden a la parte de las hectáreas alquiladas*.* Escribir las restricciones, *0,75 puntos,* correspondiendo *0,25 puntos* a cada una de las tres restricciones adicionales a las de no negatividad; no poner las condiciones de no negatividad se penalizará con *0,1 puntos*. Dibujar correctamente la región factible, *0,5 puntos* y encontrar los puntos extremos, *1 punto* (si encuentran los puntos extremos correctamente sin haber dibujado la región factible se asignan los *1,5 puntos*). Encontrar el punto óptimo, *0,5 puntos*; dar el valor del beneficio máximo, *0,25 puntos.*

2. *(3,5 puntos)*

a) *(0,5 puntos)* Se puntuará con *0,25 puntos* si cometen un error (dejarse uno de los puntos fuera del dominio, poner uno que no es…) y con *0 puntos* si cometen más de un error.

b) *(1 punto) 0,5 puntos* por obtener los tres monomios que determinan el signo (un error les penaliza *0,25 puntos* aquí y dos errores les penalizan *0,5 puntos*). *0,5 puntos* por obtener, a partir de la descomposición anterior, los intervalos de positividad (un error les penaliza *0,25 puntos* aquí y dos errores les penalizan *0,5 puntos*). Incluir alguno de los extremos de los intervalos en la solución se penaliza con *0,1 puntos*.

c) *(1,25 puntos)* Calcular la derivada, *0,5 puntos*. Encontrar puntos críticos, *0,5 puntos* (*0,25 puntos* por cada uno). Justificar cuál es máximo y cuál mínimo, *0,25 puntos*.

d) *(0,75 puntos)* Asíntotas verticales, *0,25 puntos*. Asíntota horizontal, *0,25 puntos.* Demostrar (o razonar) que no tiene asíntota oblicua, *0,25 puntos*.

3. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Saber qué cuantil buscar, *0,25 puntos*. Encontrarlo, *0,25 puntos*. Poner la fórmula del error, *0,5 puntos*. Sustituir y calcular n, *0,5 puntos* (si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior entero se restan *0,1 puntos*).

b) *(1,5 puntos)* Calcular la media de los datos, *0,5 puntos*. Calcular el error (semiamplitud del intervalo) *0,5 puntos*; en esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado (a), aunque no lo sea. Poner la fórmula del IC y calcularlo, *0,5 puntos*.

Universidad Zaragoza

1542

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2015

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SS. II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de A.

b) *(1,25 puntos)* Encontrar una matriz X, si existe, tal que $2X + B^2 = 3A$.

c) *(1 punto)* Sea $C = A + B$. Calcular el rango de C.

SOLUCIÓN.

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1:2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2+2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{F_2:5}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/5 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_1-2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/10 & -3/10 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/5 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & -3/10 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/10 & -3/10 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

b) $2X + B^2 = 3A \Rightarrow X = \frac{1}{2}\left(3A - B^2\right)$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow 3A - B^2 = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 16 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $$C = A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_2\cdot 3}{\sim} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \overset{F_2+F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} C = 2$$

2. *(3,5 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{bx+3}{1-x} & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ x+3 & \text{si } x \in (0,3] \\ \dfrac{ax+3}{x^2+1} & \text{si } x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

a) *(1 punto)* Calcular a para que la función sea continua en $x = 3$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular b para que la función sea derivable en $x = 0$.

c) *(1 punto)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(\frac{3}{x} + e^{5x} + 8x\right) dx$$

SOLUCIÓN.

a) Para que $f(x)$ sea continua en $x=3$ debe ser:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 3}\left(x+3\right)=\lim_{x\to 3}\frac{ax+3}{x^2+1} \quad\Leftrightarrow\quad 6=\frac{3a+3}{10} \quad\Rightarrow\quad 3a+3=60 \quad\Rightarrow\quad a=\frac{57}{3}=19$$

b) En el entorno de $x=0$, la función derivada es: $\quad f'(x)=\begin{cases} \dfrac{b(1-x)+bx+3}{(1-x)^2} & \text{si } x\in(-\infty\,,0] \\ 1 & \text{si } x\in(0\,,3] \end{cases}$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x=0$ debe ser: $\quad f'(0^-)=f'(0^+) \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{b+3}{1}=1 \quad\Rightarrow\quad b=-2$

c) Obtengamos una primitiva de la función: $\displaystyle\int\left(\frac{3}{x}+e^{5x}+8x\right)dx=3\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{5}\int e^{5x}\cdot 5\cdot dx+8\int x\,dx=3\ln x+\frac{e^{5x}}{5}+4x^2$

Por tanto: $\displaystyle\int_1^2\left(\frac{3}{x}+e^{5x}+8x\right)dx=\left[3\ln x+\frac{e^{5x}}{5}+4x^2\right]_1^2=\left(3\ln 2+\frac{e^{10}}{5}+16\right)-\left(3\ln 1+\frac{e^{5}}{5}+4\right)=3\ln 2+\frac{e^{10}-e^{5}}{5}+12$

3. *(3 puntos)* Disponemos de los siguientes datos sobre el uso de nuevas tecnologías por parte de los estudiantes de una universidad: un 70% de los estudiantes de esa universidad tiene teléfono inteligente, un 50% de los estudiantes de esa universidad tiene ordenador portátil y un 40% de los estudiantes de esa universidad tiene ambos dispositivos (teléfono inteligente y ordenador portátil).

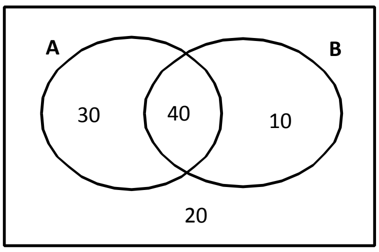
a) *(1 punto)* Si elegimos al azar un estudiante de esa universidad, ¿cuál es la probabilidad de que tenga al menos uno de los dos dispositivos?

b) *(1 punto)* Si elegimos al azar un estudiante de entre los que tienen teléfono inteligente, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ordenador portátil?

c) *(1 punto)* Sea A el suceso "el estudiante tiene teléfono inteligente" y B el suceso "el estudiante tiene ordenador portátil", ¿son los sucesos A y B independientes?

SOLUCIÓN.

Sea A el suceso "el estudiante tiene teléfono inteligente" y B el suceso "el estudiante tiene ordenador portátil". Para un total de 100 estudiantes, la distribución es:



a) $p\left(A\cup B\right)=\dfrac{80}{100}=0{,}8$

▪ También: $\quad p\left(A\cup B\right)=p\left(A\right)+p\left(B\right)-p\left(A\cap B\right)=0{,}7+0{,}5-0{,}4=0{,}8$

b) $p\left(B/A\right)=\dfrac{40}{70}=\dfrac{4}{7}=0{,}57$

▪ También: $\quad p\left(B/A\right)=\dfrac{p\left(B\cap A\right)}{p\left(A\right)}=\dfrac{0{,}4}{0{,}7}=\dfrac{4}{7}=0{,}57$

c) $p\left(A\cap B\right)=\dfrac{40}{100}=0{,}4 \quad ; \quad p\left(A\right)=\dfrac{70}{100}=0{,}7 \quad ; \quad p\left(B\right)=\dfrac{50}{100}=0{,}5$

Como $p\left(A\cap B\right)\neq p\left(A\right)\cdot p\left(B\right) \quad\Rightarrow$ los sucesos no son independientes.

▪ También: A y B son independientes si $p\left(B/A\right)=p\left(B\right)$.

Como $p\left(B/A\right)=0{,}57$ y $p\left(B\right)=0{,}5$, los sucesos no son independientes.

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Un agricultor tiene 40 hectáreas de terreno en las que puede plantar cebada o maíz (o no plantar nada). Cada hectárea de cebada necesitará 5 hectómetros cúbicos de agua mientras que cada hectárea de maíz necesitará 10 hectómetros cúbicos de agua. El agricultor podrá disponer de hasta 225 hectómetros cúbicos de agua. El beneficio que obtendrá por cada hectárea de cebada es de 100 euros mientras que por cada hectárea de maíz obtendrá un beneficio de 160 euros; además, las hectáreas en las que no plante nada las arrendará y obtendrá un beneficio de 50 euros por hectárea. La normativa no le permite plantar más hectáreas de maíz que de cebada. ¿Cuántas hectáreas de cebada y cuántas de maíz tiene que plantar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo?

SOLUCIÓN.

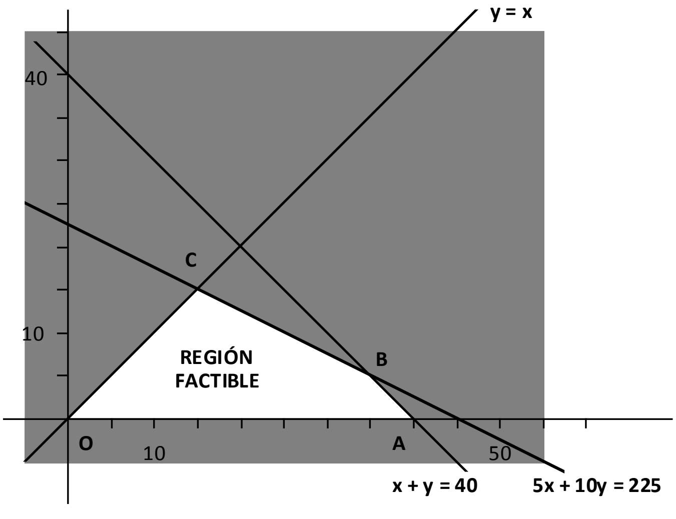
Se trata de un problema de Programación Lineal. Organicemos los datos en una tabla para facilitar su uso:

TIPO DE CULTIVO	Nº DE HECTÁREAS	HM^3 DE AGUA	BENEFICIO
Cebada	x	5x	100x
Maíz	y	10y	160y
	$x \geq 0$, $y \geq 0$ $x + y \leq 40$ $y \leq x$	$5x + 10y \leq 225 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + 2y \leq 45$	$100x + 160y + 50(40 - x - y) =$ $= 50x + 110y + 2000$

La función objetivo (beneficio que se obtiene) es: $F(x, y) = 50x + 110y + 2000$ donde *x* representa el número de hectáreas de cebada e *y* el de maíz plantadas.

Las restricciones a que debe estar sometida la solución son: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 40$, $y \leq x$, $x + 2y \leq 45$.

Obtengamos la región factible, conjunto de puntos del plano (x, y) que verifican las restricciones.



La recta $x = 0$ es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.

La recta $y = 0$ es el eje de abscisas y la solución de $y \geq 0$ es el semiplano superior.

La recta $x + y = 40$ pasa por los puntos $(40, 0)$ y $(0, 40)$. La solución de la inecuación $x + y \leq 40$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La recta $y = x$ es la bisectriz del primer cuadrante. La inecuación $y \leq x$ tiene por solución el semiplano al que pertenece el punto $(10, 0)$.

La recta $5x + 10y = 225$ o $x + 2y = 45$ pasa por los puntos $(45, 0)$ y $(5, 20)$. La solución de la inecuación $x + 2y \leq 45$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

El conjunto de puntos del plano que verifican las restricciones es el cuadrilátero OABC (en blanco en la figura).

La función objetivo se optimiza en alguno o algunos de los vértices de la región factible. Obtengamos entonces las coordenadas de los vértices y el valor de la función objetivo en los mismos para observar en cuál de ellos es máxima.

Vértice $O(0, 0) \Rightarrow F(0, 0) = 2000$.

Vértice $A(40, 0) \Rightarrow F(40, 0) = 4000$

Vértice B: $\begin{cases} x+y=40 \\ x+2y=45 \end{cases} \Rightarrow \; y=5 \;,\; x=35 \;\Rightarrow\; B(35\,,5) \;\Rightarrow\; F(35\,,5)=4300$

Vértice C: $\begin{cases} y=x \\ x+2y=45 \end{cases} \Rightarrow \; x=y=15 \;\Rightarrow\; C(15\,,15) \;\Rightarrow\; F(15\,,15)=4400$

La función objetivo se maximiza en el vértice C. Para obtener el máximo beneficio, que será de 4400 euros, deben sembrarse 15 ha de cebada, 15 ha de maíz y dejar 10 ha sin sembrar.

2. *(3,5 puntos)* Sea la función:

$$f(x)=\frac{2x+5}{x^2-4}$$

Calcular:

a) *(0,5 puntos)* Su dominio.

b) *(1 punto)* ¿Para qué valores de x es $f(x)$ mayor que 0?

c) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

d) *(0,75 puntos)* Sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.

SOLUCIÓN.

a) Se trata de una función racional cuyo dominio está formado por todos los números reales excepto los que anulan el denominador. En este caso: $\operatorname{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-2\,,2\}$.

b) $\dfrac{2x+5}{x^2-4}>0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2x+5>0 \;\Rightarrow\; x>-5/2 \;\Rightarrow\; x\in(-5/2\,,+\infty) \\ x^2-4>0 \;\Rightarrow\; x\in(-\infty\,,-2)\cup(2\,,+\infty) \end{cases} \Rightarrow\; x\in\left(-\frac{5}{2},-2\right)\cup(2\,,+\infty)$$

$$\begin{cases} 2x+5<0 \;\Rightarrow\; x<-5/2 \;\Rightarrow\; x\in(-\infty\,,-5/2) \\ x^2-4<0 \;\Rightarrow\; x\in(-2\,,2) \end{cases} \Rightarrow\; \text{No hay soluciones comunes}$$

Por lo tanto, la función es positiva para $x\in\left(-\frac{5}{2},-2\right)\cup(2\,,+\infty)$.

c) $$f'(x)=\frac{2(x^2-4)-(2x+5)2x}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^2-8-4x^2-10x}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x^2-10x-8}{(x^2-4)^2}=0 \;\Rightarrow\; -2x^2-10x-8=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x=\frac{10\pm\sqrt{100-64}}{-4}=\frac{10\pm 6}{-4}=\begin{cases} -4 \\ -1 \end{cases} \quad \text{(valores críticos)}$$

$$f''(x)=\frac{(-4x-10)(x^2-4)^2-(-2x^2-10x-8)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4}$$

NOTA: Se trata ahora de sustituir los valores críticos en f'' y observar el signo del valor que obtenemos. Para facilitar la tarea debe tenerse en cuenta que el denominador es siempre positivo y que en el numerador, el primer factor del segundo sumando es 0 y con él todo ese segundo sumando. Que el segundo factor del primer sumando es positivo. El signo de f'' depende entonces del signo que tenga el primer factor del primer sumando. En este caso: $-4x-10$.

$f''(-4)>0 \;\Rightarrow\;$ En $x=-4$ la función tiene un mínimo relativo: $\left(-4\,,-\frac{1}{4}\right)$

$f''(-1)<0 \;\Rightarrow\;$ En $x=-1$ la función tiene un máximo relativo: $(-1\,,-1)$

d) ▪ Asíntotas verticales: al tratarse de una función racional, las posibles asíntotas verticales están en los valores de x que anulan el denominador. En este caso: $x=-2$ y $x=2$.

$x=-2$ es asíntota vertical de la función porque $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+5}{x^2-4}=\infty$.

$x=2$ es asíntota vertical de la función porque $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+5}{x^2-4}=\infty$.

▪ Asíntota horizontal: $y=0$ pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+4}{x^2-4}=0$

3. *(3 puntos)* La producción en kilos de los naranjos de una variedad es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 5 kilos.

a) *(1,5 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 96% para la media de la producción de los naranjos de esta variedad de forma que su amplitud no sea mayor que 3 kilos. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

b) *(1,5 puntos)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 10. Elegimos 10 naranjos de esta variedad y medimos su producción en kilos, con los siguientes resultados:

82, 90, 87, 75, 78, 83, 92, 77, 85, 86.

Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media de la producción de los naranjos de esta variedad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes

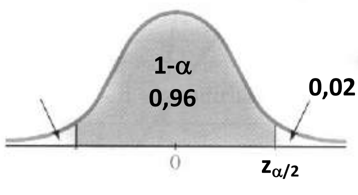
SOLUCIÓN.

a) Si la amplitud del intervalo de confianza debe ser menor o igual que 3 kilos, el radio del intervalo (error máximo admisible) es de 1,5 kilos.

Se tiene: $E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; n=\left(z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{E}\right)^2$

Calculemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 96%:

$1-\alpha=0{,}96 \;\Rightarrow\; \alpha=1-0{,}96=0{,}04 \;\Rightarrow\; \dfrac{\alpha}{2}=0{,}02 \;\Rightarrow\; 1-\dfrac{\alpha}{2}=1-0{,}02=0{,}98$



Buscamos en la tabla el valor más aproximado a 0,98 y se corresponde con un valor crítico $z_{\alpha/2}=2{,}05$.

Se tiene entonces: $n=\left(\dfrac{2{,}05\cdot 5}{1{,}5}\right)^2=46{,}7 \;\Rightarrow\;$ Debe tomarse una muestra de 46 naranjos.

b) Calculemos la media de la muestra: $\overline{X}=\frac{82+90+87+75+78+83+92+77+85+86}{10}=\frac{835}{10}=83{,}5$ kilos

Aunque la muestra sea pequeña, como la población de partida es normal también lo es la distribución de las medias muestrales cualquiera que sea su tamaño.

El radio del intervalo de confianza es: $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2{,}05\cdot\frac{6}{\sqrt{10}}=3{,}24$

El intervalo de confianza para la media de la población es entonces: $\left(\overline{X}-E\ ,\ \overline{X}+E\right)=\left(80{,}26\ ,\ 86{,}74\right)$

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)* Una empresa conservera va a preparar lotes de dos tipos, A y B, con sus productos. En cada lote de tipo A pone 10 frascos de pimientos, 2 frascos de espárragos y 1 frasco de alcachofas. En cada lote de tipo B pone 4 frascos de pimientos, 5 frascos de espárragos y 1 frasco de alcachofas. Puede utilizar, como máximo, 500 frascos de pimientos, 310 frascos de espárragos y 65 frascos de alcachofas. Sabiendo que por cada lote de tipo A obtiene un beneficio de 10 euros y por cada lote de tipo B obtiene un beneficio de 6 euros, ¿cuántos lotes de cada tipo tendrá que preparar para que su beneficio sea máximo? ¿Cuál será el valor de ese beneficio máximo?

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Encontrar los extremos absolutos de la función:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 8$$

en el intervalo $x \in [-4, 2]$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 9x} - 2x \right)$$

3. *(3 puntos)* Un grupo de turistas está formado por 12 alemanes, 8 franceses y 6 italianos. Se escogen al azar dos turistas del grupo. Calcular:

a) *(1 punto)* La probabilidad de que los dos sean alemanes.

b) *(1 punto)* La probabilidad de que ninguno sea alemán.

c) *(1 punto)* La probabilidad de que sean de distinta nacionalidad.

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)*
   a) *(2 puntos)* Dadas las matrices:
   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$
   encontrar, si existe, una matriz X tal que:
   $$5X + 3C^2 = 2AB$$
   b) *(1,5 puntos)* Calcular el rango de la matriz:
   $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
2. *(3,5 puntos)* Dada la función f, definida para $x \geq 0$:
   $$f(x) = \begin{cases} x-1 & si\ 0 \leq x \leq 5 \\ 9 - \dfrac{25}{x} & si\ 5 < x \leq 10 \\ 4\sqrt{x+6} - \dfrac{x}{5} & si\ x > 10 \end{cases}$$
   a) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de $x > 0$ es la función f continua?
   b) *(1,75 puntos)* ¿Cuál es el máximo valor que toma $f(x)$ para $x \in [30, 100]$?
   c) *(1 punto)* Calcular:
   $$\int_6^8 f(x)dx$$
3. *(3 puntos)* El consumo mensual de electricidad (en kWh) de los hogares de una ciudad es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 25 kWh.
   a) *(1,5 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 96% para la media del consumo de electricidad de los hogares de esta ciudad, de forma que su amplitud no sea mayor que 12 kWh. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?
   b) *(1,5 puntos)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 10. Elegimos 10 hogares y miramos su consumo mensual en electricidad, con los siguientes resultados:
   100, 125, 78, 80, 88, 89, 124, 142, 98, 125.
   Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media del consumo mensual de electricidad en los hogares de esta ciudad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de P(Z ≤ k) para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CUESTIONES GENERALES:

En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.

Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)*

Escribir la función objetivo, *0,5 puntos*. Escribir las restricciones, *0,75 puntos*, correspondiendo *0,25 puntos* a cada una de las tres restricciones adicionales a las de no negatividad; no poner las condiciones de no negatividad se penalizará con *0,1 puntos*. Dibujar correctamente la región factible, *0,5 puntos*, y encontrar los puntos extremos, *1 punto* (si encuentran los puntos extremos correctamente sin haber dibujado la región factible se asignan los *1,5 puntos*). Encontrar el punto óptimo, *0,5 puntos*; dar el valor del beneficio máximo, *0,25 puntos*.

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Calcular la derivada, *0,75 puntos*. Encontrar los valores críticos, *0,25 puntos*. Razonar cuál es mínimo y máximo relativo, *0,5 puntos* (*0,25 puntos* cada uno). Calcular el mínimo absoluto, *0,25 puntos*, y comprobar que el máximo relativo es también absoluto, *0,25 puntos*.

b) *(1,5 puntos)* Multiplicar y dividir por el numerador cambiado de signo, *0,5 puntos*. Calcular el límite del cociente, *1 punto* (en este límite del cociente, si hacen bien el desarrollo dividiendo por x en numerador y denominador pero llegan a un valor incorrecto y distinto de 0 y de ∞, se puntuará con *0,5 puntos*).

3. *(3 puntos)*

En todos los apartados se valorará con *0,25 puntos* por poner una fórmula correcta y *0,75 puntos* por sustituir correctamente (si no explicitan la fórmula pero lo resuelven correctamente, se les asigna *1 punto* en el apartado). Si hacen el ejercicio como si fuera con reemplazamiento, se restarán *0,5 puntos* en el apartado a), pero no en los demás, siempre que los hagan también con reemplazamiento. Si en un apartado se usa un resultado incorrecto de un apartado anterior, no se tendrá en cuenta el error anterior para evaluar el apartado.

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Calcular C^2, *0,5 puntos*. Calcular AB, *0,5 puntos*. Calcular $2AB - 3C^2$, *0,5 puntos*. Calcular X, *0,5 puntos* (si dejan 1/5 fuera se les restan *0,1 puntos*).

b) *(1,5 puntos)* Si lo hacen por determinantes, 0,5 puntos por calcular el determinante de orden 3, *0,5 puntos* por calcular un determinante de orden 2 (que sea distinto de 0) y *0,5 puntos* por razonar que el rango es 2. Si lo hacen triangularizando, se asigna *1 punto* por la correcta triangularización (un fallo resta *0,5 puntos* y dos fallos *1 punto*) y *0,5 puntos* por razonar que el rango es 2.

2. *(3,5 puntos)*

a) *(0,75 puntos)* Deducir que es continua en 5, *0,25 puntos*. Deducir que no es continua en 10, *0,25 puntos*. Razonar que es continua en el resto de valores, *0,25 puntos*.

b) (*1,75 puntos*) Derivar la función, *0,75 puntos* (*0,5 puntos* por el primer sumando y *0,25 puntos* por el segundo). Encontrar el valor crítico, *0,25 puntos* y comprobar que es máximo relativo, *0,25 puntos*. Razonar o comprobar (comparando con el valor de la función en los extremos) que es máximo absoluto, *0,25 puntos*. Dar el valor del beneficio máximo, *0,25 puntos*.

c) *(1 punto) 0,75 puntos* por encontrar la primitiva (*0,25 puntos* por el primer sumando y *0,5 puntos* por el segundo) y *0,25 puntos* por sustituir correctamente los extremos.

3. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Saber qué cuantil buscar, *0,25 puntos*. Encontrarlo, *0,25 puntos.* Poner la fórmula del error, *0,5 puntos*. Sustituir y calcular n, *0,5 puntos* (si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior entero, se restan *0,1 puntos*).

b) *(1,5 puntos)* Calcular la media de los datos, *0,5 puntos*. Calcular el error (semiamplitud del intervalo) *0,5 puntos*; en esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado a), aunque no lo sea. Poner la fórmula del IC y calcularlo, *0,5 puntos*.

Universidad Zaragoza

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2016
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)* Una empresa conservera va a preparar lotes de dos tipos, A y B, con sus productos. En cada lote de tipo A pone 10 frascos de pimientos, 2 frascos de espárragos y 1 frasco de alcachofas. En cada lote de tipo B pone 4 frascos de pimientos, 5 frascos de espárragos y 1 frasco de alcachofas. Puede utilizar, como máximo, 500 frascos de pimientos, 310 frascos de espárragos y 65 frascos de alcachofas. Sabiendo que por cada lote de tipo A obtiene un beneficio de 10 euros y por cada lote de tipo B obtiene un beneficio de 6 euros, ¿cuántos lotes de cada tipo tendrá que preparar para que su beneficio sea máximo? ¿Cuál será el valor de ese beneficio máximo?

SOLUCIÓN

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

LOTES	CANTIDAD	PIMIENTOS	ESPÁRRAGOS	ALCACHOFAS	BENEFICIOS
A	x	10x	2x	x	10x
B	y	4y	5y	y	6y
Condiciones:	$x \geq 0$, $y \geq 0$	$10x+4y \leq 500$	$2x+5y \leq 310$	$x+y \leq 65$	$F(x,y)=10x+6y$

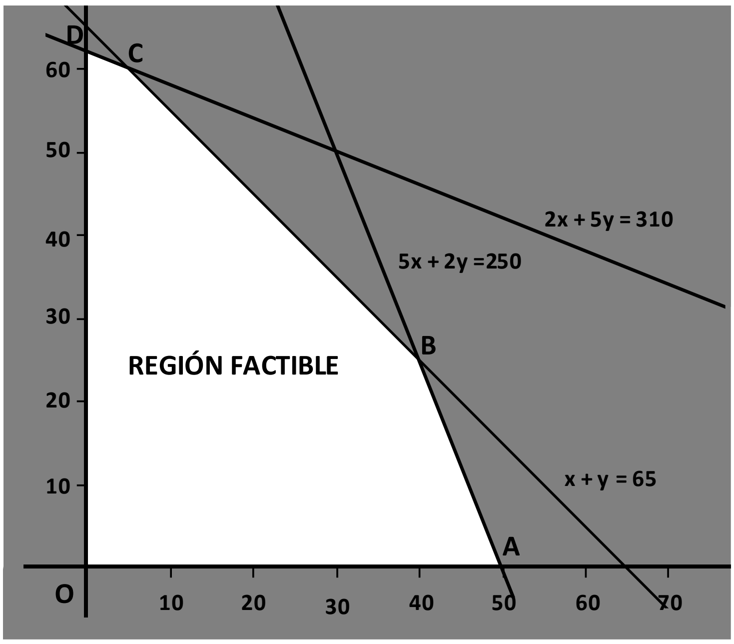
La función objetivo es $F(x,y)=10x+6y$ que debe maximizarse (beneficios)

Las restricciones a que debe estar sometida la solución son:

$$x \geq 0 ,\ y \geq 0 ,\ 10x+4y \leq 500 ,\quad 2x+5y \leq 310 ,\ x+y \leq 65$$

Dibujamos la región factible:

- El semiplano solución de $x \geq 0$ es el de la derecha del eje OY.
- La solución de $y \geq 0$ es el semiplano superior respecto al eje OX.
- La recta $10x+4y=500 \Leftrightarrow 5x+2y=250$ pasa, por ejemplo, por los puntos $(50,0)$ y $(30,50)$. La solución de la inecuación $10x+4y \leq 500$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.
- La recta $2x+5y=310$ pasa por los puntos $(30,50)$ y $(55,40)$. La solución de $2x+5y \leq 310$ es el semiplano al que no pertenece el origen.
- La recta $x+y=65$ pasa por los puntos $(65,0)$ y $(0,65)$. La solución de la inecuación $x+y \leq 65$ es el semiplano al que no pertenece el origen.



La región factible (en blanco) es el pentágono OABCD. La solución óptima está en alguno de sus vértices. Obtengamos sus coordenadas y el valor que tiene la función objetivo en cada uno de ellos para comprobar dónde es máxima:

$O(0,0) \Rightarrow F(0,0)=0$.

$A(50,0) \Rightarrow F(50,0)=500$.

Vértice B: $\begin{cases} 5x+2y=250 \\ x+y=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2y=250 \\ -2x-2y=-130 \end{cases} \Rightarrow 3x=120 \Rightarrow x=40 \ , \ y=25 \Rightarrow B(40,25) \Rightarrow F(40,25)=550$

Vértice C: $\begin{cases} 2x+5y=310 \\ x+y=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5y=310 \\ -2x-2y=-130 \end{cases} \Rightarrow 3y=180 \Rightarrow y=60 \ , \ x=5 \Rightarrow C(5,60) \Rightarrow F(5,60)=410$

Vértice D: $\begin{cases} 2x+5y=310 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y=62 \ , \ x=0 \Rightarrow D(0,62) \Rightarrow F(0,62)=372$

Para obtener el beneficio máximo, de 550 euros, se deben preparar 40 lotes de tipo A y 25 lotes de tipo B.

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Encontrar los extremos absolutos de la función:

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x+8$$

en el intervalo $x \in [-4,2]$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+9x}-2x\right)$$

SOLUCIÓN

a) Puesto que $f(x)$ es una función continua, los extremos absolutos los alcanzará en los extremos relativos o en los extremos del intervalo. Obtengamos los extremos relativos:

$$f'(x)=6x^2+6x-12=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}= \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

Calculamos el valor de la función en los extremos relativos (que pertenecen al intervalo) y en los extremos del intervalo:

$f(-4)=2(-4)^3+3(-4)^2-12(-4)+8=-128+48+48+8=-24$

$f(-2)=2(-2)^3+3(-2)^2-12(-2)+8=-16+12+24+8=28$

$f(1)=2+3-12+8=1$

$f(2)=16+12-24+8=12$

El mínimo absoluto se alcanza en $x=-4$ y el máximo absoluto en $x=-2$.

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+9x}-2x\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+9x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+9x}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+9x}+2x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+9x-4x^2}{\sqrt{4x^2+9x}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x}{\sqrt{4x^2+9x}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{9x}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{9x}{x^2}}+\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9}{\sqrt{4+\frac{9}{x}}+2}=\frac{9}{4}$$

3. *(3 puntos)* Un grupo de turistas está formado por 12 alemanes, 8 franceses y 6 italianos. Se escogen al azar dos turistas del grupo. Calcular:

a) *(1 punto)* La probabilidad de que los dos sean alemanes.

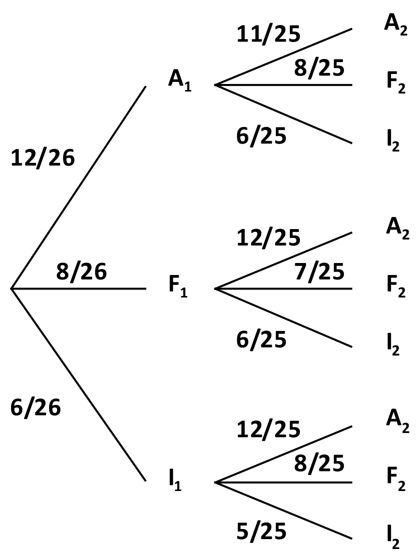
b) *(1 punto)* La probabilidad de que ninguno sea alemán.

c) *(1 punto)* La probabilidad de que sean de distinta nacionalidad.

SOLUCIÓN

Sean A el suceso "el turista es alemán", F "el turista es francés" e I "el turista es italiano". El hecho de escoger a dos turistas es equivalente a escoger a uno y, posteriormente, al otro.

Representemos las posibles situaciones mediante un diagrama en árbol:



a) $p\left(A_1 \cap A_2\right) = \dfrac{12}{26}\cdot\dfrac{11}{25} = \dfrac{132}{650} = \dfrac{66}{325} \simeq 0{,}2031$

b) $p\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2\right) = \dfrac{8}{26}\cdot\dfrac{7}{25} + \dfrac{8}{26}\cdot\dfrac{6}{25} + \dfrac{6}{26}\cdot\dfrac{8}{25} + \dfrac{6}{26}\cdot\dfrac{5}{25} = \dfrac{182}{650} \simeq 0{,}28$

c) $p\left(\overline{\left(A_1 \cap A_2\right) \cup \left(F_1 \cap F_2\right) \cup \left(I_1 \cap I_2\right)}\right) = 1 - \left(\dfrac{12}{26}\cdot\dfrac{11}{25} + \dfrac{8}{26}\cdot\dfrac{7}{25} + \dfrac{6}{26}\cdot\dfrac{5}{25}\right) =$

$= 1 - \dfrac{218}{650} \simeq 0{,}6646$

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

encontrar, si existe, una matriz X tal que:

$$5X + 3C^2 = 2AB$$

b) *(1,5 puntos)* Calcular el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

a) $5X + 3C^2 = 2AB \;\Rightarrow\; 5X = 2AB - 3C^2 \;\Rightarrow\; X = \dfrac{1}{5}\left(2AB - 3C^2\right)$

$$2AB = 2\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 16 & 76 \end{pmatrix}$$

$$3C^2 = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 16 & 76 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -17 & 1 \\ 7 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{64}{5} \end{pmatrix}$$

b) $\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-3F_1}}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_3-F_2}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

2. *(3,5 puntos)* Dada la función f, definida para $x \geq 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & si\ 0 \leq x \leq 5 \\ 9 - \dfrac{25}{x} & si\ 5 < x \leq 10 \\ 4\sqrt{x+6} - \dfrac{x}{5} & si\ x > 10 \end{cases}$$

a) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de $x > 0$ es la función f continua?

b) *(1,75 puntos)* ¿Cuál es el máximo valor que toma $f(x)$ para $x \in [30, 100]$?

c) *(1 punto)* Calcular:

$$\int_6^8 f(x)dx$$

SOLUCIÓN

a) Las tres funciones que definen a $f(x)$ son continuas en los intervalos en que están definidas ($f(x) = 9 - \dfrac{25}{x}$ es discontinua en $x = 0$ que no pertenece al intervalo $(5, 10]$). Por tanto, si hay alguna discontinuidad estará en los extremos de los intervalos.

▪ Estudiemos la continuidad en $x = 5$:

i) $\exists\, f(5) = 5 - 1 = 4$

ii) $\exists \lim\limits_{x\to5} f(x)$: $\lim\limits_{x\to5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to5}(x-1) = 4$, $\lim\limits_{x\to5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to5}\left(9 - \dfrac{25}{x}\right) = 4 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to5} f(x) = 4$

iii) $\lim\limits_{x\to5} f(x) = f(5) \Rightarrow$ La función es continua en $x = 5$

▪ Estudiemos la continuidad en $x = 10$:

i) $\exists\, f(10) = 9 - \dfrac{25}{10} = 6{,}5$

ii) $\exists \lim\limits_{x\to10} f(x)$: $\lim\limits_{x\to10^-} f(x) = \lim\limits_{x\to10}\left(9 - \dfrac{25}{x}\right) = 6{,}5$, $\lim\limits_{x\to10^+} f(x) = \lim\limits_{x\to10}\left(4\sqrt{x+6} - \dfrac{x}{5}\right) = 16 - 2 = 14 \Rightarrow$ y como los límites laterales son distintos, no existe $\lim\limits_{x\to10} f(x) \Rightarrow$ la función es discontinua en $x = 10$.

Por tanto, la función es continua en $(0, +\infty) - \{10\}$.

b) Para $x \in [30, 100]$: $f(x) = 4\sqrt{x+6} - \dfrac{x}{5}$

Como es una función continua, el máximo valor lo alcanzará en algún extremo relativo (caso de que exista) o en los extremos del intervalo. Calculemos los extremos relativos:

$$f'(x) = 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+6}} - \frac{1}{5} = \frac{2}{\sqrt{x+6}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+6}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sqrt{x+6} = 10 \Leftrightarrow x + 6 = 100 \Rightarrow x = 94 \text{ punto crítico.}$$

Calculemos el valor de la función en el único punto crítico y en los extremos del intervalo $[30, 100]$:

▪ $f(30) = 24 - 6 = 18$ ▪ $f(94) = 40 - \dfrac{94}{5} = \dfrac{106}{5} = 21{,}2$ ▪ $f(100) = 4\sqrt{106} - 20 = 21{,}18$

Luego el máximo valor de la función en el intervalo $[30, 100]$ es de 21,2 y lo alcanza en $x = 94$.

c) $\displaystyle\int_6^8 f(x)\,dx = \int_6^8 \left(9 - \frac{25}{x}\right)dx = \left[9x - 25\ln x\right]_6^8 = (72 - 25\ln 8) - (54 - 25\ln 6) = 18 - 25(\ln 8 - \ln 6) =$

$$= 18 - 25\ln\frac{8}{6} = 18 - 25\ln\frac{4}{3} \simeq 10{,}8$$

3. *(3 puntos)* El consumo mensual de electricidad (en kWh) de los hogares de una ciudad es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 25 kWh.

a) *(1,5 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 96% para la media del consumo de electricidad de los hogares de esta ciudad, de forma que su amplitud no sea mayor que 12 kWh. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

b) *(1,5 puntos)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 10. Elegimos 10 hogares y miramos su consumo mensual en electricidad, con los siguientes resultados:

100, 125, 78, 80, 88, 89, 124, 142, 98, 125.

Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media del consumo mensual de electricidad en los hogares de esta ciudad.

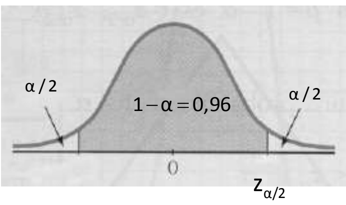
k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

a) El radio del intervalo de confianza (error máximo admisible) es la mitad de su amplitud. En este caso, 6 kWh.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6$$



Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 96%:

$$1-\alpha = 0,96 \;\Rightarrow\; \alpha = 1-0,96 = 0,04 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2} = \frac{0,04}{2} = 0,02 \;\Rightarrow\; 1-0,02 = 0,98$$

Buscamos en la tabla el valor 0,98 y el más próximo (0,9798) se corresponde con un valor crítico de 2,05. Tenemos entonces:

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6 \;\Rightarrow\; 2,05 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} = 6 \;\Rightarrow\; n = \left(\frac{2,05 \cdot 25}{6}\right)^2 = 72,96 \;\Rightarrow$$ el tamaño de la muestra debe ser de 73 hogares.

b) Puesto que la población de partida ya es normal, las medias de las muestras se distribuyen normalmente aunque su tamaño sea inferior a 30.

Calculemos la media de la muestra: $\bar{x} = \dfrac{100+125+78+80+88+89+124+142+98+125}{10} = 104{,}9$ kWh

El radio del intervalo de confianza es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}05 \cdot \dfrac{25}{\sqrt{10}} = 16{,}2$ kWh

El intervalo de confianza es: $(\bar{x} - E\, ,\, \bar{x} + E) = (104{,}9 - 16{,}2\ ,\ 104{,}9 + 16{,}2) = (88{,}7\ ,\ 121{,}1)$

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)* Un ganadero puede comprar dos tipos de pienso, A y B, para alimentar a sus cerdos. Cada saco de pienso A contiene 4 kilos de cereales y 2 kilos de bellotas, además de otros ingredientes, y cuesta 4 euros. Cada saco de pienso B contiene 2 kilos de cereales y 3 kilos de bellotas, además de otros ingredientes, y cuesta 5 euros. Para alimentar a sus cerdos quiere tener, al menos, 160 kilos de cereales y 120 kilos de bellotas. Como tiene que transportar los sacos en su furgoneta, no quiere comprar, entre los dos tipos de pienso, más de 70 sacos. ¿Cuántos sacos de cada tipo de pienso tiene que comprar para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

2. *(3,5 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{4x + 2}$$

Calcular:

a) *(0,5 puntos)* Dominio de f.

b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

3. *(3 puntos)* Un estudiante se va a examinar de Física y de Historia. La probabilidad de que apruebe el examen de Física es 0,8, la de que apruebe el examen de Historia es 0,7 y la de que apruebe los dos exámenes es 0,6.

a) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos uno de los dos exámenes?

b) *(1 punto)* Si aprueba el examen de Física, ¿cuál es la probabilidad de que también apruebe el de Historia?

c) *(1 punto)* Sea *A* el suceso “el estudiante aprueba el examen de Física” y *B* el suceso “el estudiante aprueba el examen de Historia”. ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*?

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2,25 puntos)* Un pintor ha comprado pintura de 3 colores: azul, roja y verde. Cada kilo de pintura azul cuesta 2 euros, cada kilo de pintura roja cuesta 4 euros y cada kilo de pintura verde cuesta 3 euros. En total ha comprado 500 kilos de pintura y se ha gastado 1400 euros. Además, sabemos que la suma de las cantidades de pintura azul y verde es el triple que la cantidad de pintura roja. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones para determinar la cantidad de pintura de cada color que ha comprado.

b) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = ax^3 + bx$, encontrar a y b de forma que $f(2) = 4$ y f tenga un mínimo relativo en $x = 1$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(e^{3x} + \frac{7}{x} + \frac{3}{4x^4} - 9\right) dx$$

3. *(3 puntos)* El peso (en kilos) de los habitantes de una ciudad es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 kilos.

a) *(1,5 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 96% para la media del peso de los habitantes de la ciudad, de forma que su amplitud no sea mayor que 10 kilos. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

b) *(1,5 puntos)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 8. Elegimos 8 habitantes y los pesamos, con los siguientes resultados:

60, 75, 105, 98, 65, 60, 87, 73.

Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media del peso de los habitantes de esta ciudad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CUESTIONES GENERALES:

En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.

Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos.

<u>OPCIÓN A</u>

1. *(3,5 puntos)*

Escribir la función objetivo, *0,5 puntos*. Escribir las restricciones, *0,75 puntos*, correspondiendo *0,25 puntos* a cada una de las tres restricciones adicionales a las de no negatividad; no poner las condiciones de no negatividad se penalizará con *0,1 puntos*. Dibujar correctamente la región factible, *0,5 puntos*, y encontrar los puntos extremos, *1 punto* (si encuentran los puntos extremos correctamente sin haber dibujado la región factible se asignan los *1,5 puntos*). Encontrar el punto óptimo, *0,5 puntos*; dar el valor del coste mínimo, *0,25 puntos*.

2. *(3,5 puntos)*

a) *(0,5 puntos)* Se puntúa con *0,5 puntos* resolverlo correctamente; no se asignan puntuaciones intermedias.

b) *(0,75 puntos)* *0,5 puntos* por determinar el monomio del que depende el signo (en particular, *0,25 puntos* por mostrar que el numerador no se anula). *0,25 puntos* por obtener el intervalo de positividad. Incluir el extremo del intervalo en la solución se penaliza con *0,1 puntos*.

c) *(1 punto)* Asíntota vertical, *0,25 puntos*. Demostrar que no tiene asíntota horizontal, *0,25 puntos*. Asíntota oblicua, *0,5 puntos* (*0,25 puntos* por cada parámetro).

d) *(1,25 puntos)* Calcular la derivada, *0,5 puntos*. Encontrar puntos críticos, *0,5 puntos* (*0,25 puntos* por cada uno). Justificar cuál es máximo y cuál mínimo, *0,25 puntos*.

3. *(3 puntos)*

En los apartados **a)** y **b)** se valorará con *0,25 puntos* si identifican correctamente lo que se les pregunta y lo escriben correctamente. En todo caso, si responden bien a la pregunta aunque no hayan explicitado la expresión se les dará la puntuación completa, *1 punto*. En el apartado **c)**, se valorará con *0,25 puntos* el explicitar algún criterio de independencia de sucesos. Si en un apartado usan algún resultado erróneo de apartados anteriores se les puntuará como si ese resultado hubiera sido correcto.

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2,25 puntos)* Se valora con *0,25 puntos* plantear cada una de las ecuaciones. Se valora con *1,5 puntos* la resolución del sistema (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un sistema mucho más sencillo que el original). Si se hace triangularizando, la triangularización vale *1 punto* (un error en la triangularización resta *0,5 puntos* y dos errores *1 punto*) y despejar los valores, *0,5 puntos*. Si se hace por Cramer, poner la fórmula adecuada (o aplicarla aun sin escribirla) vale *0,5 puntos* y calcular los determinantes, *1 punto* (*0,25 puntos* cada uno).

b) *(1,25 puntos)* Si lo resuelven por el método de menores: cálculo del determinante, *0,25 puntos*; cálculo de los menores, *0,25 puntos*; asignar signo correcto dependiendo de la paridad, *0,25 puntos*; dividir por el determinante y trasponer la matriz (al final o en el momento de calcular los menores) para llegar a la inversa, *0,5 puntos*. Si se dejan el valor del determinante fuera de la matriz, se les resta *0,1 puntos*. Si lo hacen por Gauss, un error les resta *0,5 puntos* y 2 errores, *1,25 puntos*.

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Llegar a la ecuación $8a + 2b = 4$, *0,5 puntos*. Llegar a la ecuación $3a + b = 0$, *1 punto* (la derivada correcta se valora con *0,5 puntos* dentro de ese punto). Resolver el sistema, *0,5 puntos.*

b) (*1,5 puntos*) La integral de cada sumando se valora con *0,25 puntos*. Sustituir los límites de integración, *0,5 puntos*.

3. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Saber qué cuantil buscar, *0,25 puntos*. Encontrarlo, *0,25 puntos.* Poner la fórmula del error, *0,5 puntos*. Sustituir y calcular n, *0,5 puntos* (si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior entero, se restan *0,1 puntos*).

b) *(1,5 puntos)* Calcular la media de los datos, *0,5 puntos*. Calcular el error (semiamplitud del intervalo) *0,5 puntos*; en esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado a), aunque no lo sea. Poner la fórmula del IC y calcularlo, *0,5 puntos*.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)* Un ganadero puede comprar dos tipos de pienso, A y B, para alimentar a sus cerdos. Cada saco de pienso A contiene 4 kilos de cereales y 2 kilos de bellotas, además de otros ingredientes, y cuesta 4 euros. Cada saco de pienso B contiene 2 kilos de cereales y 3 kilos de bellotas, además de otros ingredientes, y cuesta 5 euros. Para alimentar a sus cerdos quiere tener, al menos, 160 kilos de cereales y 120 kilos de bellotas. Como tiene que transportar los sacos en su furgoneta, no quiere comprar, entre los dos tipos de pienso, más de 70 sacos. ¿Cuántos sacos de cada tipo de pienso tiene que comprar para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

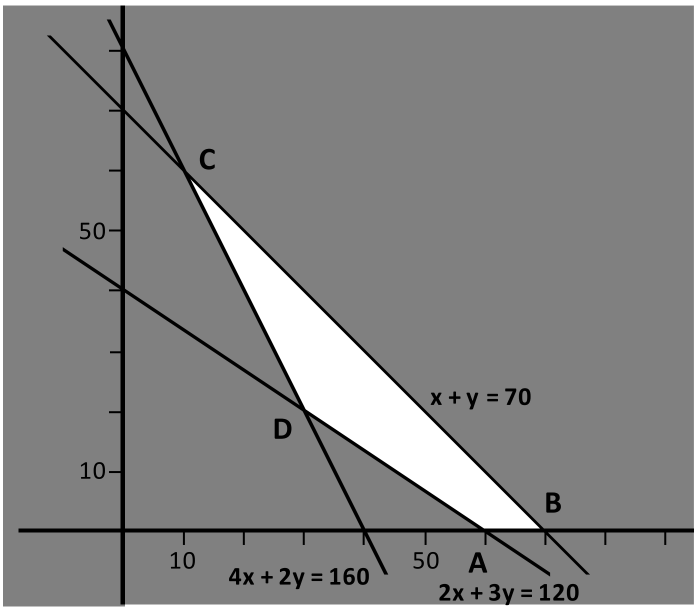
TIPOS DE PIENSO	Nº SACOS	CEREALES	BELLOTAS	COSTE
A	x	4x	2x	4x
B	y	2y	3y	5y
	$x \geq 0 \;\; ; \;\; y \geq 0 \;\; ; \;\; x + y \leq 70$	$4x + 2y \geq 160$	$2x + 3y \geq 120$	$F(x\,,y) = 4x + 5y$

La función objetivo, que debe ser mínima, es el coste: $F(x\,,y) = 4x + 5y$

Las restricciones a que debe estar sometida la solución son:

$$x \geq 0 \;\; ; \;\; y \geq 0 \;\; ; \;\; x + y \leq 70 \;\; ; \;\; 4x + 2y \geq 160 \;\; ; \;\; 2x + 3y \geq 120$$

Dibujemos la región factible, solución del sistema de restricciones:



▪ La recta $x = 0$ es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.

▪ La recta $y = 0$ es el eje de abscisas. La solución de $y \geq 0$ es el semiplano superior.

▪ La recta $x + y = 70$ pasa por los puntos $(70\,,0)$ y $(0\,,70)$. La solución de $x + y \leq 70$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

▪ La recta $4x + 2y = 160 \Leftrightarrow 2x + y = 80$ pasa por los puntos $(40\,,0)$ y $(0\,,80)$. La solución de la inecuación $4x + 2y \geq 160$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

▪ La recta $2x + 3y = 120$ pasa por los puntos $(60\,,0)$ y $(0\,,40)$. La solución de $2x + 3y \geq 120$ es el semiplano al que no pertenece el origen.

La región factible (en blanco) es el cuadrilátero ABCD.

La función objetivo se optimiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos sus coordenadas y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

Vértice A: $A(60,0)$: $F(60,0)=240$

Vértice B: $B(70,0)$: $F(70,0)=280$

Vértice C: $\begin{cases} 4x+2y=160 \\ x+y=70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=80 \\ -x-y=-70 \end{cases} \Rightarrow x=10\ ,\ y=60 \Rightarrow C(10,60)$: $F(10,60)=340$

Vértice D:

$$\begin{cases} 4x+2y=160 \\ 2x+3y=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-2y=-160 \\ 4x+6y=240 \end{cases} \Rightarrow 4y=80 \Rightarrow y=20\ ,\ x=30 \Rightarrow D(30,20):\ F(30,20)=220$$

A la vista de los resultados obtenidos, la función objetivo es mínima en el vértice D. El ganadero debe comprar 30 sacos del pienso A y 20 sacos del B, con lo que minimizará el coste que será de 220 euros.

2. *(3,5 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2+2}{4x+2}$$

Calcular:

a) *(0,5 puntos)* Dominio de f.

b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN.

a) La función es racional. El dominio está formado por todos los valores de x menos los que anulen al denominador:

$$4x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

b) $x^2+2>0\ \forall x$. Por lo tanto $\dfrac{x^2+2}{4x+2}>0$ para los valores de x que hagan $4x+2>0 \Rightarrow x>-\dfrac{1}{2}$.

La función es positiva $\forall x \in \left(-\frac{1}{2},\infty\right)$

c) ▪ Asíntotas verticales: $x=-\dfrac{1}{2}$ pues $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{x^2+2}{4x+2}=\infty$.

▪ Asíntotas horizontales: No tiene pues $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2}{4x+2}=\infty$

▪ Asíntotas oblicuas $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2}{4x+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{4x^2+2x}=\frac{1}{4}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{4x+2}-\frac{x}{4}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+8-4x^2-2x}{16x+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+8}{16x+8}=-\frac{2}{16}=-\frac{1}{8}$$

Luego la recta $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{8}$ es una asíntota oblicua de la función.

d) $f'(x)=\dfrac{2x\left(4x+2\right)-\left(x^2+2\right)4}{\left(4x+2\right)^2}=\dfrac{8x^2+4x-4x^2-8}{\left(4x+2\right)^2}=\dfrac{4x^2+4x-8}{\left(4x+2\right)^2}=0 \;\Rightarrow\; 4x^2+4x-8=0 \;\Leftrightarrow\; x^2+x-2=0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2} \;\Rightarrow\; x=-2\;,\; x=1$ (valores críticos)

$f''(x)=\dfrac{\left(8x+4\right)\left(4x+2\right)^2-\left(4x^2+4x-8\right)2\left(4x+2\right)4}{\left(4x+2\right)^2} \;\Rightarrow$

$f''(-2)<0 \;\Rightarrow\; x=-2$ es un máximo relativo: $\left(-2\,,-1\right)$

$f''(1)>0 \;\Rightarrow\; x=1$ es un mínimo relativo: $\left(1\,,\dfrac{1}{2}\right)$

3. *(3 puntos)* Un estudiante se va a examinar de Física y de Historia. La probabilidad de que apruebe el examen de Física es 0,8, la de que apruebe el examen de Historia es 0,7 y la de que apruebe los dos exámenes es 0,6.

a) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos uno de los dos exámenes?

b) *(1 punto)* Si aprueba el examen de Física, ¿cuál es la probabilidad de que también apruebe el de Historia?

c) *(1 punto)* Sea *A* el suceso "el estudiante aprueba el examen de Física" y *B* el suceso "el estudiante aprueba el examen de Historia". ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*?

SOLUCIÓN.

Sea A el suceso "el estudiante aprueba el examen de Física" y B el suceso "el estudiante aprueba el examen de Historia". Se tiene: $p(A)=0{,}8\;;\;p(B)=0{,}7\;;\;p(A\cap B)=0{,}6$.

a) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0{,}8+0{,}7-0{,}6=0{,}9$

b) $p(B/A)=\dfrac{p(B\cap A)}{p(A)}=\dfrac{0{,}6}{0{,}8}=0{,}75$

c) $p(A\cap B)=0{,}6\quad;\quad p(A)=0{,}8\quad;\quad p(B)=0{,}7$

Como $p(A\cap B)\neq p(A)\cdot p(B) \;\Rightarrow$ los sucesos no son independientes.

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2,25 puntos)* Un pintor ha comprado pintura de 3 colores: azul, roja y verde. Cada kilo de pintura azul cuesta 2 euros, cada kilo de pintura roja cuesta 4 euros y cada kilo de pintura verde cuesta 3 euros. En total ha comprado 500 kilos de pintura y se ha gastado 1400 euros. Además, sabemos que la suma de las cantidades de pintura azul y verde es el triple que la cantidad de pintura roja. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones para determinar la cantidad de pintura de cada color que ha comprado.

b) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) Sea x la cantidad de pintura azul, y la de pintura roja, z la de pintura verde. Se tiene:

De la cantidad de pintura comprada: $x+y+z=500$

Del coste de la compra: $2x+4y+3z=1400$

De la relación entre las cantidades de pintura: $x+z=3y \;\Leftrightarrow\; x-3y+z=0$

Tenemos entonces el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z=500 \\ 2x+4y+3z=1400 \\ x-3y+z=0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=500 \\ 2y+z=400 \\ -4y=-500 \end{cases} \Rightarrow \ y=\frac{500}{4}=125 \quad , \quad z=400-250=150 \quad , \quad x=500-125-150=225$$

Luego ha comprado 225 kg de pintura azul, 125 kg de pintura roja y 150 kg de pintura verde.

b) Utilizamos el método de Gauss para calcular la matriz inversa de la dada, caso de que exista:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2-2F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3:(-8)}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/8 \end{array}\right) \overset{F_1-3F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 3/8 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ 1/4 & -1/8 \end{pmatrix}$$ es la matriz inversa de la dada.

Comprobemos el resultado: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ 1/4 & -1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4+3/4 & 3/8-3/8 \\ 2/4-2/4 & 6/8+2/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=ax^3+bx$, encontrar a y b de forma que $f(2)=4$ y f tenga un mínimo relativo en $x=1$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(e^{3x}+\frac{7}{x}+\frac{3}{4x^4}-9\right)dx$$

SOLUCIÓN.

a) $f(2)=4 \ \Rightarrow \ 8a+2b=4$ (*)

$x=1$ mínimo relativo $\Rightarrow \ f'(1)=0: \quad f'(x)=3ax^2+b \ \Rightarrow \ f'(1)=3a+b=0$ (*)

De las igualdades (*): $\begin{cases} 8a+2b=4 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+b=2 \\ -3a-b=0 \end{cases} \Rightarrow \ a=2 \ , \ b=-6$

b) Calculemos una primitiva:

$$\int \left(e^{3x}+\frac{7}{x}+\frac{3}{4x^4}-9\right)dx=\frac{1}{3}\int e^{3x}\cdot 3\cdot dx+7\int \frac{1}{x}dx+\frac{3}{4}\int x^{-4}\,dx-9\int dx=\frac{1}{3}e^{3x}+7\ln x-\frac{3}{4}\cdot\frac{x^{-3}}{3}-9x=\frac{1}{3}e^{3x}+7\ln x-\frac{1}{4x^3}-9x$$

Se tiene entonces:

$$\int_1^2 \left(e^{3x}+\frac{7}{x}+\frac{3}{4x^4}-9\right)dx=\left[\frac{e^{3x}}{3}+7\ln x-\frac{1}{4x^3}-9x\right]_1^2=\left(\frac{e^6}{3}+7\ln 2-\frac{1}{32}-18\right)-\left(\frac{e^3}{3}+7\ln 1-\frac{1}{4}-9\right)=\frac{e^6-e^3}{3}+7\ln 2+\frac{7}{32}-9$$

3. *(3 puntos)* El peso (en kilos) de los habitantes de una ciudad es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 kilos.

a) *(1,5 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 96% para la media del peso de los habitantes de la ciudad, de forma que su amplitud no sea mayor que 10 kilos. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

b) *(1,5 puntos)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 8. Elegimos 8 habitantes y los pesamos, con los siguientes resultados:

60, 75, 105, 98, 65, 60, 87, 73.

Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media del peso de los habitantes de esta ciudad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de P(Z ≤ k) para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

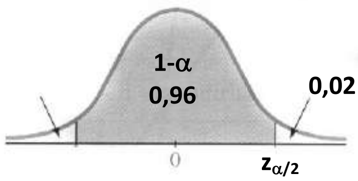
SOLUCIÓN.

a) Si la amplitud del intervalo de confianza no debe ser mayor que 10 kilos, el radio del intervalo (error máximo admisible) es de 5 kilos.

Se tiene: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{E} \right)^2$

Calculemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 96%:

$1-\alpha = 0{,}96 \Rightarrow \alpha = 1-0{,}96 = 0{,}04 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}02 \Rightarrow 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0{,}02 = 0{,}98$



Buscamos en la tabla el valor más aproximado a $0{,}98$ y se corresponde con un valor crítico $z_{\alpha/2} = 2{,}05$.

Se tiene entonces: $n = \left(\dfrac{2{,}05 \cdot 15}{5} \right)^2 = 37{,}8 \Rightarrow$ Debe tomarse una muestra de 38 habitantes.

b) Calculemos la media de la muestra: $\overline{X} = \dfrac{60+75+105+98+65+60+87+73}{8} = \dfrac{623}{8} = 77{,}875$ kilos

Aunque la muestra sea pequeña, como la población de partida es normal también lo es la distribución de las medias muestrales cualquiera que sea su tamaño.

El radio del intervalo de confianza es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}05 \cdot \dfrac{15}{\sqrt{8}} = 10{,}87$

El intervalo de confianza para la media de la población es entonces: $\left(\overline{X}-E \ , \ \overline{X}+E\right) = \left(67 \ , \ 80{,}745\right)$

Elija una de las dos opciones **propuestas, A o B**. **En cada pregunta se señala la puntuación máxima.**

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Una empresa de transporte va a realizar el transporte de animales de compañía entre dos ciudades. Para ello, va a alquilar furgonetas especializadas en este tipo de transporte, que pueden ser de dos tipos, A y B. Cada furgoneta de tipo A tiene 4 jaulas individuales para perros y 3 jaulas individuales para gatos, mientras que cada furgoneta de tipo B tiene 2 jaulas individuales para perros y 6 jaulas individuales para gatos. El coste de alquiler de cada furgoneta de tipo A es de 240 euros y el coste de alquiler de cada furgoneta de tipo B es de 400 euros. Además, por razones comerciales, el número de furgonetas de tipo B debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo A. La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas furgonetas de cada tipo debe alquilar para que el coste sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

2. *(3,25 puntos)*

a) *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 2$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tal que f tenga un máximo relativo en $x = -1$ con valor $f(-1) = 2$.

b) *(1,25 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx$$

3. *(3,5 puntos)* En una urna hay 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 5 bolas rojas. Se extraen dos bolas de la urna, una tras otra sin reemplazamiento. Calcular:

a) *(0,75 puntos)* La probabilidad de que las dos sean rojas.

b) *(1 punto)* La probabilidad de que sean de distinto color.

c) *(0,75 puntos)* La probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

d) *(1 punto)* Sea *A* el suceso “la primera bola extraída es roja” y *B* el suceso “las dos bolas son del mismo color”, ¿son los dos sucesos *A* y *B* independientes?

OPCIÓN B

1. *(3,25 puntos)* Una empresa invirtió un total de 10000 euros entre tres fondos A, B y C. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 497 euros. Además, la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió en cada fondo.

2. *(3,25 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 5}$$

calcular:

a) *(0,25 puntos)* Dominio de f.

b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

3. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Se sabe que la cantidad de hidratos de carbono de las barritas energéticas de una marca es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 gramos. Elegimos una muestra aleatoria simple de 75 barritas, les medimos la cantidad de hidratos de carbono y calculamos su promedio, que resulta ser igual a 23,8 gramos. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la cantidad de hidratos de carbono en las barritas de esa marca.

b) *(1,5 puntos)* Un opositor se sabe 28 de los 40 temas de un examen. En el examen se eligen al azar 2 de los 40 temas. ¿Cuál es la probabilidad de que el opositor se sepa los dos temas? ¿Cuál es la probabilidad de que se sepa al menos uno de los dos temas?

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CUESTIONES GENERALES:

En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.

Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos.

<u>OPCIÓN A</u>

1. *(3,25 puntos)*

Escribir la función objetivo, *0,25 puntos*. Escribir las restricciones, *0,75 puntos*, correspondiendo *0,25 puntos* a cada una de las tres restricciones adicionales a las de no negatividad; no poner las condiciones de no negatividad se penalizará con *0,1 puntos*. Dibujar correctamente la región factible, *0,5 puntos* y encontrar los puntos extremos, *0,75 puntos*. Evaluar la función objetivo en cada uno de los puntos extremos y encontrar el de coste mínimo, *0,5 puntos* y probar o razonar que aunque la región factible no es acotada, el problema tiene solución, *0,25 puntos*. Dar el valor del coste mínimo, *0,25 puntos.*

2. *(3,25 puntos)*

a) *(2 puntos)* Hacer la derivada, *0,5 puntos*; obtener la ecuación para a y b sustituyendo $x=-1$ en la derivada e igualando a 0, *0,25 puntos*. Obtener la ecuación para a y b sustituyendo $x=-1$ en la función, *0,25 puntos*. Resolver el sistema, *0,75 puntos*. Comprobar que, en efecto, $x=-1$ es un máximo local, *0,25 puntos*.

b) (*1,25 puntos*) Se puntúa con *0,25 puntos* la integral indefinida de cada sumando y con *0,25 puntos* la sustitución de los límites de integración.

3. *(3,5 puntos)*

Si el ejercicio se resuelve como si las extracciones se realizaran con reemplazamiento, se restarán *0,25 puntos* por apartado en el que se haga.

a) *(0,75 puntos)*

b) *(1 punto)* Si lo hacen pasando al complementario: *0,25 puntos* por pasar correctamente al complementario y *0,75 puntos* por cada una de las 3 posibilidades de bolas iguales. Si lo hacen directamente, se restan *0,25 puntos* por cada combinación que se dejen o de la que no calculen la probabilidad correctamente.

c) *(0,75 puntos)* Si lo hacen por el teorema de la probabilidad total (condicionando en la primera bola), *0,25 puntos* por poner la fórmula del teorema de la probabilidad total y *0,5 puntos* por sustituir correctamente (si no explicitan la fórmula pero lo resuelven bien, se les asignan *0,75 puntos* en este apartado).

d) *(1 punto)* Se valora con *0,25 puntos* poner algún criterio de independencia y *0,75 puntos* aplicarlo correctamente.

<u>OPCIÓN B</u>

1. *(3,25 puntos)*

Plantear las ecuaciones, *1,25 puntos* (*0,25 puntos* por la ecuación $x + y + z = 10000$ *y 0,5 puntos* por cada una de las otras dos). Se puntúa con *2 puntos* la resolución del sistema (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un sistema mucho más sencillo que el original). Si se hace triangularizando, la triangularización vale *1,25 puntos* (un error en la triangularización resta *0,75 puntos* y dos errores *1,25 puntos*) y despejar los valores, *0,75 puntos* (*0,25 puntos* por cada uno). Si se hace por Cramer, poner la fórmula adecuada (o aplicarla aun sin escribirla) vale *0,5 puntos* y calcular los determinantes, *1,5 puntos* (se restan *0,5 puntos* por cada determinante erróneo).

2. *(3,25 puntos)*

a) *(0,25 puntos)*

b) *(0,75 puntos)* Encontrar los tres binomios que determinan el signo, *0,25 puntos*. Calcular los intervalos donde x es positiva, *0,5 puntos*. Si se incluye el punto 5/2 se restan *0,25 puntos* y si se incluye el 2 o el -2, se resta *0,1 punto*.

c) *(1 punto)* Asíntota horizontal, *0,25 puntos*. Asíntota vertical, *0,25 puntos*. Asíntota oblicua, *0,5 puntos* (*0,25 puntos* por cada parámetro).

d) *(1,25 puntos)* Calcular la derivada correctamente, *0,5 puntos*. Obtener los puntos críticos, *0,25 puntos*. Determinar cuál es el mínimo y cuál el máximo, *0,5 puntos* (si lo hacen calculando la segunda derivada, ésta se valorará con *0,25 puntos*).

3. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Saber qué cuantil buscar, *0,5 puntos*. Encontrarlo, *0,5 puntos*. Calcular el error, *0,5 puntos*. Poner la fórmula del IC y calcularlo, *0,5 puntos*.

b) *(1,5 puntos)* Se puntúa con *0,5 puntos* la primera pregunta y *1 punto* la segunda pregunta (si responden a la segunda pregunta pasando al complementario, por poner la fórmula del complementario correctamente, o aplicarla sin escribirla, se puntúa con *0,25 puntos*). Si el ejercicio se hace entero con reemplazamiento se restan *0,5 puntos*.

Universidad Zaragoza

1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2017

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Una empresa de transporte va a realizar el transporte de animales de compañía entre dos ciudades. Para ello, va a alquilar furgonetas especializadas en este tipo de transporte, que pueden ser de dos tipos, A y B. Cada furgoneta de tipo A tiene 4 jaulas individuales para perros y 3 jaulas individuales para gatos, mientras que cada furgoneta de tipo B tiene 2 jaulas individuales para perros y 6 jaulas individuales para gatos. El coste de alquiler de cada furgoneta de tipo A es de 240 euros y el coste de alquiler de cada furgoneta de tipo B es de 400 euros. Además, por razones comerciales, el número de furgonetas de tipo B debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo A. La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas furgonetas de cada tipo debe alquilar para que el coste sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

SOLUCIÓN

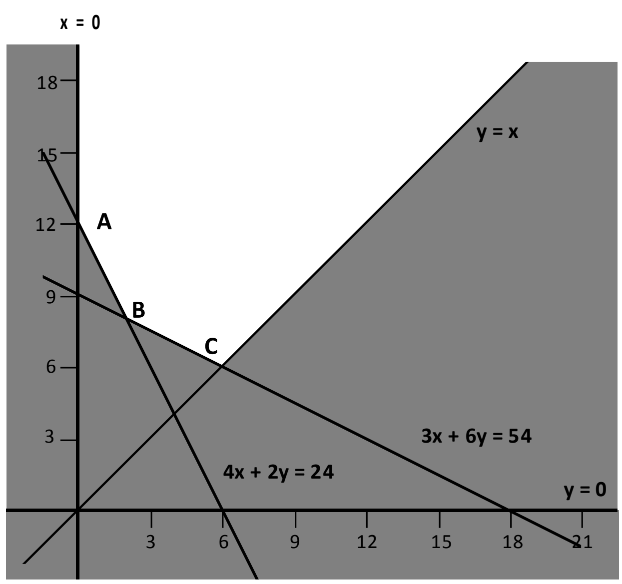
Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

TIPO DE FURGONETAS	NÚMERO	PERROS	GATOS	COSTE
A	x	4x	3x	240x
B	y	2y	6y	400y
Condiciones:	$x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \geq x$	$4x+2y \geq 24$	$3x+6y \geq 54$	$F(x,y)=240x+400y$

Por lo tanto, la función objetivo es $F(x,y)=240x+400y$ (coste del alquiler de las furgonetas) que debe ser mínima.

Las restricciones a las que debe estar sometida la solución son: $\{\, x \geq 0 , y \geq 0 , y \geq x , 4x+2y \geq 24 , 3x+6y \geq 54 \,\}$

Obtengamos, gráficamente, la región factible (solución del conjunto de restricciones):



- La recta $x=0$ es el eje de ordenadas y la inecuación $x \geq 0$ tiene por solución el semiplano de su derecha (en blanco)

- La recta $y=0$ es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior (en blanco).

- La recta $y=x$ es la bisectriz del primer cuadrante. La solución de la inecuación $y \geq x$ es el semiplano superior (en blanco).

- La recta $4x+2y=24$ pasa por los puntos $(6,0)$ y $(0,12)$. La solución de la inecuación $4x+2y \geq 24$ es el semiplano de su derecha (en blanco).

- La recta $3x+6y=54$ pasa por $(18,0)$ y $(0,9)$. La inecuación $3x+6y \geq 54$ tiene por solución el semiplano de su parte superior (en blanco).

La región factible (en blanco) es una región abierta de vértices A, B y C. La función objetivo se optimiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos las coordenadas de los vértices y el valor de la función objetivo en ellos:

Vértice A: $A(0,12) \Rightarrow F(0,12)=400\cdot 12=4800$ €

Vértice B: $\begin{cases} 4x+2y=24 \\ 3x+6y=54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=12 \\ x+2y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=24 \\ -x-2y=-18 \end{cases} \Leftrightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2\ ,\ y=8 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(2,8) \Rightarrow F(2,8)=240\cdot 2+400\cdot 8=3680$ €

Vértice C: $\begin{cases} y=x \\ 3x+6y=54 \end{cases} \Leftrightarrow 9x=54 \Rightarrow x=6\ ,\ y=6 \Rightarrow C(6,6) \Rightarrow F(6,6)=240\cdot 6+400\cdot 6=3840$ €

Por lo tanto, el coste mínimo, de 3680 €, se obtiene al alquilar 2 furgonetas del tipo A y 8 furgonetas del tipo B.

2. *(3,25 puntos)*

a) *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+2x+2$, con $x\in\mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tal que f tenga un máximo relativo en $x=-1$ con valor $f(-1)=2$.

b) *(1,25 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(7e^{3x}+\frac{4}{3}x^2-3\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx$$

SOLUCIÓN

a) $f(x)=ax^3+bx^2+2x+2 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+2$

- Si en $x=-1$ la función tiene un máximo relativo: $f'(-1)=0 \Rightarrow 3a-2b+2=0 \Rightarrow 3a-2b=-2$ (*)

- $f(-1)=2 \Rightarrow -a+b-2+2=2 \Rightarrow -a+b=2$ (*)

De las igualdades (*): $\begin{cases} 3a-2b=-2 \\ -2a+2b=4 \end{cases} \Rightarrow a=2\ ,\ b=4 \Rightarrow f(x)=2x^3+4x^2+2x+2$

b) Obtengamos una primitiva de la función dada:

$$\int\left(7e^{3x}+\frac{4}{3}x^2-3\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{7}{3}\int e^{3x}\cdot 3\cdot dx+\frac{4}{3}\int x^2\,dx-3\int x^{1/2}\,dx+\int\frac{1}{x}dx=\frac{7}{3}e^{3x}+\frac{4}{3}\cdot\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}+\ln x$$

Tenemos:

$$\int_1^2\left(7e^{3x}+\frac{4}{3}x^2-3\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{7}{3}e^{3x}+\frac{4}{9}x^3-2\cdot\sqrt{x^3}+\ln x\right]_1^2=\left(\frac{7}{3}e^6+\frac{32}{9}-4\cdot\sqrt{2}+\ln 2\right)-\left(\frac{7}{3}e^3+\frac{4}{9}-2+0\right)=$$

$$=\frac{7}{3}e^3\left(e^3-1\right)+\frac{46}{9}-4\sqrt{2}+\ln 2\simeq 894{,}615$$

3. *(3,5 puntos)* En una urna hay 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 5 bolas rojas. Se extraen dos bolas de la urna, una tras otra sin reemplazamiento. Calcular:

a) *(0,75 puntos)* La probabilidad de que las dos sean rojas.

b) *(1 punto)* La probabilidad de que sean de distinto color.

c) *(0,75 puntos)* La probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

d) *(1 punto)* Sea *A* el suceso "la primera bola extraída es roja" y *B* el suceso "las dos bolas son del mismo color", ¿son los dos sucesos *A* y *B* independientes?

SOLUCIÓN

Sean B_1, N_1 y R_1 los sucesos "la primera bola extraída es blanca, negra o roja, respectivamente" y B_2, N_2 y R_2 los sucesos "la segunda bola extraída es blanca, negra o roja, respectivamente".

a) $p\left(R_1 \cap R_2\right) = p\left(R_1\right) \cdot p\left(R_2 / R_1\right) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{11}$

b) El suceso P = "las dos bolas extraídas son de distinto color" es el suceso contrario de "las dos bolas extraídas son del mismo color"

$$p(P) = 1 - p(\overline{P}) = 1 - \left[p\left(B_1 \cap B_2\right) + p\left(N_1 \cap N_2\right) + p\left(R_1 \cap R_2\right)\right] = 1 - \left(\frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10}\right) = 1 - \frac{34}{110} = \frac{76}{110} = \frac{38}{55}$$

c) $p\left(R_2\right) = p\left(B_1 \cap R_2\right) + p\left(N_1 \cap R_2\right) + p\left(R_1 \cap R_2\right) = \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{50}{110} = \frac{5}{11}$

d) Los sucesos A y B son independientes si $p(B / A) = p(B)$

$$\left.\begin{array}{l} p(B / A) = p\left(R_1 \cap R_2\right) = \frac{2}{11} \\ p(B) = p\left(B_1 \cap B_2\right) + p\left(N_1 \cap N_2\right) + p\left(R_1 \cap R_2\right) = \frac{34}{110} = \frac{17}{55} \end{array}\right| \Rightarrow p(B / A) \neq p(B) \Rightarrow \text{los sucesos no son independientes}$$

OPCIÓN B

1. *(3,25 puntos)* Una empresa invirtió un total de 10000 euros entre tres fondos A, B y C. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 497 euros. Además, la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió en cada fondo.

SOLUCIÓN

Sea "x" la inversión en el fondo A, "y" la inversión en B y "z" la inversión en C. Se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 10000 \\ 0{,}05x + 0{,}1y + 0{,}02z = 497 \\ x = 3(y + z) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 10000 \\ 5x + 10y + 2z = 49700 \\ x - 3y - 3z = 0 \end{array}\right.$$

Utilicemos el método de Gauss para resolver el sistema. Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 5 & 10 & 2 & 49700 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 - F_1}{\overset{F_2 - 5F_1}{\approx}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 0 & 5 & -3 & -300 \\ 0 & -4 & -4 & -10000 \end{array}\right) \overset{5F_3 + 4F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 0 & 5 & -3 & -300 \\ 0 & 0 & -32 & -51200 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$-32z = -51200 \Rightarrow z = \frac{51200}{32} = 1600 \quad ; \quad 5y = -300 + 3 \cdot 1600 \Rightarrow y = \frac{4500}{5} = 900 \quad ; \quad x = 10000 - 1600 - 900 = 7500$$

Luego invirtió 7500 € en el fondo A, 900 € en el fondo B y 1600 € en el fondo C.

2. *(3,25 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 5}$$

calcular:

a) *(0,25 puntos)* Dominio de f.

b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

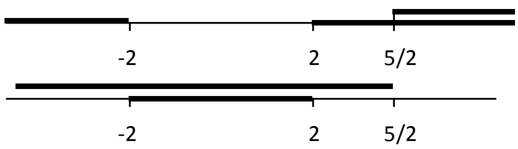
d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN

a) f(x) es una función racional. Su dominio son todos los números reales excepto los que anulen el denominador:

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{2} \right\}$

b) $\frac{x^2-4}{2x-5} > 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \begin{cases} x^2-4>0 & \Rightarrow & x \in (-\infty,-2)\cup(2,+\infty) \\ 2x-5>0 & \Rightarrow & x>5/2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-4<0 & \Rightarrow & x\in(-2,2) \\ 2x-5<0 & \Rightarrow & x<5/2 \end{cases} \end{cases}$



luego la función es positiva $\forall x \in (-2,2) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty \right)$

c) ▪ Asíntotas verticales: $x = \frac{5}{2}$ pues $\lim_{x\to 5/2} \frac{x^2-4}{2x-5} = \infty$

Posición relativa de la curva respecto a la asíntota: $\lim_{x\to 5/2^-} \frac{x^2-4}{2x-5} = \frac{+}{-} = -\infty$, $\lim_{x\to 5/2^+} \frac{x^2-4}{2x-5} = \frac{+}{+} = +\infty$

▪ Asíntotas horizontales: no tiene, pues $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{2x-5} = \infty$

▪ Asíntotas oblicuas $y = mx+n$: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4}{2x-5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{2x^2-5x} = \frac{1}{2}$

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-4}{2x-5} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-8-2x^2+5x}{4x-10}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{5x-8}{4x-10} = \frac{5}{4}$$

Luego $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ es una asíntota oblicua de la función.

d) $f'(x) = \frac{2x(2x-5)-(x^2-4)2}{(2x-5)^2} = \frac{4x^2-10x-2x^2+8}{(2x-5)^2} = \frac{2x^2-10x+8}{(2x-5)^2} = 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; 2x^2-10x+8=0 \;\Rightarrow\; x = \frac{10\pm\sqrt{100-64}}{4} = \frac{10\pm 6}{4} = \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$ (puntos críticos)

$f''(x) = \frac{(4x-10)(2x-5)^2 - (2x^2-10x+8)2(2x-5)2}{(2x-5)^4} \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} f''(1) = \frac{(-\cdot+)-0}{+} = \frac{-}{+} < 0 \;\Rightarrow\; x=1 \text{ máximo relativo} \\ f''(4) = \frac{(+\cdot+)-0}{+} = \frac{+}{+} > 0 \;\Rightarrow\; x=4 \text{ mínimo relativo} \end{array} \right.$

La función tiene un máximo relativo en $(1,1)$ y un mínimo relativo en $(4,4)$.

3. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Se sabe que la cantidad de hidratos de carbono de las barritas energéticas de una marca es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 gramos. Elegimos una muestra aleatoria simple de 75 barritas, les medimos la cantidad de hidratos de carbono y calculamos su promedio, que resulta ser igual a 23,8 gramos. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la cantidad de hidratos de carbono en las barritas de esa marca.

b) *(1,5 puntos)* Un opositor se sabe 28 de los 40 temas de un examen. En el examen se eligen al azar 2 de los 40 temas. ¿Cuál es la probabilidad de que el opositor se sepa los dos temas? ¿Cuál es la probabilidad de que se sepa al menos uno de los dos temas?

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879

0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

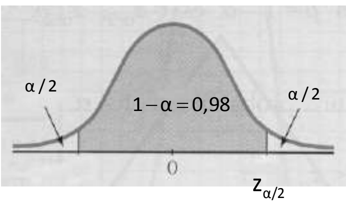
NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

a) Puesto que la población de referencia es normal, el intervalo de confianza para la media de la población, μ, es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

En nuestro caso, la media muestral es $\overline{x} = 23{,}8$ gramos, la desviación típica de la población es $\sigma = 1{,}5$ gramos y el tamaño de la muestra es de 75 barritas energéticas.



Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 98%:

$$1-\alpha = 0{,}98 \Rightarrow \alpha = 1-0{,}98 = 0{,}02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}02}{2} = 0{,}01 \Rightarrow 1-0{,}01 = 0{,}99$$

Buscamos en la tabla el valor 0,99 y el más próximo (0,9901) se corresponde con un valor crítico de 2,33.

El intervalo de confianza para la media de la población es entonces:

$$\left(23{,}8 - 2{,}33\cdot\frac{1{,}5}{\sqrt{75}}\ ,\ 23{,}8 + 2{,}33\cdot\frac{1{,}5}{\sqrt{75}}\right) = \left(23{,}4\ ,\ 24{,}2\right)$$

b) ▪ Sea A_1 el suceso “el opositor se sabe el primer tema elegido” y A_2 el suceso “el opositor se sabe el segundo tema elegido”. Se tiene:

$$p\left(A_1 \cap A_2\right) = p\left(A_1\right)\cdot p\left(A_2 / A_1\right) = \frac{28}{40}\cdot\frac{27}{39} = \frac{756}{1560} = 0{,}4846$$

▪ El suceso “se sabe al menos uno de los dos temas” es el suceso contrario al suceso “no se sabe ninguno de los dos temas”. Tenemos:

$$p\left(\text{"se sabe al menos uno de los temas"}\right) = 1 - p\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) = 1 - p\left(\overline{A_1}\right)\cdot p\left(\overline{A_2} / \overline{A_1}\right) = 1 - \frac{12}{40}\cdot\frac{11}{39} = 1 - \frac{132}{1560} =$$

$$= 1 - 0{,}0846 = 0{,}9154$$

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) *(0,5 puntos)* ¿Se puede calcular AB? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b) *(0,5 puntos)* ¿Se puede calcular BA? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

c) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de C.

d) *(1 punto)* Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2C + 4X = 3D$.

2. *(3,25 puntos)* Los ingresos por ventas (en millones de euros) que obtiene una empresa dependen del gasto que haga en publicidad, de forma que, si gasta x millones de euros, los ingresos por ventas son iguales a:

$$V(x) = \frac{21x + 12}{x + 1}$$

a) *(0,75 puntos)* Encontrar, si existe, el valor o valores de x para los cuales los ingresos por ventas son iguales a 18 millones de euros.

b) *(1 punto)* Calcular:

$$\lim_{x \to +\infty} V(x)$$

¿Cómo se puede interpretar el resultado?

c) *(1,5 puntos)* Si definimos el beneficio por ventas como la diferencia entre los ingresos por ventas y el gasto en publicidad (esto es, $B(x) = V(x) - x$), calcular el máximo beneficio que se puede alcanzar cuando $x \in [0, 5]$.

3. *(3,5 puntos)* En la Facultad de Economía de una universidad se pueden estudiar 3 grados: Grado en Contabilidad, Grado en Economía y Grado en Empresariales. En todos los grados hay un grupo de mañana y un grupo de tarde. La distribución de los estudiantes en cada uno de los grados, según grupo de mañana y de tarde es:

	Grado en Contabilidad	Grado en Economía	Grado en Empresariales
Mañana	395	278	538
Tarde	240	306	486

a) *(0,5 puntos)* Se elige al azar un estudiante de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del grupo de tarde del Grado en Contabilidad?

b) *(0,75 puntos)* Se elige al azar un estudiante del grupo de tarde. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del Grado en Contabilidad?

c) *(0,75 puntos)* Se elige al azar un estudiante de la Facultad. Sea *A* el suceso “Es del Grado en Contabilidad” y *B* el suceso “Es del grupo de tarde”, ¿son independientes los sucesos *A* y *B*?

d) *(0,75 puntos)* Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos sean del grupo de tarde?

e) *(0,75 puntos)* Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo Grado?

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3,25 puntos)* Una asociación está organizando un viaje a un parque temático para sus socios. Para comprar las entradas, la asociación ha llegado a un acuerdo con la dirección del parque, de forma que puede comprar dos tipos de entradas, "Grupal-A" y "Grupal-B" con las siguientes características:

- Cada entrada de tipo "Grupal-A" permite entrar al parque a 2 adultos y 3 niños, y cuesta 85 euros.
- Cada entrada de tipo "Grupal-B" permite entrar al parque a 4 adultos y 12 niños, y cuesta 230 euros.
- Deben comprarse, al menos, 4 entradas de tipo "Grupal-A y 2 entradas de tipo "Grupal-B".

La asociación quiere que entren al parque, al menos, 40 adultos y 96 niños. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas entradas de cada tipo "Grupal-A" y "Grupal-B" debe comprar para minimizar el coste total. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

2. *(3,25 puntos)* Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & si\ x < -1 \\ 18 - 4x + x^2 & si - 1 \leq x < 3 \\ x^3 - 9x^2 + 15x + 20 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

a) *(0,75 puntos)* Calcular a sabiendo que f es continua en $x = -1$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular el máximo valor que toma la función f para $x \in [4, 8]$.

c) *(1 punto)* Calcular:

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

3. *(3,5 puntos)*

a) *(2,75 puntos)* La duración de las bombillas de un fabricante es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 75 horas.

a1) *(1,75 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante, de forma que el error no sea mayor de 15 horas. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

a2) *(1 punto)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 150, comprobamos la duración de cada bombilla y calculamos su promedio, que resulta ser 1053 horas. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante.

b) *(0,75 puntos)* Sean *A* y *B* sucesos tales que $P(A) = 0{,}6, P(B/A) = 0{,}9$ y $P(B) = 0{,}8$. Calcular $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)\ y\ P(A/B)$.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de P(Z ≤ k) para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CUESTIONES GENERALES:

En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.

Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos.

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)*

- **a)** *(0,5 puntos)* Si no se calcula bien *AB* pero se ha razonado previamente que se puede calcular, se puntúa con *0,25 puntos*. Si se calcula bien *AB*, se puntúa con *0,5 puntos* aunque no se razone por qué se puede calcular.
- **b)** *(0,5 puntos)* Se asignan *0,5 puntos* si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado).
- **c)** *(1,25 puntos)* Si lo resuelven por el método de menores: cálculo del determinante, *0,25 puntos*; cálculo de los menores, *0,5 puntos* (se restan *0,25 puntos* por cada menor erróneo); asignar signo correcto dependiendo de la paridad, *0,25 puntos*; dividir por el determinante y trasponer la matriz (al final o en el momento de calcular los menores) para llegar a la inversa, *0,25 puntos*. Si se dejan el valor del determinante fuera de la matriz, se les resta *0,1 puntos*. Si lo resuelven por el método de Gauss, un error en la triangularización les resta *0,25 puntos*, 2 errores, *0,75 puntos* y 3 errores les restan *1,25 puntos*.
- **d)** *(1 punto)* Calcular *2C*, *0,25 puntos*. Calcular *3D*, *0,25 puntos*. Despejar *X*, *0,25 puntos* y calcularla, *0,25 puntos* (si se dejan 1/4 fuera se les resta *0,1 puntos*).

2. *(3,25 puntos)*

- **a)** *(0,75 puntos)* Plantear la ecuación, *0,25 puntos.* Resolverla *0,5 puntos*.
- **b)** (*1 punto*) Reconocer que es una indeterminación ∞/∞, *0,25 puntos*. Resolverla, *0,75 puntos*.
- **c)** *(1,5 puntos)* Calcular la derivada, *0,5 puntos*. Encontrar el punto crítico en el intervalo, *0,25 puntos*. Comprobar que el punto es máximo relativo, *0,25 puntos*. Comprobar o razonar que es máximo absoluto en el intervalo, *0,25 puntos*. Dar el valor del beneficio máximo, *0,25 puntos*.

3. *(3,5 puntos)*

- **a)** *(0,5 puntos)* Se asignan *0,5 puntos* si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado).
- **b)** *(0,75 puntos)* Se asignan *0,75 puntos* si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado).
- **c)** *(0,75 puntos)* Se valora con *0,25 puntos* poner algún criterio de independencia y *0,5 puntos* aplicarlo correctamente.

- **d)** *(0,75 puntos)* Se asignan *0,75 puntos* si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado). Si el apartado se resuelve como si las extracciones fueran con reemplazamiento, se restan *0,25 puntos*.
- **e)** *(0,75 puntos)* Se asignan *0,25 puntos* por reconocer que es la suma de tres sumandos, aunque no se resuelva correctamente. Si el apartado se resuelve como si las extracciones fueran con reemplazamiento, se restan *0,25 puntos*.

OPCIÓN B

1. *(3,25 puntos)*

Escribir la función objetivo, *0,25 puntos*. Escribir las restricciones, *0,75 puntos*, correspondiendo *0,25 puntos* a la restricción del número de adultos, *0,25 puntos* a la restricción del número de niños y *0,25 puntos* a las restricciones del mínimo de entradas de cada tipo. Dibujar correctamente la región factible, *0,5 puntos* y encontrar los puntos extremos, *0,75 puntos*. Evaluar la función objetivo en cada uno de los puntos extremos y encontrar el de coste mínimo, *0,5 puntos* y probar o razonar que aunque la región factible no es acotada, el problema tiene solución, *0,25 puntos*. Dar el valor del coste mínimo, *0,25 puntos*.

2. *(3,25 puntos)*

- **a)** *(0,75 puntos)* Calcular los límites laterales, *0,5 puntos* (*0,25 puntos* por cada uno). Calcular a, *0,25 puntos*.
- **b)** *(1,5 puntos)* Calcular la derivada, *0,5 puntos*. Encontrar el punto crítico en el intervalo, *0,25 puntos*. Comprobar que es mínimo relativo, *0,25 puntos*. Razonar que el máximo debe encontrarse en un extremo del intervalo, *0,25 puntos*. Encontrar el valor del máximo, *0,25 puntos*.
- **c)** *(1 punto)* Se puntúa con *0,25 puntos* la integral indefinida de cada sumando y con *0,25 puntos* la sustitución de los límites de integración.

3. *(3,5 puntos)*

- **a)** *(2,75 puntos)*
  - **a1)** *(1,75 puntos)* Saber qué cuantil buscar, *0,5 puntos*. Encontrarlo, *0,5 puntos*. Poner la fórmula del error, *0,5 puntos*. Sustituir y calcular n, *0,25 puntos* (si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior entero se resta *0,1 puntos*).
  - **a2)** *(1 punto)* Calcular el error (semiamplitud del intervalo), *0,5 puntos*. En esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado a1), aunque no lo sea. Poner la fórmula del IC y calcularlo, *0,5 puntos*.
- **b)** *(0,75 puntos)* Se valora cada pregunta con *0,25 puntos*, sin puntuaciones intermedias dentro de ellas. Si en una pregunta usan un resultado incorrecto de una pregunta anterior, se dará por bueno para la nueva pregunta.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&5\\2&1&-1\\-1&4&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&1\\-5&2&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&0&4\\2&3&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

a) *(0,5 puntos)* ¿Se puede calcular AB? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b) *(0,5 puntos)* ¿Se puede calcular BA? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

c) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de C.

d) *(1 punto)* Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2C+4X=3D$.

SOLUCIÓN.

a) Sí se puede pues el número de columnas de A coincide con el de filas de B.

$$\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&5\\2&1&-1\\-1&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1&14\\0&14&-7\end{pmatrix}$$

b) No, porque el número de columnas de B (3) no coincide con el número de filas de A (2).

c) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\2&3&1&0&1&0\\-5&2&0&0&0&1\end{array}\right)\overset{\substack{F_2-2F_1\\F_3+5F_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&5&1&-2&1&0\\0&-3&0&5&0&1\end{array}\right)\overset{F_2:5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&1/5&-2/5&1/5&0\\0&-3&0&5&0&1\end{array}\right)\overset{F_3+3F_2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&1/5&-2/5&1/5&0\\0&0&3/5&19/5&3/5&1\end{array}\right)\overset{F_3:\frac{3}{5}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&1/5&-2/5&1/5&0\\0&0&1&19/3&1&5/3\end{array}\right)\overset{F_2-\frac{1}{5}F_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&0&-5/3&0&-1/3\\0&0&1&19/3&1&5/3\end{array}\right)\overset{F_1+F_2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2/3&0&-1/3\\0&1&0&-5/3&0&-1/3\\0&0&1&19/3&1&5/3\end{array}\right)\quad\Rightarrow\quad C^{-1}=\begin{pmatrix}-2/3&0&-1/3\\-5/3&0&-1/3\\19/3&1&5/3\end{pmatrix}$$

d) $$2C+4X=3D\ \Rightarrow\ X=\frac{1}{4}\left(3D-2C\right)\ \Rightarrow\ X=\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}3&0&12\\6&9&0\\3&-3&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-2&0\\4&6&2\\-10&4&0\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}1&2&12\\2&3&-2\\13&-7&6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/4&1/2&3\\1/2&3/4&-1/2\\13/4&-7/4&3/2\end{pmatrix}$$

2. *(3,25 puntos)* Los ingresos por ventas (en millones de euros) que obtiene una empresa dependen del gasto que haga en publicidad, de forma que, si gasta x millones de euros, los ingresos por ventas son iguales a:

$$V(x)=\frac{21x+12}{x+1}$$

a) *(0,75 puntos)* Encontrar, si existe, el valor o valores de x para los cuales los ingresos por ventas son iguales a 18 millones de euros.

b) *(1 punto)* Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} V(x)$$

¿Cómo se puede interpretar el resultado?

c) *(1,5 puntos)* Si definimos el beneficio por ventas como la diferencia entre los ingresos por ventas y el gasto en publicidad (esto es, $B(x) = V(x) - x$), calcular el máximo beneficio que se puede alcanzar cuando $x \in [0,5]$.

SOLUCIÓN.

a) $\dfrac{21x+12}{x+1} = 18 \ \Rightarrow\ 21x+12 = 18x+18 \ \Rightarrow\ 3x = 6 \ \Rightarrow\ x = 2$ es decir, con un gasto de 2 millones en publicidad, el ingreso por ventas es de 18 millones de euros.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} V(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{21x+12}{x+1} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{21x}{x}+\frac{12}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{21+\frac{12}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{21+0}{1+0} = 21$

La interpretación es que por mucho que aumente el gasto en publicidad, los ingresos por ventas no sobrepasarán los 21 millones de euros.

c) $B(x) = V(x) - x = \dfrac{21x+12}{x+1} - x = \dfrac{21x+12-x^2-x}{x+1} = \dfrac{-x^2+20x+12}{x+1}$

Veamos si en el intervalo $[0,5]$ la función alcanza algún máximo relativo:

$$B'(x) = \frac{(-2x+20)(x+1)-(-x^2+20x+12)}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2-2x+20x+20+x^2-20x-12}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x+8}{(x+1)^2} = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -x^2-2x+8 = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{2\pm\sqrt{4+32}}{-2} = \frac{2\pm 6}{-2} = \begin{cases} x = -4 \notin [0,5] \\ x = 2 \end{cases}$$

Estudiemos si en $x = 2$ la función alcanza un máximo relativo:

$B''(x) = \dfrac{(-2x-2)(x+1)^2-(-x^2-2x+8)2(x+1)}{(x+1)^4} \ \Rightarrow\ B''(2) = \dfrac{(-\cdot+)-0}{+} < 0 \ \Rightarrow$ En $x = 2$ la función tiene un máximo relativo.

Veamos en qué valor de $x \in [0,5]$ la función alcanza su máximo absoluto (en el máximo relativo o en los extremos del intervalo):

$$B(0) = 12 \quad , \quad B(5) = \frac{-25+100+12}{6} = 14{,}5 \quad , \quad B(2) = \frac{-4+40+12}{3} = 16$$

luego el máximo beneficio en el intervalo $[0,5]$ es de 16 millones de euros obtenidos al gastar 2 millones de euros en publicidad.

3. *(3,5 puntos)* En la Facultad de Economía de una universidad se pueden estudiar 3 grados: Grado en Contabilidad, Grado en Economía y Grado en Empresariales. En todos los grados hay un grupo de mañana y un grupo de tarde. La distribución de los estudiantes en cada uno de los grados, según grupo de mañana y de tarde es:

	Grado en Contabilidad	Grado en Economía	Grado en Empresariales
Mañana	395	278	538
Tarde	240	306	486

a) *(0,5 puntos)* Se elige al azar un estudiante de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del grupo de tarde del Grado en Contabilidad?

b) *(0,75 puntos)* Se elige al azar un estudiante del grupo de tarde. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del Grado en Contabilidad?

c) *(0,75 puntos)* Se elige al azar un estudiante de la Facultad. Sea *A* el suceso "Es del Grado en Contabilidad" y *B* el suceso "Es del grupo de tarde", ¿son independientes los sucesos *A* y *B*?

d) *(0,75 puntos)* Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos sean del grupo de tarde?

e) *(0,75 puntos)* Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo Grado?

SOLUCIÓN.

La tabla de contingencia correspondiente a la distribución de los estudiantes es:

	CONTABILIDAD (C)	ECONOMÍA (EC)	EMPRESARIALES (EM)	TOTAL
MAÑANA (M)	395	278	538	1211
TARDE (T)	240	306	486	1032
TOTAL	635	584	1024	2243

a) $p(T \cap C) = \dfrac{240}{2243} \simeq 0{,}107$

b) $p(C/T) = \dfrac{240}{1032} = 0{,}2326$

c) El suceso A del enunciado es el que hemos nombrado C (de Contabilidad) y el suceso B del enunciado es el que hemos nombrado T (de Tarde). Si A y B (C y T) son independientes: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Se tiene:

$p(A) = p(C) = \dfrac{635}{2243} \simeq 0{,}2832$ $\quad p(B) = p(T) = \dfrac{1032}{2243} \simeq 0{,}4601$ $\quad p(A \cap B) = p(C \cap T) = \dfrac{240}{2243} = 0{,}107$ (apartado a))

y como $\dfrac{635}{2243} \cdot \dfrac{1032}{2243} = \dfrac{655320}{5031049} \simeq 0{,}1303 \neq \dfrac{240}{2243} \simeq 0{,}107 \Rightarrow$ los sucesos no son independientes.

d) $p(T_1 \cap T_2) = p(T_1) \cdot p(T_2 / T_1) = \dfrac{1032}{2243} \cdot \dfrac{1031}{2242} = \dfrac{1063992}{5028806} \simeq 0{,}2116$

e) $p\left[(C_1 \cap C_2) \cup (EC_1 \cap EC_2) \cup (EM_1 \cap EM_2)\right] = p(C_1 \cap C_2) + p(EC_1 \cap EC_2) + p(EM_1 \cap EM_2) =$

$= \dfrac{635}{2243} \cdot \dfrac{634}{2242} + \dfrac{584}{2243} \cdot \dfrac{583}{2242} + \dfrac{1024}{2243} \cdot \dfrac{1023}{2242} = \dfrac{1790614}{5028806} \simeq 0{,}3561$

OPCIÓN B

1. *(3,25 puntos)* Una asociación está organizando un viaje a un parque temático para sus socios. Para comprar las entradas, la asociación ha llegado a un acuerdo con la dirección del parque, de forma que puede comprar dos tipos de entradas, "Grupal-A" y "Grupal-B" con las siguientes características:

- Cada entrada de tipo "Grupal-A" permite entrar al parque a 2 adultos y 3 niños, y cuesta 85 euros.
- Cada entrada de tipo "Grupal-B" permite entrar al parque a 4 adultos y 12 niños, y cuesta 230 euros.
- Deben comprarse, al menos, 4 entradas de tipo "Grupal-A y 2 entradas de tipo "Grupal-B".

La asociación quiere que entren al parque, al menos, 40 adultos y 96 niños. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas entradas de cada tipo "Grupal-A" y "Grupal-B" debe comprar para minimizar el coste total. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de Programación Lineal.

Organicemos los datos en una tabla:

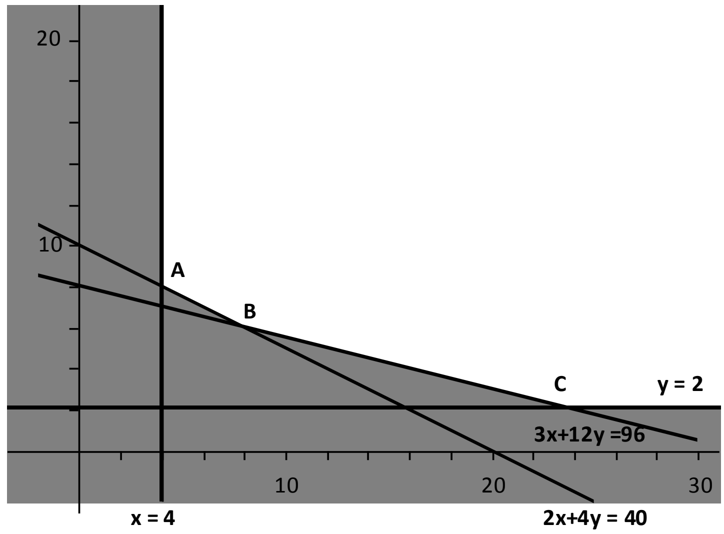
TIPOS DE ENTRADA	NÚMERO	ADULTOS	NIÑOS	COSTE
GRUPAL-A	X	2x	3x	85x
GRUPAL-B	y	4y	12y	230y
	$x \geq 4$, $y \geq 2$	$2x+4y \geq 40$	$3x+12y \geq 96$	$F(x,y)=85x+230y$

Así pues, el problema queda planteado en los siguientes términos:

La función objetivo es $F(x,y)=85x+230y$ que debe minimizarse.

Las restricciones a las que debe someterse la solución son: $x \geq 4$, $y \geq 2$, $2x+4y \geq 40$, $3x+12y \geq 96$

Dibujemos en el plano el conjunto de restricciones para localizar la región factible:



▪ La recta $x=4$ es paralela al eje OY a una distancia de 4 unidades. La solución de la inecuación $x \geq 4$ es el semiplano que está a la derecha de la recta (en blanco)

▪ La recta $y=2$ es paralela al eje OX a una distancia de 2 unidades. La solución de la inecuación $y \geq 2$ es el semiplano que está por encima de la recta (en blanco).

▪ La recta $2x+4y=40 \Leftrightarrow x+2y=20$ pasa por los puntos $(20,0)$ y $(0,10)$. La solución de la inecuación $2x+4y \geq 40$ es el semiplano que no contiene al origen de coordenadas.

▪ La recta $3x+12y=96 \Leftrightarrow x+4y=32$ pasa por los puntos $(8,6)$ y $(0,8)$. La solución de la inecuación $3x+12y \geq 96$ es el semiplano que no contiene al origen de coordenadas (en blanco).

La región factible es una región abierta (en blanco) cuyos vértices son los puntos A, B y C. La función objetivo se minimizará en alguno de ellos. Calculemos sus coordenadas y el valor que tiene la función objetivo en cada uno:

Vértice A: $\begin{cases} x=4 \\ x+2y=20 \end{cases} \Rightarrow x=4 \ , \ y=8 \Rightarrow A(4,8) \Rightarrow F(4,8)=85\cdot 4+230\cdot 8=2180$

Vértice B: $\begin{cases} x+2y=20 \\ x+4y=32 \end{cases} \Rightarrow 2y=12 \Rightarrow y=6 \ , \ x=8 \Rightarrow B(8,6) \Rightarrow F(8,6)=85\cdot 8+230\cdot 6=2060$

Vértice C: $\begin{cases} x+4y=32 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow y=2 \ , \ x=24 \Rightarrow C(24,2) \Rightarrow F(24,2)=85\cdot 24+230\cdot 2=2500$

Por consiguiente, la función objetivo es mínima para $x=8$ y $y=6$. Es decir, el coste mínimo, de 2060 €, se consigue comprando 8 entradas del tipo Grupal-A y 6 entradas del tipo Grupal-B.

2. *(3,25 puntos)* Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} ax+2 & si\ x<-1 \\ 18-4x+x^2 & si-1 \leq x<3 \\ x^3-9x^2+15x+20 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

a) *(0,75 puntos)* Calcular a sabiendo que f es continua en $x=-1$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular el máximo valor que toma la función f para $x \in [4,8]$.

c) *(1 punto)* Calcular:

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

SOLUCIÓN.

a) Para que f(x) sea continua en $x=-1$ debe ser:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x) \iff \lim_{x\to -1}(ax+2)=\lim_{x\to -1}\left(18-4x+x^2\right) \iff -a+2=18+4+1 \Rightarrow a=-21$$

b) En el intervalo $[4\,,8]$, la función $f(x)$ está definida así: $f(x)=x^3-9x^2+15x+20$.

El máximo valor de la función en dicho intervalo lo alcanzará en los extremos del mismo o en algún máximo relativo, si lo tiene. Veamos, en primer lugar, si la función tiene algún máximo relativo dentro del intervalo:

$$f'(x)=3x^2-18x+15=0 \Rightarrow x=\frac{18\pm\sqrt{324-180}}{6}=\frac{18\pm 12}{6}= \begin{cases} 1\in[4\,,8] \\ 5 \end{cases}$$

De los dos puntos críticos obtenidos sólo pertenece al intervalo el de abscisa $x=5$. Veamos si se trata de un máximo relativo: $f''(x)=6x-18 \Rightarrow f''(5)>0 \Rightarrow$ En $x=5$ la función tiene un mínimo relativo.

El máximo valor de la función en el intervalo $[4\,,8]$ lo alcanzará en alguno de los extremos del intervalo:

$f(4)=64-144+60+20=0$; $f(8)=512-576+120+20=76 \Rightarrow$ el máximo valor es de 76 y lo toma en $x=8$

c) $$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2\left(18-4x+x^2\right)dx=\left[18x-\frac{4x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\left(36-8+\frac{8}{3}\right)-\left(18-2+\frac{1}{3}\right)=12+\frac{7}{3}=\frac{43}{3}$$

3. *(3,5 puntos)*

a) *(2,75 puntos)* La duración de las bombillas de un fabricante es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 75 horas.

a1) *(1,75 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante, de forma que el error no sea mayor de 15 horas. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

a2) *(1 punto)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 150, comprobamos la duración de cada bombilla y calculamos su promedio, que resulta ser 1053 horas. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante.

b) *(0,75 puntos)* Sean A y B sucesos tales que $P(A)=0{,}6, P(B/A)=0{,}9$ y $P(B)=0{,}8$. Calcular $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$ y $P(A/B)$.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

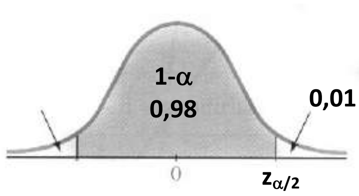
SOLUCIÓN.

a) $\sigma = 75$ horas

a1) Se tiene: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{E} \right)^2$

En nuestro caso: $E = 15$ horas

Calculemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 98%:



$1 - \alpha = 0{,}98 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 - 0{,}98 = 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

Buscamos en la tabla el valor más aproximado a 0,99 (0,9901) que se corresponde con un valor crítico $z_{\alpha/2} = 2{,}33$.

Se tiene entonces: $n = \left(\dfrac{2{,}33 \cdot 75}{15} \right)^2 = 135{,}7 \quad \Rightarrow$ Debe tomarse una muestra de 136 bombillas

a2) Ahora, con $n = 150$ bombillas, $\overline{X} = 1053$ horas y $1 - \alpha = 0{,}98$, el intervalo de confianza para la media de la población, centrado en la media muestral, tiene como radio el error máximo admisible:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}33 \cdot \frac{75}{\sqrt{150}} = 14{,}27 \quad \Rightarrow \quad \left(\overline{X} - E \ , \ \overline{X} + E \right) = \left(1038{,}73 \ , \ 1067{,}27 \right)$$

b) Se tiene: $p(A) = 0{,}6$, $p(B/A) = 0{,}9$, $p(B) = 0{,}8$.

- $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = 0{,}6 \cdot 0{,}9 = 0{,}54$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}54 = 0{,}86$
- $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0{,}54}{0{,}8} = 0{,}675$

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Una empresa de carpintería tiene dos fábricas A y B en las que produce sillas, mesas y taburetes, y tiene que decidir el número de horas de trabajo en cada una de las dos fábricas para la semana próxima. Por cada hora de trabajo de la fábrica A, se producen 1 silla, 2 mesas y 4 taburetes, por cada hora de trabajo de la fábrica B se producen 4 sillas, 3 mesas y 2 taburetes. Durante la semana próxima la empresa tiene que producir, al menos, 80 sillas, 120 mesas y 96 taburetes. El coste por cada hora de trabajo de la fábrica A es de 1500 euros, mientras que el coste por cada hora de trabajo de la fábrica B es de 1000 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de horas que tiene que trabajar cada una de las fábricas para minimizar el coste. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

2. *(3,25 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 3}$$

Calcular:

a) *(0,25 puntos)* Dominio de f.

b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

3. *(3,5 puntos)* Un concesionario se dedica a la venta de tres modelos de coches: A, B y C. En el concesionario trabajan dos vendedores: María y Pedro. El mes pasado María realizó el 55% de las ventas y Pedro el 45% restante. Además, de las ventas de María, un 60% fueron del modelo A, un 30% del modelo B y un 10% del modelo C. De las ventas de Pedro, un 50% fueron del modelo A, un 20% del modelo B y un 30% del modelo C.

a) *(0,75 puntos)* Elegimos al azar una de las ventas realizadas el mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un coche del modelo B vendido por María?

b) *(1 punto)* Elegimos al azar una de las ventas de mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

c) *(1 punto)* Elegimos al azar una de las ventas de modelo B del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una venta de María?

d) *(0,75 puntos)* Elegimos al azar (con reemplazamiento) dos ventas del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea una venta de María?

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3,25 puntos)* Discutir, según los valores de a, el sistema:

$$\begin{aligned} 2x + ay + az &= 4 \\ -x + ay + z &= a \\ x + y + az &= 3 \end{aligned}$$

Resolverlo para $a = -3$.

2. *(3,25 puntos)* Una empresa va a lanzar al mercado un nuevo juguete para la campaña de Navidad. Tiene que decidir el precio de venta al público del juguete, que estará entre 1 y 10 euros. Ha realizado un estudio y sabe que el beneficio B que obtendrá en la campaña dependerá del precio de venta que le ponga al juguete. Así, si le pone un precio de venta x (en euros), el beneficio que obtendrá será de

$$B(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$$

donde B está expresado en millones de euros.

a) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de $x \in [1, 10]$ el beneficio es positivo?

b) *(1,5 puntos)* ¿Qué precio de venta $x \in [1, 10]$ tiene que poner al juguete para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

c) *(1 punto) Calcular*

$$\int_1^{10} B\,(x)dx$$

3. *(3,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos) Dados dos sucesos A y B tales que* $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,8$ *y P(A / B)*$= 0,7$, calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?

b) (2 puntos) Se sabe que el gasto semanal en ocio de los jóvenes de una ciudad tiene distribución normal de desviación típica 6 euros. Se toma una muestra de 10 jovenes y se les pregunta el gasto en ocio de la última semana, con los siguientes resultados (expresados en euros):

24,5 11 16,5 18,5 21,5 25 6,5 12 10,5 9,5

Construya un intervalo de confianza de nivel 94% para la media del gasto semanal en ocio de los jóvenes de la ciudad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de P(Z ≤ k) para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.
Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá´ dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error de lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector. Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos.

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)*

Escribir la función objetivo, *0,25 puntos*. Escribir las restricciones, *0,75 puntos*, correspondiendo *0,25 puntos* a cada una de las tres restricciones adicionales a las de no negatividad; no poner las condiciones de no negatividad se penalizara´ con *0,1 puntos*. Dibujar correctamente la región factible, *0,5 puntos* y encontrar los puntos extremos, *0,75 puntos* (si se encuentran los puntos extremos correctamente sin haber dibujado la región factible se asignan los *1,25 puntos*) .Evaluar la función objetivo en cada uno de los puntos extremos y encontrar el de coste mínimo, *0,5 puntos* y probar o razonar que aunque la región factible no es acotada, el problema tiene solución, *0,25 puntos*. Dar el valor del coste mínimo *0,25 puntos*.

2. *(3,25 puntos)*

a) (*0,25 puntos*)

b) Factorizar el numerador *0,25 puntos*. Calcular los intervalos donde x es positiva *0,5 puntos*. Si se incluye el punto $-3/2$ se restan *0,25 puntos* y si se incluye el 1 se restan *0,1 puntos*.

c) Asíntota horizontal *0,25 puntos*. Asíntota vertical *0,25 puntos*. Asíntota oblicua *0,5 puntos* (0,25 por cada parámetro).

d) Calcular la derivada correctamente *0,5 puntos*. Obtener los puntos críticos *0,25 puntos*. Determinar cuál es el mínimo y cuál el máximo *0,5 puntos* (si lo hacen calculando la segunda derivada, ésta se valorará con *0,25 puntos*).

3. *(3,5 puntos)*

a) Se asignan *0,75 puntos* si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado).

b) Por poner la fórmula correcta (teorema de la probabilidad total u otra si es correcta), *0,25 puntos*. Sustituir correctamente y calcular, *0,75 puntos*. Si no ponen la fórmula explícitamente pero la aplican bien, se puntúa con *1 punto* el apartado.

c) Por poner la fórmula correcta (teorema de Bayes u otra si es correcta), *0,25 puntos*. Sustituir correctamente y calcular, *0,75 puntos*. Si usan algún valor incorrecto de apartados anteriores, se dará por correcto para este apartado. Si no ponen la fórmula explícitamente pero la aplican bien, se puntúa con *1 punto* el apartado.

d) Si lo hacen pasando al complementario: *0,25 puntos* por pasar correctamente al complementario y *0,5 puntos* por calcular la probabilidad pedida. Si lo hacen directamente, se les resta *0,25 puntos* por cada combinación que se dejen o de la que no calculen la probabilidad correctamente.

OPCIÓN B

1. *(3,25 puntos)*

Discutir el sistema, *1,75 puntos*: si lo hacen por Gauss se puntúa con *1 punto* la correcta triangularización (un error resta 0,5 puntos y dos errores restan 1 punto). Si lo hacen por determinantes se puntúa con *1 punto* el cálculo de los determinantes necesarios para llegar a la conclusión. Se puntúa con *0,25 puntos* obtener que es incompatible para $\alpha = -1$, con *0,25 puntos* que es compatible indeterminado para $\alpha = 1$ y con *0,25 puntos* que es compatible determinado para los demás valores de α. Resolverlo, *1,5 puntos* (si la resolución se basa en algún resultado erróneo de la parte de discusión, se dará aquél como bueno a la hora de puntuar la resolución).

2. *(3,25 puntos)*

a) Encontrar los puntos en los que se anula el beneficio, *0,5 puntos*. Determinar el intervalo en el que el beneficio es positivo, *0,25 puntos* (se restan *0,1 puntos* si se incluye algún extremo del intervalo).

b) Calcular la derivada *0,5 puntos*. Encontrar el punto crítico, *0,25 puntos*. Comprobar que es máximo relativo, *0,25 puntos*. Comprobar o razonar que es máximo absoluto, *0,25 puntos*. Dar el valor del beneficio máximo, *0,25 puntos*.

c) Se puntúa con *0,25 puntos* la integral indefinida de cada sumando y con *0,25 puntos* la sustitución de los límites de integración.

3. *(3,5 puntos)*

a) Se valora cada pregunta con *0,5 puntos*, sin puntuaciones intermedias dentro de ellas. Si en una pregunta se usa un resultado incorrecto de una pregunta anterior, se dará por bueno para la nueva pregunta.

b) Calcular la media de los datos, *0,25 puntos*. Saber qué cuantil buscar *0,5 puntos*. Encontrarlo *0,5 puntos*. Calcular el error (semiamplitud del intervalo) *0,5 pts*. Poner la fórmula del IC y calcularlo, *0,25 pts*.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Una empresa de carpintería tiene dos fábricas A y B en las que produce sillas, mesas y taburetes, y tiene que decidir el número de horas de trabajo en cada una de las dos fábricas para la semana próxima. Por cada hora de trabajo de la fábrica A, se producen 1 silla, 2 mesas y 4 taburetes, por cada hora de trabajo de la fábrica B se producen 4 sillas, 3 mesas y 2 taburetes. Durante la semana próxima la empresa tiene que producir, al menos, 80 sillas, 120 mesas y 96 taburetes. El coste por cada hora de trabajo de la fábrica A es de 1500 euros, mientras que el coste por cada hora de trabajo de la fábrica B es de 1000 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de horas que tiene que trabajar cada una de las fábricas para minimizar el coste. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

SOLUCIÓN

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

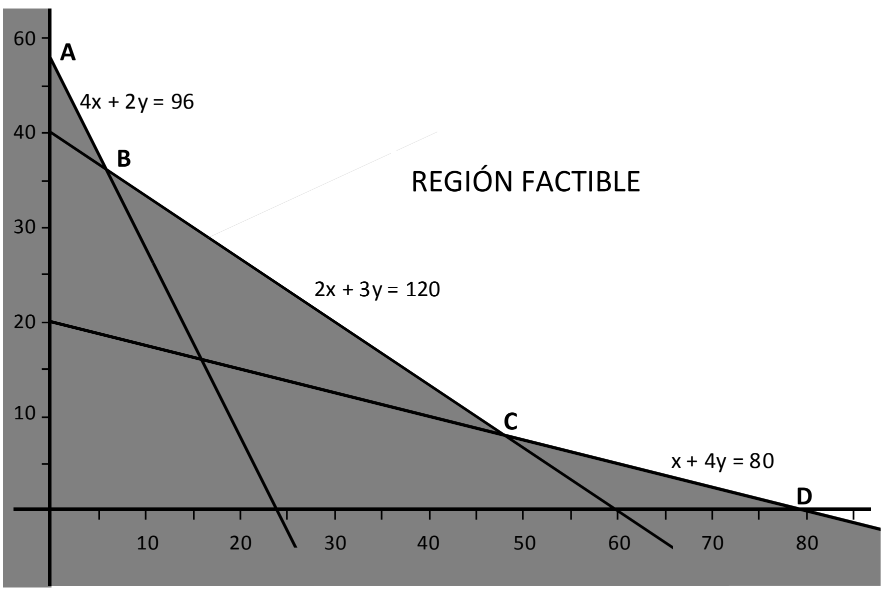
FÁBRICAS	Nº DE HORAS	SILLAS	MESAS	TABURETES	COSTE
A	x	x	2x	4x	1500x
B	y	4y	3y	2y	1000y
Condiciones:	$x \geq 0$, $y \geq 0$	$x+4y \geq 80$	$2x+3y \geq 120$	$4x+2y \geq 96$	$F(x,y)=1500x+1000y$

La función objetivo es $F(x,y)=1500x+1000y$ (coste) que debe ser mínimo.

El conjunto de restricciones a las que debe estar sometida la solución son:

$$\{ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ x+4y \geq 80 \ , \ 2x+3y \geq 120 \ , \ 4x+2y \geq 96 \}$$

Obtengamos, gráficamente, la región factible (solución del conjunto de restricciones):



- La recta $x=0$ es el eje de ordenadas y la inecuación $x \geq 0$ tiene por solución el semiplano de su derecha (en blanco)

- La recta $y=0$ es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior (en blanco).

- La recta $x+4y=80$ pasa por los puntos $(80,0)$ y $(0,20)$. La solución de la inecuación $x+4y \geq 80$ es el semiplano en el que no está el origen de coordenadas (en blanco).

- La recta $2x+3y=120$ pasa por $(60,0)$ y $(0,40)$. La inecuación $2x+3y \geq 120$ tiene por solución el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

- La recta $4x+2y=96$ pasa por los puntos $(24,0)$ y $(0,48)$. La inecuación $4x+2y\geq 96$ tiene por solución el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

La región factible (en blanco) es una región abierta de vértices A, B, C, y D. La función objetivo se optimiza en alguno de sus vértices. Obtengamos las coordenadas de los vértices y el valor de la función objetivo $F(x,y)=1500x+1000y$ en ellos:

Vértice A: $\begin{cases} x=0 \\ 4x+2y=96 \end{cases} \Rightarrow A(0\,,48) \Rightarrow F(0\,,48)=1500\cdot 0+1000\cdot 48=48000$

Vértice B: $\begin{cases} 4x+2y=96 \\ 2x+3y=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-y=-48 \\ 2x+3y=120 \end{cases} \Rightarrow 2y=72 \Rightarrow y=36 \Rightarrow x=\dfrac{120-3\cdot 36}{2}=6$

$\Rightarrow B(6,36) \Rightarrow F(6,36)=1500\cdot 6+1000\cdot 36=45000$

Vértice C: $\begin{cases} 2x+3y=120 \\ x+4y=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-3y=-120 \\ 2x+8y=160 \end{cases} \Rightarrow 5y=40 \Rightarrow y=8 \Rightarrow x=80-4\cdot 8=48$

$\Rightarrow C(48,8) \Rightarrow F(48,8)=1500\cdot 48+1000\cdot 8=80000$

Vértice D: $\begin{cases} y=0 \\ x+4y=80 \end{cases} \Rightarrow D(80\,,0) \Rightarrow F(80\,,0)=1500\cdot 80+1000\cdot 0=120000$

Por lo tanto, el coste mínimo, de 45000 €, se obtiene al trabajar 6 horas la fábrica A y 36 horas la fábrica B.

2. *(3,25 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{2x+3}$$

Calcular:

a) *(0,25 puntos)* Dominio de f.

b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN

a) Al tratarse de una función racional, su dominio es R menos los valores de x que anulen al denominador.

En nuestro caso: $\mathrm{Dom}\ f=\mathrm{R}-\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

b) $\dfrac{x^2-2x+1}{2x+3}=\dfrac{(x-1)^2}{2x+3}>0 \Rightarrow$ como $(x-1)^2>0\ \forall x$ excepto para $x=1$ en que se anula: $2x+3>0 \Rightarrow x>-\dfrac{3}{2}$

Por tanto, la función es positiva para $x\in\left(-\dfrac{3}{2},1\right)\cup(1\,,+\infty)$

c) ▪ Asíntotas verticales: $x=-\dfrac{3}{2}$ pues $\lim\limits_{x\to -3/2}\dfrac{x^2-2x+1}{2x+3}=\infty$

▪ Asíntotas horizontales: no tiene pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{2x+3}=\infty$

▪ Asíntotas oblicuas $y=mx+n$: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2-2x+1}{2x+3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2+3x}=\dfrac{1}{2}$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-2x+1}{2x+3}-\frac{x}{2}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+2-2x^2-3x}{4x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{-7x+2}{4x+6}=-\frac{7}{4}$$

luego $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$ es una asíntota oblicua de la función.

d) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x + 3} = \frac{(x-1)^2}{2x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x-1)(2x+3) - (x-1)^2 \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{4x^2 + 6x - 4x - 6 - 2x^2 + 4x - 2}{(2x+3)^2} =$

$$= \frac{2x^2 + 6x - 8}{(2x+3)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{(4x+6)(2x+3)^2 - (2x^2 + 6x - 8) \cdot 2(2x+3) \cdot 2}{(2x+3)^4} \qquad \begin{array}{|l} f''(-4) < 0 \Rightarrow x = -4 \text{ máximo} \\ f''(1) > 0 \Rightarrow x = 1 \text{ mínimo} \end{array}$$

Por lo tanto la función tiene un máximo relativo en el punto $(-4, -5)$ y un mínimo relativo en $(1, 0)$.

3. *(3,5 puntos)* Un concesionario se dedica a la venta de tres modelos de coches: A, B y C. En el concesionario trabajan dos vendedores: María y Pedro. El mes pasado María realizó el 55% de las ventas y Pedro el 45% restante. Además, de las ventas de María, un 60% fueron del modelo A, un 30% del modelo B y un 10% del modelo C. De las ventas de Pedro, un 50% fueron del modelo A, un 20% del modelo B y un 30% del modelo C.

a) *(0,75 puntos)* Elegimos al azar una de las ventas realizadas el mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un coche del modelo B vendido por María?

b) *(1 punto)* Elegimos al azar una de las ventas de mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

c) *(1 punto)* Elegimos al azar una de las ventas de modelo B del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una venta de María?

d) *(0,75 puntos)* Elegimos al azar (con reemplazamiento) dos ventas del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea una venta de María?

SOLUCIÓN

Organicemos los datos en una tabla de contingencia. Para un total de 200 coches vendidos, María habrá vendido 200×0,55 = 110 y Pedro 200×0,45 = 90. De los 110 coches vendidos por María, 110×0,60 = 66 son del modelo A, 110×0,30 = 33 son del modelo B y 110×0,10 =11 del modelo C. De los 90 coches vendidos por Pedro, 90×0,50 = 45 son del modelo A, 90×0,20 = 18 del modelo B y 90×0,30 = 27 del modelo C.

	A	B	C	TOTAL
MARÍA (M)	66	33	11	110
PEDRO (P)	45	18	27	90
TOTAL	111	51	38	200

a) $P(M \cap B) = \frac{33}{200} = 0{,}165$

b) $P(B) = \frac{51}{200} = 0{,}255$

c) $P(M/B) = \frac{33}{51} = 0{,}6471$

d) El suceso "al menos una de las dos ventas es de María" es el suceso contrario al suceso "ninguna de las dos ventas es de María". Como además hay reposición, los dos sucesos son independientes.

$$P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2}) = P(\overline{M_1}) \cdot P(\overline{M_2}) = \frac{90}{200} \cdot \frac{90}{200} = \frac{8100}{40000} = 0{,}2025 \Rightarrow P = 1 - 0{,}2025 = 0{,}7975$$

OPCIÓN B

1. *(3,25 puntos)* Discutir, según los valores de a, el sistema:

$$\begin{aligned} 2x + ay + az &= 4 \\ -x + ay + z &= a \\ x + y + az &= 3 \end{aligned}$$

Resolverlo para $a = -3$.

SOLUCIÓN

Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & a & 4 \\ -1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 3 \end{array}\right)$.

Utilizaremos el método de Gauss para obtener sus rangos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & a & 4 \\ -1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 3 \end{array}\right) \underset{}{\overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\approx}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 3 \\ -1 & a & 1 & a \\ 2 & a & a & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-2F_1}}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 3 \\ 0 & a+1 & a+1 & a+3 \\ 0 & a-2 & -a & -2 \end{array}\right) \overset{F_2-F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 3 \\ 0 & 3 & 2a+1 & a+5 \\ 0 & a-2 & -a & -2 \end{array}\right) \overset{F_2:3}{\approx}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2a+1}{3} & \frac{a+5}{3} \\ 0 & a-2 & -a & -2 \end{array}\right) \overset{F_3-F_2\cdot(a-2)}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2a+1}{3} & \frac{a+5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-2a^2+2}{3} & \frac{-a^2-3a+4}{3} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{-2a^2+2}{3} = 0 \;\Rightarrow\; a^2 = 1 \;\Rightarrow\; a = -1\;,\; a = 1$$

▪ Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$: $\text{rg}\,A = \text{rg}\,B = 3 \;\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

▪ Si $a = -1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rg}\,A = 2$ y $\text{rg}\,B = 3 \Rightarrow \text{rg}\,A \neq \text{rg}\,B \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

▪ Si $a = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rg}\,A = \text{rg}\,B = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

● Según la discusión, para $a = -3$ el sistema es compatible determinado y equivalente al sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y - 3z = 3 \\ \quad y - \frac{5}{3}z = \frac{2}{3} \\ \quad -\frac{16}{3}z = \frac{4}{3} \end{array}\right. \Rightarrow\; z = -\frac{1}{4} \quad,\quad y = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad,\quad x = 3 - y + 3z = 3 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 2$$

2. *(3,25 puntos)* Una empresa va a lanzar al mercado un nuevo juguete para la campaña de Navidad. Tiene que decidir el precio de venta al público del juguete, que estará entre 1 y 10 euros. Ha realizado un estudio y sabe que el beneficio B que obtendrá en la campaña dependerá del precio de venta que le ponga al juguete. Así, si le pone un precio de venta x (en euros), el beneficio que obtendrá será de

$$B(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$$

donde B está expresado en millones de euros.

a) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de $x \in [1, 10]$ el beneficio es positivo?

b) *(1,5 puntos)* ¿Qué precio de venta $x \in [1, 10]$ tiene que poner al juguete para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

c) *(1 punto) Calcular*

$$\int_1^{10} B(x)dx$$

SOLUCIÓN

$$B(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = \frac{9x - 18 - x^2}{x^2} = \frac{-x^2 + 9x - 18}{x^2}$$

a) $B(x) = \dfrac{-x^2 + 9x - 18}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; -x^2 + 9x - 18 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{-2} = \dfrac{-9 \pm 3}{-2} = \begin{cases} 3 \\ 6 \end{cases}$

La función es continua en el intervalo de estudio $[1, 10]$ pues su único punto de discontinuidad está en $x = 0$. Como la función se anula en $x = 3$ y en $x = 6$, el signo de la función se alternará en los intervalos $(1, 3)$, $(3, 6)$ y $(6, 10)$.

Por ejemplo, en $x = 2$: $B(2) = \dfrac{9}{2} - \dfrac{18}{4} - 1 = -1 < 0$. Luego la función es negativa en $(1, 3)$, positiva en $(3, 6)$ y negativa en $(6, 10)$. Por lo tanto, el beneficio es positivo para $x \in (3, 6)$.

b) Veamos dónde alcanza su máximo la función:

$$B'(x) = \frac{(-2x+9)\cdot x^2 - (-x^2 + 9x - 18)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x^3 + 9x^2 + 2x^3 - 18x^2 + 36x}{x^4} = \frac{-9x + 36}{x^3} = 0 \;\Rightarrow\; x = 4 \text{ (punto crítico)}$$

$$B''(x) = \frac{-9x^3 - (-9x + 36)\cdot 3x^2}{x^6} \;\Rightarrow\; B''(4) < 0 \;\Rightarrow\; x = 4 \in [1, 10] \text{ es un máximo relativo de la función.}$$

En $x = 4$, el valor de la función es: $B(4) = \dfrac{9}{4} - \dfrac{18}{16} - 1 = \dfrac{36 - 18 - 16}{16} = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$ y como en los extremos del intervalo: $B(1) = 9 - 18 - 1 = -10$, $B(10) = \dfrac{9}{10} - \dfrac{18}{100} - 1 = -0{,}28$, la función tiene su máximo absoluto en $x = 4$.

Por lo tanto el valor del juguete debe ser de 4 € para maximizar el beneficio que será de 125000 €.

c) $\displaystyle\int \left(\frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1\right)dx = 9\int \frac{1}{x}\,dx - 18\int x^{-2}\,dx - \int dx = 9\ln x - 18\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - x = 9\ln x + \frac{18}{x} - x \;\Rightarrow$

$$\int_1^{10} \left(\frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1\right)dx = \left[9\ln x + \frac{18}{x} - x\right]_1^{10} = \left(9\ln 10 + \frac{18}{10} - 10\right) - (9\ln 1 + 18 - 1) = 9\ln 10 + 1{,}8 - 10 - 18 + 1 = 9\ln 10 - 25{,}2$$

3. *(3,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos) Dados dos sucesos A y B tales que* $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,8$ *y* $P(A/B) = 0,7$, calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?

b) (2 puntos) Se sabe que el gasto semanal en ocio de los jóvenes de una ciudad tiene distribución normal de desviación típica 6 euros. Se toma una muestra de 10 jovenes y se les pregunta el gasto en ocio de la última semana, con los siguientes resultados (expresados en euros):

24,5 11 16,5 18,5 21,5 25 6,5 12 10,5 9,5

Construya un intervalo de confianza de nivel 94% para la media del gasto semanal en ocio de los jóvenes de la ciudad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224

0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

a) ▪ Los sucesos A y B no son independientes porque $p(A) \neq p(A/B)$

▪ $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$

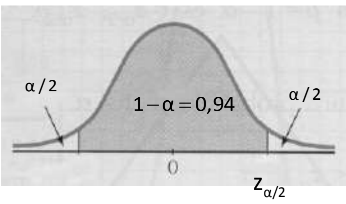
▪ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}84$

b) Puesto que la población de referencia es normal, el intervalo de confianza para la media de la población, μ, es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

En nuestro caso, la desviación típica de la población es $\sigma = 6$ euros y el tamaño de la muestra es de 10 jóvenes.

La media muestral $\overline{x}$ la calculamos: $\overline{x} = \frac{24{,}5+11+16{,}5+18{,}5+21{,}5+25+6{,}5+12+10{,}5+9{,}5}{10} = \frac{155{,}5}{10} = 15{,}55$ €



Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 94%:

$$1-\alpha = 0{,}94 \ \Rightarrow \ \alpha = 1-0{,}94 = 0{,}06 \ \Rightarrow \ \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03 \ \Rightarrow \ 1-0{,}03 = 0{,}97$$

Buscamos en la tabla el valor 0,97 y el más próximo (0,9699) se corresponde con un valor crítico de 1,88.

El intervalo de confianza para la media de la población es entonces:

$$\left(15{,}55 - 1{,}88 \cdot \frac{6}{\sqrt{10}} \ , \ 15{,}55 + 1{,}88 \cdot \frac{6}{\sqrt{10}} \right) = (11{,}98 \ , \ 19{,}12)$$

Es decir, con un nivel de confianza del 94%, la media del gasto semanal en ocio de los jóvenes de la ciudad está entre 11,98 € y 19,12 €.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Un artesano de vidrio va a fabricar figuras de dos tipos durante la próxima semana: cisne y elefante. Cada figura de cisne necesita 0,1 kg de vidrio y 30 minutos de trabajo, mientras que cada figura de elefante necesita 0,2 kg de vidrio y 20 minutos de trabajo. El artesano puede utilizar como máximo 16 kg de vidrio y 40 horas de trabajo. Además, el número de figuras de cisne que fabrique ha de ser menor o igual que el doble de figuras de elefante. Por cada figura de cisne obtiene un beneficio de 10 euros y por cada figura de elefante obtiene un beneficio de 8 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de figuras de cada tipo que tiene que fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

2. *(3,25 puntos)* Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & si\ x < -2 \\ \dfrac{x+b}{x^2+1} & si\ -2 \leq x < 0 \\ x^3-9x^2+24x+4 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) *(1 punto)* Calcular a y b sabiendo que f es continua en todos los puntos

b) *(1,5 puntos)* Calcular el mínimo valor que toma la función f para $x \in [3,8]$.

c) *(0,75 puntos)* Calcular

$$\int_1^2 f(x)dx$$

3. *(3,5 puntos)* En una caseta de feria se puede jugar a lanzar balones a una canasta. El juego consiste en lanzar 2 balones; si se encesta al menos un lanzamiento, entonces se gana un premio. Luis va a jugar una partida: la probabilidad que tiene de encestar cada lanzamiento es de 0,3 y los lanzamientos son independientes.

a) (*0,75 puntos)* ¿Qué probabilidad tiene Luis de encestar los dos lanzamientos?

b) (*1 punto)* ¿Qué probabilidad tiene Luis de ganar el premio?

c) (*1 punto)* Si Luis ha ganado el premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado el primer lanzamiento?

d) (*0,75 puntos)* Sea *A* el suceso "Luis falla el primer lanzamiento" y *B* el suceso "Luis gana el premio". ¿Son los sucesos *A* y *B* independientes?

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. *(3,25 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Calcular $(AB)^2$.

b) *(1 punto)* Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2A + 3X = 4C$.

c) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de D.

2. *(3,25 puntos)* Un programa de televisión emitido ayer duró 120 minutos. La cuota de pantalla que tuvo el programa, medida en porcentaje, fue variando a lo largo del tiempo según la función:

$$C(x) = \frac{1}{200}(-x^2 + 100x + 7500)$$

donde $x \in [0,\ 120]$] es el tiempo (en minutos) transcurrido desde el inicio del programa y C es la cuota de pantalla, en porcentaje.

a) *(0,75 puntos)* Encontrar los valores de tiempo, si los hubo, en los que la cuota de pantalla fue igual a 18.

b) *(1,5 puntos)* ¿En qué instantes de tiempo se alcanzaron la mínima y máxima cuotas de pantalla del programa? ¿Cuáles fueron dichas cuotas?

c) *(1 punto)* Calcular:

$$\int_{10}^{20} C\,(x)dx$$

3. *(3,5 puntos)*

a) *(1 punto)* En un instituto hay 335 estudiantes de Bachillerato, 195 de los cuales están en primer curso y 140 están en segundo curso. Se eligen al azar dos estudiantes distintos de entre estos 335. ¿Cuál es la probabilidad de que estén en el mismo curso?

b) (*2,5 puntos)* En una encuesta sobre hábitos alimentarios en una ciudad se ha tomado una muestra de 300 individuos y se les ha preguntado si son vegetarianos. De los 300 individuos, 72 son vegetarianos y los 228 restantes no lo son. Calcular el intervalo de confianza al 94% para la proporción de personas de la ciudad que son vegetarianas.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de P(Z ≤ k) para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aún así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.
Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizara´ por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error de lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector. Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos.

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)*

Escribir la función objetivo, *0,25 puntos*. Escribir las restricciones, *0,75 puntos*, correspondiendo *0,25 puntos* a cada una de las tres restricciones adicionales a las de no negatividad; no poner las condiciones de no negatividad se penalizará con *0,1 puntos*. Dibujar correctamente la región factible, *0,5 puntos*, y encontrar los puntos extremos, *1 punto* (si encuentran los puntos extremos correctamente sin haber dibujado la región factible se asignan los *1,5 puntos)*. Encontrar el punto óptimo, 0*,5 puntos*; dar el valor del beneficio máximo, *0,25 puntos.*

2. *(3,25 puntos)*

a) Calcular los límites laterales en $x = -2 \; y \; en \; x = 0$: *0,5 puntos*. Calcular *a* y *b*: *0,5 puntos* (*0,25 puntos* cada parámetro).

b) Calcular la derivada: *0,5 puntos*. Encontrar el punto crítico en el intervalo: *0,25 puntos*. Comprobar que es mínimo relativo: *0,25 puntos*. Probar o razonar que es mínimo absoluto, *0,25 puntos*. Encontrar el valor del mínimo: *0,25 puntos*.

c) Se puntúa con *0,5 puntos* calcular la integral indefinida (se resta *0,25* por cada fallo) y con *0,25 puntos* la sustitución de los límites de integración.

3. *(3,5 puntos)*

a) Se asignan *0,75 puntos* si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado).

b) Por poner la fórmula correcta (teorema de la probabilidad total u otra si es correcta): *0,25 puntos*. Sustituir correctamente y calcular: *0,75 puntos*. Si no ponen la fórmula explícitamente pero la aplican bien, se puntúa con *1 punto* el apartado.

c) Por poner la fórmula correcta (teorema de Bayes u otra si es correcta), *0,25 puntos*. Sustituir correctamente y calcular: *0,75 puntos*. Si usan algún valor incorrecto de apartados anteriores, se dará por correcto para este apartado. Si no ponen la fórmula explícitamente pero la aplican bien, se puntúa con *1 punto* el apartado.

d) Se valora con *0,25 puntos* escribir una condición para la independencia y *0,5 puntos* aplicarla correctamente. Si en este apartado usan algún resultado erróneo de apartados anteriores se considerará correcto aquí.

OPCIÓN B

1. *(3,25 puntos)*

a) Calcular *AB 0,5 puntos*. Calcular $(AB)^2$ *0,5 puntos*.

b) Calcular 2*A*, *0,25 puntos*. Calcular 4*C*, *0,25 puntos*. Despejar *X*, *0,25 puntos* y calcularla, *0,25 puntos* (si se dejan 1/3 fuera se les resta *0,1 puntos*).

c) Si lo resuelven por el método de menores: cálculo del determinante: *0,25 puntos*; cálculo de los menores: *0,5 puntos* (se resta 0,25 puntos por cada menor erróneo); asignar signo correcto dependiendo de la paridad: *0,25 puntos*; dividir por el determinante y trasponer la matriz (al final o en el momento de calcular los menores) para llegar a la inversa: *0,25 puntos*. Si se dejan el valor del determinante fuera de la matriz, se les resta *0,1 puntos*. Si lo resuelven por el método de Gauss, un error en la triangularización les resta *0,25 puntos*, 2 errores: *0,75 puntos* y 3 errores les resta:*1,25 puntos*.

2. *(3,25 puntos)*

a) Establecer la ecuación, 0,25 puntos. Resolverla 0,25 puntos. Comprobar que las soluciones no están en el intervalo y razonar que no hubo ningún momento con esa cuota de pantalla, 0,25 puntos.

b) Calcular la derivada 0,25 puntos. Encontrar el punto crítico, 0,25 puntos. Comprobar que es máximo relativo, 0,25 puntos. Comprobar o razonar que es máximo absoluto 0,25 puntos. Razonar que el mínimo absoluto se tiene que encontrar en un extremo del intervalo y calcularlo 0,25 puntos. Dar los valores de las cuotas máximas y mínima 0,25 puntos. Como la función es una parábola, no es necesario que hagan la derivada, en cuyo caso se valorará con 0,25 puntos el razonar que es una parábola: 0,25 puntos encontrar el vértice y el resto de las puntuaciones de manera análoga al caso de la derivada (hasta llegar a 1,5 puntos si lo resuelven correctamente).

c) Se puntúa con *0,25 puntos* la integral indefinida de cada sumando y con *0,25 puntos* la sustitución de los límites de integración.

3. *(3,5 puntos)*

a) Se asignan 0,25 puntos por reconocer que es la suma de dos sumandos, aunque no se resuelva correctamente. Si el apartado se resuelve como si las extracciones fueran con reemplazamiento, se restan 0,25 puntos.

b) Saber que cuantil buscar: 0,5 puntos. Encontrarlo: 0,5 puntos. Escribir correctamente y calcular $\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$: 0,75 puntos. Poner la fórmula del IC y calcularlo: 0,75 puntos.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Un artesano de vidrio va a fabricar figuras de dos tipos durante la próxima semana: cisne y elefante. Cada figura de cisne necesita 0,1 kg de vidrio y 30 minutos de trabajo, mientras que cada figura de elefante necesita 0,2 kg de vidrio y 20 minutos de trabajo. El artesano puede utilizar como máximo 16 kg de vidrio y 40 horas de trabajo. Además, el número de figuras de cisne que fabrique ha de ser menor o igual que el doble de figuras de elefante. Por cada figura de cisne obtiene un beneficio de 10 euros y por cada figura de elefante obtiene un beneficio de 8 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de figuras de cada tipo que tiene que fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

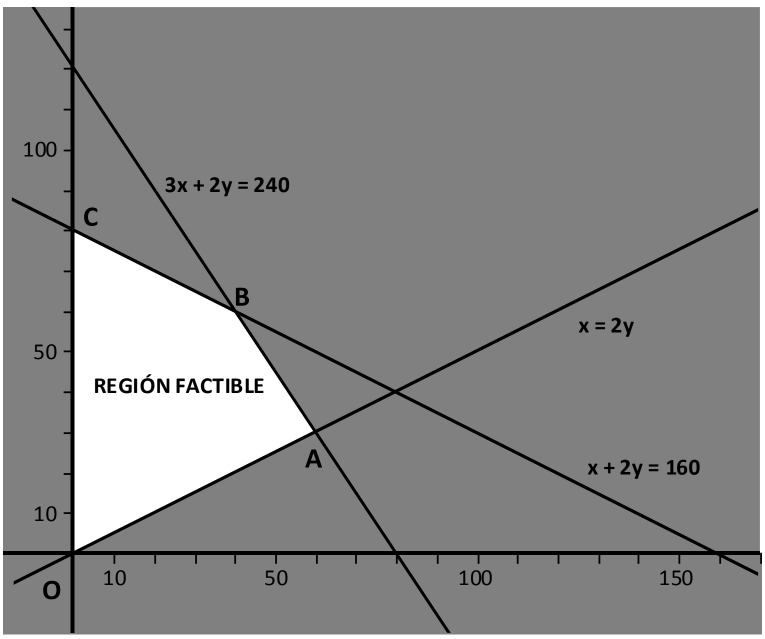
SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

Tipos	Número	Vidrio (kg.)	Trabajo (h.)	Beneficio
Cisne	x	0,1x	$\frac{1}{2}x$	10x
Elefante	y	0,2y	$\frac{1}{3}y$	8y
	$x\ge 0\ ,\ y\ge 0\ ,\ x\le 2y$	$0{,}1x+0{,}2y\le 16$	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\le 40$	$F(x\,,y)=10x+8y$

Así pues, la función objetivo es $F(x\,,y)=10x+8y$ que debe ser máxima y las restricciones son el conjunto de desigualdades $\left\{x\ge 0\ ,\ y\ge 0\ ,\ x\le 2y\ ,\ 0{,}1x+0{,}2y\le 16\ ,\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\le 40\right\}$.

Obtengamos, gráficamente, la región factible (solución del conjunto de restricciones):



▪ La recta x = 0 es el eje de ordenadas. La solución de la inecuación $x\ge 0$ es el semiplano de la derecha (en blanco).

▪ La recta $y=0$ es el eje de abscisas. La solución de la inecuación $y\ge 0$ es el semiplano superior.

▪ La recta $x=2y$ pasa por los puntos $(0\,,0)$ y $(100\,,50)$. La inecuación $x\le 2y$ tiene por solución el semiplano que contiene al punto $(0\,,10)$.

▪ La recta $0{,}1x+0{,}2y=16 \Leftrightarrow x+2y=160$ pasa por los puntos $(0\,,80)$ y $(160\,,0)$. La solución de la inecuación $0{,}1x+0{,}2y\le 16$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

▪ La recta $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=40 \Leftrightarrow 3x+2y=240$

pasa por los puntos $(0,120)$ y $(80,0)$. La solución de la inecuación $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\le 40$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La región factible es entonces el cuadrilátero OABC de la figura. Como la función objetivo se optimiza en alguno de sus vértices, obtengamos las coordenadas de los mismos y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

▪ Vértice $O(0,0) \Rightarrow F(0,0)=0$ €

▪ Vértice A: $\begin{cases} 3x+2y=240 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow 4x=240 \Rightarrow x=60\ ,\ y=30 \Rightarrow A(60,30) \Rightarrow F(60,30)=600+240=840$ €

▪ Vértice B: $\begin{cases} 3x+2y=240 \\ x+2y=160 \end{cases} \Rightarrow 2x=80 \Rightarrow x=40\ ,\ y=60 \Rightarrow B(40,60) \Rightarrow F(40,60)=400+480=880$ €

▪ Vértice $C(0,80) \Rightarrow F(0,80)=0+640=640$ €

Por lo tanto, para maximizar el beneficio debe fabricar 40 cisnes y 60 elefantes. El beneficio máximo será de 880 €.

2. *(3,25 puntos)* Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} ax+1 & si\ x<-2 \\ \dfrac{x+b}{x^2+1} & si -2\le x<0 \\ x^3-9x^2+24x+4 & si\ x\ge 0 \end{cases}$$

a) *(1 punto)* Calcular a y b sabiendo que f es continua en todos los puntos

b) *(1,5 puntos)* Calcular el mínimo valor que toma la función f para $x\in[3,8]$.

c) *(0,75 puntos)* Calcular

$$\int_1^2 f(x)dx$$

SOLUCIÓN.

a) Las tres funciones que definen a $f(x)$ son continuas. Debemos exigir que también lo sea en $x=-2$ y $x=0$. Para ello, debe ser:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to -2}(ax+1)=\lim_{x\to -2}\frac{x+b}{x^2+1} \Rightarrow -2a+1=\frac{-2+b}{5} \quad (*)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x+b}{x^2+1}=\lim_{x\to 0}\left(x^3-9x^2+24x+4\right) \Rightarrow b=4 \quad (*)$$

De las igualdades (*) se sigue: $b=4 \Rightarrow -10a+5=2 \Rightarrow a=\frac{3}{10}$ es decir: $a=\frac{3}{10}\ ,\ b=4$

b) En el intervalo $[3,8]$ la función definida es $f(x)=x^3-9x^2+24x+4$. Veamos si en dicho intervalo la función tiene algún mínimo relativo:

$$f'(x)=3x^2-18x+24=0 \Rightarrow x=\frac{18\pm\sqrt{324-288}}{6}=\frac{18\pm 6}{6}= \begin{cases} 2\notin[3,8] \\ 4\in[3,8] \end{cases}$$

$f''(x)=6x-18 \Rightarrow f''(4)>0 \Rightarrow$ la función tiene un mínimo relativo en $x=4$.

El valor mínimo de la función lo alcanzará en el mínimo relativo o en alguno de los extremos del intervalo:

$f(3)=27-81+72+4=22$, $f(4)=64-144+96+4=20$, $f(8)=512-576+192+4=132$ luego el mínimo valor lo tiene en $(4,20)$.

c) $\int_1^2\left(x^3-9x^2+24x+4\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9x^3}{3}+\frac{24x^2}{2}+4x\right]_1^2=\left[\frac{x^4}{4}-3x^3+12x^2+4x\right]_1^2=(4-24+48+8)-\left(\frac{1}{4}-3+12+4\right)=$

$$= 23 - \frac{1}{4} = \frac{91}{4}$$

3. *(3,5 puntos)* En una caseta de feria se puede jugar a lanzar balones a una canasta. El juego consiste en lanzar 2 balones; si se encesta al menos un lanzamiento, entonces se gana un premio. Luis va a jugar una partida: la probabilidad que tiene de encestar cada lanzamiento es de 0,3 y los lanzamientos son independientes.

a) *(0,75 puntos)* ¿Qué probabilidad tiene Luis de encestar los dos lanzamientos?

b) *(1 punto)* ¿Qué probabilidad tiene Luis de ganar el premio?

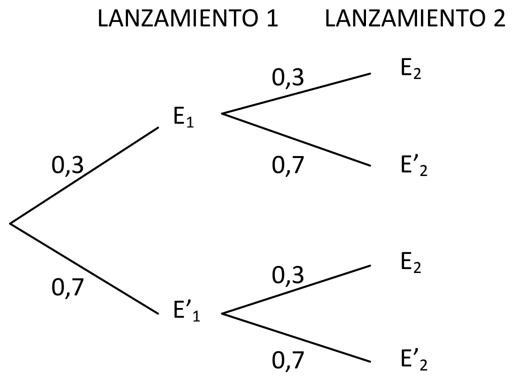
c) *(1 punto)* Si Luis ha ganado el premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado el primer lanzamiento?

d) *(0,75 puntos)* Sea *A* el suceso "Luis falla el primer lanzamiento" y *B* el suceso "Luis gana el premio". ¿Son los sucesos *A* y *B* independientes?

SOLUCIÓN.

Sean E_1 el suceso "encesta el primer lanzamiento" y E_2 el suceso "encesta el segundo lanzamiento". Sea B el suceso "Luis gana el premio".

El diagrama en árbol de la situación es:



a) $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$

b) "Gana el premio" es el suceso contrario a "falla los dos lanzamientos":

$$p(B) = 1 - p(E'_1 \cap E'_2) = 1 - p(E'_1) \cdot p(E'_2) = 1 - 0,7 \cdot 0,7 = 0,51$$

c) $p(E'_1 / B) = \dfrac{p(E'_1 \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(E'_1).p(B/E'_1)}{p(B)} = \dfrac{0,7 \cdot 0,3}{0,51} = \dfrac{0,21}{0,51} = 0,41$

d) El suceso A es el que nosotros hemos denominado E'_1.

A y B son independientes si $p(A/B) = p(A)$ **.** Tenemos:

$p(A/B) = p(E'_1/B) = 0,41$ (apartado c)
$p(A) = p(E'_1) = 0,7$
$\Rightarrow$ los sucesos A y B no son independientes.

OPCIÓN B

1. *(3,25 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Calcular $(AB)^2$.

b) *(1 punto)* Encontrar, si existe, una matriz *X* tal que $2A + 3X = 4C$.

c) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de *D*.

SOLUCIÓN.

a) $AB = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41 & -115 \\ 230 & 350 \end{pmatrix}$

b) $2A + 3X = 4C \Rightarrow 3X = 4C - 2A \Rightarrow X = \frac{1}{3} \cdot (4C - 2A) = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -16 & -6 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 6 & -6 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{20}{3} & 2 & -2 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

c) Veamos si la matriz D tiene inversa:

$$|D|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix}=6-4-12+6=-4\neq 0 \;\Rightarrow\; \exists D^{-1}$$

$$D=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{Adj } D)^*} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 8 \\ 1 & -6 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{Adj } D)^t} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -6 & -6 & -4 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{D^{-1}=(\text{Adj } D)^t/|D|} \begin{pmatrix} -3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

*Adjuntos:

$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3$, $A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}=-6$, $A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}=8$, $A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1$, $A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}=-6$,

$A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}=4$, $A_{31}=\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2$, $A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4$, $A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=4$

Luego: $D^{-1}=\begin{pmatrix} -3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. *(3,25 puntos)* Un programa de televisión emitido ayer duró 120 minutos. La cuota de pantalla que tuvo el programa, medida en porcentaje, fue variando a lo largo del tiempo según la función:

$$C(x)=\frac{1}{200}(-x^2+100x+7500)$$

donde $x\in[0,\ 120]]$ es el tiempo (en minutos) transcurrido desde el inicio del programa y C es la cuota de pantalla, en porcentaje.

a) *(0,75 puntos)* Encontrar los valores de tiempo, si los hubo, en los que la cuota de pantalla fue igual a 18.

b) *(1,5 puntos)* ¿En qué instantes de tiempo se alcanzaron la mínima y máxima cuotas de pantalla del programa? ¿Cuáles fueron dichas cuotas?

c) *(1 punto)* Calcular:

$$\int_{10}^{20} C(x)dx$$

SOLUCIÓN.

a) $C(x)=\frac{1}{200}\left(-x^2+100x+7500\right)=18 \;\Rightarrow\; -x^2+100x+7500=3600 \;\Rightarrow\; -x^2+100x+3900=0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x=\frac{-100\pm\sqrt{10000+15600}}{-2}=\frac{-100\pm 160}{-2}=\begin{cases} -40 \\ 130 \end{cases}$ ambos valores no son válidos (uno por negativo y el otro por ser mayor que 120). Por tanto no hubo ningún momento en que la cuota de pantalla fuera del 18%.

b) $C'(x)=\frac{1}{200}(-2x+100)=0 \;\Rightarrow\; x=50$ $\qquad C''(x)=\frac{1}{200}(-2)<0 \;\Rightarrow\; x=50$ es un máximo relativo

Veamos cuál es el valor de la función en los extremos del intervalo $[0\,,120]$ y en $x=50$:

$C(0)=\frac{1}{200}(7500)=37{,}5\ \%$; $C(120)=\frac{1}{200}(-14400+12000+7500)=25{,}5\ \%$;

$C(50)=\frac{1}{200}(-2500+5000+7500)=50\ \%$

Luego la mínima cuota de pantalla se produjo en el minuto 120 y fue del 25,5% y la máxima en el minuto 50 con un 50%.

c) $\int_{10}^{20} C(x)\,dx=\int_{10}^{20}\frac{1}{200}\left(-x^2+100x+7500\right)dx=\frac{1}{200}\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{100x^2}{2}+7500x\right]_{10}^{20}=$

$$=\frac{1}{200}\left[\left(-\frac{8000}{3}+20000+150000\right)-\left(-\frac{1000}{3}+5000+75000\right)\right]=\frac{90000-\frac{7000}{3}}{200}=\frac{263000}{600}=\frac{1315}{3}\simeq 438,3$$

3. *(3,5 puntos)*

a) *(1 punto)* En un instituto hay 335 estudiantes de Bachillerato, 195 de los cuales están en primer curso y 140 están en segundo curso. Se eligen al azar dos estudiantes distintos de entre estos 335. ¿Cuál es la probabilidad de que estén en el mismo curso?

b) *(2,5 puntos)* En una encuesta sobre hábitos alimentarios en una ciudad se ha tomado una muestra de 300 individuos y se les ha preguntado si son vegetarianos. De los 300 individuos, 72 son vegetarianos y los 228 restantes no lo son. Calcular el intervalo de confianza al 94% para la proporción de personas de la ciudad que son vegetarianas.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

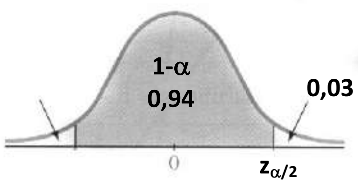
SOLUCIÓN

a) Sean P_1 el suceso "el primer estudiante es de primer curso", P_2 el suceso "el segundo estudiante es de primer curso", S_1 el suceso "el primer estudiante es de segundo curso" y S_2 el suceso "el segundo estudiante es de segundo curso". Se tiene:

$$p\left[(P_1\cap P_2)\cup(S_1\cap S_2)\right]=p(P_1\cap P_2)+p(S_1\cap S_2)=p(P_1)\cdot p(P_2/P_1)+p(S_1)\cdot p(S_2/S_1)=\frac{195}{335}\cdot\frac{194}{334}+\frac{140}{335}\cdot\frac{139}{334}=$$

$$=\frac{37830}{111890}+\frac{19460}{111890}=\frac{57290}{111890}=0,51$$

b) Calculemos el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 94%:



$$1-\alpha=0,94 \;\Rightarrow\; \alpha=0,06 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2}=0,03 \;\Rightarrow\; 1-\frac{\alpha}{2}=1-0,03=0,97$$

Buscamos en la tabla el valor más aproximado a 0,97 (0,9699) que se corresponde con un valor crítico $z_{\alpha/2}=1,88$.

La proporción de personas vegetarianas en la muestra es: $pr = \frac{72}{300} = 0,24$.

El error máximo admisible o cota de error es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\left(1-pr\right)}{n}} = 1,88 \cdot \sqrt{\frac{0,24 \cdot 0,76}{300}} = 0,046$

El intervalo de confianza pedido es entonces: $\left(0,24 - 0,046\,;\, 0,24 + 0,046\right) = \left(0,194\,;\, 0,286\right)$

Es decir, con un nivel de confianza del 94% hay entre un 19,4% y un 28,6% de personas vegetarianas en la ciudad.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (*3,25 puntos*) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

a) (*2 puntos*) ¿Para qué valores de x e y se tiene *AB* = *C?*

b) (*1,25 puntos*) Calcular, si existe, la matriz inversa de *C*.

2. (*3,25 puntos*) El precio (en euros) de una acción de una compañía entre las nueve y las diez de la mañana ha venido dado por la siguiente expresión

$$P(x)=12-\frac{2x-8}{x^2+4x+4}$$

donde $x\in[0,60]$ es el tiempo en minutos desde las nueve de la mañana. Calcular:

a) (*0,25 puntos*) El precio de la acción a las nueve y media.

b) (*1 punto*) Entre las nueve y las diez de la mañana, ¿durante cuánto tiempo la acción ha tenido un precio mayor que 12 euros?

c) (*2 puntos*) El máximo y mínimo precio que ha alcanzado la acción entre las nueve y las diez de la mañana.

3. (*3,5 puntos*) Se va a realizar un estudio de mercado para estimar la proporción de consumidores que conoce una determinada marca de yogures. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple de consumidores, se va a preguntar a cada uno si conoce la marca y a partir de los resultados se construirá el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 91%.

a) (*2 puntos*) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,08 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?

b) (*1,5 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño de 175 consumidores; les preguntamos y un total de 126 responden que conocen la marca. Calcular el intervalo de confianza al 91% para la proporción de consumidores que conocen la marca.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el valor del beneficio en ese caso?

2. (*3,25 puntos*)

   a) (*2 puntos*) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un máximo relativo en $x = -2$ con valor $f(-2) = -6$.

   b) (*1,25 puntos*) Calcular:

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx$$

3. (*3,5 puntos*) Según los datos del Instituto Nacional de Estadística, el 49,3% de la población aragonesa son hombres y el 50,7% son mujeres. Del total de hombres, un 80,9% tienen menos de 65 años; del total de mujeres, un 75,9% tienen menos de 65 años.

   a) (*0,75 puntos*) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de menos de 65 años?

   b) (*1 punto*) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 65 años?

   c) (*1 punto*) Elegimos una persona de Aragón de entre las que tienen menos de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

   d) (*0,75 puntos*) Si se eligen al azar (con reemplazamiento) tres personas de Aragón, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las tres sea mujer?

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES:

- En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aún así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.
- Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector. Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con *0,1 puntos*.

OPCIÓN A

1. (*3,25 puntos*)

a) (*2 puntos*) Calcular *AB*, *1 punto*. Plantear el sistema de ecuaciones, *0,5 puntos*. Resolverlo, *0,5 puntos.*

b) (*1,25 puntos*) Si lo resuelven por el método de menores, se valora con *0,5 puntos* el cálculo del determinante. No poner algún signo correctamente se penaliza con *0,5 puntos*. Si se dejan el valor del determinante fuera de la matriz, se les resta *0,1 puntos*. Si lo resuelven por el método de Gauss, un error en la triangularización resta *0,5 puntos* y 2 errores restan *1,25 puntos*.

2. (*3,25 puntos*)

a) (*0,25 puntos*) En este apartado no se asignan puntuaciones intermedias.

b) (*1 punto*) Encontrar el punto en el que el precio es igual a 12 euros, *0,5 puntos*, y obtener cuáles son los valores de x para los que el precio ha sido mayor que 12 euros, *0,25 puntos*. Concluir que el tiempo pedido ha sido de 4 minutos, *0,25 puntos*.

c) *(2 puntos*) Calcular la derivada *0,5 puntos*. Encontrar el punto crítico en el intervalo, *0,25 puntos*. Comprobar que es mínimo relativo, *0,25 puntos*. Comprobar o razonar que es mínimo absoluto *0,25 puntos*. Razonar que el máximo absoluto se tiene que encontrar en un extremo del intervalo y calcularlo *0,5 puntos*. Dar los valores de los precios máximo y mínimo *0,25 puntos*.

3. (*3,5 puntos*)

a) (*2 puntos*) Saber qué cuantil buscar, *0,5 puntos*. Encontrarlo, *0,25 puntos*. Poner la fórmula del error, *0,5 puntos*. Sustituir y calcular, *0,75 puntos* (si se deja el valor *n* no entero o se toma el anterior en vez del posterior, se restan *0,1 puntos*). Si el cálculo se realiza tomando el error (semiamplitud) como 0,08 en vez de 0,04 se restan *0,5 puntos*.

b) *(1,5 punto*) Calcular $\hat{p}$, *0,25 puntos*. Calcular el error (semiamplitud del intervalo), *0,75 puntos*; en esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado a), aunque no lo sea. Si se usa en la estimación de la desviación típica un valor distinto a la proporción muestral, se restarán *0,25 puntos*. Poner la fórmula del IC y calcularlo, *0,5 puntos*.

OPCIÓN B AL DORSO

<u>OPCIÓN B</u>

1. (*3,25 puntos*) Escribir la función objetivo, *0,25 puntos*. Escribir las restricciones, *0,75 puntos* (*0,25* por la correspondiente a la madera, *0,25* por la de las horas de trabajo y *0,25* por las cotas inferiores). Dibujar correctamente la región factible, *0,5 puntos* y encontrar los puntos extremos, *1 punto* (si se encuentran los puntos extremos correctamente sin haber dibujado la región factible se asignan los *1,5 puntos*). Evaluar la función objetivo en cada uno de los puntos extremos y encontrar el de beneficio máximo, *0,5 puntos*. Dar el valor del beneficio máximo, *0,25 puntos*.

2. *(3,25 puntos*)
   a) (*2 puntos*) Plantear la ecuación correspondiente a sustituir x por -2 en la función, *0,25 puntos*. Hacer la derivada, *0,5 puntos*; plantear la ecuación sustituyendo x por -2 en la derivada, *0,25 puntos*. Resolver el sistema, *0,75 puntos*. Comprobar que, en efecto, $x = -2$ es un máximo relativo, *0,25 puntos*.
   b) (*1,25 puntos*) Se puntúa con *0,5 puntos* la integral indefinida de cada sumando y con *0,25 puntos* la sustitución de los límites de integración.

3. (*3,5 puntos*)
   a) (*0,75 puntos*) Se asignan *0,75 puntos* si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado)
   b) (*1 punto*) Por poner la fórmula correcta (teorema de la probabilidad total u otra si es correcta), *0,25 puntos*. Sustituir correctamente y calcular, *0,75 puntos*. Si no ponen la fórmula explícitamente pero la aplican bien, se puntúa con *1 punto* el apartado.
   c) (*1 punto*) Por poner la fórmula correcta (teorema de Bayes u otra si es correcta), *0,25 puntos*. Sustituir correctamente y calcular, *0,75 puntos*. Si usan algún valor incorrecto de apartados anteriores, se dará por correcto para este apartado. Si no ponen la fórmula explícitamente pero la aplican bien, se puntúa con *1 punto* el apartado.
   d) (*0,75 puntos*). Si lo hacen pasando al complementario: *0,25 puntos* por pasar correctamente al complementario y *0,5 puntos* por calcular la probabilidad pedida. Si lo hacen directamente, se restan *0,25 puntos* por cada combinación que se dejen o de la que no calculen la probabilidad correctamente.

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (*3,25 puntos*) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4\end{pmatrix}$$

a) (*2 puntos*) ¿Para qué valores de x e y se tiene $AB = C$?
b) (*1,25 puntos*) Calcular, si existe, la matriz inversa de C.

SOLUCIÓN

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x-1-2y & x-4y \\ -9 & 4\end{pmatrix}$

$A\cdot B=C \iff \begin{pmatrix} -2x-1-2y & x-4y \\ -9 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y-1=2 \\ x-4y=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=3 \\ 2x-8y=-6\end{cases} \Rightarrow -10y=-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\dfrac{3}{10} \Rightarrow x=-3+4y=-3+\dfrac{12}{10}=-\dfrac{18}{10}=-\dfrac{9}{5}$ es decir: $x=-\dfrac{9}{5}$, $y=\dfrac{3}{10}$

b) $|C|=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4\end{vmatrix}=8-27=-19\neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$

$C=c_{ij}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adjunta}} (C_{ij})=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta}} (C_{ji})=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}} C^{-1}=\dfrac{(C_{ji})}{|C|}=\begin{pmatrix} -4/19 & -3/19 \\ -9/19 & -2/19\end{pmatrix}$

2. (*3,25 puntos*) El precio (en euros) de una acción de una compañía entre las nueve y las diez de la mañana ha venido dado por la siguiente expresión

$$P(x)=12-\frac{2x-8}{x^2+4x+4}$$

donde $x\in[0,60]$ es el tiempo en minutos desde las nueve de la mañana. Calcular:
a) (*0,25 puntos*) El precio de la acción a las nueve y media.
b) (*1 punto*) Entre las nueve y las diez de la mañana, ¿durante cuánto tiempo la acción ha tenido un precio mayor que 12 euros?
c) (*2 puntos*) El máximo y mínimo precio que ha alcanzado la acción entre las nueve y las diez de la mañana.

SOLUCIÓN

a) En este caso $x=30 \Rightarrow P(30)=12-\dfrac{60-8}{900+120+4}=12-\dfrac{52}{1024}=11{,}95$ €

b) $12-\dfrac{2x-8}{x^2+4x+4}>12 \iff \dfrac{2(x-4)}{(x+2)^2}<0 \Rightarrow x-4<0 \Rightarrow x<4$ luego entre las 9:00 h y las 9:04 h.

c) $P'(x)=-\dfrac{2(x^2+4x+4)-(2x-8)(2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}=-\dfrac{2x^2+8x+8-4x^2-8x+16x+32}{(x^2+4x+4)^2}=\dfrac{2x^2-16x-40}{(x^2+4x+4)^2}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2-16x-40=0 \Rightarrow x^2-8x-20=0 \Rightarrow x=\dfrac{8\pm\sqrt{64+80}}{2}=\dfrac{8\pm\sqrt{144}}{2}=\dfrac{8\pm 12}{2}=\begin{cases} x=-2 \notin[0,60] \\ x=10\end{cases}$

$$P''(x)=\frac{(4x-16)\left(x^2+4x+4\right)^2-\left(2x^2-16x-40\right)2\left(x^2+4x+4\right)(2x+4)}{\left(x^2+4x+4\right)^4} \quad\Rightarrow\quad P''(10)>0 \quad\Rightarrow\quad x=10 \ \text{ es un mínimo}$$

El precio mínimo lo alcanza a las 9:10 horas con un valor de $P(10)=12-\frac{20-8}{100+40+4}=12-\frac{12}{144}=11{,}92$ €

El precio máximo lo alcanza en alguno de los extremos del intervalo $[0\,,60]$:

$$\left.\begin{array}{l} P(0)=12-\frac{-8}{4}=14 \text{ €} \\ P(60)=12-\frac{120-8}{3600+240+4}=11{,}97 \text{ €} \end{array}\right| \quad\Rightarrow$$ el valor máximo lo alcanza a las 9:00 horas con un valor de 14 euros.

3. (*3,5 puntos*) Se va a realizar un estudio de mercado para estimar la proporción de consumidores que conoce una determinada marca de yogures. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple de consumidores, se va a preguntar a cada uno si conoce la marca y a partir de los resultados se construirá el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 91%.

a) (*2 puntos*) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,08 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?

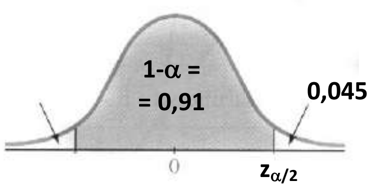
b) (*1,5 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño de 175 consumidores; les preguntamos y un total de 126 responden que conocen la marca. Calcular el intervalo de confianza al 91% para la proporción de consumidores que conocen la marca.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

Calculemos el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 91%:



$$1-\alpha=0{,}91 \quad\Rightarrow\quad \alpha=0{,}09 \quad\Rightarrow\quad \frac{\alpha}{2}=0{,}045 \quad\Rightarrow\quad 1-\frac{\alpha}{2}=1-0{,}045=0{,}955$$

Buscamos en la tabla el valor más aproximado a 0,955 (0,9554) que se corresponde con un valor crítico $z_{\alpha/2}=1{,}70$.

a) Si el intervalo de confianza ha de tener una amplitud no mayor de 0,08, el error máximo admisible E debe ser de 0,04. Al no tener datos previos, consideramos que la proporción de conocedores y de no conocedores de la marca de yogures es del 50%. Tenemos:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} \Rightarrow 0,04 = 1,70 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} \Rightarrow \left(\frac{0,04}{1,70}\right)^2 = \frac{0,25}{n} \Rightarrow n = \frac{0,25}{\frac{0,0016}{2,89}} = 451,56$$

Luego debemos escoger una muestra de 452 consumidores.

b) Ahora $n = 175$, $pr = \frac{126}{175} = 72\% = 0,72$.

El error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} = 1,70 \cdot \sqrt{\frac{0,72 \cdot 0,28}{175}} = 0,0577$

y el intervalo de confianza: $(0,72 - 0,0577 \ ; \ 0,72 + 0,0577) = (0,6623 \ ; \ 0,7777)$

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el valor del beneficio en ese caso?

SOLUCIÓN

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

MUEBLES	NÚMERO	KILOS DE MADERA	HORAS DE TRABAJO	BENEFICIO
Sillas	x	4x	x	70x
Taburetes	y	2y	3y	50y
Condiciones:	$x \geq 6$, $y \geq 4$	$4x + 2y \leq 72$	$x + 3y \leq 48$	$F(x,y) = 70x + 50y$

La función objetivo es $F(x,y) = 70x + 50y$ (beneficio) que debe ser máxima.

El conjunto de restricciones a las que debe estar sometida la solución son:

$\{ x \geq 6 \ , \ y \geq 4 \ , \ 4x + 2y \leq 72 \ , \ x + 3y \leq 48 \}$

Obtengamos, gráficamente, la región factible (solución del conjunto de restricciones):

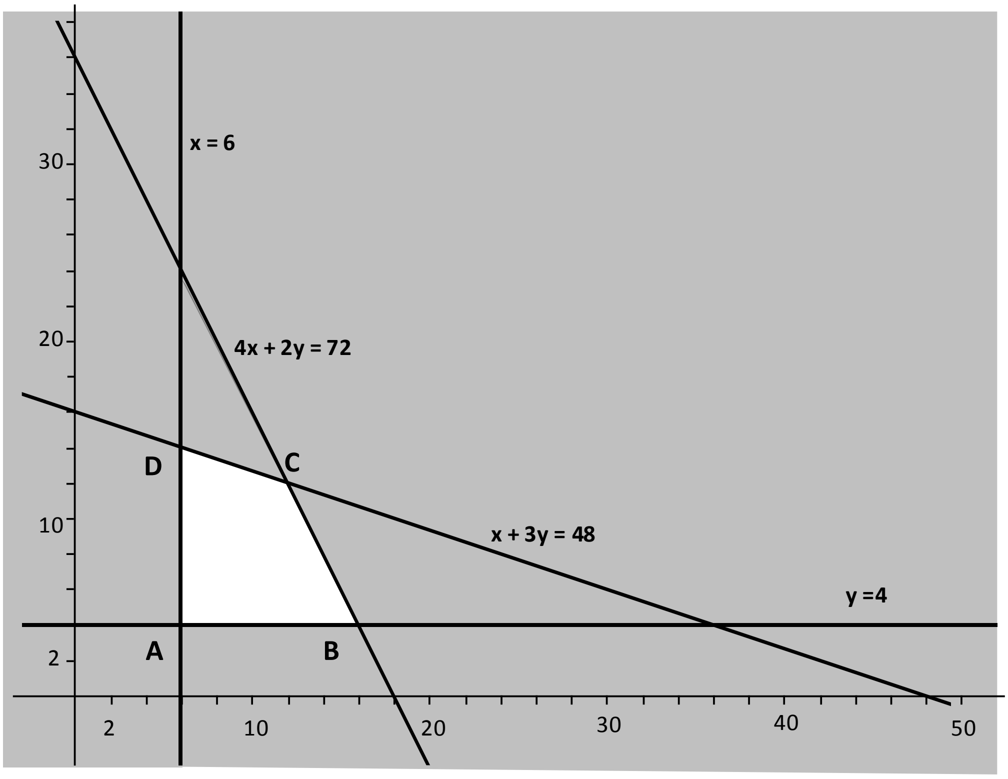
- La recta $x = 6$ es paralela al eje de ordenadas y la inecuación $x \geq 6$ tiene por solución el semiplano de su derecha (en blanco).

- La recta $y = 4$ es paralela al eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 4$ es el semiplano superior (en blanco).

- La recta $4x + 2y = 72$ pasa por los puntos $(18,0)$ y $(0,36)$. La solución de la inecuación $4x + 2y \leq 72$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

- La recta $x + 3y = 48$ pasa por $(48,0)$ y $(0,16)$. La inecuación $x + 3y \leq 48$ tiene por solución el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

La región factible (en blanco) es el cuadrilátero de vértices A, B, C, y D. La función objetivo se optimiza en alguno de sus vértices. Obtengamos las coordenadas de los vértices y el valor de la función objetivo $F(x,y) = 70x + 50y$ en ellos:



Vértice A: $A(6\,,4) \Rightarrow F(6\,,4)=70\cdot 6+50\cdot 4=620$

Vértice B: $\begin{cases} y=4 \\ 4x+2y=72 \end{cases} \Rightarrow 4x+8=72 \Rightarrow x=16 \Rightarrow B(16\,,4) \Rightarrow F(16\,,4)=1320$

Vértice C: $\begin{cases} 4x+2y=72 \\ x+3y=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-y=-36 \\ 2x+6y=96 \end{cases} \Rightarrow 5y=60 \Rightarrow y=12 \Rightarrow x=48-3\cdot 12=12 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(12\,,12) \Rightarrow F(12\,,12)=70\cdot 12+50\cdot 12=1440$

Vértice D: $\begin{cases} x=6 \\ x+3y=48 \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{48-6}{3}=14 \Rightarrow D(6\,,14) \Rightarrow F(6\,,14)=70\cdot 6+50\cdot 14=1120$

Por lo tanto, para maximizar el beneficio, que será de 1440 €, debe fabricar 12 sillas y 12 taburetes.

2. (*3,25 puntos*)

a) (*2 puntos*) Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+3x-6$, con $x\in\mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un máximo relativo en $x=-2$ con valor $f(-2)=-6$.

b) (*1,25 puntos*) Calcular:

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}}-3xe^{-4x^2}\right)dx$$

SOLUCIÓN

a) $f(x)=ax^3+bx^2+3x-6 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+3$

$x=-2$ máximo relativo de la función $\Rightarrow f'(-2)=0 \Rightarrow 12a-4b+3=0 \Rightarrow 12a-4b=-3$ (*)

$f(-2)=-6 \Rightarrow -8a+4b-6-6=-6 \Rightarrow -8a+4b=6$ (*)

De las ecuaciones (*): $4a=3 \Rightarrow a=\dfrac{3}{4} \Rightarrow b=\dfrac{6+6}{4}=3$

b) Calculemos una primitiva de la función:

$$\int\left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}}-3x\cdot e^{-4x^2}\right)dx=\frac{5\cdot 2}{16}\int\frac{16x}{2\sqrt{8x^2+1}}\,dx-\frac{3}{-8}\int -8x\cdot e^{-4x^2}=\frac{5}{8}\cdot\sqrt{8x^2+1}+\frac{3}{8}\cdot e^{-4x^2}$$

Luego: $\int_0^1\left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}}-3x\cdot e^{-4x^2}\right)dx=\left[\frac{5}{8}\cdot\sqrt{8x^2+1}+\frac{3}{8}\cdot e^{-4x^2}\right]_0^1=\left(\frac{15}{8}+\frac{3}{8}\cdot e^{-4}\right)-\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{8}+\frac{3}{8\cdot e^4}\simeq 0{,}88$

3. (*3,5 puntos*) Según los datos del Instituto Nacional de Estadística, el 49,3% de la población aragonesa son hombres y el 50,7% son mujeres. Del total de hombres, un 80,9% tienen menos de 65 años; del total de mujeres, un 75,9% tienen menos de 65 años.

a) (*0,75 puntos*) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de menos de 65 años?

b) (*1 punto*) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 65 años?

c) (*1 punto*) Elegimos una persona de Aragón de entre las que tienen menos de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

d) (*0,75 puntos*) Si se eligen al azar (con reemplazamiento) tres personas de Aragón, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las tres sea mujer?

SOLUCIÓN

Sea H el suceso “la persona es un hombre”, M el suceso “la persona es una mujer”, A el suceso “la persona tiene menos de 65 años” y B el suceso “la persona tiene 65 años o más”

Organicemos los datos en una tabla de contingencia. Para un total de 100 personas, hay 49,3 hombres y 50,7 mujeres. Entre los hombres hay 49,3×0,809 = 39,8837 menores de 65 años y entre las mujeres hay 50,7×0,759 = 38,4813 menores de 65 años.

	A	**B**	**TOTAL**
HOMBRES (H)	39,8837	9,4163	49,3
MUJERES (M)	38,4813	12,2187	50,7
TOTAL	78,365	21,635	100

a) $P(M\cap A)=\frac{38{,}4813}{100}=0{,}384813$

b) $P(A)=\frac{78{,}365}{100}=0{,}78365$

c) $P(M/A)=\frac{38{,}4813}{78{,}365}=0{,}49$

d) El suceso “al menos una de las tres personas sea mujer” es el suceso contrario al suceso “ninguna de las tres personas es mujer”. Como además hay reposición, los tres sucesos son independientes.

$$P\left(\overline{M_1}\cap\overline{M_2}\cap\overline{M_3}\right)=P\left(\overline{M_1}\right)\cdot P\left(\overline{M_2}\right)\cdot P\left(\overline{M_3}\right)=\frac{49{,}3}{100}\cdot\frac{49{,}3}{100}\cdot\frac{49{,}3}{100}=0{,}1198\quad\Rightarrow\quad P=1-0{,}1198=0{,}8802$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2019

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. **En cada pregunta se señala la puntuación máxima.**

OPCIÓN A

1. (*3,25 puntos*) Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B. El lote A incluye 1 kilo de manzanas, 5 kilos de naranjas y 1 kilo de peras, mientras que el lote B incluye 4 kilos de manzanas, 2 kilos de naranjas y 1 kilo de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener, al menos, 24 kilos de manzanas, 30 kilos de naranjas y 12 kilos de peras, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso?

2. (*3,25 puntos*) Dada la función

$$f(x) = \frac{4\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} + 5}{2\mathrm{x} + 1}$$

Calcular:

a) (*0,25 puntos*) Dominio de f.

b) (*0,75 puntos*) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) = 5$?

c) (*1 punto*) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) (*1,25 puntos*) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

3. (*3,5 puntos*) Se sabe que el peso de las manzanas de un agricultor tiene distribución normal con desviación típica igual a 20 g. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas del agricultor.

a) (*2 puntos*) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 93% tenga una amplitud menor o igual que 8 g.

b) (*1,5 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño 12. Pesamos las manzanas y obtenemos los siguientes resultados (en gramos)

178, 221, 196, 231, 210, 168, 203, 186, 196, 214, 230, 224

Calcular un intervalo de confianza al 93% para la media del peso de las manzanas del agricultor.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

OPCIÓN B AL DORSO

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Un hotel tiene habitaciones individuales (para una persona), dobles (para dos personas) y familiares (para cuatro personas). El hotel tiene un total de 144 habitaciones con una capacidad total de 312 personas; además, el número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de habitaciones de cada tipo que tiene el hotel.

2. (*3,25 puntos*)

   a) (*2 puntos*) Tenemos 4000 euros para invertir en dos fondos M y N. Sea x la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo M e y la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo N; así, se cumple $x + y = 4$. El beneficio que se obtiene, en euros, viene dado por

   $$B = 10(2x+1)^2 y$$

   Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en cada fondo para obtener el máximo beneficio y cuál será ese beneficio máximo.

   b) (*1,25 puntos*) Calcular

   $$\int_0^1 \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}} \right) dx$$

3. (*3,5 puntos*) Una empresa tiene 64 trabajadores repartidos en tres departamentos: Administración, Producción y Ventas. Se ha hecho un estudio sobre si los trabajadores saben inglés o no, con los siguientes resultados:

	Administración	Producción	Ventas
Sabe inglés	12	30	6
No sabe inglés	4	11	1

   a) (*1 punto*) Elegimos al azar un trabajador de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

   b) (*1 punto*) Elegimos al azar un trabajador de entre los que saben inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea del departamento de Ventas?

   c) (*0,75 puntos*) Elegimos al azar un trabajador de la empresa. Sea *A* el suceso “el trabajador es del departamento de Administración” y *B* el suceso “el trabajador sabe inglés”. ¿Son los sucesos *A* y *B* independientes?

   d) (*0,75 puntos*) Elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres trabajadores de la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo departamento?

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES:

- En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aún así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.
- Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector. Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con *0,1 puntos*.

OPCIÓN A

1. (*3,25 puntos*) Escribir la función objetivo, *0,25 puntos*. Escribir las restricciones, *0,75 puntos*, correspondiendo *0,25 puntos* a cada una de las tres restricciones adicionales a las de no negatividad; no poner las condiciones de no negatividad se penalizará con *0,1 puntos*. Dibujar correctamente la región factible, *0,5 puntos* y encontrar los puntos extremos, *0,75 puntos* (si encuentran los puntos extremos correctamente sin haber dibujado la región factible se asignan los *1,25 puntos*). Evaluar la función objetivo en cada uno de los puntos extremos y encontrar el de coste mínimo, *0,5 puntos* y probar o razonar que aunque la región factible no es acotada, el problema tiene solución, *0,25 puntos*. Dar el valor del coste mínimo, *0,25 puntos*.

2. (*3,25 puntos*)
   a) (*0,25 puntos*) Se puntúa con *0,25 puntos* si se responde bien. No se asignan puntuaciones intermedias.
   b) (*75 puntos*) Escribir la ecuación y llegar a una ecuación de segundo grado, *0,25 puntos*. Resolverla, *0,5 puntos*.
   c) (*1 punto*) Asíntota vertical, *0,25 puntos*. Asíntota horizontal, *0,25 puntos*. Asíntota oblicua, *0,5 puntos* (*0,25* por cada parámetro)
   d) *(1,25 puntos)* Calcular la derivada, *0,5 puntos*. Factorizar el numerador, *0,25 puntos*. Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, *0,5 puntos*, rebajándose *0,25* por un intervalo incorrecto y *0,5 puntos* por más de un intervalo incorrecto. Si al expresar la solución no se excluye el punto $x = -1/2$, se restan *0,1 puntos*.

3. (*3,5 puntos*)
   a) (*2 puntos*) Saber qué cuantil buscar, *0,5 puntos*. Encontrarlo, *0,25 puntos*. Poner la fórmula del error, *0,5 puntos*. Sustituir y calcular, *0,75 puntos* (si se deja el valor *n* no entero o se toma el anterior en vez del posterior, se restan *0,1 puntos*). Si el cálculo se realiza tomando el error (semiamplitud) como 8 g en vez de 4 g, se restan *0,5 puntos*.
   b) (*1,5 punto*) Calcular la media de los datos, *0,5 puntos*. Calcular el error (semiamplitud del intervalo), *0,5 puntos*; en esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado a), aunque no lo sea. Poner la fórmula del IC y calcularlo, *0,5 puntos*.

<u>OPCIÓN B</u>

1. (*3,25 puntos*) Plantear las ecuaciones, *1,25 puntos* (*0,25 puntos* por la ecuación $x + y + z = 144$ y *0,5 puntos* por cada una de las otras dos). Se puntúa con *2 puntos* la resolución del sistema (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un sistema mucho más sencillo que el original). Si se hace triangularizando la triangularización vale *1,25 puntos* (un error en la triangularización resta *0,75 puntos* y dos errores *1,25 puntos*) y despejar los valores, *0,75 puntos* (*0,25 puntos* por cada uno). Si se hace por Cramer, poner la fórmula adecuada (o aplicarla aun sin escribirla) vale *0,5 puntos* y calcular los determinantes, *1,5 puntos* (se restan *0,5 puntos* por cada determinante erróneo).

2. (*3,25 puntos*)
   a) (*2 puntos*) Sustituir correctamente x (ó y) *0,25 puntos*. Derivar *0,5 puntos*. Encontrar el punto crítico en el intervalo, *0,25 puntos*; deducir que es máximo relativo, *0,25 puntos*. Razonar o comprobar que es máximo absoluto, *0,25 puntos*. Encontrar el valor de la variable no calculada (x ó y) *0,25 puntos*. Dar el valor máximo, *0,25 puntos*.
   b) (*1,25 puntos*) Se puntúa con *0,5 puntos* la integral indefinida de cada sumando y con *0,25 puntos* la sustitución de los límites de integración.

3. (*3,5 puntos*)
   a) (*1 punto*) Poner la fórmula correcta (teorema de la probabilidad total u otra si es correcta), *0,25 puntos*. Sustituir correctamente y calcular, *0,75 puntos*. Si no ponen la fórmula explícitamente pero la aplican bien, se puntúa con *1 punto* el apartado.
   b) (*1 punto*) Por poner la fórmula correcta (teorema de Bayes u otra si es correcta), *0,25 puntos*. Sustituir correctamente y calcular, *0,75 puntos*. Si usan algún valor incorrecto del apartado anterior, se dará por correcto para este apartado. Si no ponen la fórmula explícitamente pero la aplican bien, se puntúa con *1 punto* el apartado.
   c) (*0,75 puntos*) Se valora con *0,25 puntos* poner algún criterio de independencia y *0,5 puntos* aplicarlo correctamente.
   d) (*0,75 puntos*) Se asignan *0,25 puntos* por reconocer que es la suma de tres sumandos, aunque no se resuelva correctamente. Si el apartado se resuelve como si las extracciones fueran con reemplazo, se restan *0,25 puntos*.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2019
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (*3,25 puntos*) Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B. El lote A incluye 1 kilo de manzanas, 5 kilos de naranjas y 1 kilo de peras, mientras que el lote B incluye 4 kilos de manzanas, 2 kilos de naranjas y 1 kilo de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener, al menos, 24 kilos de manzanas, 30 kilos de naranjas y 12 kilos de peras, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso?

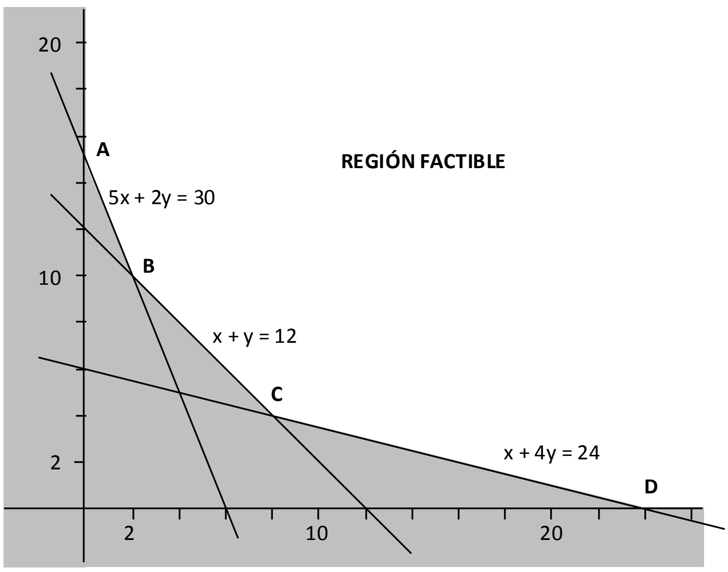
SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

Lotes	Número	Manzanas (kg.)	Naranjas (kg.)	Peras (kg.)	Coste
A	x	x	5x	X	8x
B	y	4y	2y	y	10y
	$x\geq 0\ ,\ y\geq 0$	$x+4y\geq 24$	$5x+2y\geq 30$	$x+y\geq 12$	$F(x\,,y)=8x+10y$

Así pues, la función objetivo es $F(x\,,y)=8x+10y$ que debe ser mínima y las restricciones son el conjunto de desigualdades $\{\,x\geq 0\ ,\ y\geq 0\ ,\ x+4y\geq 24\ ,\ 5x+2y\geq 30\ ,\ x+y\geq 12\,\}$.

Obtengamos, gráficamente, la región factible (solución del conjunto de restricciones):



▪ La recta x = 0 es el eje de ordenadas. La solución de la inecuación $x\geq 0$ es el semiplano de la derecha (en blanco).

▪ La recta $y=0$ es el eje de abscisas. La solución de la inecuación $y\geq 0$ es el semiplano superior.

▪ La recta $x+4y=24$ pasa por los puntos $(0\,,6)$ y $(24\,,0)$. La inecuación $x+4y\geq 24$ tiene por solución el semiplano que no contiene al origen de coordenadas.

▪ La recta $5x+2y=30$ pasa por los puntos $(6\,,0)$ y $(2\,,10)$. La solución de la inecuación $5x+2y\geq 30$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

▪ La recta $x+y=12$ pasa por los puntos $(0\,,12)$ y $(12\,,0)$. La solución de la inecuación $x+y\geq 12$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

La región factible es entonces una región abierta cuyos vértices son los puntos A, B, C y D. Como la función objetivo se optimiza en alguno de sus vértices, obtengamos las coordenadas de los mismos y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

▪ Vértice A : $\begin{cases} x=0 \\ 5x+2y=30 \end{cases} \Rightarrow\ y=15\ \Rightarrow\ A(0\,,15)\ \Rightarrow\ F(0\,,15)=8\cdot 0+10\cdot 15=150\ €$

▪ Vértice B:

$$\begin{cases} 5x+2y=30 \\ x+y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y=30 \\ -2x-2y=-24 \end{cases} \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2 \ , \ y=10 \Rightarrow A(2,10) \Rightarrow F(2,10)=16+100=116 \text{ €}$$

▪ Vértice C: $\begin{cases} x+y=12 \\ x+4y=24 \end{cases} \Rightarrow 3y=12 \Rightarrow y=4 \ , \ x=8 \Rightarrow C(8,4) \Rightarrow F(8,4)=64+40=104\text{€}$

▪ Vértice D: $D(24,0) \Rightarrow F(24,0)=192 \text{ €}$

Por lo tanto, para minimizar el coste debe comprar 8 lotes del tipo A y 4 lotes del tipo B. El coste será de 104 €.

2. (*3,25 puntos*) Dada la función

$$f(x)=\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}$$

Calcular:

a) (*0,25 puntos*) Dominio de f.

b) (*0,75 puntos*) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x)=5$?

c) (*1 punto*) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) (*1,25 puntos*) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

SOLUCIÓN.

a) Se trata de una función racional cuyo dominio es $\mathbb{R}$ menos los valores de x que anulen el denominador. Es decir:

$$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

b) $f(x)=5 \Rightarrow \dfrac{4x^2+4x+5}{2x+1}=5 \Rightarrow 4x^2+4x+5=10x+5 \Rightarrow 4x^2-6x=0 \Rightarrow 2x(2x-3)=0 \Rightarrow x=0 \ , \ x=\dfrac{3}{2}$

c) ▪ Asíntotas verticales: $x=-\dfrac{1}{2}$ pues $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{4x^2+4x+5}{2x+1}=\infty$

▪ Asíntotas horizontales: no tiene, porque $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+4x+5}{2x+1}=\infty$

▪ Asíntotas oblicuas $y=mx+n$: $\displaystyle m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+5}{2x^2+x}=\frac{4}{2}=2$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+5-4x^2-2x}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{2x+1}=1 \Rightarrow y=2x+1$$

d) El crecimiento o decrecimiento de una función depende del signo de su primera derivada:

$$f'(x)=\frac{(8x+4)(2x+1)-2(4x^2+4x+5)}{(2x+1)^2}=\frac{16x^2+8x+8x+4-8x^2-8x-10}{(2x+1)^2}=\frac{8x^2+8x-6}{(2x+1)^2}=\frac{2(4x^2+4x-3)}{(2x+1)^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2+4x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{8}=\frac{-4\pm 8}{8}= \begin{cases} -\dfrac{12}{8}=-\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

El signo de la primera derivada depende del signo del polinomio $4x^2+4x-3$ que se anula en $x=-\dfrac{3}{2}$ y en $x=\dfrac{1}{2}$. Hay que tener en cuenta también $x=-\dfrac{1}{2}$ donde la función tiene una discontinuidad con asíntota vertical. Se tiene:

En el intervalo $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)$: f’ > 0 (basta comprobar el signo en $x=-2$, por ejemplo).

En el intervalo $\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$: f’ < 0 (basta comprobarlo sustituyendo x por -1, por ejemplo).

En el intervalo $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$: f’ < 0 (basta sustituir x por 0, por ejemplo).

En el intervalo $\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$: f’ > 0 (basta sustituir x por 1, por ejemplo).

Así pues, tenemos:

f' > 0	f' < 0	f' < 0	f' > 0
	-3/2	-1/2	1/2

La función es creciente en $\left(-\infty\,,-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2}\,,+\infty\right)$

La función es decreciente en $\left(-\dfrac{3}{2}\,,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{1}{2}\right)$

3. (*3,5 puntos*) Se sabe que el peso de las manzanas de un agricultor tiene distribución normal con desviación típica igual a 20 g. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas del agricultor.

a) (*2 puntos*) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 93% tenga una amplitud menor o igual que 8 g.

b) (*1,5 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño 12. Pesamos las manzanas y obtenemos los siguientes resultados (en gramos)

178, 221, 196, 231, 210, 168, 203, 186, 196, 214, 230, 224

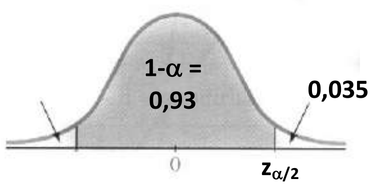
Calcular un intervalo de confianza al 93% para la media del peso de las manzanas del agricultor.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN.

a) Si la amplitud del intervalo de confianza debe tener una amplitud igual o menor que 8 g., el error máximo admisible debe ser $E = 4$.



Recordemos que $E = z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n} = z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{E} \;\Rightarrow\; n = \left(z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{E}\right)^2$.

Obtengamos el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 93%:

$$1-\alpha = 0{,}93 \;\Rightarrow\; \alpha = 1-0{,}93 = 0{,}07 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2} = 0{,}035 \;\Rightarrow\; 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}965$$

Buscamos en la tabla el valor más próximo (resulta ser 0,9649) que corresponde a un valor crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}81$.

Tenemos entonces: $n = \left(z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}81\cdot\dfrac{20}{4}\right)^2 = 81{,}9 \;\Rightarrow$ la muestra debe ser de 82 manzanas.

b) La media muestral es: $\overline{X} = \dfrac{178+221+196+231+210+168+203+186+196+214+230+224}{12} = 204{,}75$ g.

El intervalo de confianza de la media de todas las manzanas, con un nivel de confianza del 93%, tiene un error máximo admisible: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}81 \cdot \frac{20}{\sqrt{12}} = 10{,}45$ g.

El intervalo de confianza es entonces: $\left(\overline{X} - E\,,\overline{X} + E\right) = \left(204{,}75 - 10{,}45\ ,\ 204{,}75 + 10{,}45\right) = \left(194{,}3\ ,\ 215{,}2\right)$

Es decir, la media del peso de las manzanas está entre 194,3 g. y 215,2 g. con un nivel de confianza del 93%.

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Un hotel tiene habitaciones individuales (para una persona), dobles (para dos personas) y familiares (para cuatro personas). El hotel tiene un total de 144 habitaciones con una capacidad total de 312 personas; además, el número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de habitaciones de cada tipo que tiene el hotel.

SOLUCIÓN.

Sea "x" el número de habitaciones individuales, "y" el número de habitaciones dobles y "z" el número de habitaciones familiares. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones (lo resolveremos por el método de Gauss):

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=144 \\ x+2y+4z=312 \\ y=3(x+z) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=144 \\ x+2y+4z=312 \\ 3x-y+3z=0 \end{array}\right\} \underset{E_3-3E_1}{\overset{E_2-E_1}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{r} x+y+z=144 \\ y+3z=168 \\ -4y\quad=-432 \end{array}\right\} \overset{E_3+4E_2}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{r} x+y+z=144 \\ y+3z=168 \\ 12z=240 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{240}{12}=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=168-3z=168-60=108 \ \Rightarrow\ x=144-y-z=144-108-20=16$$

Hay entonces 16 habitaciones individuales, 108 habitaciones dobles y 20 habitaciones familiares.

2. (*3,25 puntos*)

a) (*2 puntos*) Tenemos 4000 euros para invertir en dos fondos M y N. Sea x la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo M e y la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo N; así, se cumple $x + y = 4$. El beneficio que se obtiene, en euros, viene dado por

$$B = 10(2x+1)^2 y$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en cada fondo para obtener el máximo beneficio y cuál será ese beneficio máximo.

b) (*1,25 puntos*) Calcular

$$\int_0^1 \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right) dx$$

SOLUCIÓN.

a) De $x+y=4$: $y=4-x \ \Rightarrow\ B=10(2x+1)^2(4-x)$

Estudiemos para qué valor de x la función beneficio tiene su máximo:

$$B'=10\left[2\cdot(2x+1)\cdot 2\cdot(4-x)+(2x+1)^2\cdot(-1)\right]=10\left[(2x+1)(16-4x-2x-1)\right]=10\left[(2x+1)(-6x+15)\right]=0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \ \Rightarrow\ x=-\frac{1}{2} \ \text{(no válida)} \\ -6x+15=0 \ \Rightarrow\ x=\frac{15}{6}=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$B''=10\left[2(-6x+15)+(2x+1)(-6)\right] \ \Rightarrow\ B''\left(\frac{5}{2}\right)=10\left[0-6\cdot 6\right]<0 \ \Rightarrow\ x=\frac{5}{2}$ es un máximo relativo de la función

$x=2{,}5 \ \Rightarrow\ y=1{,}5 \ \Rightarrow$ debemos invertir 2500 euros en el fondo M y 1500 euros en el fondo N para conseguir el máximo beneficio que será de $B=10(2x+1)^2 y=10\cdot 36\cdot 1{,}5=540$ euros.

b) Calculemos una primitiva:

$$\int\left(\frac{5}{3x+1}-\frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right)dx=5\int\frac{1}{3x+1}dx-4\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx=\frac{5}{3}\int\frac{3}{3x+1}dx-\frac{4\cdot 2}{3}\int\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}dx=\frac{5}{3}\ln(3x+1)-\frac{8}{3}\sqrt{3x+1}$$

Tenemos entonces: $\int_0^1\left(\frac{5}{3x+1}-\frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right)dx=\left[\frac{5}{3}\ln(3x+1)-\frac{8}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^1=\left(\frac{5}{3}\ln 4-\frac{8}{3}\cdot 2\right)-\left(\frac{5}{3}\cdot 0-\frac{8}{3}\right)=\frac{5}{3}\ln 4-\frac{8}{3}$

3. (*3,5 puntos*) Una empresa tiene 64 trabajadores repartidos en tres departamentos: Administración, Producción y Ventas. Se ha hecho un estudio sobre si los trabajadores saben inglés o no, con los siguientes resultados:

	Administración	Producción	Ventas
Sabe inglés	12	30	6
No sabe inglés	4	11	1

a) (*1 punto*) Elegimos al azar un trabajador de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

b) (*1 punto*) Elegimos al azar un trabajador de entre los que saben inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea del departamento de Ventas?

c) (*0,75 puntos*) Elegimos al azar un trabajador de la empresa. Sea *A* el suceso "el trabajador es del departamento de Administración" y *B* el suceso "el trabajador sabe inglés". ¿Son los sucesos *A* y *B* independientes?

d) (*0,75 puntos*) Elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres trabajadores de la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo departamento?

SOLUCIÓN

Completemos la tabla de contingencia del enunciado con una nueva fila y una nueva columna donde se recojan los totales:

	Administración (A)	**Producción (P)**	**Ventas (V)**	**Total**
Sabe inglés (B)	12	30	6	48
No sabe inglés ($\overline{B}$)	4	11	1	16
Total	16	41	7	64

a) Entre los 64 trabajadores de la empresa hay 48 que saben inglés: $p(B)=\frac{48}{64}=0,75$

b) Elegimos ahora entre los 48 trabajadores que saben inglés de los que 6 son del departamento de ventas:

$$p(V/B)=\frac{6}{48}=0,125$$

c) A y B son independientes si $p(A/B)=p(A)$: $p(A/B)=\frac{12}{48}=0,25$, $p(A)=\frac{16}{64}=0,25$ $\Rightarrow$ son independientes.

d) $p\left[(A_1\cap A_2\cap A_3)\cup(P_1\cap P_2\cap P_3)\cup(V_1\cap V_2\cap V_3)\right]=\frac{16}{64}\cdot\frac{15}{63}\cdot\frac{14}{62}+\frac{41}{64}\cdot\frac{40}{63}\cdot\frac{39}{62}+\frac{7}{64}\cdot\frac{6}{63}\cdot\frac{5}{62}=$

$$=\frac{16\cdot 15\cdot 14+41\cdot 40\cdot 39+7\cdot 6\cdot 5}{64\cdot 63\cdot 62}=\frac{67530}{249984}=0,27$$

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Se proponen seis preguntas, de las que el estudiante debe resolver tres, a su elección. La nota final será la suma de las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas, dividida por tres.

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a.- (*3 puntos*) ¿Es posible calcular $(BA)^2$? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.
b.- (*3 puntos*) Encontrar, si existe, una matriz X, que verifique $2X + 3B = 2C$.
c.- (*4 puntos*) Calcular, si existe, la matriz inversa de D.

2.- (*10 puntos*) Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por cada vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en ese caso?

3.- (*10 puntos*)
a.- (*3 puntos*) Calcular la derivada de:

$$f(x) = e^{3x^2-5x}$$

b.- (*3 puntos*) Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}}$$

c.- (*4 puntos*) Calcular:

$$\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx$$

4.- (*10 puntos*) El coste unitario de fabricación de un producto (en euros) depende del tamaño de la producción a través de la siguiente fórmula:

$$C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100)$$

donde $x \in [2, 15]$ es el tamaño de la producción (en miles de unidades) y C es el coste unitario (en euros). Calcular:

a.- (*1 punto*) Si se producen 5000 unidades, ¿cuánto vale el coste unitario?
b.- (*4 puntos*) ¿Para qué valores del tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ el coste unitario es inferior a 4 euros?
c.- (*5 puntos*) ¿Para qué tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ se alcanza el coste unitario mínimo? ¿Y el máximo? ¿Cuánto valen estos costes?

5.- (*10 puntos*) En el curso de primero de Bachillerato de un centro educativo se ha hecho una encuesta sobre el destino del viaje de estudios con dos opciones: Londres y París. El curso está compuesto por tres clases: A, B y C. La clase A tiene 28 estudiantes, de los cuales 12 han votado por Londres y el resto por París; en la clase B, que tiene 25 estudiantes, 10 han votado por Londres y el resto por París; en la clase C, con 23 estudiantes, 18 han votado por Londres y el resto por París.
a.- (*2 puntos*) Si elegimos al azar un estudiante del curso, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado por Londres?
b.- (*2 puntos*) Si elegimos al azar un estudiante de entre los que han votado por Londres, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B?
c.- (*3 puntos*) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) dos estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de que los dos hayan votado por Londres?
d.- (*3 puntos*) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de que sea uno de cada clase?

CONTINÚA AL DORSO

6.- (*10 puntos*) Se sabe que la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU tiene distribución normal con desviación típica igual a 10 cm. Queremos construir un intervalo de confianza para la media de la altura de los estudiantes.

a.- (*5 puntos*) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual que 4 cm.

b.- (*4 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño 9. Medimos a los estudiantes y tenemos los siguientes resultados en cm:

175, 187, 183, 162, 161, 164, 180, 171, 158

Calcular un intervalo de confianza al 97% para la media de la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU.

c.- (*1 punto*) Calcular la varianza de la muestra del apartado **b**.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES:

En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de la forma de resolución; aún así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.

Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector. Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,25 puntos.

1.- (10 puntos)

(a) Calcular *BA*, 2 puntos. Calcular $(BA)^2$, *1* punto. Si no se calcula bien, pero se ha razonado que se puede calcular, se suman 0,5 puntos; si se calcula bien, no se resta nada aunque no se haya razonado que se puede calcular.

(b) Calcular *3B*, 0,5 puntos; calcular *2C*, 0,5 puntos. Despejar *X*, 1 punto y calcularla, 1 punto.

(c) Si lo resuelven por el método de menores: cálculo del determinante, 1 punto; cálculo de los menores, 1,5 puntos (se resta 0,5 puntos por cada menor erróneo); asignar signo correcto dependiendo de la paridad, 1 punto; dividir por el determinante y trasponer la matriz (al final o en el momento de calcular los menores) para llegar a la inversa, 0,5 puntos. Si lo resuelven por el método de Gauss, un error en la triangularización les resta 1 punto, 2 errores, 3 puntos y 3 errores les restan 4 puntos.

2.- (10 puntos) Escribir la función objetivo, 1 punto. Escribir las restricciones, 1,5 puntos, correspondiendo 0,5 puntos a cada una de las tres restricciones adicionales a las de no negatividad; no poner las condiciones de no negatividad se penaliza con 0,5 puntos. Dibujar correctamente la región factible, 1,5 puntos, y encontrar los puntos extremos, 4 puntos (si se encuentran los puntos extremos correctamente sin haber dibujado la región factible se asignan los 5,5 puntos). Evaluar la función objetivo en cada uno de los puntos extremos y encontrar el de beneficio máximo, 1,5 puntos. Dar el valor del beneficio máximo, 0,5 puntos.

3.- (10 puntos)

(a) Poner la fórmula (o aplicarla bien) de la derivada de e^u como $u'e^u$, 1,5 puntos. Calcular la derivada de $3x^2 - 5x$, 1,5 puntos.

(b) Identificar la indeterminación ∞/∞, 1 punto. Calcular el límite, 2 puntos (si se llega a un límite incorrecto pero distinto de 0 e ∞, se valora con 1 punto esta parte final).

(c) Se puntúa con 1,5 puntos la integral indefinida de cada sumando y con 1 punto la sustitución de los límites de integración.

4.- (10 puntos)

(a) (1 punto) En este apartado no se asignan puntuaciones intermedias.

(b) Encontrar los valores de *x* en los que el coste es igual a 4 euros, 2 puntos, y obtener el intervalo en el que el coste es inferior a 4 euros, 2 puntos. Si se incluyen los extremos del intervalo se restan 0,5 puntos.

(c) Calcular la derivada 1,5 puntos. Encontrar el punto crítico en el intervalo, 0,5 puntos. Comprobar que es mínimo relativo, 0,5 puntos. Comprobar o razonar que es mínimo absoluto, 0,5 puntos. Razonar que el máximo absoluto se tiene que encontrar en un extremo del intervalo y calcularlo, 1 punto. Dar los valores de los costes máximo y mínimo, 1 punto. Como la función es una parábola, si el ejercicio se resuelve utilizando las propiedades de la parábola, se considerará correcto.

5.- (10 puntos)

- **(a)** (2 puntos) En este apartado no se asignan puntuaciones intermedias.
- **(b)** (2 puntos) En este apartado no se asignan puntuaciones intermedias.
- **(c)** Se asignan 3 puntos si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado, excepto si se resuelve con reemplazamiento, que se puntúa con 2 puntos).
- **(d)** Se asignan 2 puntos por poner la probabilidad de una de las posibilidades (ABC, por ejemplo) y 1 punto por multiplicar por el número de posibilidades (6). Si se resuelve con reemplazamiento se resta 1 punto.

6.- (10 puntos)

- **(a)** Saber qué cuantil buscar, 1 punto. Encontrarlo, 1 punto. Poner la fórmula del error, 1,5 puntos. Sustituir y calcular *n*, 1,5 puntos (si se deja el valor *n* no entero o se toma el anterior en vez del posterior entero se restan 0,5 puntos). Si el cálculo se realiza tomando el error (semiamplitud) como 4 cm en vez de 2 cm, se restan 1,5 puntos.
- **(b)** Calcular la media de los datos, 1 punto. Calcular el error (semiamplitud del intervalo), 1,5 puntos; en esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado a), aunque no lo sea. Poner la fórmula del IC y calcularlo, 1,5 puntos.
- **(c)** Poner la fórmula de la varianza, 0,5 puntos; calcularla, 0,5 puntos. Si no se pone la fórmula pero se calcula bien, se asigna 1 punto. Se considerará válida tanto la fórmula en la que se divide por *n* como la que se divide por *n*-1.

Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE JULIO DE 2020

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Se proponen seis preguntas, de las que el estudiante debe resolver tres, a su elección. La nota final será la suma de las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas, dividida por tres.

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a.- (*3 puntos*) ¿Es posible calcular $(BA)^2$? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b.- (*3 puntos*) Encontrar, si existe, una matriz X, que verifique $2X+3B=2C$.

c.- (*4 puntos*) Calcular, si existe, la matriz inversa de D.

SOLUCIÓN

a) B es una matriz 3x2 y A es una matriz 2x3 por lo que son multiplicables (el número de columnas del primer factor coincide con el de filas del segundo) y el resultado es una matriz 3x3 que podrá multiplicarse por sí misma y obtener su cuadrado.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (B\cdot A)^2=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -6 & 12 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $$2X+3B=2C \Rightarrow 2X=2C-3B \Rightarrow X=\frac{1}{2}(2C-3B)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & -6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 7 & 8 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 7/2 & 4 \\ 5/2 & 9/2 \end{pmatrix}$$

c) Utilizamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1\leftrightarrow F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1}}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3-2F_2}{\approx}$$

$$\overset{F_3-2F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3:2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \overset{F_2+F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \overset{F_2:(-2)}{\approx}$$

$$\overset{F_2:(-2)}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \overset{F_1-F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \Rightarrow D^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2.- (*10 puntos*) Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por cada vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en ese caso?

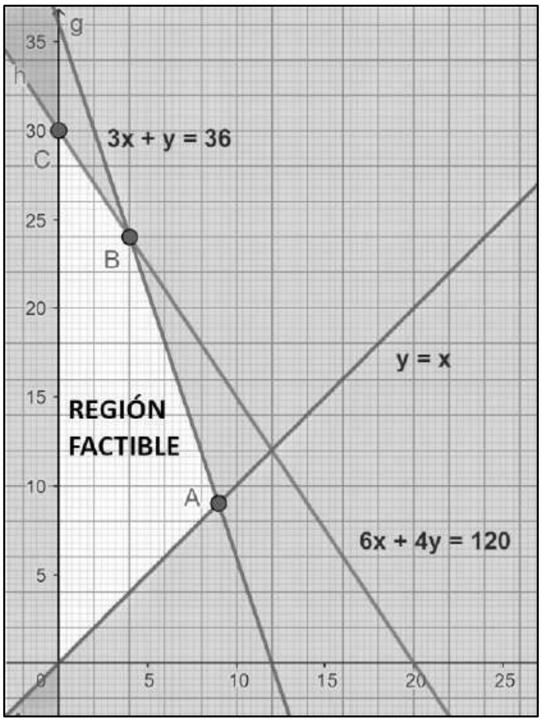
SOLUCIÓN

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

Tipo de vestidos	Número	Metros de tela	Horas de trabajo	Beneficio
Fiesta	x	3x	6x	100x
Calle	y	y	4y	65y
Restricciones:	$x \geq 0$ $y \geq 0$ $x \leq y$	$3x + y \leq 36$	$6x + 4y \leq 120$	$F(x,y) = 100x + 65y$

Se trata entonces de maximizar la función objetivo $F(x,y) = 100x + 65y$ teniendo en cuenta el conjunto de restricciones: $\{\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \leq y,\ 3x + y \leq 36,\ 6x + 4y \leq 120\ \}$.

Construyamos la región factible, conjunto de los puntos del plano que verifican las inecuaciones del conjunto de restricciones:



− La recta de ecuación $x = 0$ es el eje de ordenadas. La inecuación $x \geq 0$ tiene como solución el semiplano de la derecha (en blanco). La recta $y = 0$ es el eje de abscisas y la inecuación $y \geq 0$ tiene como solución el semiplano superior (en blanco).

− La recta $y = x$ es la bisectriz del primer cuadrante. La solución de la inecuación $x \leq y$ es el semiplano al que pertenece el punto $(0,10)$, por ejemplo.

− La recta $3x + y = 36$ pasa por los puntos $(0,36)$ y $(12,0)$. La solución de $3x + y \leq 36$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

− La recta $6x + 4y = 120$ pasa por los puntos $(0,30)$ y $(20,0)$. La solución de $6x + 4y \leq 120$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

La región factible (en blanco) es el cuadrilátero OABC.

La función objetivo se optimiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos las coordenadas de los vértices y calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos para ver en cuál de ellos es máxima:

− $O(0,0) \Rightarrow F(0,0) = 0$

− Vértice A: es la intersección de las rectas $y = x$ y $3x + y = 36$

$$\begin{cases} y = x \\ 3x + y = 36 \end{cases} \Rightarrow 4x = 36 \Rightarrow x = 9 \quad , \quad y = 9 \Rightarrow A(9,9) \Rightarrow F(9,9) = 100 \cdot 9 + 65 \cdot 9 = 1485$$

− Vértice B: intersección de las rectas $3x + y = 36$ y $6x + 4y = 120$

$$\begin{cases} 3x + y = 36 \\ 6x + 4y = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 36 \\ 3x + 2y = 60 \end{cases} \Rightarrow y = 24 \quad , \quad x = \frac{36 - 24}{3} = 4 \Rightarrow B(4,24) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(4,24) = 100 \cdot 4 + 65 \cdot 24 = 1960$$

− Vértice $C(0,30) \Rightarrow F(0,30) = 65 \cdot 30 = 1950$

La función objetivo es máxima en el vértice B y, por tanto, los beneficios son máximos cuando hace 4 vestidos de fiesta y 24 vestidos de calle. El beneficio que obtiene es de 1960 euros.

3.- (*10 puntos*)

a.- (*3 puntos*) Calcular la derivada de:

$$f(x) = e^{3x^2-5x}$$

b.- (*3 puntos*) Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}}$$

c.- (*4 puntos*) Calcular:

$$\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx$$

SOLUCIÓN

a) Se trata de una función exponencial: $f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = e^u \cdot u'$

$$f'(x) = e^{3x^2-5x} \cdot (6x-5)$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x+2}{x}}{\frac{\sqrt{16x^2+5}}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{16x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{16+\frac{5}{x^2}}} = \frac{3}{4}$$

c) Calculemos una primitiva:

$$\int \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx = \int 3x^2\, dx - \int \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\, dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\int \frac{4}{2\sqrt{4x+1}}\, dx = x^3 - \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}$$

Entonces: $$\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx = \left[x^3 - \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}\right]_0^2 = \left(8-\frac{3}{2}\right) - \left(0-\frac{1}{2}\right) = 7$$

4.- (*10 puntos*) El coste unitario de fabricación de un producto (en euros) depende del tamaño de la producción a través de la siguiente fórmula:

$$C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100)$$

donde $x \in [2, 15]$ es el tamaño de la producción (en miles de unidades) y C es el coste unitario (en euros). Calcular:

a.- (*1 punto*) Si se producen 5000 unidades, ¿cuánto vale el coste unitario?

b.- (*4 puntos*) ¿Para qué valores del tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ el coste unitario es inferior a 4 euros?

c.- (*5 puntos*) ¿Para qué tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ se alcanza el coste unitario mínimo? ¿Y el máximo? ¿Cuánto valen estos costes?

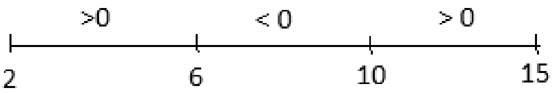
SOLUCIÓN

a) Si se producen 5000 unidades, en la función que nos da el coste unitario:

$$x = 5 \Rightarrow C(5) = \frac{1}{10}(25-80+100) = 4{,}50 \text{ euros}$$

b) $\frac{1}{10}(x^2-16x+100) < 4 \Leftrightarrow x^2-16x+100 < 40 \Leftrightarrow x^2-16x+60 < 0$ **(*)**

$x^2 - 16x + 60 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{16 \pm \sqrt{256-240}}{2} = \dfrac{16 \pm 4}{2} = \begin{cases} 6 \\ 10 \end{cases}$ Puesto que se trata de una función polinómica (continua) que se anula en $x = 6$ y $x = 10$ los signos se alternarán en $(2\,,6)$, $(6\,,10)$ y $(10\,,15)$. Por ejemplo, en $x = 3$: $3^2 - 16 \cdot 3 + 60 = 21 > 0$. Se tiene entonces:



La solución a la inecuación (*) es entonces el intervalo $(6\,,10)$, es decir el coste unitario es inferior a 4 € para una producción entre 6000 y 10000.

c) $C'(x) = \dfrac{1}{10}(2x - 16) = 0 \;\Rightarrow\; x = 8$ (valor crítico)

$C''(x) = \dfrac{1}{10} \cdot 2 > 0 \;\Rightarrow$ el valor crítico es un mínimo relativo: $f(8) = \dfrac{1}{10}(64 - 128 + 100) = 3{,}60$

Veamos el valor de la función en los extremos del intervalo en que está definida:

$C(2) = \dfrac{1}{10}(4 - 32 + 100) = 7{,}20$ $\qquad C(15) = \dfrac{1}{10}(225 - 240 + 100) = 8{,}50$

Luego el coste unitario mínimo, de valor 3,60 €, se alcanza para una producción de 8000 unidades ($x = 8$) y el coste unitario máximo, de valor 8,50 €, para una producción de 15000 unidades ($x = 15$).

5.- (*10 puntos*) En el curso de primero de Bachillerato de un centro educativo se ha hecho una encuesta sobre el destino del viaje de estudios con dos opciones: Londres y París. El curso está compuesto por tres clases: A, B y C. La clase A tiene 28 estudiantes, de los cuales 12 han votado por Londres y el resto por París; en la clase B, que tiene 25 estudiantes, 10 han votado por Londres y el resto por París; en la clase C, con 23 estudiantes, 18 han votado por Londres y el resto por París.

a.- (*2 puntos*) Si elegimos al azar un estudiante del curso, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado por Londres?

b.- (*2 puntos*) Si elegimos al azar un estudiante de entre los que han votado por Londres, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B?

c.- (*3 puntos*) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) dos estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de que los dos hayan votado por Londres?

d.- (*3 puntos*) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de que sea uno de cada clase?

SOLUCIÓN

Cada estudiante está definido por dos caracteres: el lugar de destino del viaje de estudios y la clase de 1º de bachillerato a la que pertenece. Organizaremos los datos en una tabla de doble entrada (tabla de contingencia):

	A	**B**	**C**	**TOTAL**
LONDRES (L)	12	10	18	40
PARÍS (P)	16	15	5	36
TOTAL	28	25	23	76

a) De un total de 76 estudiantes, 40 han votado por Londres. Tenemos: $p(L) = \dfrac{40}{76} = 0{,}5263$

b) Entre los 40 que han preferido Londres, hay 10 en la clase B: $p\left(B/L\right)=\frac{10}{40}=0,25$

c) $p\left(L_1\cap L_2\right)=p\left(L_1\right)\cdot p\left(L_2/L_1\right)=\frac{40}{76}\cdot\frac{39}{75}=\frac{1560}{5700}=0,2737$

d) Formas de elegir tres estudiantes de cada clase: $A_1B_2C_3$, $A_1C_2B_3$, $B_1A_2C_3$, $B_1C_2A_3$, $C_1A_2B_3$, $C_1B_2A_3$, es decir, hay 6 formas distintas de elegir tres estudiantes de clases diferentes, y cada una de ellas tiene la misma probabilidad. Tenemos entonces:

$$p\left(A\cap B\cap C\right)=6\cdot\frac{28}{76}\cdot\frac{25}{75}\cdot\frac{23}{74}=\frac{96600}{421800}=0,2290$$

6.- (*10 puntos*) Se sabe que la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU tiene distribución normal con desviación típica igual a 10 cm. Queremos construir un intervalo de confianza para la media de la altura de los estudiantes.

a.- (*5 puntos*) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual que 4 cm.

b.- (*4 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño 9. Medimos a los estudiantes y tenemos los siguientes resultados en cm:

175, 187, 183, 162, 161, 164, 180, 171, 158

Calcular un intervalo de confianza al 97% para la media de la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU.

c.- (*1 punto*) Calcular la varianza de la muestra del apartado **b**.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

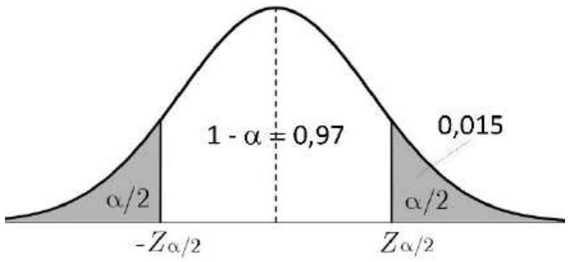
NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

a) Si la amplitud del intervalo de confianza ha de ser menor o igual a 4 cm, el radio del intervalo o error máximo admisible, E, es de 2 cm.

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ donde $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 97%, $\sigma = 10$ cm es la desviación típica de la población y n es el tamaño de la muestra.

Se tiene: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{E} \Rightarrow n = \left(\frac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{E}\right)^2$



Obtengamos $z_{\alpha/2}$:

$1 - \sigma = 0{,}97 \Rightarrow \sigma = 0{,}03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}015 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 0{,}015 = 0{,}985$ y mirando en la tabla, encontramos que el valor crítico que corresponde es 2,17.

Tenemos entonces: $n = \left(\frac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 = \left(\frac{10 \cdot 2{,}17}{2}\right)^2 = 117{,}72 \Rightarrow$ el tamaño de la muestra debe ser de 118 estudiantes.

b) Calculamos la media de la muestra:

$$\bar{X} = \frac{175+187+183+162+161+164+180+171+158}{9} = \frac{1541}{9} = 171{,}22 \text{ cm}$$

El radio del intervalo de confianza es: $E = 2{,}17 \cdot \frac{10}{\sqrt{9}} = 7{,}23$

Luego el intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(171{,}22 - 7{,}23\ ,\ 171{,}22 + 7{,}23) = (163{,}99\ ,\ 178{,}45)$$

c) $\mathrm{Var}(x_i) = s^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{X}^2 = \frac{264749}{9} - 171{,}22^2 = 100{,}27$

x_i	175	187	183	162	161	164	180	171	158	$\sum$
x_i^2	30625	34969	33489	26244	25921	26896	32400	29241	24964	264749

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2020

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Se proponen seis preguntas, de las que el estudiante debe resolver tres, a su elección. La nota final será la suma de las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas, dividida por tres.

1.- (*10 puntos*) Un corredor aficionado tiene dos tipos de entrenamiento, el corto y el largo. En cada entrenamiento corto, al que dedica 1 hora, corre 15 km y consume 1200 kilocalorías. En cada entrenamiento largo, al que dedica 3 horas, corre 30 km y consume 2500 kilocalorías. Quiere planificar los entrenamientos del verano de forma que haga al menos 24 entrenamientos, pero no corra más de 660 km ni dedique más de 48 horas, en total. Si su objetivo es maximizar el número total de kilocalorías consumidas, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos entrenamientos de cada tipo tiene que hacer. ¿Cuántas kilocalorías consumirá en ese caso?

2.- (*10 puntos*) En un museo las entradas cuestan 1 euro para los niños, 2 euros para los jóvenes y 5 euros para los adultos. Ayer se recaudaron un total de 600 euros y se sabe que el número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes; además, si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de niños, jóvenes y adultos que visitaron el museo.

3.- (*10 puntos*) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1}$$

Calcular:

a.- (*1 punto*) Dominio de f.

b.- (*3 puntos*) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) < 0$?

c.- (*2 puntos*) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d.- (*4 puntos*) Máximos y mínimos relativos de f.

4.- (*10 puntos*) Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x+1} & si\ x < -1 \\ x^3 - 4x^2 + 2x - 10 & si -1 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{4x^2 - 7x} - 2x & si\ x > 4 \end{cases}$$

a.- (*3 puntos*) Estudiar la continuidad de f.

b.- (*4,5 puntos*) Calcular:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

c.- (*2,5 puntos*) Calcular:

$$\int_1^2 f(x)dx$$

5.- En una bolsa tenemos 8 bolas: 3 blancas, 1 roja y 4 negras. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento. Calcular:

a.- (*2 puntos*) La probabilidad de que las dos sean blancas.

b.- (*3 puntos*) La probabilidad de que al menos una sea blanca.

c.- (*2 puntos*) La probabilidad de que las dos sean del mismo color.

d.- (*3 puntos*) Si las dos bolas son del mismo color, la probabilidad de que sean blancas.

CONTINÚA AL DORSO

6.- El ayuntamiento de una ciudad quiere estimar la proporción de hogares que tiene Internet de alta velocidad. Para ello, va a visitar una muestra aleatoria simple de hogares para saber si tienen Internet de alta velocidad y, a partir de los resultados, va a construir el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 94%.

a.- (*6 puntos*) Si quiere que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0.1, ¿qué tamaño de la muestra debe escoger?

b.- (*4 puntos*) Decide tomar una muestra de 200 hogares y, de ellos, 112 tienen Internet de alta velocidad. Calcular el intervalo de confianza al 94% para la proporción de hogares de la ciudad que tienen Internet de alta velocidad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES:

En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de la forma de resolución; aún así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio. En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.

Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector. Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,25 puntos.

1.- (10 puntos) Escribir la función objetivo, 1 punto. Escribir las restricciones, 1,5 puntos, correspondiendo 0,5 puntos a cada una de las tres restricciones adicionales a las de no negatividad; no poner las condiciones de no negatividad se penaliza con 0,5 puntos. Dibujar correctamente la región factible, 1,5 puntos, y encontrar los puntos extremos, 4 puntos (si se encuentran los puntos extremos correctamente sin haber dibujado la región factible se asignan los 5,5 puntos). Evaluar la función objetivo en cada uno de los puntos extremos y encontrar el de máximas Kcal, 1,5 puntos. Dar el valor de esas Kcal, 0,5 puntos.

2.- (10 puntos) Plantear las ecuaciones, 4,5 puntos (1,5 puntos por cada ecuación). Se puntúa con 5,5 puntos la resolución del sistema (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un sistema mucho más sencillo que el original). Si se hace triangularizando, la triangularización vale 4 puntos (un error en la triangularización resta 1,5 puntos, dos errores 3 puntos y tres errores restan 4 puntos) y despejar los valores, 1,5 puntos (0,5 puntos por cada uno). Si se hace por Cramer, poner la fórmula adecuada (o aplicarla aun sin escribirla) vale 1 punto y calcular los determinantes, 4,5 puntos (se restan 1,5 puntos por cada determinante erróneo).

3.- (10 puntos)

(a) (1 punto). No se asignan puntaciones intermedias en este apartado.

(b) Comprobar que el numerador no tiene raíces, 1 punto. Calcular el intervalo donde x es positiva, 2 puntos. Si se incluye el punto 1 se restan 0,5 puntos.

(c) Asíntota vertical, 0,5 puntos. Asíntota horizontal, 0,5 puntos. Asíntota oblicua, 1 punto (0,5 por cada parámetro).

(d) Calcular la derivada, 2 puntos. Obtener los puntos críticos, 1 punto. Determinar cuál es el mínimo y cuál el máximo, 1 punto (si lo hacen calculando la segunda derivada, ésta se valorará con 0,5 puntos).

4.- (10 puntos)

(a) Probar que es discontinua en $x = -1$, 1 punto. Probar que es continua en $x = 4$, 1 punto. Razonar que es continua en el resto de valores de x, 1 punto.

(b) Multiplicar y dividir por la expresión cambiada de signo y operar correctamente, 2,5 puntos. Calcular el límite, 2 puntos (si se llega a un límite incorrecto pero distinto de 0 e ∞, se valora con 1 punto esta parte final).

(c) Se puntúa con 0,5 puntos la integral indefinida de cada sumando y con 0,5 puntos la sustitución de los límites de integración.

5.- (10 puntos) Si el ejercicio se resuelve como si las extracciones se realizaran con reemplazamiento, se restará 1 punto por apartado en el que se haga.

(a) Se asignan 2 puntos si se responde bien (no se asignan puntuaciones intermedias en este apartado, excepto si se resuelve con reemplazamiento, que se valora con 1 punto).

(b) Si lo hacen pasando al complementario, 1 punto por pasar al complementario y 2 puntos por calcular la probabilidad de que ninguna sea blanca. Si lo hacen como probabilidad de la unión de sucesos elementales, se resta 1 punto por cada suceso que no pongan o calculen mal su probabilidad.

(c) Se asignan 0,5 puntos por saber que es la suma de dos posibilidades y 1,5 puntos por calcular bien las dos probabilidades (0,5 puntos por calcular bien solo una de las probabilidades).

(d) Por poner la fórmula correcta (teorema de Bayes u otra si es correcta), 1 punto. Sustituir correctamente y calcular, 2 puntos. Si usan algún valor incorrecto de apartados anteriores, se dará por correcto para este apartado. Si no ponen la fórmula explícitamente pero la aplican bien, se puntúa con 3 puntos el apartado.

6.- (10 puntos)

(a) Saber qué cuantil buscar, 1,5 puntos. Encontrarlo, 1,5 puntos. Poner la fórmula del error, 1,5 puntos. Sustituir y calcular, 1,5 puntos (si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior, se restan 0,5 puntos). Si el cálculo se realiza tomando el error (semiamplitud) como 0,1 en vez de 0,05, se restan 1,5 puntos.

(b) Calcular $\hat{p}$, 1 punto. Calcular el error (semiamplitud del intervalo), 1,5 puntos; en esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado a), aunque no lo sea. Si se usa en la estimación de la desviación típica un valor distinto a la proporción muestral, se restará 1 punto. Poner la fórmula del IC y calcularlo, 1,5 puntos.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JULIO DE 2020
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Se proponen seis preguntas, de las que el estudiante debe resolver tres, a su elección. La nota final será la suma de las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas, dividida por tres.

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2\\-1&0&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0\\-1&-2\\-1&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\\1&3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&1&0\\3&-1&0\end{pmatrix}$$

a.- (*3 puntos*) ¿Es posible calcular $(BA)^2$? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.
b.- (*3 puntos*) Encontrar, si existe, una matriz X, que verifique $2X+3B=2C$.
c.- (*4 puntos*) Calcular, si existe, la matriz inversa de D.

SOLUCIÓN

a) B es una matriz 3x2 y A es una matriz 2x3 por lo que son multiplicables (el número de columnas del primer factor coincide con el de filas del segundo) y el resultado es una matriz 3x3 que podrá multiplicarse por sí misma y obtener su cuadrado.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}2&0\\-1&-2\\-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&2\\-1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6&4\\0&-3&0\\-1&-3&-1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ (B\cdot A)^2=\begin{pmatrix}4&6&4\\0&-3&0\\-1&-3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&6&4\\0&-3&0\\-1&-3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-6&12\\0&9&0\\-3&6&-3\end{pmatrix}$$

b) $2X+3B=2C\ \Rightarrow\ 2X=2C-3B\ \Rightarrow\ X=\frac{1}{2}(2C-3B)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}2&-4\\4&2\\2&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&0\\-3&-6\\-3&-3\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&-4\\7&8\\5&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2\\7/2&4\\5/2&9/2\end{pmatrix}$

c) Utilizamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\3&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\overset{F_1\leftrightarrow F_2}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&1&0\\2&0&-1&1&0&0\\3&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\overset{\substack{F_2-2F_1\\F_3-3F_1}}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&1&0\\0&-2&-1&1&-2&0\\0&-4&0&0&-3&1\end{array}\right)\overset{F_3-2F_2}{\approx}$$

$$\overset{F_3-2F_2}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&1&0\\0&-2&-1&1&-2&0\\0&0&2&-2&1&1\end{array}\right)\overset{F_3:2}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&1&0\\0&-2&-1&1&-2&0\\0&0&1&-1&1/2&1/2\end{array}\right)\overset{F_2+F_3}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&1&0\\0&-2&0&0&-3/2&1/2\\0&0&1&-1&1/2&1/2\end{array}\right)\overset{F_2:(-2)}{\approx}$$

$$\overset{F_2:(-2)}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&1&0\\0&1&0&0&3/4&-1/4\\0&0&1&-1&1/2&1/2\end{array}\right)\overset{F_1-F_2}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1/4&1/4\\0&1&0&0&3/4&-1/4\\0&0&1&-1&1/2&1/2\end{array}\right)\ \Rightarrow\ D^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/4&1/4\\0&3/4&-1/4\\-1&1/2&1/2\end{pmatrix}$$

2.- (*10 puntos*) Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por cada vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en ese caso?

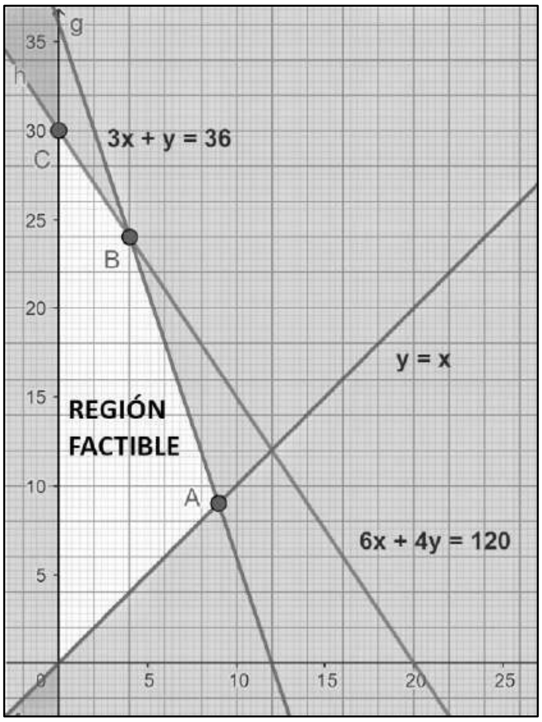
SOLUCIÓN

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

Tipo de vestidos	**Número**	**Metros de tela**	**Horas de trabajo**	**Beneficio**
Fiesta	x	3x	6x	100x
Calle	y	y	4y	65y
Restricciones:	$x \geq 0$ $y \geq 0$ $x \leq y$	$3x + y \leq 36$	$6x + 4y \leq 120$	$F(x, y) = 100x + 65y$

Se trata entonces de maximizar la función objetivo $F(x, y) = 100x + 65y$ teniendo en cuenta el conjunto de restricciones: $\{\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \leq y,\ 3x + y \leq 36,\ 6x + 4y \leq 120\ \}$.

Construyamos la región factible, conjunto de los puntos del plano que verifican las inecuaciones del conjunto de restricciones:



− La recta de ecuación $x = 0$ es el eje de ordenadas. La inecuación $x \geq 0$ tiene como solución el semiplano de la derecha (en blanco). La recta $y = 0$ es el eje de abscisas y la inecuación $y \geq 0$ tiene como solución el semiplano superior (en blanco).

− La recta $y = x$ es la bisectriz del primer cuadrante. La solución de la inecuación $x \leq y$ es el semiplano al que pertenece el punto $(0, 10)$, por ejemplo.

− La recta $3x + y = 36$ pasa por los puntos $(0, 36)$ y $(12, 0)$. La solución de $3x + y \leq 36$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

− La recta $6x + 4y = 120$ pasa por los puntos $(0, 30)$ y $(20, 0)$. La solución de $6x + 4y \leq 120$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

La región factible (en blanco) es el cuadrilátero OABC.

La función objetivo se optimiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos las coordenadas de los vértices y calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos para ver en cuál de ellos es máxima:

− $O(0, 0) \Rightarrow F(0, 0) = 0$

− Vértice A: es la intersección de las rectas $y = x$ y $3x + y = 36$

$$\begin{cases} y = x \\ 3x + y = 36 \end{cases} \Rightarrow 4x = 36 \Rightarrow x = 9 \quad , \quad y = 9 \Rightarrow A(9, 9) \Rightarrow F(9, 9) = 100 \cdot 9 + 65 \cdot 9 = 1485$$

− Vértice B: intersección de las rectas $3x + y = 36$ y $6x + 4y = 120$

$$\begin{cases} 3x + y = 36 \\ 6x + 4y = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 36 \\ 3x + 2y = 60 \end{cases} \Rightarrow y = 24 \quad , \quad x = \frac{36 - 24}{3} = 4 \Rightarrow B(4, 24) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(4, 24) = 100 \cdot 4 + 65 \cdot 24 = 1960$$

− Vértice $C(0, 30) \Rightarrow F(0, 30) = 65 \cdot 30 = 1950$

La función objetivo es máxima en el vértice B y, por tanto, los beneficios son máximos cuando hace 4 vestidos de fiesta y 24 vestidos de calle. El beneficio que obtiene es de 1960 euros.

3.- (*10 puntos*)

a.- (*3 puntos*) Calcular la derivada de:

$$f(x) = e^{3x^2-5x}$$

b.- (*3 puntos*) Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}}$$

c.- (*4 puntos*) Calcular:

$$\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx$$

SOLUCIÓN

a) Se trata de una función exponencial: $f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = e^u \cdot u'$

$$f'(x) = e^{3x^2-5x} \cdot (6x-5)$$

b) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x+2}{x}}{\frac{\sqrt{16x^2+5}}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{16x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{16+\frac{5}{x^2}}} = \frac{3}{4}$

c) Calculemos una primitiva:

$$\int \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx = \int 3x^2\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\,dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\int \frac{4}{2\sqrt{4x+1}}\,dx = x^3 - \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}$$

Entonces: $\displaystyle \int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx = \left[x^3 - \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}\right]_0^2 = \left(8-\frac{3}{2}\right) - \left(0-\frac{1}{2}\right) = 7$

4.- (*10 puntos*) El coste unitario de fabricación de un producto (en euros) depende del tamaño de la producción a través de la siguiente fórmula:

$$C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100)$$

donde $x \in [2,15]$ es el tamaño de la producción (en miles de unidades) y C es el coste unitario (en euros). Calcular:

a.- (*1 punto*) Si se producen 5000 unidades, ¿cuánto vale el coste unitario?

b.- (*4 puntos*) ¿Para qué valores del tamaño de la producción $x \in [2,15]$ el coste unitario es inferior a 4 euros?

c.- (*5 puntos*) ¿Para qué tamaño de la producción $x \in [2,15]$ se alcanza el coste unitario mínimo? ¿Y el máximo? ¿Cuánto valen estos costes?

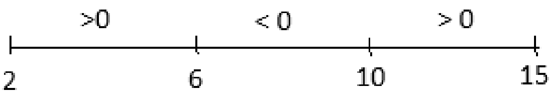
SOLUCIÓN

a) Si se producen 5000 unidades, en la función que nos da el coste unitario:

$$x = 5 \Rightarrow C(5) = \frac{1}{10}(25-80+100) = 4{,}50 \text{ euros}$$

b) $\displaystyle \frac{1}{10}(x^2-16x+100) < 4 \Leftrightarrow x^2-16x+100 < 40 \Leftrightarrow x^2-16x+60 < 0$ **(*)**

$x^2-16x+60=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{16\pm\sqrt{256-240}}{2}=\dfrac{16\pm4}{2}=\begin{cases}6\\10\end{cases}$ Puesto que se trata de una función polinómica (continua) que se anula en $x=6$ y $x=10$ los signos se alternarán en $(2,6)$, $(6,10)$ y $(10,15)$. Por ejemplo, en $x=3$: $3^2-16\cdot3+60=21>0$. Se tiene entonces:



La solución a la inecuación (*) es entonces el intervalo $(6,10)$, es decir el coste unitario es inferior a 4 € para una producción entre 6000 y 10000.

c) $C'(x)=\dfrac{1}{10}(2x-16)=0 \;\Rightarrow\; x=8$ (valor crítico)

$C''(x)=\dfrac{1}{10}\cdot2>0 \;\Rightarrow$ el valor crítico es un mínimo relativo: $f(8)=\dfrac{1}{10}(64-128+100)=3,60$

Veamos el valor de la función en los extremos del intervalo en que está definida:

$C(2)=\dfrac{1}{10}(4-32+100)=7,20 \qquad C(15)=\dfrac{1}{10}(225-240+100)=8,50$

Luego el coste unitario mínimo, de valor 3,60 €, se alcanza para una producción de 8000 unidades ($x=8$) y el coste unitario máximo, de valor 8,50 €, para una producción de 15000 unidades ($x=15$).

5.- (*10 puntos*) En el curso de primero de Bachillerato de un centro educativo se ha hecho una encuesta sobre el destino del viaje de estudios con dos opciones: Londres y París. El curso está compuesto por tres clases: A, B y C. La clase A tiene 28 estudiantes, de los cuales 12 han votado por Londres y el resto por París; en la clase B, que tiene 25 estudiantes, 10 han votado por Londres y el resto por París; en la clase C, con 23 estudiantes, 18 han votado por Londres y el resto por París.

a.- (*2 puntos*) Si elegimos al azar un estudiante del curso, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado por Londres?

b.- (*2 puntos*) Si elegimos al azar un estudiante de entre los que han votado por Londres, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B?

c.- (*3 puntos*) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) dos estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de que los dos hayan votado por Londres?

d.- (*3 puntos*) Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres estudiantes del curso, ¿cuál es la probabilidad de que sea uno de cada clase?

SOLUCIÓN

Cada estudiante está definido por dos caracteres: el lugar de destino del viaje de estudios y la clase de 1º de bachillerato a la que pertenece. Organizaremos los datos en una tabla de doble entrada (tabla de contingencia):

	A	**B**	**C**	**TOTAL**
LONDRES (L)	12	10	18	40
PARÍS (P)	16	15	5	36
TOTAL	28	25	23	76

a) De un total de 76 estudiantes, 40 han votado por Londres. Tenemos: $p(L)=\dfrac{40}{76}=0,5263$

b) Entre los 40 que han preferido Londres, hay 10 en la clase B: $p(B/L)=\frac{10}{40}=0{,}25$

c) $p(L_1\cap L_2)=p(L_1)\cdot p(L_2/L_1)=\frac{40}{76}\cdot\frac{39}{75}=\frac{1560}{5700}=0{,}2737$

d) Formas de elegir tres estudiantes de cada clase: $A_1B_2C_3$, $A_1C_2B_3$, $B_1A_2C_3$, $B_1C_2A_3$, $C_1A_2B_3$, $C_1B_2A_3$, es decir, hay 6 formas distintas de elegir tres estudiantes de clases diferentes, y cada una de ellas tiene la misma probabilidad. Tenemos entonces:

$$p(A\cap B\cap C)=6\cdot\frac{28}{76}\cdot\frac{25}{75}\cdot\frac{23}{74}=\frac{96600}{421800}=0{,}2290$$

6.- (*10 puntos*) Se sabe que la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU tiene distribución normal con desviación típica igual a 10 cm. Queremos construir un intervalo de confianza para la media de la altura de los estudiantes.

a.- (*5 puntos*) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual que 4 cm.

b.- (*4 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño 9. Medimos a los estudiantes y tenemos los siguientes resultados en cm:

175, 187, 183, 162, 161, 164, 180, 171, 158

Calcular un intervalo de confianza al 97% para la media de la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU.

c.- (*1 punto*) Calcular la varianza de la muestra del apartado **b**.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

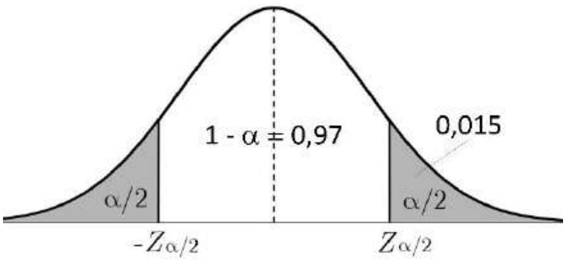
NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

a) Si la amplitud del intervalo de confianza ha de ser menor o igual a 4 cm, el radio del intervalo o error máximo admisible, E, es de 2 cm.

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ donde $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 97%, $\sigma = 10$ cm es la desviación típica de la población y n es el tamaño de la muestra.

Se tiene: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{E} \Rightarrow n = \left(\frac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{E}\right)^2$



Obtengamos $z_{\alpha/2}$:

$1 - \sigma = 0,97 \Rightarrow \sigma = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 0,015 = 0,985$ y mirando en la tabla, encontramos que el valor crítico que corresponde es 2,17.

Tenemos entonces: $n = \left(\frac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 = \left(\frac{10 \cdot 2,17}{2}\right)^2 = 117,72 \Rightarrow$ el tamaño de la muestra debe ser de 118 estudiantes.

b) Calculamos la media de la muestra:

$$\overline{X} = \frac{175+187+183+162+161+164+180+171+158}{9} = \frac{1541}{9} = 171,22 \text{ cm}$$

El radio del intervalo de confianza es: $E = 2,17 \cdot \frac{10}{\sqrt{9}} = 7,23$

Luego el intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(171,22 - 7,23 \ , \ 171,22 + 7,23) = (163,99 \ , \ 178,45)$$

c) $Var(x_i) = s^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{X}^2 = \frac{264749}{9} - 171,22^2 = 100,27$

x_i	175	187	183	162	161	164	180	171	158	$\sum$
x_i^2	30625	34969	33489	26244	25921	26896	32400	29241	24964	264749

Se proponen seis preguntas, de las que el estudiante debe resolver tres, a su elección. La nota final será la suma de las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas, dividida por tres.

1.- (*10 puntos*) Un corredor aficionado tiene dos tipos de entrenamiento, el corto y el largo. En cada entrenamiento corto, al que dedica 1 hora, corre 15 km y consume 1200 kilocalorías. En cada entrenamiento largo, al que dedica 3 horas, corre 30 km y consume 2500 kilocalorías. Quiere planificar los entrenamientos del verano de forma que haga al menos 24 entrenamientos, pero no corra más de 660 km ni dedique más de 48 horas, en total. Si su objetivo es maximizar el número total de kilocalorías consumidas, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos entrenamientos de cada tipo tiene que hacer. ¿Cuántas kilocalorías consumirá en ese caso?

SOLUCIÓN

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

Tipo de entrenamiento	Número	Horas	Distancia	Kilocalorías
corto	x	x	15x	1200x
largo	y	3y	30y	2500y

Restricciones: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \geq 24$ $\quad x+3y \leq 48 \quad 15x+30y \leq 660 \quad F(x,y)=1200x+2500y$

Se trata entonces de maximizar la función objetivo $F(x,y)=1200x+2500y$ sometida al conjunto de restricciones: $\{\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\geq 24,\ x+3y\leq 48,\ 15x+30y\leq 660\ \}$.

Construyamos la región factible, conjunto de los puntos del plano que verifican las inecuaciones del conjunto de restricciones:

- La recta de ecuación $x=0$ es el eje de ordenadas. La inecuación $x\geq 0$ tiene como solución el semiplano de la derecha (en blanco).

- La recta $y=0$ es el eje de abscisas y la inecuación $y\geq 0$ tiene como solución el semiplano superior (en blanco).

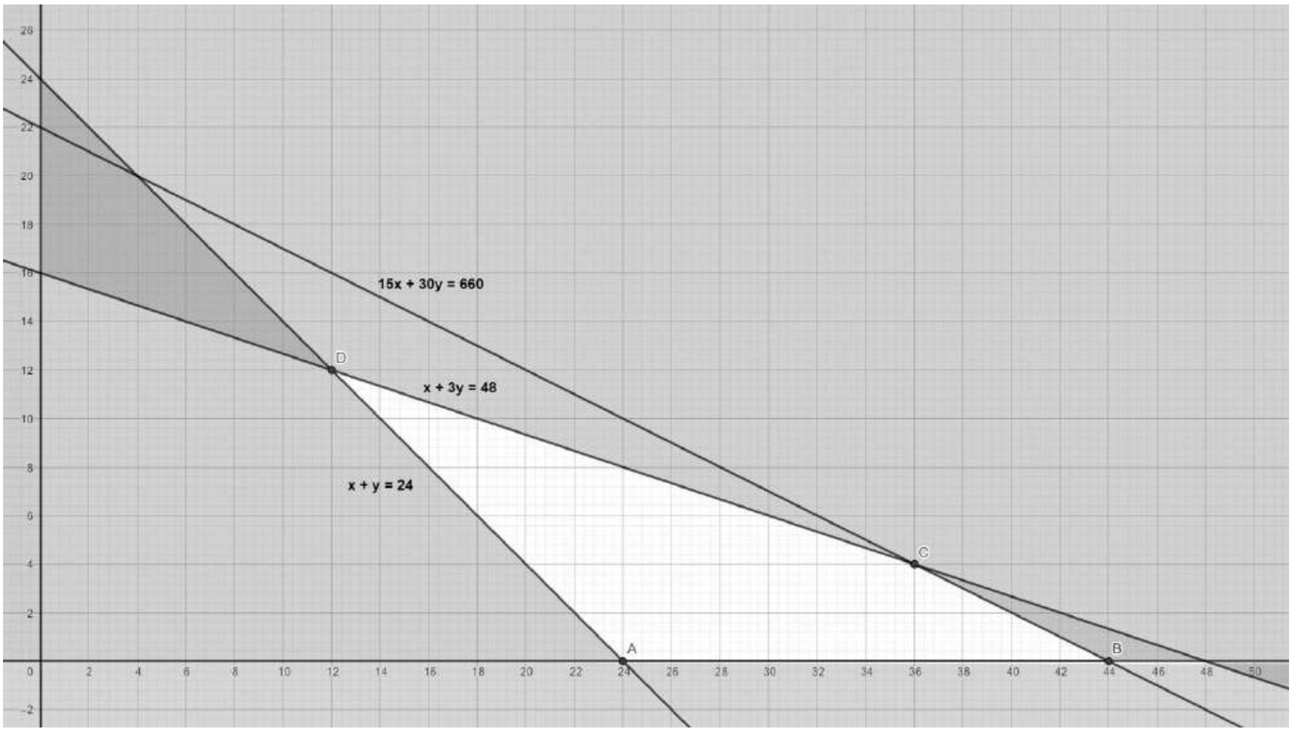
- La recta $x+y=24$ pasa por los puntos $(0,24)$ y $(24,0)$. La inecuación $x+y\geq 24$ tiene por solución el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

- La recta $x+3y=48$ pasa por los puntos $(48,0)$ y $(0,16)$. La inecuación $x+3y\leq 48$ tiene como solución el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

- La recta $15x+30y=660$ pasa por los puntos $(44,0)$ y $(0,22)$. La inecuación $15x+30y\leq 660$ tiene como solución el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco)

La región factible (en blanco) es el cuadrilátero ABCD (ver figura).

Como la función objetivo se optimiza en alguno de los vértices de la región factible, obtengamos las coordenadas de los vértices y calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos para ver en cuál de ellos es máxima:



- Vértice A: $A(24,0) \Rightarrow F(24,0) = 1200 \cdot 24 = 28800$

- Vértice B: $B(44,0) \Rightarrow F(44,0) = 1200 \cdot 44 = 52800$

- Vértice C: es la intersección de las rectas $x+3y=48$ y $15x+30y=660$:

$$\begin{cases} x+3y=48 \\ 15x+30y=660 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x-30y=-480 \\ 15x+30y=660 \end{cases} \Rightarrow 5x=180 \Rightarrow x=36 \Rightarrow y=4 \Rightarrow C(36,4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(36,4) = 1200 \cdot 36 + 2500 \cdot 4 = 53200$$

- Vértice D: es la intersección de las rectas $x+y=24$ y $x+3y=48$:

$$\begin{cases} x+y=24 \\ x+3y=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y=-24 \\ x+3y=48 \end{cases} \Rightarrow 2y=24 \Rightarrow y=12 \Rightarrow x=12 \Rightarrow D(12,12) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(12,12) = 1200 \cdot 12 + 2500 \cdot 12 = 44400$$

Se tiene entonces que la función objetivo es máxima en el vértice C y, por tanto, debe realizar 36 entrenamientos cortos y 4 largos para que el consumo total de kilocalorías sea máximo. El consumo será de 53200 kilocalorías.

2.- (*10 puntos*) En un museo las entradas cuestan 1 euro para los niños, 2 euros para los jóvenes y 5 euros para los adultos. Ayer se recaudaron un total de 600 euros y se sabe que el número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes; además, si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de niños, jóvenes y adultos que visitaron el museo.

SOLUCIÓN

Sean: “x” el número de niños, “y” el número de jóvenes y “z” el número de adultos que visitan el museo. Se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+5z=600 \\ z=2(x+y) \\ y+100=x+z \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+5z=600 \\ 2x+2y-z=0 \\ x-y+z=100 \end{array}\right\} \underset{E3-E1}{\overset{E2-2\cdot E1}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{r} x+2y+5z=600 \\ -2y-11z=-1200 \\ -3y-4z=-500 \end{array}\right\} \underset{E3\cdot 2}{\overset{E2\cdot(-3)}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{r} x+2y+5z=600 \\ 6y+33z=3600 \\ -6y-8z=-1000 \end{array}\right\} \overset{E3+E2}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+5z=600 \\ 6y+33z=3600 \\ 25z=2600 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{2600}{25}=104 \ , \ y=\frac{3600-33\cdot 104}{6}=\frac{168}{6}=28 \ , \ x=600-2\cdot 28-5\cdot 104=24$$

Es decir, asisten al museo 24 niños, 28 jóvenes y 104 adultos.

3.- (*10 puntos*) Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+12}{x-1}$$

Calcular:

a.- (*1 punto*) Dominio de f.

b.- (*3 puntos*) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x)<0$?

c.- (*2 puntos*) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d.- (*4 puntos*) Máximos y mínimos relativos de f.

SOLUCIÓN

a) Es una función racional. Su dominio son todos los números reales excepto los que anulen al denominador. Por tanto: $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

b) Se comprueba que $x^2-4x+12>0 \ \forall x$ (al resolver la ecuación $x^2-4x+12=0$ comprobamos que no tiene soluciones lo que significa que la parábola es toda positiva o toda negativa. Basta con sustituir x por 0, por ejemplo, para saber que es positiva).
Entonces, el signo de f(x) depende del signo del denominador:

$$f(x)<0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)$$

c) ▪ Asíntotas verticales: $x=1$ pues $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+12}{x-1}=\infty$

▪ Asíntotas horizontales: no tiene pues $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+12}{x-1}=\infty$

▪ Asíntotas oblicuas: $y=mx+n$

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-4x+12}{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+12}{x^2-x}=1 \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+12}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+12-x^2+x}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-3x+12}{x-1}\right)=-3 \end{array}\right| \Rightarrow y=x-3$$

d) $f'(x)=\frac{(2x-4)(x-1)-(x^2-4x+12)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-4x+4-x^2+4x-12}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}= \begin{cases} x=-2 \\ x=4 \end{cases} \text{(puntos críticos)}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-8)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f''(-2)<0 \;\Rightarrow\; x=-2 \text{ máximo relativo: } (-2,-8) \\ f''(4)>0 \;\Rightarrow\; x=4 \text{ mínimo relativo: } (4,4) \end{array}$$

4.- (*10 puntos*) Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x+1} & si\, x<-1 \\ x^3-4x^2+2x-10 & si\, -1\le x\le 4 \\ \sqrt{4x^2-7x}-2x & si\, x>4 \end{cases}$$

a.- (*3 puntos*) Estudiar la continuidad de f.

b.- (*4,5 puntos*) Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

c.- (*2,5 puntos*) Calcular:

$$\int_1^2 f(x)dx$$

SOLUCIÓN

a) Se trata de una función definida a trozos. Estudiemos su continuidad en cada uno de los intervalos de definición:

▪ En el intervalo $(-\infty,-1)$: $f(x)=\frac{3}{x+1}$ es discontinua en $x=-1$ que no pertenece al intervalo en que está definida.

▪ En el intervalo $[-1,4]$: $f(x)=x^3-4x^2+2x-10$ es continua por ser una función polinómica.

▪ En el intervalo $(4,+\infty)$: $f(x)=\sqrt{4x^2-7x}-2x$ es continua por ser diferencia de dos funciones continuas. (Debe tenerse en cuenta que $\forall x>4:\ 4x^2-7x>0$)

Estudiemos ahora la continuidad en los puntos en los que cambia la definición de la función:

▪ En $x=-1$:

$$f(-1)=(-1)^3-4(-1)^2+2(-1)-10=-1-4-2-10=-17$$

$$\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3}{x+1}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(x^3-4x^2+2x-10\right)=-17 \end{array}\right. \Rightarrow\ \nexists \lim_{x\to-1} f(x) \ \Rightarrow\ \text{la función es discontinua en } x=-1$$

▪ En $x=4$:

$$f(4)=4^3-4\cdot4^2+2\cdot4-10=-2$$

$$\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to4}\left(x^3-4x^2+2x-10\right)=-2 \\ \lim\limits_{x\to4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to4}\left(\sqrt{4x^2-7x}-2x\right)=\sqrt{64-28}-8=6-8=-2 \end{array}\right. \Rightarrow\ \exists \lim_{x\to4} f(x)=-2$$

$$\lim_{x\to4} f(x)=f(4) \ \Rightarrow\ \text{la función es continua en } x=4$$

b) Cuando $x \to +\infty$ la función que tenemos definida es $f(x)=\sqrt{4x^2-7x}-2x$. Se tiene entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-7x}-2x\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-7x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-7x}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2-7x}+2x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-7x-4x^2}{\sqrt{4x^2-7x}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7x}{\sqrt{4x^2-7x}+2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-7x}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}}+\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7}{\sqrt{4-\frac{7}{x}}+2}=\frac{-7}{4}$$

c) Entre $x=1$ y $x=2$ la función definida es $f(x)=x^3-4x^2+2x-10$.

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2\left(x^3-4x^2+2x-10\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-4\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}-10x\right]_1^2=\left(4-\frac{32}{3}+4-20\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+1-10\right)=$$

$$=-12-\frac{32}{3}+9-\frac{1}{4}+\frac{4}{3}=-3-\frac{28}{3}-\frac{1}{4}=\frac{-36-112-3}{12}=-\frac{151}{12}$$

5.- En una bolsa tenemos 8 bolas: 3 blancas, 1 roja y 4 negras. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento. Calcular:

a.- (*2 puntos*) La probabilidad de que las dos sean blancas.

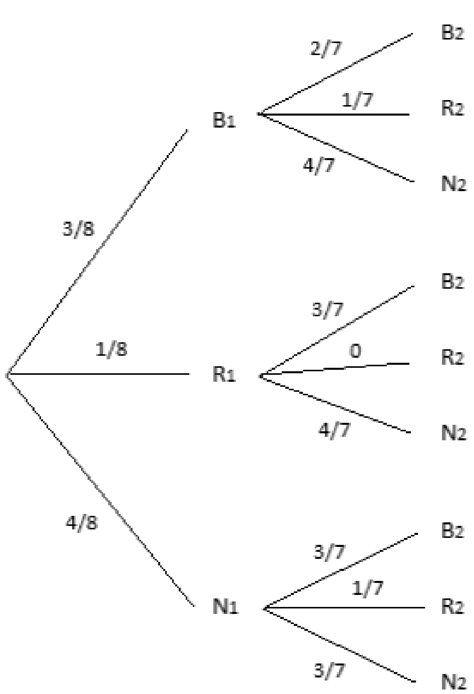
b.- (*3 puntos*) La probabilidad de que al menos una sea blanca.

c.- (*2 puntos*) La probabilidad de que las dos sean del mismo color.

d.- (*3 puntos*) Si las dos bolas son del mismo color, la probabilidad de que sean blancas.

SOLUCIÓN

Se trata de una prueba compuesta. Sea B el suceso "las dos bolas son blancas": $B=B_1\cap B_2$. Sea R el suceso "las dos bolas son rojas": $R=R_1\cap R_2$. Sea N el suceso "las dos bolas son negras": $N=N_1\cap N_2$.



A la izquierda está el diagrama en árbol de todas las situaciones posibles.

a) $p(B)=p\left(B_1\cap B_2\right)=p\left(B_1\right)\cdot p\left(B_2/B_1\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$

b) El suceso A "al menos una es blanca" es el suceso contrario al suceso "ninguna es blanca".

$$p(\overline{A})=p\left(R_1\cap R_2\right)+p\left(R_1\cap N_2\right)+p\left(N_1\cap R_2\right)+p\left(N_1\cap N_2\right)=$$

$$=0+\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{4}{8}\cdot\frac{1}{7}+\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}\;\Rightarrow\; p(A)=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$$

c) Sea C el suceso "las dos bolas son del mismo color":

$$C=B\cup R\cup N\;\Rightarrow\; p(C)=p\left(B\cup R\cup N\right)=p(B)+p(R)+p(N)=$$

$$=\frac{3}{28}+0+\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{9}{28}$$

d) La probabilidad de C es $\frac{9}{28}$ lo que significa que de cada 28 casos en 9 es C. La probabilidad de B es $\frac{3}{28}$ lo que significa que de cada 28 casos en 3 es B. Si sabemos que ocurre C, estamos entre los 9 casos en que ocurre C, luego la probabilidad de que, en este caso, ocurra B será: $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

También: $p\left(B/C\right)=\dfrac{p\left(B\cap C\right)}{p\left(C\right)}=\dfrac{p\left(B\right)\cdot p\left(C/B\right)}{p\left(C\right)}=\dfrac{3/28\cdot 1}{9/28}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

$p\left(C/B\right)=1$ porque que las dos bolas sean del mismo color si sabemos que son blancas es el suceso seguro.

6.- El ayuntamiento de una ciudad quiere estimar la proporción de hogares que tiene Internet de alta velocidad. Para ello, va a visitar una muestra aleatoria simple de hogares para saber si tienen Internet de alta velocidad y, a partir de los resultados, va a construir el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 94%.

a.- (*6 puntos*) Si quiere que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0.1, ¿qué tamaño de la muestra debe escoger?

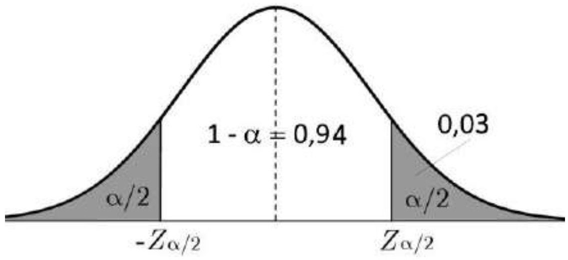
b.- (*4 puntos*) Decide tomar una muestra de 200 hogares y, de ellos, 112 tienen Internet de alta velocidad. Calcular el intervalo de confianza al 94% para la proporción de hogares de la ciudad que tienen Internet de alta velocidad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

a) Si la amplitud del intervalo de confianza ha de ser menor o igual a 0,1, el radio del intervalo o error máximo admisible, E, es de 0,05.



Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 94% :

$1-\sigma=0,94 \;\Rightarrow\; \sigma=0,06 \;\Rightarrow\; \dfrac{\alpha}{2}=0,03 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; 1-\dfrac{\alpha}{2}=1-0,03=0,97$ y mirando en la tabla, encontramos que el valor crítico correspondiente es 1,88.

Puesto que no disponemos de ninguna proporción previa, suponemos que $pr=1-pr=50\%=0,5$

Se tiene:

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{pr\cdot(1-pr)}{n}} \;\Rightarrow\; n=\left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2\cdot pr\cdot(1-pr)=\frac{1,88^2\cdot 0,5\cdot 0,5}{0,05^2}=353,44 \;\Rightarrow$$

La muestra debe ser de 354 hogares.

b) Ahora $n=200$ y $pr=\dfrac{112}{200}=0,56 \;\Rightarrow\; E=1,88\cdot\sqrt{\dfrac{0,56\cdot 0,44}{200}}=0,066$

Luego el intervalo de confianza para la proporción de hogares con Internet de alta velocidad es:

$$(0,56-0,066\ ,\ 0,56+0,066)=(0,494\ ,\ 0,626)$$

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- *(10 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, se pide:

a.- *(3 puntos)* Calcula $(B - A)^{-1}$.

b.- *(3 puntos)* Calcula la matriz X que verifica: $2X - AB = BA$.

c.- *(4 puntos)* Resuelve el sistema de ecuaciones: $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.- *(10 puntos)* Un mayorista de zapatos pone a la venta su stock, en concreto, 800 pares de botas, 1.200 pares de mocasines y 2.100 pares de zapatillas. Lanza dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en 1 par de botas, 3 pares de mocasines y 7 pares de zapatillas y se vende a 360 euros. La oferta B consiste en 2 pares de botas y 2 pares de mocasines que vende a 120 euros. Se pide:

a.- *(8 puntos)* Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada oferta que maximiza el ingreso obtenido con la venta. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- *(2 puntos)* Razona cuántos pares de botas, mocasines y zapatillas quedarán sin vender en la solución óptima.

3.- *(10 puntos)* Un grupo de jóvenes emprendedores valoran abrir una empresa y, para ello, han encargado un estudio de mercado en el que estimaron que los beneficios para los próximos años, en cientos de miles de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t) = \frac{2t - 6}{t + 4},$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a.- *(2 puntos)* ¿En qué intervalo la empresa tendrá pérdidas?

b.- *(4 puntos)* En qué momento $t \in [3,10]$ se alcanza el máximo beneficio y a cuántos euros asciende su valor. Justifica la respuesta.

c.- *(2 puntos)* ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener un beneficio de 150.000 €?

d.- *(2 puntos)* En un horizonte infinito de tiempo, ¿existe límite para el beneficio? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

4.- *(10 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{1-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ bx^2 + 2x + c & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$ donde a, b, c son parámetros reales. Se pide:

a.- *(5 puntos)* Determina los valores de los parámetros para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y $f'(-1) = -1$. Caracteriza si el extremo es máximo o mínimo.

b.- (*2 puntos)* Calcula, para los valores $a = 1,\ b = -2,\ c = 3$; $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

c.- *(3 puntos)* Calcula, para los valores $a = 1,\ b = -2,\ c = 3$; $\int_1^2 f(x)dx$.

5.- *(10 puntos)* Al terminar el bachillerato los 100 alumnos de un Centro, de las modalidades de *Ciencias* y *Artes,* planean viajar por Italia, Francia o Portugal. Entre los 55 alumnos de Ciencias se sabe que 10 quieren ir a Italia, 25 a Francia y 20 a Portugal. En el grupo de Artes hay 30 que quieren ir a Italia y 15 a Portugal. Elegido un alumno al azar, calcula:

a.- *(2,5 puntos)* La probabilidad de que quiera ir a Portugal.

b.- *(2,5 puntos)* Probabilidad de que un alumno que quiera ir a Italia sea de Artes.

c.- *(2,5 puntos)* Probabilidad de que un alumno quiera ir a Francia y sea de Ciencias.

d.- *(2,5 puntos)* Probabilidad de que un alumno de Ciencias quiera ir a Francia.

6.- *(10 puntos)* Se quiere estimar el tiempo diario de conexión a redes sociales de los universitarios. Se sabe que dicho tiempo tiene una distribución normal con desviación típica de 33 minutos (0,55 horas). Se desea construir un intervalo de confianza para la media diaria de conexión a redes sociales. Se pide:

a.- *(6 puntos)* ¿A cuántos estudiantes debemos entrevistar para garantizar que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual a 0,16 horas?

b.- *(3 puntos)* Se ha encuestado a 100 universitarios y se ha obtenido una media de 4 horas al día. Calcula el intervalo de confianza al 97% para la media poblacional.

c.- *(1 punto)* Un informe de cierto Ministerio afirma que la media del tiempo que los universitarios pasan conectados a las redes sociales es de 5 horas al día. Razona, a la vista del apartado **b.-** si hay motivos para dudar de su afirmación.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

- En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio.
- En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.
- Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 pts. Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Ejercicio 1

a) **(3 puntos)** Calcular $(B-A)$ (**0,6 ptos**) y calcular $(B-A)^{-1}$ (**2,4 ptos**). Las puntuaciones intermedias para el cálculo de la inversa son:

1. Si se ha calculado haciendo operaciones elementales: transformar cada (a_{ij}) inicial a la matriz identidad (0,6 ptos cada coeficiente).
2. Si se ha calculado aplicando la fórmula $(B-A)^{-1}=\frac{1}{|B-A|}\left(Adj(B-A)\right)^t$ las calificaciones intermedias serán: $|B-A|$ (0,5 ptos), $Adj(B-A)$ (0,9 ptos), traspuesta (0,5 ptos), y llegar al resultado (0,5 ptos).

b) **(3 puntos)** Puntuaciones intermedias:

1. Despejar X de la ecuación: $X=\frac{BA+AB}{2}$ (1 pto), calcular los productos: $BA,\ AB$ (1 pto) y realizar las operaciones $\frac{BA+AB}{2}$ (1 pto).
2. Si se ha supuesto una matriz genérica $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se valorará con (1 pto) realizar las operaciones de la izquierda de la igualdad, (1 pto) realizar las operaciones de la derecha de la igualdad y (1 pto) obtener el valor de las incógnitas a,b,c,d.

c) **(4 puntos)** Las puntuaciones intermedias son:
Calcular $rg(C)$ (1,5 ptos), concluir que se trata de un sistema compatible indeterminado (1 pto) y obtener la solución (1,5 ptos, 0,5 cada incógnita).

Ejercicio 2

a) **(8 puntos)**

i. **(1 pto)** Definir las variables de decisión y la función objetivo.
ii. **(1 pto)** Definir las tres restricciones del enunciado (0,25 ptos cada una) y la condición de no negatividad de las variables $x,y\geq 0$ (0,25 ptos).
iii. **(3 ptos)** Representar la región factible (0,5 ptos por cada una de las cinco restricciones y 0,5 ptos por la intersección de todas ellas).

Para evaluar el cálculo de la solución óptima (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un problema mucho más sencillo que el original) se procederá como sigue:

1. Si se ha optado por evaluar la función objetivo en los vértices:

i. **(1,5 ptos)** Calcular las coordenadas de los vértices (cada vértice 0,3).
ii. **(1 pto)** Evaluar la función objetivo en los vértices (cada vértice 0,2).
iii. **(0,5 ptos)** Determinar el vértice donde se alcanza el máximo (0,25) y su valor (0,25).

2. Si se ha optado por curvas de nivel:

i. **(2 ptos)** Representar dos rectas de nivel e identificar la dirección de crecimiento (la primera recta 1 pto, una paralela 0,5 ptos, identificar la dirección de mejora 0,5 ptos).
ii. **(0,5 ptos)** Razonar gráficamente el vértice solución.
iii. **(0,5 ptos)** Determinar analíticamente el máximo (0,25 ptos) y su valor (0,25 ptos).

b) **(2 puntos)** Razonamiento (1 pto) y la respuesta (1 pto).

Ejercicio 3

a) **(2 puntos)** Identificar la pregunta con el signo $B(t) < 0$ (1 pto) y resolver la inecuación (1 pto).
b) **(4 puntos)** Calcular la derivada de $B(t)$ (1,5 ptos), signo $B'(t) > 0$ (1 pto), calcular la coordenada t del máximo absoluto (1 pto). Calcular, en la unidad solicitada (0,1 ptos), el beneficio máximo (0,4 ptos).
c) **(2 puntos)** Expresar que hay que resolver $B(t) = 1{,}5$ (1 pto) y resolver la ecuación (1 pto).
d) **(2 puntos)** Identificar la pregunta con $\lim_{t \to \infty} B(t)$ (1 pto) y calcular dicho límite (1 pto).

Ejercicio 4

a) (**5 puntos**)
   i. **(3 ptos)** Condición de continuidad en $x = 0$ (1 pto), condición de extremo (1 pto) y condición en la derivada (1 pto).
   ii. **(1 pto)** Calcular correctamente los coeficientes a, b, c.
   iii. **(1 pto)** Caracterizar el extremo.

b) **(2 puntos)** Cada límite se calificará con 1 pto.
c) **(3 puntos)**
   (1,5 ptos) Cálculo de primitivas (0,5 ptos cada sumando).
   (1,5 ptos) Aplicar la Regla de Barrow y llegar al resultado (0,5 ptos cada sumando).

Ejercicio 5

Para obtener la máxima calificación no se necesita tanto detalle como aparece en la pauta de corrección. La falta de notación puede ser sustituida por la explicación, diagramas o tablas**. Si la respuesta no es correcta** o es incompleta pueden aplicarse las siguientes calificaciones intermedias.

a) **(2,5 puntos)**
   i. **(1 pto)** Definir los sucesos I= Viajar a Italia, P= Viajar a Portugal, F= Viajar a Francia, A= alumno de artes, C= alumno de ciencias.
   ii. **(0,5 ptos)** Llevar datos a una tabla de contingencia.
   iii. **(1 pto)** Calcular $P(P)$.
b) **(2,5 puntos)**
   i. **(1 pto)** Expresar la probabilidad a calcular como $P(A/I)$.
   ii. **(1,5 ptos)** Calcular $P(A/I)$.
c) **(2,5 puntos)**
   i. **(1 pto)** Expresar la probabilidad a calcular como $P(F \cap C)$.
   ii. **(1,5 ptos)** Calcular $P(F \cap C)$.
d) **(2,5 puntos)**
   i. **(1 pto)** Expresar la probabilidad a calcular como $P(F/C)$.
   ii. **(1,5 ptos)** Calcular $P(F/C)$.

Ejercicio 6

a) **(6 puntos)**
   i. **(1,5 ptos)** Saber qué cuantil buscar.
   ii. **(1,5 ptos)** Calcularlo.
   iii. **(3 ptos)** Poner la fórmula del error (1,5 ptos). Sustituir y calcular (1,5 ptos).

   Si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior, se restan 0,5 ptos. Si el cálculo se realiza tomando el error (semiamplitud) como 0,16 h. en vez de 0,08 h., se resta 1 pto.
b) **(3 puntos)**
   i. **(1,5 ptos)** Calcular el error (semiamplitud del intervalo).
   En esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado **a.-**, aunque no lo sea.
   ii. **(1,5 ptos)** Poner la fórmula del intervalo de confianza y calcularlo.
c) **(1 punto)** Es suficiente con argumentar que, al no estar el valor 5 dentro del intervalo, hay motivos para dudar –con los datos del problema- de la afirmación del Ministerio.

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- *(10 puntos)* Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, se pide:

a.- *(3 puntos)* Calcula $(B-A)^{-1}$.

b.- *(3 puntos)* Calcula la matriz X que verifica: $2X-AB=BA$.

c.- *(4 puntos)* Resuelve el sistema de ecuaciones: $C\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN

a) $B-A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

$$|B-A|=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-8\neq 0 \;\Rightarrow\; \exists(B-A)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{adjunta}]{\text{Matriz}}\begin{pmatrix}-1 & -4\\ -2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{traspuesta}]{\text{Matriz}}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -4 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{inversa}]{\text{Matriz}}\begin{pmatrix}1/8 & 1/4\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;(B-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1/8 & 1/4\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

▪ También podríamos haber utilizado el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 2 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{F_1\leftrightarrow F_2}{\approx}\left(\begin{array}{cc|cc}4 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{array}\right)\overset{\substack{F_1:4\\ F_2:2}}{\approx}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1/4 & 0 & 1/4\\ 0 & 1 & 1/2 & 0\end{array}\right)\overset{F_1+\frac{1}{4}F_2}{\approx}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1/8 & 1/4\\ 0 & 1 & 1/2 & 0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;(B-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1/8 & 1/4\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

b) $2X-AB=BA \;\Rightarrow\; 2X=BA+AB \;\Rightarrow\; X=\frac{1}{2}(BA+AB)$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ -1 & 5\end{pmatrix}\quad;\quad A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 6 & -1\end{pmatrix}$$

Luego: $X=\frac{1}{2}(BA+AB)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}-3 & 6\\ -1 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 1\\ 6 & -1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 7\\ 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 7/2\\ 5/2 & 2\end{pmatrix}$

c) Es un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}x+y=0\\ 2x+y+z=0\\ -x+y-2z=0\end{cases}$$

Utilicemos el método de Gauss para triangular la matriz de los coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_3+F_1}{\overset{F_2-2F_1}{\approx}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{F_3+2F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}=2 \Rightarrow \text{ sistema compatible indeterminado}$$

El sistema dado es equivalente al sistema $\left\{ \begin{array}{l} x+y \quad\;\; =0 \\ \quad -y+z=0 \end{array} \right. \Rightarrow z=\lambda \;,\; y=\lambda \;,\; x=-\lambda$

2.- *(10 puntos)* Un mayorista de zapatos pone a la venta su stock, en concreto, 800 pares de botas, 1.200 pares de mocasines y 2.100 pares de zapatillas. Lanza dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en 1 par de botas, 3 pares de mocasines y 7 pares de zapatillas y se vende a 360 euros. La oferta B consiste en 2 pares de botas y 2 pares de mocasines que vende a 120 euros. Se pide:

a.- *(8 puntos)* Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada oferta que maximiza el ingreso obtenido con la venta. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- *(2 puntos)* Razona cuántos pares de botas, mocasines y zapatillas quedarán sin vender en la solución óptima.

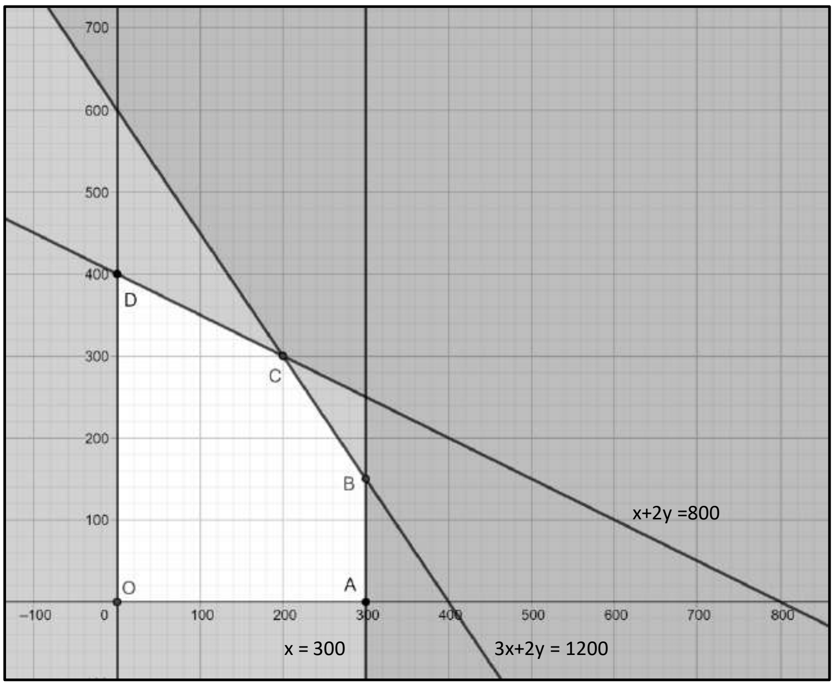
SOLUCIÓN

a) Es un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

Lotes	Número	Botas	Mocasines	Zapatillas	Ingresos
A	x	x	3x	7x	360x
B	y	2y	2y	---	120y
Restricciones:	$x\geq 0$; $y\geq 0$	$x+2y\leq 800$	$3x+2y\leq 1200$	$7x\leq 2100$	$F(x,y)=360x+120y$

Se trata entonces de maximizar la función objetivo $F(x,y)=360x+120y$ teniendo en cuenta el conjunto de restricciones: $\{\; x\geq 0,\; y\geq 0,\; x+2y\leq 800,\; 3x+2y\leq 1200\;,\; 7x\leq 2100 \;\}$.

Construyamos la región factible, conjunto de los puntos del plano que verifican las inecuaciones del conjunto de restricciones:



− La recta de ecuación $x=0$ es el eje de ordenadas. La inecuación $x\geq 0$ tiene como solución el semiplano de la derecha (en blanco). La recta $y=0$ es el eje de abscisas y la inecuación $y\geq 0$ tiene como solución el semiplano superior (en blanco).

− La recta $x+2y=800$ pasa por los puntos $(0\,,400)$ y $(800\,,0)$. La inecuación $x+2y\leq 800$ tiene como solución el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

− La recta $3x+2y=1200$ pasa por los puntos $(0\,,600)$ y $(400\,,0)$. La inecuación $3x+2y\leq 1200$ tiene como solución el semiplano al que pertenece el origen (en blanco)

– La recta $7x = 2100 \Leftrightarrow x = 300$ es la recta paralela al eje de ordenadas que pasa por $(300,0)$. La solución de $7x \le 2100$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

La región factible (en blanco) es el pentágono OABCD.
La función objetivo se optimiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos las coordenadas de los vértices y calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos para ver en cuál de ellos es máxima:

– $O(0,0) \Rightarrow F(0,0) = 0$

– $A(300,0) \Rightarrow F(300,0) = 108000$

– Vértice B: es la intersección de las rectas $x = 300$ y $3x + 2y = 1200$

$$\begin{cases} x = 300 \\ 3x + 2y = 1200 \end{cases} \Rightarrow y = 150 \Rightarrow B(300,150) \Rightarrow F(300,150) = 126000$$

– Vértice C: intersección de las rectas $3x + 2y = 1200$ y $x + 2y = 800$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1200 \\ x + 2y = 800 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = 400 \Rightarrow x = 200 \,,\, y = 300 \Rightarrow C(200,300) \Rightarrow F(200,300) = 108000$$

– Vértice $D(0,400) \Rightarrow F(0,400) = 48000$

La función objetivo es máxima en el vértice B y, por tanto, los ingresos son máximos cuando vende 300 lotes de la oferta A y 150 lotes de la oferta B. Los ingresos que obtiene son de 126000 euros.

b) Al vender 300 lotes de la oferta A incluye 300 pares de botas, 900 pares de mocasines y 2100 pares de zapatillas. La venta de 150 lotes de la oferta B incluye 300 pares de botas y 300 pares de mocasines. Vende por tanto 600 pares de botas y le quedan 200 pares sin vender, vende 1200 pares de mocasines por lo que no le sobra ninguno y 2100 pares de zapatillas y tampoco le sobra ninguno.

3.- *(10 puntos)* Un grupo de jóvenes emprendedores valoran abrir una empresa y, para ello, han encargado un estudio de mercado en el que estimaron que los beneficios para los próximos años, en cientos de miles de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t) = \frac{2t - 6}{t + 4},$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a.- *(2 puntos)* ¿En qué intervalo la empresa tendrá pérdidas?

b.- *(4 puntos)* En qué momento $t \in [3,10]$ se alcanza el máximo beneficio y a cuántos euros asciende su valor. Justifica la respuesta.

c.- *(2 puntos)* ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener un beneficio de 150.000 €?

d.- *(2 puntos)* En un horizonte infinito de tiempo, ¿existe límite para el beneficio? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

SOLUCIÓN

a) $\frac{2t-6}{t+4} < 0$ puesto que $t > 0$ $(y\ t + 4 > 0)$ debe ser $2t - 6 < 0 \Rightarrow t < 3$ es decir, tiene pérdidas en los tres primeros años.

b) El máximo beneficio lo alcanzará en algún máximo relativo (si lo hubiera en el intervalo de estudio) o en los extremos del intervalo.

$B'(t) = \frac{2(t+4) - (2t-6)}{(t+4)^2} = \frac{14}{(t+4)^2} > 0 \ \forall t \Rightarrow$ la función es creciente. Alcanzará su máximo en el extremo superior del intervalo (a los 10 años) y será de 100000 euros : $B(10) = \frac{14}{14} = 1$

c) $\dfrac{2t-6}{t+4}=1{,}5 \;\Rightarrow\; 2t-6=1{,}5t+6 \;\Rightarrow\; 0{,}5t=12 \;\Rightarrow\; t=24$ es decir, a los 24 años.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2t-6}{t+4}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2t}{t}-\frac{6}{t}}{\frac{t}{t}+\frac{4}{t}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\frac{6}{t}}{1+\frac{4}{t}}=2$

luego sí existe límite para el beneficio y es de 200000 euros

4.- *(10 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{a}{1-x} & \text{si} \quad x\le 0\\ bx^2+2x+c & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$ donde a, b, c son parámetros reales. Se pide:

a.- *(5 puntos)* Determina los valores de los parámetros para que $f(x)$ sea continua en $x=0$, la función tenga un extremo relativo en $x=1$ y $f'(-1)=-1$. Caracteriza si el extremo es máximo o mínimo.

b.- *(2 puntos)* Calcula, para los valores $a=1,\ b=-2,\ c=3$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

c.- *(3 puntos)* Calcula, para los valores $a=1,\ b=-2,\ c=3$; $\int_1^2 f(x)dx$.

SOLUCIÓN

a) ▪ Para que la función sea continua en $x=0$ debe ser $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a}{1-x}=a\\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(bx^2+2x+c\right)=c\end{array}\right| \;\Rightarrow\; a=c$$

▪ En $x=1$ la función definida es $f(x)=bx^2+2x+c$. Si en $x=1$ hay un extremo relativo, debe ser $f'(1)=0$: $\quad f'(x)=2bx+2 \;\Rightarrow\; f'(1)=2b+2=0 \;\Rightarrow\; b=-1$

Una vez obtenido el valor de b, podemos caracterizar el extremo relativo en $x=1$:
$f''(x)=2b=-2<0 \;\Rightarrow\; x=1$ es un máximo relativo.

▪ En $x=-1$ la función definida es

$f(x)=\dfrac{a}{1-x} \;\Rightarrow\; f'(x)=\dfrac{-a\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{a}{(1-x)^2} \;\Rightarrow\; f'(-1)=\dfrac{a}{4}=-1 \;\Rightarrow\; a=-4$ y también $c=-4$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-x}=0^+$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^2+2x+3\right)=-\infty$

c) En el intervalo $[1,2]$ la función definida es $f(x)=-2x^2+2x+3$.

$$\int_1^2\left(-2x^2+2x+3\right)dx=\left[-\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+3x\right]_1^2=\left(-\frac{16}{3}+4+6\right)-\left(-\frac{2}{3}+1+3\right)=-\frac{14}{3}+6=\frac{4}{3}$$

5.- *(10 puntos)* Al terminar el bachillerato los 100 alumnos de un Centro, de las modalidades de *Ciencias* y *Artes*, planean viajar por Italia, Francia o Portugal. Entre los 55 alumnos de Ciencias se sabe que 10 quieren ir a Italia, 25 a Francia y 20 a Portugal. En el grupo de Artes hay 30 que quieren ir a Italia y 15 a Portugal. Elegido un alumno al azar, calcula:

a.- *(2,5 puntos)* La probabilidad de que quiera ir a Portugal.

b.- *(2,5 puntos)* Probabilidad de que un alumno que quiera ir a Italia sea de Artes.

c.- *(2,5 puntos)* Probabilidad de que un alumno quiera ir a Francia y sea de Ciencias.

d.- *(2,5 puntos)* Probabilidad de que un alumno de Ciencias quiera ir a Francia.

SOLUCIÓN

Cada alumno tiene asociados dos caracteres: la modalidad de estudios (Ciencias y Artes) y el país al que prefieren viajar. Organizaremos los datos en una tabla de doble entrada (tabla de contingencia):

	Italia (I)	**Francia (F)**	**Portugal (P)**	**TOTAL**
Ciencias (C)	10	25	20	55
Artes (A)	30	0	15	45
TOTAL	40	25	35	100

a) $p(P)=\dfrac{35}{100}=0,35$

b) Entre los 40 que han preferido Italia, hay 30 alumnos de Artes: $p(A/I)=\dfrac{30}{40}=0,75$

c) De entre los 100 alumnos hay 25 que sean de Ciencias y quieran viajar a Francia:

$$p(F\cap C)=\frac{25}{100}=0,25$$

d) Entre los 55 alumnos de Ciencias, 25 quieren viajar a Francia: $p(F/C)=\dfrac{25}{55}=0,45$

6.- *(10 puntos)* Se quiere estimar el tiempo diario de conexión a redes sociales de los universitarios. Se sabe que dicho tiempo tiene una distribución normal con desviación típica de 33 minutos (0,55 horas). Se desea construir un intervalo de confianza para la media diaria de conexión a redes sociales. Se pide:

a.- *(6 puntos)* ¿A cuántos estudiantes debemos entrevistar para garantizar que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual a 0,16 horas?

b.- *(3 puntos)* Se ha encuestado a 100 universitarios y se ha obtenido una media de 4 horas al día. Calcula el intervalo de confianza al 97% para la media poblacional.

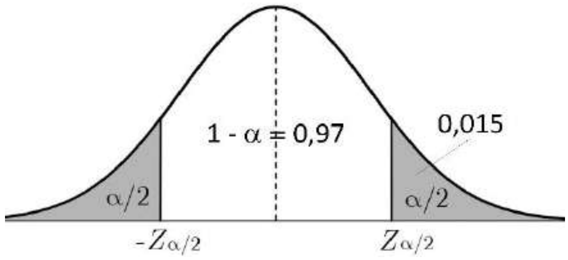
c.- *(1 punto)* Un informe de cierto Ministerio afirma que la media del tiempo que los universitarios pasan conectados a las redes sociales es de 5 horas al día. Razona, a la vista del apartado **b.-** si hay motivos para dudar de su afirmación.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

a) Si la amplitud del intervalo de confianza ha de ser menor o igual a 0,16 horas, el radio del intervalo o error máximo admisible, E, es de $0,16:2=0,08$ horas.

$E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ donde $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 97%, $\sigma=0,55$ horas es la desviación típica de la población y n es el tamaño de la muestra.



Se tiene:

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}=\frac{\sigma\cdot z_{\alpha/2}}{E} \Rightarrow n=\left(\frac{\sigma\cdot z_{\alpha/2}}{E}\right)^2$$

Obtengamos $z_{\alpha/2}$:

$$1-\alpha=0,97 \Rightarrow \alpha=0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0,015 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1-0,015=0,985$ y mirando en la tabla, encontramos que el valor crítico que corresponde es 2,17.

Tenemos entonces: $n=\left(\frac{\sigma\cdot z_{\alpha/2}}{E}\right)^2=\left(\frac{0,55\cdot 2,17}{0,08}\right)^2=222,57 \Rightarrow$ el tamaño de la muestra debe ser de 223 universitarios.

b) La media de la muestra es $\overline{X}=4$ horas. El radio del intervalo de confianza es: $E=2,17\cdot\frac{0,55}{\sqrt{100}}=0,12$

Luego el intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(4-0,12\ ,\ 4+0,12)=(3,88\ ,\ 4,12)$$

c) El dato sobre la media aportada por el informe está fuera del intervalo de confianza por lo que no es aceptable la hipótesis formulada por el Ministerio.

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Se pide:

a.- *(3 puntos)* Determina los valores del parámetro m para que A tenga inversa. Para $m = 2$, calcula A^{-1}.

b.- *(7 puntos)* Discute y resuelve, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones:

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.- (*10 puntos*) El nutricionista de una fábrica de piensos aconseja a los granjeros dedicados a la cría de cerdos una ingesta de, al menos, 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal. El nutricionista sabe que cada kilo de soja proporciona 5 unidades de proteína y 3 unidades de grasa y cada kilo de maíz proporciona 1 u. de proteína y 3 u. de grasa. Los precios del kilo de soja y maíz son 3€ y 2€, respectivamente y el granjero dispone de un presupuesto de 60€.

a.- *(8 puntos)* Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular la cantidad de soja y maíz que deben consumir los cerdos de manera que se minimice el coste de la alimentación. Obtén dicho valor mínimo.

b.- *(2 puntos)* Si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg. de soja y 15 kg. de maíz?

3.- *(10 puntos)* Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^3 - 6x^2 + 9x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a.- *(3 puntos)* Estudia si $f(x)$ es continua en $x = 0$, ¿$f(x)$ es continua en la recta real?

b.- *(3 puntos)* Halla los mínimos y máximos absolutos de $f(x)$ en $x \in [1,4]$.

c.- *(1 punto)* Analiza la concavidad ($\cap$) - convexidad ($\cup$) de $f(x)$ cuando $x > 0$.

d.- *(3 puntos)* Calcula $\int_1^2 f(x)dx$.

4.- *(10 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 16}{x + 3}$$

a.- *(4 puntos)* Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b.- *(6 puntos)* Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en su dominio.

5.- *(10 puntos)* Los profesores Alvarado, Benítez y Cadiñanos, han corregido el 25%, 30% y 45%, respectivamente, de los exámenes de una oposición. Los porcentajes de cometer algún fallo en la corrección son 1%, 2% y 3%, respectivamente. Si se selecciona un examen al azar:

a.- *(3 puntos)* Calcula la probabilidad de que esté mal corregido.

b.- *(3 puntos)* El examen tiene un error de corrección, calcula la probabilidad de haber sido corregido por Benítez.

c.- *(4 puntos)* El examen tiene un error de corrección ¿qué corrector tiene mayor probabilidad de haber corregido mal el examen?

6.- *(10 puntos)* Se desea estimar la proporción de estudiantes que viven en un colegio mayor a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de estudiantes.

a.- *(6 puntos)* Por estudios previos se sabe que el porcentaje de estudiantes alojados en un colegio mayor es del 20%. ¿De qué tamaño debemos elegir la muestra para que el error de la estimación de la proporción sea menor de 0,1 con un nivel de confianza del 98%?

b.- *(4 puntos)* Se toma una muestra de 50 estudiantes y se observa que 12 se alojan en un colegio mayor, calcula el intervalo de confianza al 98% para la proporción de estudiantes alojados en un colegio mayor.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

- En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio.
- En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.
- Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 pts. Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Ejercicio 1

a) (**3 puntos**) Determinar los valores de m para que la matriz tenga inversa se valorará con (1 pto) y calcular A^{-1} (2 ptos). Las puntuaciones intermedias para el cálculo de la inversa serán:

1. Si se ha calculado haciendo operaciones elementales: transformar cada (a_{ij}) inicial a la matriz identidad (0,5 ptos cada coeficiente).
2. Si se ha calculado aplicando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(Adj(A)\right)^t$ las calificaciones intermedias serán: $|A|$ (0,1 ptos), $Adj(A)$ (0,9 ptos), traspuesta (0,5 ptos), y llegar al resultado (0,5 ptos).

b) **(7 puntos)** Discusión (**3 ptos**) y resolución (**4 ptos**). Las puntuaciones intermedias son:

(**3 ptos**) Discusión:
(1 pto) Calcular $rg(B)$.
(1 pto) Calcular rango de matriz ampliada.
(1 pto) Valor de m que hace incompatible el sistema (0,5 ptos) y valores de m para SCD (0,5 ptos).

(**4 ptos**) Resolución:
Método de Gauss:
(1 pto) Escalonar las matrices.
(3 ptos) Obtener la solución (1 pto determinar el valor de cada incógnita).

Regla de Cramer:
(1 pto) Plantear la solución aplicando la regla de Cramer.
(3 ptos) Obtener la solución por determinantes (1 pto determinar el valor de cada incógnita).

Ejercicio 2

a) **(8 puntos)**

i. **(1 pto)** Definir las variables de decisión y la función objetivo.
ii. **(1 pto)** Definir las restricciones del enunciado (0,25 ptos cada una) y la condición de no negatividad de las variables $x, y \geq 0$ (0,25 ptos).
iii. **(3 ptos)** Representar cada una de las cinco restricciones (0,5 ptos cada una) y la intersección de todas ellas (0,5 ptos).

Para evaluar el cálculo de la solución óptima (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un problema mucho más sencillo que el original) se procederá como sigue:

Si se ha optado por evaluar la función objetivo en los vértices:

i. **(1,5 ptos)** Calcular las coordenadas de los vértices (cada vértice 0,3 ptos).
ii. **(1 pto)** Evaluar la función objetivo en los vértices (cada vértice 0,2 ptos).
iii. **(0,5 ptos)** Determinar el vértice donde se alcanza el mínimo (0,25 ptos) y su valor (0,25 ptos).

Si se ha optado por curvas de nivel:

i. **(2 ptos)** Representar dos rectas de nivel e identificar la dirección de crecimiento (la primera recta 1 pto, la paralela 0,5 ptos, identificar la dirección de mejora 0,5 ptos).
ii. **(0,5 ptos)** Razonar gráficamente el vértice solución.
iii. **(0,5 ptos)** Determinar analíticamente el mínimo (0,25 ptos) y su valor (0,25 ptos).

b) **(2 puntos)** El razonamiento (**1 pto**) y la respuesta correcta (**1 pto**).

Ejercicio 3

a) **(3 puntos)**
i. **(2 ptos)** Se valorará con (1 pto) el cálculo de los límites laterales y valor de $f(0)$ y (1 pto) concluir que es continua en $x = 0$ a partir del análisis anterior.
ii. (**1 pto**) La continuidad en el resto de la recta real.

b) **(3 puntos)** Las puntuaciones intermedias son: hallar la derivada de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ (0,5 ptos), puntos críticos (0,5 ptos). Calcular la coordenada x del mínimo absoluto (1 pto) y las coordenadas de los dos máximos (0,5 ptos cada uno). Si sólo han calculado los extremos relativos se calificará con 0,75 ptos el mínimo y 0,75 ptos el máximo.

c) **(1 punto)** No se ofrecen calificaciones intermedias.

d) **(3 puntos)**
i. **(1,5 ptos)** Cálculo de primitivas (0,5 ptos cada sumando).
ii. **(1,5 ptos)** Aplicar la Regla de Barrow y llegar al resultado (0,5 ptos cada sumando).

Ejercicio 4

a) **(4 puntos)** Dominio (0,5 ptos), estudio de asíntotas horizontales (0,75 ptos), estudio de asíntotas verticales (0,75 ptos). Estudio de asíntotas oblicuas (1 pto para el término m y 1 pto para n).

b) **(6 puntos)** Calcular $f'(x)$ (2 ptos), calcular los puntos críticos (1 pto) y analizar el carácter de los puntos críticos (1,5 ptos cada uno).

Ejercicio 5

Para obtener la máxima calificación no se necesita tanto detalle como aparece en la pauta de corrección. La falta de notación puede ser sustituida por la explicación, diagramas o tablas**.**

a) **(3 puntos)**
i. **(1 pto)** Definir los sucesos que intervienen en el enunciado: *A* = examen corregido por Alvarado, *B* = examen corregido por Benítez, *C* = examen corregido por Cadiñanos.
ii. **(1 pto)** Identificar que hay que aplicar el teorema de la probabilidad total y extraer del enunciado las probabilidades.
iii. **(1 pto)** Aplicar la fórmula y obtener el resultado.

b) **(3 puntos)**
i. **(1 pto)** Expresar la probabilidad a calcular como $P(B/M)$.
ii. **(1 pto)** Identificar que hay que aplicar el teorema de Bayes y extraer del enunciado los datos.
iii. **(1 pto)** Aplicar la fórmula y obtener el resultado.

c) **(4 puntos)**
i. **(1 pto)** Identificar que hay que calcular $P(A/M), P(C/M)$ y comparar el valor con $P(B/M)$.
ii. **(2 ptos)** Calcular $P(A/M), P(C/M)$ (1 pto cada una).
iii. **(1 pto)** Comparar resultados y concluir.

Ejercicio 6

a) **(6 puntos)**
i. **(1,5 ptos)** Saber qué cuantil buscar.
ii. **(1,5 ptos)** Calcularlo.
iii. **(3 ptos)** Poner la fórmula del error (1,5 ptos). Sustituir y calcular n (1,5 ptos).

Si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior, se restan 0,5 ptos.

b) **(4 puntos)**
i. **(1,5 ptos)** Calcular $\hat{p}$, $\hat{q}$.
ii. **(1 pto)** Calcular $Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\ \hat{q}}{n}}$ (error o semiamplitud del intervalo). En esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado **a.-**, aunque no lo sea.
iii. **(1,5 ptos)** Poner la fórmula del intervalo de confianza y calcularlo.

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & m\\ 6 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & m\\ 0 & 6 & 3\end{pmatrix}$. Se pide:

a.- *(3 puntos)* Determina los valores del parámetro m para que A tenga inversa. Para $m=2$, calcula A^{-1}.

b.- *(7 puntos)* Discute y resuelve, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones:

$$B\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

a.-La matriz A tiene inversa si $|A|\neq 0$: $\quad |A|=\begin{vmatrix}3 & m\\ 6 & 3\end{vmatrix}=9-6m=0 \;\Rightarrow\; m=\frac{9}{6}=\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; \exists A^{-1}\ \forall m\neq\frac{3}{2}$

·Para $m=2$: $\quad |A|=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 6 & 3\end{vmatrix}=9-12=-3$

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{adjunta}]{\text{Matriz}}\begin{pmatrix}3 & -6\\ -2 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{traspuesta}]{\text{Matriz}}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -6 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{inversa}]{\text{Matriz}}\begin{pmatrix}-1 & 2/3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow (A)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2/3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

b.- Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

La matriz de los coeficientes, B, y la matriz ampliada, M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & m & 1\\ 0 & 6 & 3 & 0\end{array}\right)$

Escalonemoslas matrices utilizando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & m & 1\\ 0 & 6 & 3 & 0\end{array}\right)\overset{F_3-2F_2}{=}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & m & 1\\ 0 & 0 & 3-2m & -2\end{array}\right)$$

· Si $3-2m\neq 0 \;\Leftrightarrow\; m\neq\frac{3}{2}$: $\quad rgB=rgM=3=$nº de incógnitas $\;\Rightarrow\;$ el sistema es compatible determinado: $\begin{cases}x \qquad -z=0\\ 3y+mz=1\\ (3-2m)z=-2\end{cases}\;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; z=\frac{-2}{3-2m}=\frac{2}{2m-3}\;;\; y=\frac{1-\frac{2m}{2m-3}}{3}=\frac{2m-3-2m}{3(2m-3)}=\frac{-1}{2m-3}\;;\; x=\frac{2}{2m-3}$$

·Para $m=\frac{3}{2}$: $\; rgB=2\,,\; rgM=3 \;\Rightarrow\; rgB\neq rgM \;\Rightarrow\;$ el sistema es incompatible.

2.- (*10 puntos*) El nutricionista de una fábrica de piensos aconseja a los granjeros dedicados a la cría de cerdos una ingesta de, al menos, 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal. El nutricionista sabe que cada kilo de soja proporciona 5 unidades de proteína y 3 unidades de grasa y cada kilo de maíz proporciona 1 u. de proteína y 3 u. de grasa. Los precios del kilo de soja y maíz son 3€ y 2€, respectivamente y el granjero dispone de un presupuesto de 60€.

a.- *(8 puntos)* Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular la cantidad de soja y maíz que deben consumir los cerdos de manera que se minimice el coste de la alimentación. Obtén dicho valor mínimo.

b.- *(2 puntos)* Si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg. de soja y 15 kg. de maíz?

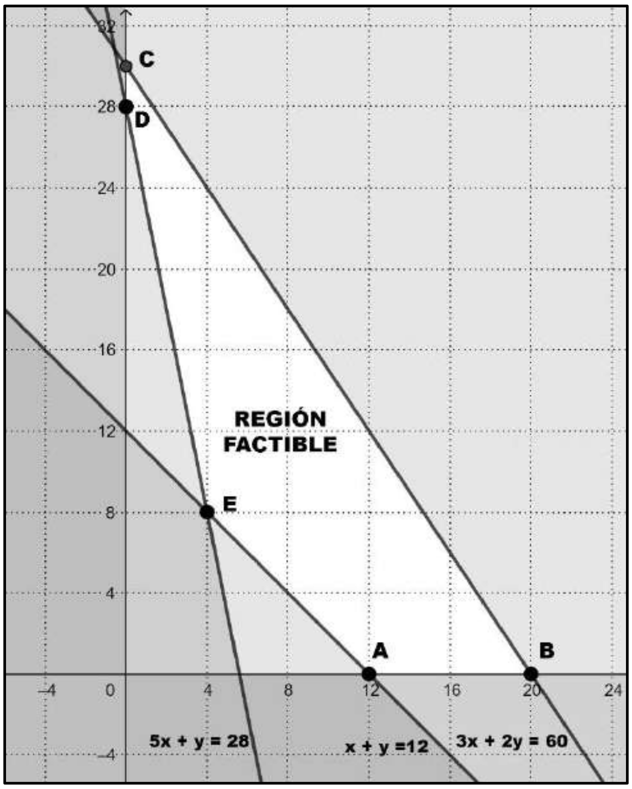
SOLUCIÓN

a.- Es un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

	Cantidad (kilos)	**Proteína**	**Grasa**	**Presupuesto**	**Coste**
Soja	x	5x	3x	3x	3x
Maíz	y	y	3y	2y	2y
Restricciones:	$x \geq 0$; $y \geq 0$	$5x + y \geq 28$	$3x + 3y \geq 36$	$3x + 2y \leq 60$	$F(x,y) = 3x + 2y$

Se trata entonces de minimizar la función objetivo $F(x,y) = 3x + 2y$ teniendo en cuenta el conjunto de restricciones: $\{\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 5x + y \geq 28,\ 3x + 3y \geq 36\ , 3x + 2y \leq 60\ \}$.

Construyamos la región factible, conjunto de los puntos del plano que verifican las inecuaciones del conjunto de restricciones:



− La recta de ecuación $x = 0$ es el eje de ordenadas. La inecuación $x \geq 0$ tiene como solución el semiplano de la derecha (en blanco). La recta $y = 0$ es el eje de abscisas y la inecuación $y \geq 0$ tiene como solución el semiplano superior (en blanco).

− La recta $5x + y = 28$ pasa por los puntos $(0,28)$ y $(4,8)$. La inecuación $5x + y \geq 28$ tiene como solución el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

− La recta $3x + 3y = 36 \Leftrightarrow x + y = 12$ pasa por los puntos $(0,12)$ y $(12,0)$. La inecuación $3x + 3y \geq 36$ tiene como solución el semiplano al que no pertenece el origen (en blanco)

− La recta $3x + 2y = 60$ pasa por los puntos $(20,0)$ y $(4,24)$. La solución de $3x + 2y \leq 60$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

La región factible (en blanco) es el pentágono ABCDE.
La función objetivo se optimiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos las coordenadas de los vértices y calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos para ver en cuál de ellos es mínima:

– Vértice $A(12,0) \Rightarrow F(12,0)=36$ €

– Vértice $B(20,0) \Rightarrow F(20,0)=60$ €

– Vértice C: es la intersección de las rectas $x=0$ y $3x+2y=60$: $C(0,30) \Rightarrow F(0,30)=60$ €

– Vértice $D(0,28) \Rightarrow F(0,28)=56$ €

– Vértice E: es la intersección de las rectas $5x+y=28$ y $x+y=12$

$$\begin{cases} 5x+y=28 \\ x+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow 4x=16 \Rightarrow x=4\ ,\ y=8 \Rightarrow E(4,8) \Rightarrow F(4,8)=28\text{ €}$$

La función objetivo es mínima en el vértice E y, por tanto, el costees mínimo cuando los cerdos consumen 4 kilos de soja y 8 kilos de maíz. El coste mínimo es de 28 euros.

b.- La dieta más cara es de 60 euros. Si adquiere 12 kilos de soja y 15 kilos de maíz gastará $3\cdot12+2\cdot15=66$ € por lo que no es una solución óptima (ni siquiera factible).

3.- *(10 puntos)* Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & \text{si} \quad x<0 \\ x^3-6x^2+9x & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a.- *(3 puntos)* Estudia si $f(x)$ es continua en $x=0$, ¿$f(x)$ es continua en la recta real?

b.- *(3 puntos)* Halla los mínimos y máximos absolutos de $f(x)$ en $x\in[1,4]$.

c.- *(1 punto)* Analiza la concavidad ($\cap$) - convexidad ($\cup$) de $f(x)$ cuando $x>0$.

d.- *(3 puntos)* Calcula $\int_1^2 f(x)dx$.

SOLUCIÓN

a.- $\cdot\, f(0)=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(-x^2-2x\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(x^3-6x^2+9x\right)=0 \end{array}\right| \Rightarrow \lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x) \Rightarrow \exists\lim_{x\to0} f(x)=0$$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0) \Rightarrow f(x)$ es continua en $x=0$

$\cdot\, f(x)$ es continua en la recta real pues es continua en $(-\infty,0)$ y en $(0,+\infty)$ por ser funciones polinómicas las definidas en dichos intervalos y serlo también en $x=0$ como ya se ha visto.

b.- En el intervalo $[1,4]$ la función que está definida es $f(x)=x^3-6x^2+9x$. Es una función continua que alcanzará sus máximos y mínimos absolutos en sus extremos relativos o en los extremos del intervalo.

$\cdot\, f(1)=1-6+9=4 \quad ; \quad f(4)=64-96+36=4$

· Extremos relativos:

$$f'(x)=3x^2-12x+9=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm2}{2}=\begin{cases}1\\3\end{cases} \text{ (valores críticos)}$$

$$f''(x)=6x-12 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} f''(1)=-6<0 \Rightarrow x=1 \text{ es un máximo relativo: } f(1)=4 \\ f''(3)=6>0 \Rightarrow x=3 \text{ es un mínimo relativo: } f(3)=27-54+27=0 \end{array}\right.$$

Por lo tanto, en el intervalo $[1,4]$ la función alcanza su mínimo absoluto en $x=3$ de valor $f(3)=0$ y su máximo absoluto en $x=1$ y en $x=4$ de valor $f(1)=f(4)=4$.

c.- $\forall x>0$: $f''(x)=6x-12=0 \Rightarrow x=2$

Tenemos: · En $(0,2)$: $f''<0 \Rightarrow$ la función es convexa

· En $(2,+\infty)$: $f''>0 \Rightarrow$ la función es cóncava

d.- Entre $x=1$ y $x=2$ la función definida es $f(x)=x^3-6x^2+9x$:

$$\int_1^2 \left(x^3-6x^2+9x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-6\cdot\frac{x^3}{3}+9\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^2=(4-16+18)-\left(\frac{1}{4}-2+\frac{9}{2}\right)=8-\frac{19}{4}=\frac{13}{4}$$

4.- *(10 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\frac{2x^2-16}{x+3}$$

a.- *(4 puntos)* Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b.- *(6 puntos)* Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en su dominio.

SOLUCIÓN

a.-·Se trata de una función racional cuyo dominio es toda la recta real excepto los valores que anulen al denominador de la fracción. En este caso: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-3\}$

· Asíntotas verticales: $x=-3$ pues $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x^2-16}{x+3}=\infty$.

Posición de la curva respecto a su asíntota: $\lim\limits_{x\to-3^-}\frac{2x^2-16}{x+3}=\frac{+}{-}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-3^+}\frac{2x^2-16}{x+3}=\frac{+}{+}=+\infty$

· Asíntotas horizontales: no tiene, pues $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-16}{x+3}=\frac{+}{-}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-16}{x+3}=\frac{+}{+}=+\infty$

· Asíntotas oblicuas: $y=mx+n$

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-16}{x+3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-16}{x^2+3x}=2 \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-16}{x+3}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-16-2x^2-6x}{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x-16}{x+3}=-6 \end{array}\right| \Rightarrow y=2x-6$$

Posición de la curva respecto a su asíntota:

$$\frac{2x^2-16}{x+3}-(2x-6)=\frac{2x^2-16-2x^2-6x+6x+18}{x+3}=\frac{2}{x+3} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x+3}=0^- \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x+3}=0^+ \end{array}\right.$$

Luego la curva está por debajo de la asíntota cuando $x\to-\infty$ y por encima cuando $x\to+\infty$.

b.- $f'(x)=\dfrac{4x(x+3)-\left(2x^2-16\right)}{(x+3)^2}=\dfrac{4x^2+12x-2x^2+16}{(x+3)^2}=\dfrac{2x^2+12x+16}{(x+3)^2}=0 \Rightarrow 2x^2+12x+16=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+8=0 \Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{-6\pm 2}{2}= \begin{cases} -4 \\ -2 \end{cases} \text{(valores críticos)}$$

Analicemos si los valores críticos son máximos o mínimos relativos:

$$f''(x)=\frac{(4x+12)(x+3)^2-\left(2x^2+12x+16\right)\cdot 2(x+3)}{(x+3)^4}$$

el signo de $f''(x)$ depende exclusivamente del signo del factor $4x+12$ pues los demás o son positivos o nulos. Se tiene entonces:

$f''(-4)<0 \Rightarrow$ En $x=-4$ la función tiene un máximo relativo: $(-4,-16)$

$f''(-2)>0 \Rightarrow$ En $x=-2$ la función tiene un mínimo relativo: $(-2,-8)$

5.- *(10 puntos)* Los profesores Alvarado, Benítez y Cadiñanos, han corregido el 25%, 30% y 45%, respectivamente, de los exámenes de una oposición. Los porcentajes de cometer algún fallo en la corrección son 1%, 2% y 3%, respectivamente. Si se selecciona un examen al azar:

a.- *(3 puntos)* Calcula la probabilidad de que esté mal corregido.

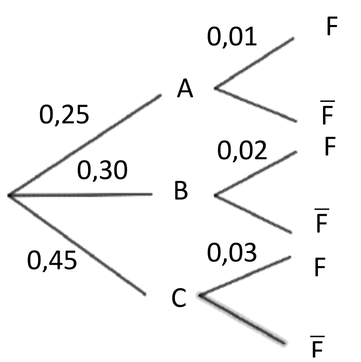
b.- *(3 puntos)* El examen tiene un error de corrección, calcula la probabilidad de haber sido corregido por Benítez.

c.- *(4 puntos)* El examen tiene un error de corrección ¿qué corrector tiene mayor probabilidad de haber corregido mal el examen?

SOLUCIÓN

Un examen puede estar corregido por el profesor Alvarado (A) con una probabilidad de 0,25, por el profesor Benítez (B) con una probabilidad de 0,30 o por el profesor Cadiñanos (C) con una probabilidad de 0,45 y puede haber un fallo (F) en su corrección o no ($\overline{F}$) cuya probabilidad depende del corrector.

El diagrama en árbol de la situación es:



a.- Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$p(F)=p(A)\cdot p(F/A)+p(B)\cdot p(F/B)+p(C)\cdot p(F/C)=$

$=0,25\cdot 0,01+0,30\cdot 0,02+0,45\cdot 0,03=0,022$

b.- Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p(B/F)=\frac{p(B\cap F)}{p(F)}=\frac{p(B)\cdot p(F/B)}{p(F)}=\frac{0,3\cdot 0,02}{0,022}=0,27$$

c.- La probabilidad de que haya sido corregido por Benítez es de 0,27 según el apartado anterior. Calculemos la probabilidad de que haya sido corregido por Alvarado y por Cadiñanos:

$$p(A/F)=\frac{p(A\cap F)}{p(F)}=\frac{p(A)\cdot p(F/A)}{p(F)}=\frac{0,25\cdot 0,01}{0,022}=0,11$$

$$p(C/F)=\frac{p(C\cap F)}{p(F)}=\frac{p(C)\cdot p(F/C)}{p(F)}=\frac{0,45\cdot 0,03}{0,022}=0,61$$

Luego si se produceun error en la corrección del examen, la mayor probabilidad es que lo haya corregido Cadiñanos.

6.- *(10 puntos)* Se desea estimar la proporción de estudiantes que viven en un colegio mayor a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de estudiantes.

a.- *(6 puntos)* Por estudios previos se sabe que el porcentaje de estudiantes alojados en un colegio mayor es del 20%. ¿De qué tamaño debemos elegir la muestra para que el error de la estimación de la proporción sea menor de 0,1 con un nivel de confianza del 98%?

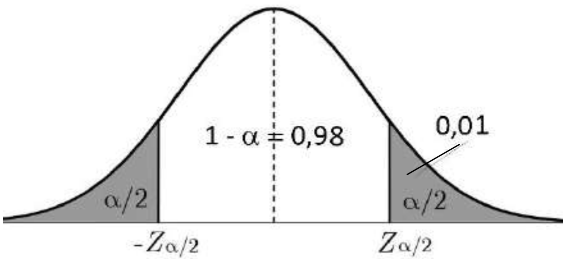
b.- *(4 puntos)* Se toma una muestra de 50 estudiantes y se observa que 12 se alojan en un colegio mayor, calcula el intervalo de confianza al 98% para la proporción de estudiantes alojados en un colegio mayor.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

a.- Para un nivel de confianza del 98% el valor crítico es:



$$1-\alpha=0{,}98 \;\Rightarrow\; \alpha=0{,}02 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2}=0{,}01 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; 1-0{,}01=0{,}99$ y mirando en la tabla, encontramos que el valor crítico que corresponde es $Z_{\alpha/2}=2{,}33$.

Se tiene: $E=Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{pr\left(1-pr\right)}{n}} \;\Rightarrow\; n=\dfrac{pr\left(1-pr\right)}{\left(\dfrac{E}{Z_{\alpha/2}}\right)^2}$

En nuestro caso: $E=0{,}1$; $Z_{\alpha/2}=2{,}33$; $pr=0{,}20 \;\Rightarrow\; n=\dfrac{0{,}20\cdot 0{,}80}{\left(\dfrac{0{,}1}{2{,}33}\right)^2}=86{,}8$ luego debemos elegir una muestra de 87 estudiantes

b.- $n=50$ estudiantes, $pr=\dfrac{12}{50}=0,24$. Se tiene:

$$E=Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{pr\left(1-pr\right)}{n}}=2,33\cdot\sqrt{\frac{0,24\cdot 0,36}{50}}=0,14 \quad \Rightarrow$$

el intervalo de confianza es: $\left(pr-E\,,pr+E\right)=\left(0,1\ ,\ 0,38\right)$

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a.- (*3 puntos*) Calcule el valor de m para que la ecuación matricial $X \cdot A = B$ tenga solución única.

b.- (*4 puntos*) Para $m = 1,$ resuelva la ecuación matricial anterior.

c.- (*3 puntos*) Resuelva el sistema de ecuaciones: $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.- (*10 puntos*) Una empresa de transportes valora la apertura de sucursales rurales y/o urbanas. Las sucursales rurales emplean a tres personas, requieren de una inversión de 100.000 euros para su apertura y generan unos ingresos de 15.000 euros al mes. Las sucursales urbanas emplean a 6 personas, requieren de 150.000 euros de inversión y generan un ingreso de 18.000 euros al mes. La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales, han decidido limitar el número de nuevas sucursales a 25 y se han comprometido a crear como mínimo 60 empleos.

a.- (*3 puntos*) Plantee un problema de programación lineal que permita calcular el número de sucursales de cada tipo que deben abrirse para maximizar el ingreso mensual.

b.- (*5 puntos*) Resuelva el problema anterior y calcule el ingreso mensual máximo que se obtendría.

c.- (*2 puntos*) En la solución óptima, ¿cuántos empleos generará?, ¿se gasta todo el dinero disponible?

3.- (*10 puntos*) En una empresa el coste total, en euros, de producir q unidades viene dado por:

$$C(q) = 300q - 10q^2 + \frac{q^3}{3}$$

a.- (*3 puntos*) Calcule la función coste marginal $\left(C_m(q) = C'(q)\right)$¿A partir de qué unidad el coste marginal aumenta al aumentar la producción?

b.- (*3 puntos*) Determine el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio $CM(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

c.- (*4 puntos*) Si el precio de venta unitario, en euros, del artículo en el mercado es $P(q) = 240 - 2q$. Determine para qué nivel de producción se maximiza el beneficio (ingresos menos costes).

4.- (*10 puntos*) Siendo a, b parámetros reales, se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{3} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{x}{6} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a.- (*3 puntos*) Determine el valor de los parámetros para que $f(x)$ sea continua.

b.- (*4 puntos*) Para dichos valores, analice si $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$.

c.- (*3 puntos*) Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$ si $x \in [6,9]$ y las coordenadas de los puntos donde se alcanzan dichos valores.

5.- (*10 puntos*) Responde a las dos cuestiones siguientes:

a.- (*6 puntos*) Se ha realizado una encuesta sobre la compra de ropa por internet, en concreto sobre compra de ropa nueva y compra de ropa de segunda mano. De los entrevistados, el 90% dice que compra ropa (usada o nueva), el 15% compra ropa de ambos tipos y el 60% no compra ropa de segunda mano. Para un encuestado elegido al azar:

a.1 (*3 puntos*) Calcule la probabilidad de que compre ropa nueva y no de segunda mano.

a.2 (*3 puntos*) Si dice que no compra ropa de segunda mano ¿cuál es la probabilidad de que tampoco compre ropa nueva?

b.- (*4 puntos*) En una encuesta realizada a 64 jóvenes 8 se mostraron contrarios a llevar mascarillas en el interior de recintos de ocio. Calcule un intervalo de confianza al 97% para determinar la proporción de jóvenes que son contrarios al uso de mascarilla en interiores de recintos de ocio.

Por otro lado, el alcalde de la ciudad considera que si existe un 25% de jóvenes adversos al uso de mascarilla se requiere aplicar algún tipo de medida de concienciación. A la vista del intervalo calculado ¿se debería implantar alguna medida de concienciación?

6.- (*10 puntos*) Por una prueba de acceso a la Universidad realizada a los estudiantes de segundo de Bachillerato, se sabe que las calificaciones obtenidas se distribuyen según una distribución normal.

a.- (*4 puntos*) Si la media de la prueba selectiva es de 65 puntos y la desviación típica 8. Calcule la probabilidad de que la nota media de 25 estudiantes elegidos al azar sea mayor a 63 puntos.

b.- (*3 puntos*) Calcule un intervalo de confianza para la nota media de ingreso en DADE, con un nivel de confianza del 92%, sabiendo que ingresan 100 estudiantes, que la nota media de acceso es de 80 puntos y que la desviación típica es 8,8 puntos.

c.- (*3 puntos*) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo del intervalo de confianza calculado en el apartado anterior se reduzca a la mitad (con los datos del apartado b.-).

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	**0,0**
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	**0,1**
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	**0,2**
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	**0,3**
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	**0,4**
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	**0,5**
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	**0,6**
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	**0,7**
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	**0,8**
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	**0,9**
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	**1,0**
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	**1,1**
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	**1,2**
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	**1,3**
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	**1,4**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	**1,5**
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	**1,6**
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	**1,7**
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	**1,8**
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	**1,9**
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	**2,0**
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	**2,1**
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	**2,2**
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	**2,3**
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	**2,4**
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	**2,5**
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	**2,6**
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	**2,7**
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	**2,8**
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	**2,9**
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	**3,0**
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	**3,1**
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	**3,2**
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	**3,3**
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	**3,4**
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	**3,5**
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	**3,6**

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

- En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio.
- En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.
- Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 ptos. Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Ejercicio 1

a) **(*3 puntos*)** Relacionar la pregunta con condición de matriz inversible (*1 pto*), caracterizar justificadamente los valores de m para que la matriz sea inversible (*2 ptos*). Esta puntuación puede desglosarse con 1 pto el cálculo del determinante o escalonar la matriz y 1 pto concluir el valor de m.

b) **(*4 puntos*)** Despejar X de la ecuación (*0,6 ptos*), calcular A^{-1} (*2,5 ptos*), y calcular el producto BA^{-1} (*0,9 ptos, 0,1 pto* cada coeficiente). Las puntuaciones intermedias para el cálculo de la inversa serán:

- Si se ha calculado haciendo operaciones elementales (0,5 ptos cada operación elemental). Un fallo de operación elemental se penaliza con 0,5 ptos, dos con 1 pto, tres con 1,5 ptos y más no se puntúa nada.
- Si se ha calculado aplicando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(Adj(A)\right)^t;\ Adj(A)$ (*1,5 ptos*), traspuesta y llegar al resultado (*1 pto*). Un fallo se penaliza con 0,5 ptos, dos con 1 pto, tres con 1,5 ptos y más no se puntúa nada.

c) **(*3 puntos*)** Escalonar la matriz (*1,5 ptos*), concluir que se trata de un sistema compatible indeterminado (*0,5 ptos*) y obtener la solución (*1 pto*).

Ejercicio 2

a) **(*3 puntos*)** Definir las variables de decisión (*0,5 ptos*), la función objetivo (*0,5 ptos*), definir las tres restricciones del enunciado (*1,5 ptos=0,5**3) y la condición de no negatividad de las variables $x, y \geq 0$ (*0,5 ptos*).

b) **(*5 puntos*)** Representar la región factible (*0,5 ptos* por cada una de las cinco restricciones y *0,5 ptos* por la intersección de todas ellas). Para evaluar el cálculo de la solución óptima (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un problema mucho más sencillo que el original) se procederá como sigue:

- Si se ha optado por evaluar la función objetivo en los vértices: calcular las coordenadas de los vértices (*1 pto*; cada vértice *0,2**5), evaluar la función objetivo en los vértices (*0,5 ptos= 0,1**5), determinar el vértice donde se alcanza el máximo (*0,3 ptos*) y su valor (*0,2 ptos*).
- Si se ha optado por curvas de nivel: representar dos rectas de nivel e identificar la dirección de crecimiento (la primera recta *0,6* ptos, una paralela *0,4* ptos, identificar la dirección de mejora *0,3* ptos) y razonar gráficamente el vértice solución (*0,3* ptos). Determinar analíticamente las coordenadas del máximo (*0,2* ptos) y su valor (*0,2* ptos).

c) **(*2 puntos*)** La respuesta a cada cuestión formulada se valorará con *1 pto*.

Ejercicio 3

a) **(*3 puntos*)** Calcular $C_m(q)$ (*1 pto*), identificar la pregunta con analizar el crecimiento de $C_m(q)$ y calcular $C'_m(q)$ (*1 pto*); analizar el signo y responder a la pregunta (*1 pto*).

b) **(*3 puntos*)** Calcular $CM(q)$ y $CM'(q)$ (*1 pto*), punto crítico (*1 pto*), caracterizar como mínimo (*1 pto*).

c) **(*4 puntos*)** Plantear la función beneficio $B(q)$ (*1 pto*), calcular $B'(q)$ (*1 pto*), calcular los puntos críticos (*1 pto*). Obtener el máximo, justificando que lo es (*1 pto*).

Ejercicio 4

a) **(*3 puntos*)** Condición de continuidad en un punto, por ejemplo, $x = 0$ (*1 pto*) y condición de continuidad en el segundo punto, por ejemplo, $x = 3$ (*0,5 ptos*) y continuidad en el resto del dominio (*0,5 ptos*). Se valorará con (*0,5 puntos*) el cálculo del valor del parámetro a y se valorará con (*0,5 ptos*) el cálculo del valor del parámetro b.

b) **(*4 puntos*)** Calcular la derivada (*2 ptos* = 0,5+1+0,5). Analizar que la función no es derivable en $x = 0$ (*1 pto*) y analizar la derivabilidad en $x = 3$ (*1 pto*).

c) **(*3 puntos*)** Calcular $f'(x)$ en el trozo solicitado (*0,5 ptos*), concluir que $f'(x) \neq 0$ y no existen puntos críticos (*0,5 ptos*). Calcular la coordenada x del máximo absoluto y su valor (*1 pto*), calcular la coordenada x del mínimo absoluto y su valor (*1 pto*).

Ejercicio 5

Para obtener la máxima calificación no se necesita tanto detalle como aparece en la pauta de corrección. La falta de notación puede ser sustituida por la explicación, diagramas o tablas**.**

a) **(*6 puntos*)**
a.1 (*3 puntos*) Definir los sucesos que intervienen y usar los datos del enunciado para determinar $P(A \cup B), P(A \cap B), P\left(\overline{B}\right)$ (*1 pto*). Identificar la pregunta del enunciado como el suceso $P\left(A \cap \overline{B}\right)$ (*0,5 ptos*). Calcular $P(A)$ (1 pto) y calcular $P\left(A \cap \overline{B}\right)$ (*0,5 ptos*).

a.2 (*3 puntos*) Identificar la pregunta del enunciado como el suceso $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$ (*1 pto*). Aplicar la fórmula de la probabilidad condicionada (*0,5 ptos*) y $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$ en el numerador (*0,5 ptos*). Pasar al contrario $1 - P(A \cup B)$ (*0,5 ptos*) y calcular (*0,5 ptos*).

b) **(*4 puntos*)** Saber qué cuantil buscar y calcularlo (*1,5 ptos*). Poner la fórmula de error, sustituir y calcular (*1,5 ptos*). Calcular el intervalo de confianza (*0,5 ptos*) y responder a la pregunta (*0,5 ptos*).

Ejercicio 6

a) **(*4 puntos*)** Indicar los parámetros de la distribución de la variable aleatoria solicitada (*1 pto*). Expresar la probabilidad a calcular como $P(\overline{X} > 63)$ y tipificar (*1,5 ptos*). Calcular dicha probabilidad (*1,5 ptos*).

b) **(*3 puntos*)** Saber qué cuantil buscar y calcularlo (1,5 ptos). Poner la fórmula de error, sustituir y calcular (*1 pto*). Calcular el intervalo de confianza (0,5 ptos).

c) **(*3 puntos*)** En esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado b), aunque no lo sea. Calcular el error con el que se realizará el ejercicio (*1 pto*). Sustituir y calcular el valor de n (*2 ptos*). Si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior, se restan 0,5 ptos.

.

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

a.- (*3 puntos*) Calcule el valor de m para que la ecuación matricial $X\cdot A=B$ tenga solución única.

b.- (*4 puntos*) Para $m=1$, resuelva la ecuación matricial anterior.

c.- (*3 puntos*) Resuelva el sistema de ecuaciones: $B\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

SOLUCIÓN

a) $X\cdot A=B \Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1} \Rightarrow X=B\cdot A^{-1}$ luego la ecuación matricial tiene solución si existe A^{-1}.

La condición para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de 0:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & -2\end{vmatrix}=-4m+8-3m=-7m+8=0 \Rightarrow m=\frac{8}{7} \quad \text{luego} \quad \exists A^{-1}\ \forall m\neq\frac{8}{7}.$$

b) Debemos calcular A^{-1}:

Calculemos, en primer lugar, el determinante de A: $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & -2\end{vmatrix}=-4+8-3=1$

Calculemos ahora la matriz inversa:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{adjunta}]{(*)\text{matriz}}\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix} -7 & 12 & -8\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{traspuesta}]{\text{matriz}}\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t=\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2\\ 12 & 2 & -3\\ -8 & -1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{inversa}]{\text{matriz}}$$

$$\longrightarrow A^{-1}=\frac{\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t}{|A|}=\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2\\ 12 & 2 & -3\\ -8 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-7 \ ; \ A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix}=12 \ ; \ A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-8 \ ; \ A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-1 \ ; \ A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=2$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-1 \ ; \ A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=2 \ ; \ A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-3 \ ; \ A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$$

Entonces tenemos: $X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -15 & -2 & 4 \\ -19 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

c) Es un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Utilicemos el método de Gauss para triangular la matriz de los coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3 - F_1}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_3 + F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg = 2 \Rightarrow$$

El sistema es compatible indeterminado y equivalente al sistema:

$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Consideramos la incógnita z como un parámetro: $z = \lambda$, $x = -\lambda$, $y = -\lambda$

2.- (*10 puntos*) Una empresa de transportes valora la apertura de sucursales rurales y/o urbanas. Las sucursales rurales emplean a tres personas, requieren de una inversión de 100.000 euros para su apertura y generan unos ingresos de 15.000 euros al mes. Las sucursales urbanas emplean a 6 personas, requieren de 150.000 euros de inversión y generan un ingreso de 18.000 euros al mes. La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales, han decidido limitar el número de nuevas sucursales a 25 y se han comprometido a crear como mínimo 60 empleos.

a.- (*3 puntos*) Plantee un problema de programación lineal que permita calcular el número de sucursales de cada tipo que deben abrirse para maximizar el ingreso mensual.

b.- (*5 puntos*) Resuelva el problema anterior y calcule el ingreso mensual máximo que se obtendría.

c.- (*2 puntos*) En la solución óptima, ¿cuántos empleos generará?, ¿se gasta todo el dinero disponible?

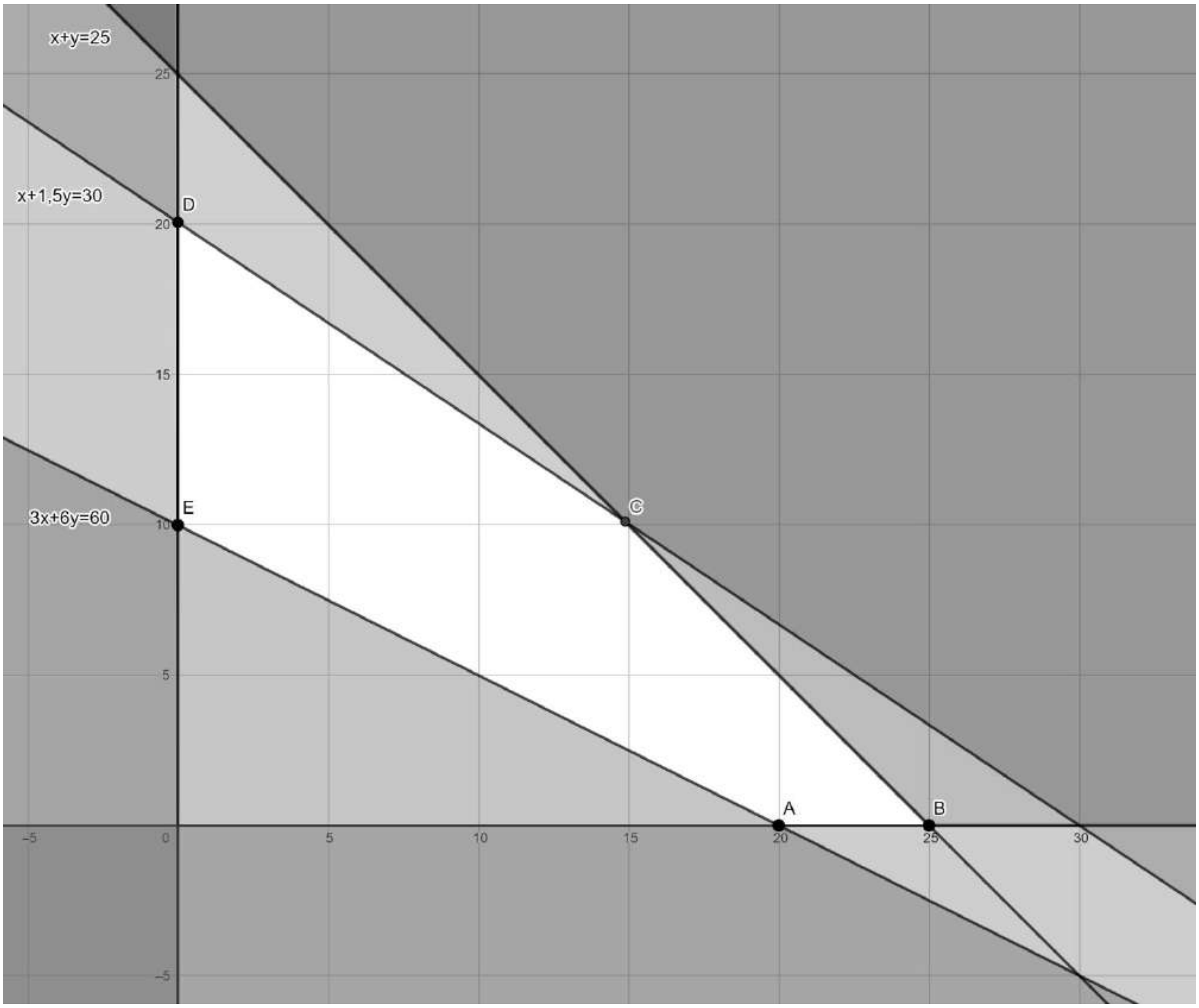
SOLUCIÓN

a) Es un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

Tipo de sucursal	Número	Empleo	Inversión	Ingresos
Rural	x	3x	100000x	15000x
Urbana	y	6y	150000y	18000y
Restricciones:	$x \geq 0$; $y \geq 0$ $x + y \leq 25$	$3x + 6y \geq 60$	$100000x + 150000y \leq 3000000$	$F(x,y) = 15000x + 18000y$

Se trata entonces de maximizar la función objetivo $F(x,y) = 15000x + 18000y$ teniendo en cuenta el conjunto de restricciones: $\{ \ x \geq 0 , \ y \geq 0 , \ x + y \leq 25 , \ 3x + 6y \geq 60 , \ 100000x + 150000y \leq 3000000 \ \}$.

b) Construyamos la región factible, conjunto de los puntos del plano que verifican las inecuaciones del conjunto de restricciones:



− La recta de ecuación $x=0$ es el eje de ordenadas. La inecuación $x\geq 0$ tiene como solución el semiplano de la derecha (en blanco). La recta $y=0$ es el eje de abscisas y la inecuación $y\geq 0$ tiene como solución el semiplano superior (en blanco).

− La recta $x+y=25$ pasa por los puntos $(0,25)$ y $(25,0)$. La inecuación $x+y\leq 25$ tiene como solución el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

− La recta $3x+6y=60 \Leftrightarrow x+2y=20$ pasa por los puntos $(0,10)$ y $(20,0)$. La inecuación $3x+6y\geq 60$ tiene como solución el semiplano al que no pertenece el origen (en blanco)

− La recta $100000x+150000y=3000000 \Leftrightarrow x+1,5y=30$ pasa por los puntos $(30,0)$ y $(0,20)$. La inecuación $100000x+150000y\leq 3000000$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

La región factible (en blanco) es el pentágono ABCDE. La función objetivo se optimiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos las coordenadas de los vértices (algunas ya son conocidas) y calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos para ver en cuál de ellos es máxima:

− $A(20,0) \Rightarrow F(20,0)=15000\cdot 20=300000$ €

− $B(25,0) \Rightarrow F(25,0)=15000\cdot 25=375000$ €

− El vértice C es la intersección de las rectas $x+y=25$ y $x+1,5y=30$:

$$\begin{cases} x+y=25 \\ x+1,5y=30 \end{cases} \Rightarrow 0,5y=5 \Rightarrow y=10 \Rightarrow x=15 \Rightarrow C(15,10) \Rightarrow F(15,10)=405000\ €$$

- $D(0,20) \Rightarrow F(0,20)=18000\cdot 20=360000$ € y $x+2y=800$
- $E(0,10) \Rightarrow F(0,10)=18000\cdot 10=180000$ €

La función objetivo es máxima en el vértice C y, por tanto, los ingresos son máximos cuando se abren 15 sucursales rurales y 10 sucursales urbanas. Los ingresos que se obtienen son de 405000 euros.

c) Al abrir 15 sucursales rurales y 10 sucursales urbanas los empleos que se generan son: $3\cdot 15+6\cdot 10=105$ empleos.

Y la inversión es de $100000\cdot 15+150000\cdot 10=3000000$ € por lo que se gasta todo el dinero disponible.

3.- (*10 puntos*) En una empresa el coste total, en euros, de producir q unidades viene dado por:

$$C(q)=300q-10q^2+\frac{q^3}{3}$$

a.- (*3 puntos*) Calcule la función coste marginal $\left(C_m(q)=C'(q)\right)$ ¿A partir de qué unidad el coste marginal aumenta al aumentar la producción?

b.- (*3 puntos*) Determine el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio $CM(q)=\frac{C(q)}{q}$.

c.- (*4 puntos*) Si el precio de venta unitario, en euros, del artículo en el mercado es $P(q)=240-2q$. Determine para qué nivel de producción se maximiza el beneficio (ingresos menos costes).

SOLUCIÓN

a) $C_m(q)=C'(q)=300-20q+q^2$ que es una parábola.

Calculemos su vértice:

$C'_m(q)=-20+2q=0 \Rightarrow q=10$ y como $C''_m(q)=2>0 \Rightarrow$ el vértice es un mínimo $\Rightarrow$ la función es creciente $\forall q>10$, es decir el coste marginal aumenta a partir de 10 unidades.

b) $CM(q)=\dfrac{C(q)}{q}=\dfrac{300q-10q^2+\frac{q^3}{3}}{q}=300-10q+\dfrac{q^2}{3}$ que es una parábola. Veamos dónde está su vértice:

$CM'(q)=-10+\dfrac{2q}{3}=0 \Rightarrow -30+2q=0 \Rightarrow q=15$ y como $CM''(q)=\dfrac{2}{3}>0 \Rightarrow q=15$ es un mínimo.

Es decir, el coste medio es mínimo cuando se producen 15 unidades.

c) La función "Beneficios" (se supone que se vende toda la producción q) es:

$$B(q)=q\cdot P(q)-C(q)=\left(240q-2q^2\right)-\left(300q-10q^2+\frac{q^3}{3}\right)=-\frac{q^3}{3}+8q^2-60q$$

Estudiemos dónde tiene su máximo relativo:

$$B'(q)=-q^2+16q-60=0 \Rightarrow q=\frac{-16\pm\sqrt{256-240}}{-2}=\frac{-16\pm 4}{-2} \begin{cases} q=6 \\ q=10 \end{cases}$$

$$B''(q)=-2q+16 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} B''(6)=4>0 \Rightarrow q=6 \text{ es un mínimo relativo} \\ B''(10)=-4<0 \Rightarrow q=10 \text{ es un máximo relativo} \end{array} \right.$$

Luego el beneficio es máximo cuando la producción es de 10 unidades.

4.- (*10 puntos*) Siendo a, b parámetros reales, se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{3} & \text{si } x \le 0 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si } 0 < x \le 3 \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{x}{6} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a.- (*3 puntos*) Determine el valor de los parámetros para que $f(x)$ sea continua.

b.- (*4 puntos*) Para dichos valores, analice si $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$.

c.- (*3 puntos*) Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$ si $x \in [6,9]$ y las coordenadas de los puntos donde se alcanzan dichos valores.

SOLUCIÓN

a) La función es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$ por ser funciones continuas las definidas en cada uno de los intervalos. Falta asegurar la continuidad en $x = 0$ y en $x = 3$.

▪ Para que la función sea continua en $x = 0$ debe ser $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 + 2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{ax+b}\right) = \sqrt{b} \end{array} \right| \Rightarrow \sqrt{b} = 2\sqrt{3} \Rightarrow b = 12$$

▪ Para que la función sea continua en $x = 3$ debe ser $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \left(\sqrt{ax+12}\right) = \sqrt{3a+12} \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{7}{2} - \dfrac{x}{6}\right) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2} = 3 \end{array} \right| \Rightarrow \sqrt{3a+12} = 3 \Rightarrow 3a + 12 = 9 \Rightarrow a = -1$$

b) Para los valores de a y b del apartado anterior, la función es continua en $x = 0$ y en $x = 3$.

La función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x+12}} & \text{si } 0<x \le 3 \\ -\dfrac{1}{6} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Veamos si f(x) es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$:

▪ Derivabilidad en $x = 0$: $f'\left(0^-\right) = 2 \cdot 0 = 0$, $f'\left(0^+\right) = \dfrac{-1}{2\sqrt{12}}$ $\Rightarrow$ Como $f'\left(0^-\right) \ne f'\left(0^+\right)$ la función no es derivable en $x = 0$.

▪ Derivabilidad en $x = 3$: $f'\left(3^-\right) = \dfrac{-1}{2\sqrt{9}} = -\dfrac{1}{6}$, $f'\left(3^+\right) = -\dfrac{1}{6}$ $\Rightarrow$ Como $f'\left(3^-\right) = f'\left(3^+\right)$ la función es derivable en $x = 3$.

c) $\forall x \in [6, 9]$ la función definida es $f(x) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{x}{6}$.

$f'(x) = -\dfrac{1}{6}$ $\Rightarrow$ la función es una recta decreciente $\Rightarrow$ el valor máximo lo alcanza en $x = 6$ y el valor mínimo en $x = 9$: $f(6) = \dfrac{7}{2} - 1 = \dfrac{5}{2}$, $f(9) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{2} = 2$

Coordenadas de los puntos: $\left(6, \dfrac{5}{2}\right)$ punto máximo y $(9, 2)$ punto mínimo.

5.- (*10 puntos*) Responde a las dos cuestiones siguientes:

a.- (*6 puntos*) Se ha realizado una encuesta sobre la compra de ropa por internet, en concreto sobre compra de ropa nueva y compra de ropa de segunda mano. De los entrevistados, el 90% dice que compra ropa (usada o nueva), el 15% compra ropa de ambos tipos y el 60% no compra ropa de segunda mano. Para un encuestado elegido al azar:

a.1 (*3 puntos*) Calcule la probabilidad de que compre ropa nueva y no de segunda mano.

a.2 (*3 puntos*) Si dice que no compra ropa de segunda mano ¿cuál es la probabilidad de que tampoco compre ropa nueva?

b.- (*4 puntos*) En una encuesta realizada a 64 jóvenes 8 se mostraron contrarios a llevar mascarillas en el interior de recintos de ocio. Calcule un intervalo de confianza al 97% para determinar la proporción de jóvenes que son contrarios al uso de mascarilla en interiores de recintos de ocio.

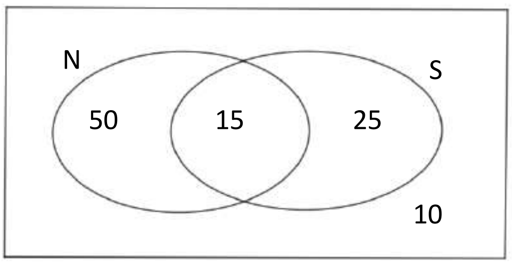
Por otro lado, el alcalde de la ciudad considera que si existe un 25% de jóvenes adversos al uso de mascarilla se requiere aplicar algún tipo de medida de concienciación. A la vista del intervalo calculado ¿se debería implantar alguna medida de concienciación?

SOLUCIÓN

a) Sea N el suceso "compra ropa nueva por internet" y S el suceso "compra ropa de segunda mano".

Tenemos: $p\left(N \cup S\right)=0,9$, $p\left(N \cap S\right)=0,15$, $p\left(\overline{S}\right)=0,60$

Podemos visualizar los datos sobre un diagrama de Venn. De cada 100 consultados:



90 están en la unión de ambos sucesos, luego 10 están fuera ("no compran ropa por internet").

15 están en la intersección de ambos sucesos. 60 están fuera de S y como ya hay 10 fuera de N y S, quedarán 50 en N – S.

Por último, quedarán 25 en S – N.

a.1) Estamos entre los 100 encuestados, de los que 50 compran ropa nueva y no de segunda mano.

Tenemos: $p\left(N \cap \overline{S}\right)=\dfrac{50}{100}=0,5$

a.2) Estamos entre los 60 que no están en S de los que 10 tampoco compran ropa nueva. Así pues:

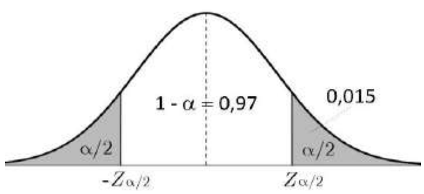
$$p\left(\overline{N} / \overline{S}\right)=\frac{10}{60}=0,17$$

b) La proporción muestral es $pr=\dfrac{8}{64}=0,125$.

Para hallar un intervalo de confianza para la proporción p en la población, el error máximo admisible es:

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{pr\cdot\left(1-pr\right)}{n}}$$

Calculemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente a un nivel de confianza del 97%:



$$1-\alpha=0,97 \;\Rightarrow\; \alpha=0,03 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2}=0,015 \;\Rightarrow\; 1-\frac{\alpha}{2}=0,985$$

y mirando en la tabla: $z_{\alpha/2}=2,17$

Tenemos entonces: $E=2,17\cdot\sqrt{\dfrac{0,125\cdot 0,875}{64}}=0,0897$

Luego el intervalo de confianza para la proporción en la población es:

$$\left(0{,}125-0{,}0897\,;0{,}125+0{,}0897\right)=\left(0{,}0353\,;0{,}2147\right)$$

▪ Si el alcalde considera que debe haber un 25% de jóvenes contrarios al uso de mascarilla en interiores de recintos de ocio para implantar medidas de concienciación, en nuestro caso no serían necesarias puesto que la zona de aceptación está entre un 3,53% y un 21,47% y el 25% queda fuera.

6.- (*10 puntos*) Por una prueba de acceso a la Universidad realizada a los estudiantes de segundo de Bachillerato, se sabe que las calificaciones obtenidas se distribuyen según una distribución normal.

a.- (*4 puntos*) Si la media de la prueba selectiva es de 65 puntos y la desviación típica 8. Calcule la probabilidad de que la nota media de 25 estudiantes elegidos al azar sea mayor a 63 puntos.

b.- (*3 puntos*) Calcule un intervalo de confianza para la nota media de ingreso en DADE, con un nivel de confianza del 92%, sabiendo que ingresan 100 estudiantes, que la nota media de acceso es de 80 puntos y que la desviación típica es 8,8 puntos.

c.- (*3 puntos*) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo del intervalo de confianza calculado en el apartado anterior se reduzca a la mitad (con los datos del apartado b.-).

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	**0,0**
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	**0,1**
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	**0,2**
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	**0,3**
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	**0,4**
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	**0,5**
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	**0,6**
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	**0,7**
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	**0,8**
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	**0,9**
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	**1,0**
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	**1,1**
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	**1,2**
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	**1,3**
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	**1,4**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	**1,5**
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	**1,6**
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	**1,7**
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	**1,8**
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	**1,9**
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	**2,0**
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	**2,1**
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	**2,2**
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	**2,3**
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	**2,4**
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	**2,5**
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	**2,6**
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	**2,7**
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	**2,8**
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	**2,9**
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	**3,0**
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	**3,1**
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	**3,2**
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	**3,3**
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	**3,4**
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	**3,5**
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	**3,6**

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

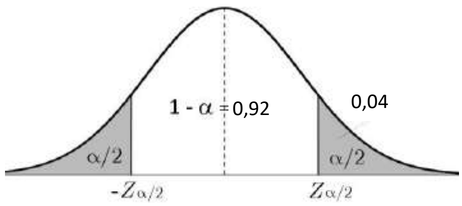
a) Puesto que la población de partida (calificaciones obtenidas en la prueba de acceso a la Universidad) es normal, cualquier muestra elegida al azar también tendrá una distribución normal. Además, si la población es $N(\mu\,,\sigma)$, una muestra de tamaño n es una normal $N\left(\mu\,,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

En nuestro caso: $\quad N\left(65\,,\dfrac{8}{\sqrt{25}}\right)=N(65\,;1{,}6)$

$\overline{x}=63 \in N(65\,;1,6)$. Debemos tipificar la variable: $z=\dfrac{63-65}{1,6}=-1,25 \in N(0\,,1)$

$p\left[\overline{x}>63\right]=p\left[z>-1,25\right]=p\left[z\leq 1,25\right]=0,8944$

b) El intervalo de confianza para la media tiene un radio $E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{s}{\sqrt{n}}$



Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 92%:

$1-\alpha=0,92 \;\Rightarrow\; \alpha=0,08 \;\Rightarrow\; \dfrac{\alpha}{2}=0,04 \;\Rightarrow\; 1-\dfrac{\alpha}{2}=0,96$

y, mirando en la tabla, el valor más próximo (0,9599) se corresponde con un valor crítico de 1,75.

Tenemos: $E=1,75\cdot\dfrac{8,8}{\sqrt{100}}=1,54$

El intervalo es, entonces: $(80-1,54\,;80+1,54)=(78,46\,;81,54)$

c) Tenemos: $E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{s}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n}=\dfrac{z_{\alpha/2}\cdot s}{E} \;\Rightarrow\; n=\left(\dfrac{z_{\alpha/2}\cdot s}{E}\right)^2$

El error máximo debe ser $E=\dfrac{1,54}{2}=0,77 \;\Rightarrow\; n=\left(\dfrac{1,75\cdot 8,8}{0,77}\right)^2=400$ luego la muestra debería ser de 400 estudiantes.

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (*10 puntos*) Dado el sistema lineal: $\left.\begin{array}{c}(m+1)x = m-2 \\ 2x+y=-3 \\ 3x-2y+mz=-8\end{array}\right\} \cdot$ Se pide:

a.- (*3 puntos*) Exprese el sistema anterior en forma matricial $(AX = B)$ y determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible determinado.

b.- (*3 puntos*) ¿Existe algún valor del valor del parámetro m para que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuelva el sistema.

c.- (*4 puntos*) Para $m=1$, calcule $X = A^{-1}B$, siendo A, B las matrices del apartado **a.-**.

2.- (*10 puntos*) Fernanda dispone de 10.000 euros para invertir. Le han recomendado dos productos que en el último año tuvieron buenos resultados: criptomonedas y fondos de inversión garantizados. Por lo que ha leído en la prensa espera que la rentabilidad anual de las criptomonedas sea del 30% y la de los fondos de inversión sea del 5%. Para que la inversión no sea demasiado arriesgada quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas y además, le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3.000 euros y un mínimo de 1.000€.

a.- (*3 puntos*) Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cómo debe invertir Fernanda sus ahorros para obtener la máxima rentabilidad.

b.- (*5 puntos*) Resuelva el problema y calcule la rentabilidad máxima conseguida con la inversión.

c.- (*2 puntos*) Su gestor le dice que por la coyuntura económica actual el riesgo de inversión es del 35% para las criptomonedas y 0% para los fondos. Si Fernanda quisiera minimizar el riesgo de la inversión, justifica si invertir 1.000 euros en criptomonedas y 5.000 en fondos es una solución óptima (con las restricciones del enunciado).

3.- (*10 puntos*) Dada $f(x) = 50 + \frac{1}{100}(1-x) + \frac{1}{1-x} \cdot$ Se pide:

a.- (*2 puntos*) Calcule el dominio y, si existen, las asíntotas verticales y horizontales.

b.- (*5 puntos*) Razone que $f(x)$ tiene dos extremos relativos, uno mínimo y otro máximo ¿El valor en el mínimo de la función es mayor o menor que el valor en el máximo?

c.- (*3 puntos*) Supongamos que x representa el precio de venta de un kg de solomillo según la época del año, $x \in [5,21]$ euros por kilo, y $f(x)$ el ingreso diario de un mayorista (en cientos de euros) por la venta del producto ¿A qué precio debe vender para obtener el máximo ingreso? ¿A cuántos euros asciende dicho ingreso máximo?

4.- (*10 puntos*) La primera derivada de una cierta función es $f'(x) = x(x-1)^2$.

a.- (*3 puntos*) ¿En qué intervalo $f(x)$ es creciente? y ¿decreciente? Calcule los extremos relativos.

b.- (*4 puntos*) ¿En qué intervalo es cóncava la gráfica de $f(x)$? ¿y convexa? Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$.

c.- (*3 puntos*) Determine $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 10$.

5.- (*10 puntos*) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (*7 puntos*) Una aseguradora ha lanzado seguros multidispositivos a jóvenes para contingencias de hurtos, roturas, daños, etc. de patinetes, teléfonos móviles y ordenadores portátiles. Los seguros de patinetes suponen el 40% de su cartera, los móviles representan el 45% y los portátiles el resto de su cartera. La compañía conoce que un 51% de patinetes, un 40% de teléfonos móviles y un 9% de ordenadores dan lugar a un parte de siniestro.

a.1 (*2 puntos*) Calcule la probabilidad de que se comunique un parte de siniestro.

a.2 (*2 puntos*) Si llegara un parte de siniestro, calcule la probabilidad de haber sido una contingencia por un teléfono móvil.

a.3 (*3 puntos*) Si llegara un parte de siniestro, ¿cuál de los tres dispositivos es más probable que haya causado la contingencia?

b.- (*3 puntos*) En una ciudad se ha encuestado a 100 personas preguntándoles si tenían contratado algún seguro para su teléfono móvil. Se obtuvo como resultado que 15 personas tenían contratado este tipo de seguro. Determine un intervalo de confianza al 96% para la proporción de personas de esa ciudad que tienen contratado un seguro para su móvil.

6.- (*10 puntos*) El tiempo de espera para recibir en casa «tu compra en pocos minutos» se distribuye según una distribución normal de varianza 16 minutos.

a.- (*3 puntos*) Si la media para el tiempo de espera fuera de 12 minutos, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de 7 pedidos fuese de más de 10 minutos?

b.- (*4 puntos*) Si la media obtenida a partir de una muestra aleatoria de 49 encargos fue de 12 minutos, calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97%.

c.- (*3 puntos*) Con datos de 16 encargos se ha calculado el intervalo de confianza (9,7; 13,5) minutos para el tiempo medio en recibir el pedido. Determine el nivel de confianza de ese intervalo.

k	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**	**k**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	**0,0**
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	**0,1**
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	**0,2**
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	**0,3**
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	**0,4**
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	**0,5**
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	**0,6**
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	**0,7**
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	**0,8**
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	**0,9**
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	**1,0**
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	**1,1**
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	**1,2**
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	**1,3**
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	**1,4**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	**1,5**
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	**1,6**
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	**1,7**
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	**1,8**
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	**1,9**
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	**2,0**
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	**2,1**
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	**2,2**
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	**2,3**
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	**2,4**
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	**2,5**
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	**2,6**
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	**2,7**
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	**2,8**
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	**2,9**
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	**3,0**
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	**3,1**
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	**3,2**
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	**3,3**
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	**3,4**
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	**3,5**
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	**3,6**

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

— En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio.
— En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.
— Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 ptos. Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Ejercicio 1

a) (***3 puntos***) Expresar en forma matricial (*1 pto*), calcular el rango según los valores del parámetro (*1 pto*), y determinar los valores de m para que el sistema sea compatible determinado (*1 pto*).

b) (***3 puntos***) Determinar el valor del parámetro para que el sistema sea compatible indeterminado (*1 pto*) y calcular la solución (*2 ptos*).

c) (***4 puntos***) Calcular A^{-1} (*3 ptos*) y, dando por válido el resultado obtenido, calcular $A^{-1}B$ (*1 pto*). Las puntuaciones intermedias para el cálculo de la inversa serán:

— Si se ha calculado haciendo operaciones elementales (*0,75 ptos* cada operación elemental). Un fallo en la operación elemental se penaliza con 0,5 ptos, dos con 1 pto, tres con 1,5 ptos y más de tres errores no se puntúa nada.

— Si se ha calculado aplicando la fórmula $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(Adj(A)\right)^t$; $Adj(A)$ (*2 ptos*), traspuesta y llegar al resultado (*1 pto*). Un fallo se penaliza con 0,5 ptos, dos con 1 pto, tres con 1,5 ptos y más de tres errores no se puntúa nada.

Ejercicio 2

a) (***3 puntos***) Definir las variables de decisión (*0,25 ptos*), la función objetivo (*0,5 ptos*), definir las cuatro restricciones del enunciado (*2 ptos=0,5*4*) y la condición de no negatividad de las variables $x, y \geq 0$ (*0,25 ptos*).

b) (***5 puntos***) Representar la región factible (*0,5 ptos* por cada una de las cuatro restricciones y *1 pto* por la intersección de todas ellas). Para evaluar el cálculo de la solución óptima (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un problema mucho más sencillo que el original) se procederá como sigue:

— Si se ha optado por evaluar la función objetivo en los vértices: calcular las coordenadas de los vértices (*1 pto*; cada vértice *0,25*4*), evaluar la función objetivo en los vértices (*0,4 ptos= 0,1*4*), determinar el vértice donde se alcanza el máximo (*0,3 ptos*) y su valor *(0,3 ptos*).
— Si se ha optado por curvas de nivel: representar dos rectas de nivel e identificar la dirección de crecimiento (la primera recta *0,6 ptos*, una paralela *0,4 ptos*, identificar la dirección de mejora *0,3 ptos*) y razonar gráficamente el vértice solución (*0,3 ptos*). Determinar analíticamente las coordenadas del máximo (*0,2 ptos*) y su valor (*0,2 ptos*).

c) (***2 puntos***) Evaluar la función objetivo en los vértices (*0,4 ptos = 0,1*4*), concluir que la mínima rentabilidad se obtiene en dos vértices de la región factible (*0,6 ptos*). Expresar que la solución indicada en el enunciado pertenece al segmento rectilíneo que une los vértices anteriores y concluir (*1 pto*).

Ejercicio 3

a) **(*2 puntos*)** Dominio (*0,5 ptos*), estudio de asíntotas verticales (*1 pto*), asíntotas horizontales (*0,5 ptos*).

b) **(*5 puntos*)** Calcular $f'(x)$ (*1 pto*), calcular los puntos críticos (*2 ptos*) y analizar el carácter de los puntos críticos (*1 pto, 0,5*2 ptos* cada uno). Responder a la pregunta (*1 pto*).

c) **(*3 puntos*)** Candidatos a máximos absolutos y cálculo del valor de la función objetivo en ellos (*2 ptos*), concluir el precio de venta (*0,5 ptos*) y el ingreso máximo (*0,5 ptos*).

Ejercicio 4

a) (***3 puntos***) Estudiar el crecimiento y decrecimiento (*1,5 ptos*), puntos críticos (*0,5 ptos*), caracterizar el extremo (*1 pto*).

b) **(*4 puntos*)** Calcular la derivada segunda (*1,5 ptos*), concavidad-convexidad (*1,5 ptos*). Conocida la diferencia de criterio de este concepto entre los libros de texto, los estudiantes deben señalar la caracterización utilizada. Puntos de inflexión (*1 pto*).

c) **(*3 puntos*)** Expresar el integrando como suma de integrales inmediatas (*1 pto*), cálculo de primitivas (*1,5 ptos*; *0,5 ptos* cada sumando). Calcular el valor de la constante y sustituir (*0,5 ptos*).

Ejercicio 5

Para obtener la máxima calificación no se necesita tanto detalle como aparece en la pauta de corrección. La falta de notación puede ser sustituida por la explicación, diagramas o tablas**.**

a) **(*7 puntos*)**

a.1 (*2 puntos*) Definir los sucesos que intervienen en el enunciado: *S* = Parte de siniestro, *A* = Seguro de patinete, *B* = Seguro de teléfono móvil, *C* = Seguro de ordenador portátil (*0,5 ptos*). Identificar que hay que aplicar el teorema de la probabilidad total y extraer del enunciado las probabilidades (*0,5 ptos*). Aplicar la fórmula y obtener el resultado (*1 pto*).

a.2 (*2 puntos*) Expresar la probabilidad a calcular como $P(B/S)$ (*0,5 ptos*). Identificar que hay que aplicar el teorema de Bayes y extraer del enunciado los datos (*0,5 ptos*). Aplicar la fórmula y obtener el resultado (*1 pto*).

a.3 (*3 puntos*) Calcular $P(A/S)$ (*1 pto*), $P(C/S)$ (*1 pto*). Comparar resultados y concluir (*1 pto*)**.**

b) **(*3 puntos*)** Saber qué cuantil buscar y calcularlo (*1,5 ptos*). Poner la fórmula del error, sustituir y calcularlo (*1 pto*). Determinar el intervalo de confianza (*0,5 ptos*).

Ejercicio 6

a) **(*3 puntos*)** Indicar los parámetros de la distribución de la variable aleatoria solicitada (*0,5 ptos*). Expresar la probabilidad a calcular $P(\overline{X} > 10)$ y tipificar (*1 pto*). Calcular la probabilidad solicitada (*1,5 ptos*).

b) **(*4 puntos*)** Saber qué cuantil buscar y calcularlo (*1,5 ptos*). Poner la fórmula de error, sustituir y calcular (*1,5 ptos*). Poner la fórmula del intervalo de confianza y calcularlo (*1 pto*).

c) **(*3 puntos*)** Calcular la amplitud o error del intervalo (*1 pto*), calcular $Z_{\alpha/2}$(*1 pto*), calcular $\frac{\alpha}{2}$ (*0,5 ptos*) y calcular el nivel de confianza (*0,5 ptos*).

Si trabajan con la varianza (en lugar de σ) y el resto de los cálculos son correctos, la penalización será de 2 puntos sobre 10.

Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2022
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (*10 puntos*) Dado el sistema lineal: $\left.\begin{aligned} (m+1)x &= m-2 \\ 2x+y &= -3 \\ 3x-2y+mz &= -8 \end{aligned}\right\}$. Se pide:

a.- (*3 puntos*) Exprese el sistema anterior en forma matricial $(AX = B)$ y determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible determinado.

b.- (*3 puntos*) ¿Existe algún valor del valor del parámetro m para que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuelva el sistema.

c.- (*4 puntos*) Para $m = 1$, calcule $X = A^{-1}B$, siendo A, B las matrices del apartado **a.-**.

SOLUCIÓN

a.-La matriz A es la matriz de los coeficientes (3x3), X es la matriz de las incógnitas (3x1) y B es la matriz de los términos independientes (3x1):

$$\begin{pmatrix} m+1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Escribamos conjuntamente la matriz de los coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, y obtengamos sus rangos según los posibles valores de m:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & 0 & 0 & m-2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & m & -8 \end{array}\right)$$

El mayor menor en la matriz A es: $\begin{vmatrix} m+1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & m \end{vmatrix} = m(m+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0 \ , \ m = -1$

Luego para $m \neq 0$ y $m \neq -1$: $\text{rg}\,A = \text{rg}\,M = 3 = \text{nº de incógnitas} \quad \Rightarrow \quad$ el sistema es compatible determinado.

b.- Puede serlo para $m = 0$ o para $m = -1$.

▪ Para $m = 0$, las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -8 \end{array}\right)$

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rg}\,A = 2$

Orlamos dicho menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -8 \end{vmatrix} = -8+8+6-6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rg}\,M = 2$

Como $\text{rg}\,A = \text{rg}\,M < \text{nº de incógnitas}$ el sistema es compatible indeterminado para $m = 0$.

Resolvámoslo (utilizamos la incógnita z como parámetro: $z=\lambda$). El sistema dado es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{l} x=-2 \\ 2x+y=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x=-2 \ , \ y=1 \ , \ z=\lambda$$

▪ Para $m=-1$, las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & -8 \end{array}\right)$

El menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-4-3\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg} A=2$

Orlamos dicho menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -8 \end{vmatrix}=12+9\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg} M=3$

Como $\operatorname{rg} A\neq \operatorname{rg} M$ el sistema es incompatible para $m=-1$.

c.- Para $m=1$: $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

Calculemos A^{-1}:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{adjunta}]{(*)\text{matriz}} \operatorname{Adj}(A)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{traspuesta}]{\text{matriz}} \left(\operatorname{Adj}(A)\right)^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{inversa}]{\text{matriz}}$$

$$\longrightarrow A^{-1}=\frac{\left(\operatorname{Adj}(A)\right)^t}{|A|}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ -21/2 \end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta:

$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1$; $A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-2$; $A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-7$; $A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=0$; $A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2$

$A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=4$; $A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0$; $A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0$; $A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2$

2.- (*10 puntos*) Fernanda dispone de 10.000 euros para invertir. Le han recomendado dos productos que en el último año tuvieron buenos resultados: criptomonedas y fondos de inversión garantizados. Por lo que ha leído en la prensa espera que la rentabilidad anual de las criptomonedas sea del 30% y la de los fondos de inversión sea del 5%. Para que la inversión no sea demasiado arriesgada quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas y además, le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3.000 euros y un mínimo de 1.000€.

a.- (*3 puntos*) Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cómo debe invertir Fernanda sus ahorros para obtener la máxima rentabilidad.

b.- (*5 puntos*) Resuelva el problema y calcule la rentabilidad máxima conseguida con la inversión.

c.- (*2 puntos*) Su gestor le dice que por la coyuntura económica actual el riesgo de inversión es del 35% para las criptomonedas y 0% para los fondos. Si Fernanda quisiera minimizar el riesgo de la inversión, justifica si invertir 1.000 euros en criptomonedas y 5.000 en fondos es una solución óptima (con las restricciones del enunciado).

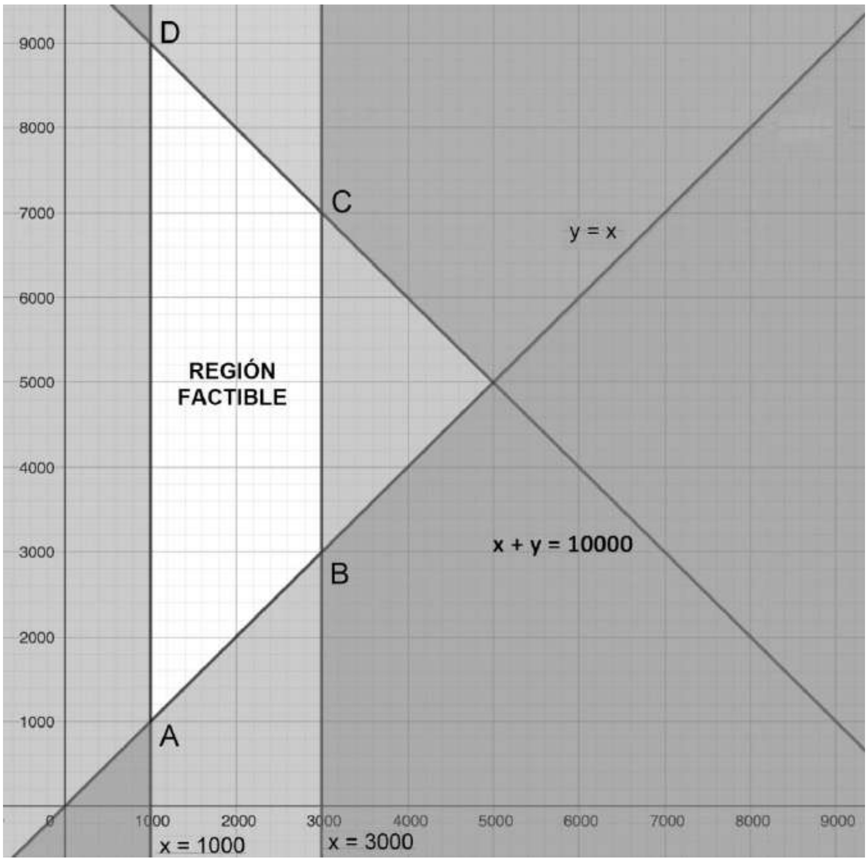
SOLUCIÓN

a.- Es un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

	Inversión (euros)	**Rentabilidad**	**Riesgo**
Criptomonedas	x	0,30x	3x
Fondos de inversión	y	0,05y	3y
Restricciones:	$x \geq 0\ ;\ y \geq 0$ $x + y \leq 10000$ $y \geq x$ $1000 \leq x \leq 3000$	$F(x,y) = 0{,}30x + 0{,}05y$	$G(x,y) = 0{,}35x + 0y$

Se trata entonces de maximizar la función objetivo $F(x,y) = 0{,}30x + 0{,}05y$ teniendo en cuenta el conjunto de restricciones: $\{\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 10000,\ y \geq x\ , x \geq 1000,\ x \leq 3000\ \}$.

b.- Construyamos la región factible, conjunto de los puntos del plano que verifican las inecuaciones del conjunto de restricciones:



− La recta de ecuación $x = 0$ es el eje de ordenadas. La inecuación $x \geq 0$ tiene como solución el semiplano de la derecha (en blanco). La recta $y = 0$ es el eje de abscisas y la inecuación $y \geq 0$ tiene como solución el semiplano superior (en blanco).

− La recta $x + y = 10000$ pasa por los puntos $(1000, 9000)$ y $(9000, 1000)$. La inecuación $x + y \leq 10000$ tiene como solución el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

− La recta $y = x$ es la bisectriz del primer cuadrante. La inecuación $y \geq x$ tiene como solución el semiplano superior (en blanco)

− La recta $x = 1000$ es paralela al eje de ordenadas y la inecuación $x \geq 1000$ es el semiplano de la derecha (en blanco). La recta $x = 3000$ es paralela al eje de ordenadas y la inecuación $x \leq 3000$ es el semiplano de la izquierda (en blanco).

La región factible (en blanco) es el cuadrilátero ABCD.
La función objetivo se optimiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos las coordenadas de los vértices y calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos para ver en cuál de ellos es mínima:

− Vértice $A(1000, 1000) \Rightarrow F(1000, 1000) = 350$ €

− Vértice $B(3000, 3000) \Rightarrow F(3000, 3000) = 1050$ €

– Vértice C: $C(3000\,,7000) \;\Rightarrow\; F(3000\,,7000)=1250$ €

– Vértice $D(1000\,,9000) \;\Rightarrow\; F(1000\,,9000)=750$ €

La función objetivo es máxima en el vértice C y, por tanto, la rentabilidad es máxima cuando se invierten 3000 euros en criptomonedas y 7000 euros en fondos de inversión. La rentabilidad es de 1250 euros.

c.- Las restricciones son las mismas que en el apartado anterior por lo que la región factible sigue siendo la misma. Ahora, la función objetivo es el "riesgo de la inversión": $G(x\,,y)=0{,}35x+0y$.

El valor de la función objetivo en el punto propuesto $(1000\,,5000)$ es $G(1000{,}5000)=350$ €

Calculemos los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible:

Vértice $A(1000\,,1000) \;\Rightarrow\; G(1000\,,1000)=350$ €

Vértice $B(3000\,,3000) \;\Rightarrow\; G(3000\,,3000)=1050$ €

Vértice $C(3000\,,7000) \;\Rightarrow\; G(3000\,,7000)=1050$ €

Vértice $D(1000\,,9000) \;\Rightarrow\; G(1000\,,9000)=350$ €

La función objetivo se minimiza en cualquier punto del lado AD de la región factible. Como el punto propuesto pertenece a dicho segmento, la inversión de 1000 euros en criptomonedas y de 5000 euros en fondos de inversión minimiza el riesgo y es una solución óptima.

3.- (*10 puntos*) Dada $f(x)=50+\dfrac{1}{100}(1-x)+\dfrac{1}{1-x}\cdot$ Se pide:

a.- (*2 puntos*) Calcule el dominio y, si existen, las asíntotas verticales y horizontales.

b.- (*5 puntos*) Razone que $f(x)$ tiene dos extremos relativos, uno mínimo y otro máximo ¿El valor en el mínimo de la función es mayor o menor que el valor en el máximo?

c.- (*3 puntos*) Supongamos que x representa el precio de venta de un kg de solomillo según la época del año, $x\in[5{,}21]$ euros por kilo, y $f(x)$ el ingreso diario de un mayorista (en cientos de euros) por la venta del producto ¿A qué precio debe vender para obtener el máximo ingreso? ¿A cuántos euros asciende dicho ingreso máximo?

SOLUCIÓN

a.- ▪ La función es la suma de tres funciones y, por tanto, su dominio es la intersección de los dominios de cada una de ellas.

$f_1(x)=50$ es una función constante cuyo dominio es $D_1=\mathbb{R}$.

$f_2(x)=\dfrac{1}{100}(1-x)$ es una función polinómica de primer grado cuyo dominio es $D_2=\mathbb{R}$.

$f_3(x)=\dfrac{1}{1-x}$ es una función racional cuyo dominio es $D_3=\mathbb{R}-\{\,1\,\}$

Así pues: $D(\,f\,)=D_1\cap D_2\cap D_3=\mathbb{R}-\{\,1\,\}$

▪ Asíntotas verticales: $x=1$ pues $\lim\limits_{x\to 1}\left(50+\dfrac{1-x}{100}+\dfrac{1}{1-x}\right)=\infty$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(50+\frac{1-x}{100}+\frac{1}{1-x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(50+\frac{1-x}{100}+\frac{1}{1-x}\right)=-\infty$$

▪ Asíntotas horizontales: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(50+\dfrac{1-x}{100}+\dfrac{1}{1-x}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(50+\dfrac{1-x}{100}+\dfrac{1}{1-x}\right)=-\infty \end{array}\right|$ $\Rightarrow$ no hay asíntotas horizontales.

b.- Obtengamos los puntos críticos de la función:

$$f'(x)=-\frac{1}{100}+\frac{1}{(1-x)^2}=0 \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{100} \Rightarrow (1-x)^2=100 \Rightarrow \begin{cases} 1-x=-10 \Rightarrow x=11 \\ 1-x=10 \Rightarrow x=-9 \end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{-2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4}=\frac{2(1-x)}{(1-x)^4} \quad \left| \begin{array}{l} f''(11)<0 \Rightarrow x=11 \text{ es un máximo relativo} \\ f''(-9)>0 \Rightarrow x=-9 \text{ es un mínimo relativo} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(11)=50-\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{10}=49{,}8 \\ f(-9)=50+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}=50{,}2 \end{array}\right| \Rightarrow \text{el valor de } f(x) \text{ en el mínimo es mayor que el valor en el máximo.}$$

c.- El máximo ingreso lo obtiene en el máximo relativo $x=11$ o en los extremos del intervalo $[5,21]$:

Tenemos: $f(11)=49{,}8$, $f(5)=50-\dfrac{4}{100}-\dfrac{1}{4}=49{,}71$, $f(21)=50-\dfrac{20}{100}-\dfrac{1}{20}=49{,}75$

Luego para obtener el máximo ingreso debe vender a 11 €/kg. Dicho ingreso máximo es de 4980 €.

4.- (*10 puntos*) La primera derivada de una cierta función es $f'(x)=x(x-1)^2$.

a.- (*3 puntos*) ¿En qué intervalo $f(x)$ es creciente? y ¿decreciente? Calcule los extremos relativos.

b.- (*4 puntos*) ¿En qué intervalo es cóncava la gráfica de $f(x)$? ¿y convexa? Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$.

c.- (*3 puntos*) Determine $f(x)$ sabiendo que $f(0)=10$.

SOLUCIÓN

a.- El crecimiento o decrecimiento de una función depende del signo de su primera derivada. Puesto que el factor $(x-1)^2$ es positivo $\forall x$, el signo de $f'(x)$ depende del signo del segundo factor, x. La función es decreciente en $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,+\infty)$.

Como la función es continua y pasa en $x=0$ de decreciente a creciente, tiene un mínimo relativo en $x=0$.

b.- La concavidad o convexidad de una función depende del signo de su segunda derivada: la función es cóncava cuando $f''(x)>0$ y convexa cuando $f''(x)<0$.

$$f''(x)=(x-1)^2+x\cdot 2(x-1)=(x-1)\cdot(x-1+2x)=(x-1)\cdot(3x-1)=0 \Rightarrow x=1\ ,\ x=\frac{1}{3}$$

$f''>0$	$f''<0$	$f''>0$
	1/3	1

Luego la función es cóncava en $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$ y convexa en $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$

En $x=\dfrac{1}{3}$ y en $x=1$ la función tiene puntos de inflexión pues cambian en ellos su curvatura (de cóncava a convexa y de convexa a cóncava)

c.- $f(x)=\int x(x-1)^2\,dx=\int\left(x^3-2x^2+x\right)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

y como $f(0)=10$: $C=10 \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+10$

5.- (*10 puntos*) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (*7 puntos*) Una aseguradora ha lanzado seguros multidispositivos a jóvenes para contingencias de hurtos, roturas, daños, etc. de patinetes, teléfonos móviles y ordenadores portátiles. Los seguros de patinetes suponen el 40% de su cartera, los móviles representan el 45% y los portátiles el resto de su cartera. La compañía conoce que un 51% de patinetes, un 40% de teléfonos móviles y un 9% de ordenadores dan lugar a un parte de siniestro.

a.1 (*2 puntos*) Calcule la probabilidad de que se comunique un parte de siniestro.

a.2 (*2 puntos*) Si llegara un parte de siniestro, calcule la probabilidad de haber sido una contingencia por un teléfono móvil.

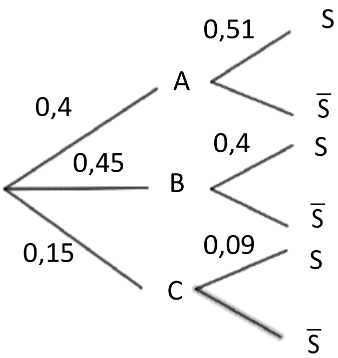
a.3 (*3 puntos*) Si llegara un parte de siniestro, ¿cuál de los tres dispositivos es más probable que haya causado la contingencia?

b.- (*3 puntos*) En una ciudad se ha encuestado a 100 personas preguntándoles si tenían contratado algún seguro para su teléfono móvil. Se obtuvo como resultado que 15 personas tenían contratado este tipo de seguro. Determine un intervalo de confianza al 96% para la proporción de personas de esa ciudad que tienen contratado un seguro para su móvil.

SOLUCIÓN

a.- Sean los sucesos: A = “tiene seguro de patinete”, B = “tiene seguro de teléfono móvil” y C = “tiene seguro de ordenador portátil”. Y sea S el suceso “comunica un parte de siniestro”.

El diagrama en árbol de la situación es:



a.1 Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(S)=p(A)\cdot p(S/A)+p(B)\cdot p(S/B)+p(C)\cdot p(S/C)=$$
$$=0,4\cdot 0,51+0,45\cdot 0,4+0,15\cdot 0,09=0,3975$$

a.2 Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p(B/S)=\frac{p(B\cap S)}{p(S)}=\frac{p(B)\cdot p(S/B)}{p(S)}=\frac{0,45\cdot 0,4}{0,3975}=0,4528$$

a.3 La probabilidad de que haya sido por un teléfono móvil es de 0,4528 según el apartado anterior. Calculemos la probabilidad de que lo haya sido por los restantes dispositivos:

$$p(A/S)=\frac{p(A\cap S)}{p(S)}=\frac{p(A)\cdot p(S/A)}{p(S)}=\frac{0,4\cdot 0,51}{0,3975}=0,5132$$

$$p(C/S)=\frac{p(C\cap S)}{p(S)}=\frac{p(C)\cdot p(S/C)}{p(S)}=\frac{0,15\cdot 0,09}{0,3975}=0,0340$$

Luego si llega un parte de siniestro, la mayor probabilidad es que corresponda a un patinete.

b.- La proporción de personas que han contratado un seguro para su teléfono móvil obtenida en la muestra es:

$$pr=\frac{15}{100}=0,15$$

La cota de error para la estimación de la proporción en la población es: $E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}}$

Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 96%:

$$1-\alpha=0,96 \;\Rightarrow\; \alpha=0,04 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2}=0,02 \;\Rightarrow\; 1-\frac{\alpha}{2}=0,98 \;\Rightarrow\; (\text{mirando en la tabla})\ z_{\alpha/2}=2,05$$

Se tiene entonces: $E=2,05\cdot\sqrt{\dfrac{0,15\cdot 0,85}{100}}=0,0732$

El intervalo de confianza para la proporción en la población es:

$$(pr-E\,,pr+E)=(0,15-0,0732\ ;\ 0,15+0,0732)=(0,0768\ ;\ 0,2232)$$

6.- (*10 puntos*) El tiempo de espera para recibir en casa «tu compra en pocos minutos» se distribuye según una distribución normal de varianza 16 minutos.

a.- (*3 puntos*) Si la media para el tiempo de espera fuera de 12 minutos, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de 7 pedidos fuese de más de 10 minutos?

b.- (*4 puntos*) Si la media obtenida a partir de una muestra aleatoria de 49 encargos fue de 12 minutos, calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97%.

c.- (*3 puntos*) Con datos de 16 encargos se ha calculado el intervalo de confianza (9,7; 13,5) minutos para el tiempo medio en recibir el pedido. Determine el nivel de confianza de ese intervalo.

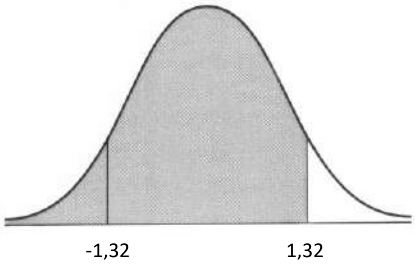
k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

a.- Var = 16 $\Rightarrow \sigma=4$; $\mu=12$.

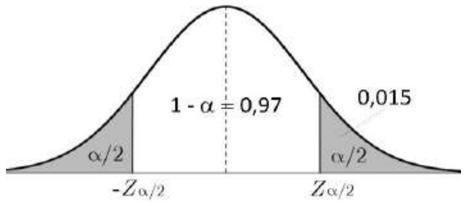
Por el teorema central del límite, la media de las muestras de tamaño n se distribuyen según una normal $N\left(\mu\,,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. En nuestro caso: $N\left(12\,,\dfrac{4}{\sqrt{7}}\right)$.



$$P\left[\bar{x}>10\right]=P\left[z>\frac{10-12}{4/\sqrt{7}}\right]=P\left[z>-1,32\right]=P\left[z\leq 1,32\right]=0,9066$$

b.- La cota de error para la estimación de la media poblacional a partir de la media obtenida en una muestra de tamaño n es: $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. En nuestro caso: $\sigma=4$, $n=49$.

Calculemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente a un nivel de confianza del 97%:



$$1-\alpha=0,97 \;\Rightarrow\; \alpha=0,03 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2}=0,015 \;\Rightarrow$$

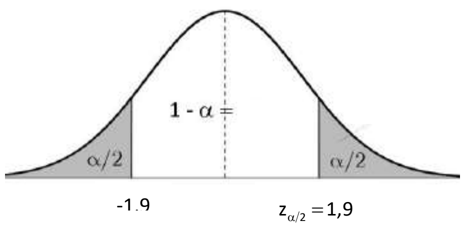
$$\Rightarrow\; 1-\frac{\alpha}{2}=0,985 \;\Rightarrow\; z_{\alpha/2}=2,17$$

Tenemos entonces: $E=2,17\cdot\frac{4}{\sqrt{49}}=1,24$

Luego el intervalo de confianza para la media de la población es: $\left(12-1,24\ ;\ 12+1,24\right)=\left(10,76\ ;\ 13,24\right)$

c.- La cota de error, E, es la mitad de la longitud del intervalo de confianza: $E=\frac{13,5-9,7}{2}=1,9$

Tenemos: $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; 1,9=z_{\alpha/2}\cdot\frac{4}{\sqrt{16}} \;\Rightarrow\; z_{\alpha/2}=1,9$



$P\left[z<z_{\alpha/2}\right]=P\left[z<1,9\right]=0,9713$ (tabla)

$$\frac{\alpha}{2}=P\left[z>1,9\right]=1-P\left[z\leq 1,9\right]=1-0,9713=0,0287 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \alpha=2\cdot 0,0287=0,0574 \;\Rightarrow\; 1-\alpha=0,94,26=94,26\%$$

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (*10 puntos*) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (*5 puntos*) Determine el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial $ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Calcule X.

b.- *(5 puntos)* Determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema (S) sea compatible y calcule la solución del mismo para $m=3$.

$$\left.\begin{aligned} 2x-5y+3z&=0 \\ x-y+z&=0 \\ 3x+my+z&=0 \end{aligned}\right\}(S)$$

2.- (*10 puntos*) Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava para elaborar dos tipos de lotes navideños. El lote *(A)* consta de un jamón y dos botellas de vino y el lote *(B)* consta de un jamón, cinco botellas de vino y cuatro botellas de cava. Si el ingreso por la venta de cada lote *(A)* es de 90 € y por cada lote *(B)* es de 180 €, se pide:

a.- *(8 puntos)* Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada tipo que maximiza el ingreso obtenido. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- *(2 puntos)* En la solución óptima, ¿se agotan todas las existencias de jamones, botellas de vino y botellas de cava? Razone la respuesta.

3.- *(10 puntos)* Sea $P(t) = 1.000\left(15 + \dfrac{t}{100+t^2}\right)$ una función que representa el número de habitantes de cierta población, siendo t el número de años transcurridos desde el año 2.000. Se pide:

a.- *(2 puntos)* Calcule el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo.

b.- *(5 puntos)* Estudie el crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? y ¿cuántos habitantes tiene la población en ese momento?

c.- *(3 puntos)* ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener una población de 15.040 individuos?

4.- *(10 puntos)* Sean las funciones: $g(x) = a\left(1-\dfrac{1}{2}x\right)^3$, $h(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}$;

a.- (*3 puntos*) Calcule $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$.

b.- (*4 puntos*) Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x \le 1 \\ h(x) \text{ si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x=1$, siendo $g(x)$, $h(x)$ las funciones del enunciado.

c.- (*3 puntos*) Calcule $\int_0^2 (1-2x)^3\, dx$.

CONTINÚA AL DORSO

5.- (*10 puntos*) En cierta Facultad de Economía se oferta una misma asignatura en tres grupos, que denotaremos por G1, G2, G3. Los grupos representan el 40%, el 35% y el 25% de los estudiantes, respectivamente. Superan la asignatura el 80% del grupo G1, el 60% del grupo G2 y el 92% del grupo G3. Calcule la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar:

a.- (*2 puntos*) Haya superado la asignatura y sea del grupo G3.

b.- (*2 puntos*) No haya superado la asignatura.

c.- (*2 puntos*) Haya superado la asignatura.

d.- (*2 puntos*) Ni haya superado la asignatura ni sea del grupo G1.

e.- (*2 puntos*) Si el estudiante elegido al azar ha superado la asignatura, calcule la probabilidad de ser del grupo G3.

6.- (*10 puntos*) Se sabe que el tiempo dedicado semanalmente a las tareas del hogar se distribuye según una normal con desviación típica 2 horas.

a.- *(4 puntos)* Para una muestra aleatoria de 64 hogares, el tiempo medio semanal dedicado a las tareas del hogar es de 10 horas. Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de horas dedicadas semanalmente a las tareas del hogar.

b.- (*4 puntos*) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo de 0,75 horas, con un nivel de confianza del 95%.

c.- (*2 puntos*) A partir de una muestra de 81 hogares se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (9,8444; 10,7555) para la media de la población. Determine el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

k	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**	**k**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	**0,0**
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	**0,1**
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	**0,2**
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	**0,3**
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	**0,4**
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	**0,5**
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	**0,6**
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	**0,7**
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	**0,8**
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	**0,9**
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	**1,0**
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	**1,1**
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	**1,2**
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	**1,3**
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	**1,4**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	**1,5**
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	**1,6**
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	**1,7**
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	**1,8**
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	**1,9**
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	**2,0**
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	**2,1**
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	**2,2**
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	**2,3**
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	**2,4**
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	**2,5**
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	**2,6**
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	**2,7**
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	**2,8**
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	**2,9**
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	**3,0**
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	**3,1**
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	**3,2**
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	**3,3**
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	**3,4**
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	**3,5**
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	**3,6**

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

— En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio.

— En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.

— Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 ptos. Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Ejercicio 1

a) **(5 puntos)** Determinar el número de filas y columnas de la matriz X (*1 pto*) y calcular la solución de la ecuación matricial (*4 ptos*). El desglose de la puntuación para el cálculo de la matriz solución será:

– Si se ha procedido despejando la matriz: $X = (AB)^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ (*1 pto*), calcular (AB) (*1 pto*), calcular la inversa de (AB) (*1 pto*) y calcular el producto $(AB)^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ (*1 pto*). En el cálculo de la matriz inversa, si se ha optado por operaciones elementales, se valorará con (*0,5 ptos*) llevar la matriz inicial a una matriz triangular superior y llegar a la matriz identidad (*0,5 ptos*). Si el cálculo se ha realizado con la fórmula, se otorgará (*0,5 ptos*) al cálculo de la matriz adjunta y al cálculo del determinante y llegar al resultado final (*0,5 ptos*).

– Si se ha optado por suponer una matriz $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ genérica (*1 pto*), el producto (AB) (*1 pto*). Plantear el sistema $ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ (*1 pto*) y resolverlo (*1 pto*).

b) **(5 puntos)** Analizar los rangos o indicar que el sistema, al ser un sistema homogéneo, es compatible $\forall m$ (*1 pto*). Calcular la solución para $m = 3$ (*4 ptos*).

El desglose del cálculo de la solución será:

- Escalonar la matriz del sistema y comprobar que se trata de un SCI (*2,5 ptos*) o análisis de rangos y comprobar que se trata de un SCI (*2,5 ptos*).
- Transformar la matriz resultante en sistema de ecuaciones y obtener el valor de una incógnita en función del grado de libertad (*0,5 ptos*); obtener la solución (*1 pto*).

Ejercicio 2

a) (8 puntos) Planteamiento del problema (*2,5 ptos*), representar la región factible (*3 ptos*) y cálculo de la solución óptima (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un problema mucho más sencillo que el original) (*2,5 ptos*). El desglose será:

- Definir las variables de decisión (*0,25 ptos*) y la condición de no negatividad (*0,25 ptos*). Definir la función objetivo (*0,5 pto*s) y definir las tres restricciones del enunciado (*1,5 ptos* = 0,5*3).
- Representar la región factible (*0,5 ptos* por cada una de las cinco restricciones y *0,5 ptos* por la intersección de todas ellas).
- En el cálculo de la solución óptima:
- Si se ha optado por evaluar la función objetivo en los vértices: calcular las coordenadas de los vértices (*1,5 pto*s = 0,3*5), evaluar la función objetivo en los vértices (*0,5 ptos* = 0,1*5), determinar el vértice donde se alcanza el máximo (*0,3 ptos*) y su valor (*0,2 ptos*).
- Si se ha optado por líneas de nivel: representar una primera recta de nivel *0,8 ptos*, una paralela *0,5 ptos* y la dirección de mejora *0,4 ptos*. Razonar gráficamente el vértice solución (*0,3 ptos*). Determinar analíticamente las coordenadas del máximo (*0,3 ptos*) y su valor (*0,2 ptos*).

b) (2 puntos) Razonamiento (*1 pto*) y la respuesta (*1 pto*).

Ejercicio 3

a) (2 puntos) Identificar la pregunta con el cálculo del límite (*1 pto*) y calcular dicho límite (*1 pto*).

b) (5 puntos) Calcular $P'(t)$ (*1,5 ptos*) y obtener los puntos críticos (*1 pto*). Intervalos de crecimiento y decrecimiento (*1,5 ptos*). Determinar el valor de t para el que $P(t)$ es máxima (*0,5 ptos*) y calcular el valor máximo de la población (*0,5 ptos*).

c) (3 puntos) Identificar la pregunta con resolver la ecuación $P(t) = 15.040$ (*1 pto*), llegar a la ecuación de segundo grado (*1 pto*), resolverla y responder a la pregunta (*1 pto*).

Ejercicio 4

a) (3 puntos) Detectar indeterminación $\left({}^{0}/_{0}\right)$ (*0,5 ptos*), factorizar el numerador (*1 pto*), factorizar el denominador (*0,5 ptos*) y simplificar el factor $(x-1)$ (*0,5 ptos*). Calcular el límite (*0,5 ptos*).

b) (4 puntos) Escribir la condición de continuidad en el punto solicitado (*1 pto*). El cálculo del valor de la función en el punto (*1 pto*) y el cálculo de los límites (*1 pto*). Concluir y obtener el valor del parámetro a partir del análisis anterior (*1 pto*).

c) (3 puntos) Cálculo de la integral indefinida (*2 ptos*) y aplicar la Regla de Barrow para llegar al cálculo solicitado (*1 pto*). Se penalizará con 1 punto no ajustar la constante del integrando.

Ejercicio 5

(10 puntos) Cada una de las cuestiones planteadas se calificará con (*2 ptos*).

Nota: En caso de no haber respondido a las cuestiones planteadas o haber contestar erróneamente a ellas, si se han definido los sucesos que intervienen en el enunciado en un diagrama de árbol o en una tabla, se puntuará el ejercicio con 2 ptos.

Ejercicio 6

a) (4 puntos) Saber qué cuantil buscar y calcularlo (*1,5 ptos*). Escribir la fórmula de error, sustituir y calcular (*1 pto*). Poner la fórmula del intervalo de confianza y calcularlo (*1,5 ptos*).

b) (4 puntos) Escribir la fórmula del error (*2 ptos*). Sustituir y calcular el valor de n (*2 ptos*). Si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior, se restan *0,5 ptos*.

c) (2 puntos) Calcular $Z_{\alpha/2}$(*1 pto*), calcular $\frac{\alpha}{2}$ (*0,5 ptos*) y calcular el nivel de confianza (*0,5 ptos*).

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (*10 puntos*) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (*5 puntos*) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y la ecuación matricial $XB+A=C$, determine razonadamente el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial esté bien planteada. Despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b.- *(5 puntos)* Calcule, utilizando técnicas matriciales, la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} 2x-5y+3z&=1 \\ x-y+z&=1 \\ 3x+3y+z&=5 \end{aligned}\right\}$$

2.- *(10 puntos)* Emilia quiere fertilizar sus campos de cultivo utilizando sacos de fertilizantes de dos marcas comerciales, *A* y *B*. Por cuestiones medioambientales debe comprar como máximo 100 sacos. Un saco del fertilizante *A* cuesta 4 € y uno del *B* cuesta 6 €. Un saco del fertilizante *A* contiene 3 unidades de nitrógeno, 5 de fósforo y 1 de potasio, mientras que un saco del *B* contiene 2 unidades de cada nutriente. Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio. ¿Cuál es el gasto mínimo que tiene que hacer Emilia y qué debe comprar para satisfacer las necesidades nutricionales de los cultivos?

3.- *(10 puntos)* El coste total de fabricación, en euros, de cierto producto viene dado por la función $C(x)=x^2+80x+10.000$, donde x representa el número de unidades producidas y vendidas.

a.- (*5 puntos*) Si cada producto se vende a 400 euros, plantee la función beneficio (ingresos menos costes) en función del número de unidades producidas y vendidas. Determine el número de unidades del producto que deben venderse para que el beneficio sea máximo (justificando que lo es). ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

b.- (*5 puntos*) ¿En qué nivel de producción se minimiza el coste medio por unidad $CM(x)=\dfrac{C(x)}{x}$?

4.- (*10 puntos*) Dada $f(x)=\dfrac{mx^3-1}{x^2}$.

a.- *(6 puntos)* Determine el valor del parámetro m para que la función tenga un extremo relativo en $x=-1$. Razone si se trata de un máximo o un mínimo relativo.

b.- *(4 puntos)* Calcule el valor de m para que $\int_1^2 f(x)\,dx=4$.

5.- (*10 puntos*) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (*6 puntos*) La probabilidad de que un autobús escolar llegue con retraso en un día nublado es de 0,08 y en un día despejado 0,004. Durante un periodo de 20 días ha habido 8 días nublados y 12 días despejados. Para un día elegido al azar, ¿cuál será la probabilidad de que el autobús llegue con retraso?

b.- (*4 puntos*) De los sucesos *A* y *B* de un mismo experimento aleatorio se sabe que: $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ y $P(A \cup B) = 3/4$. Calcule $P(A \cap B)$, $P(A/B)$ y $P(A \cap \bar{B})$. Justifique si *A* y *B* son dos sucesos independientes.

6.- (*10 puntos*) Se pretende analizar el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 3.000 euros.

a.- (*5 puntos*) Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable ¿cuántas familias tenemos que encuestar para que la amplitud del intervalo no sea superior de 2.000 euros?

b.- (*4 puntos*) En una muestra de 60 hogares se obtuvo un consumo medio anual en alimentación y bebidas de 17.000 euros, halle el intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable.

c.- (*1 punto*) Si desde una asociación de consumidores se afirma «el consumo anual medio en alimentación y bebidas en hogares es de 20.000 euros al año». Razone, a la vista del apartado **b.-** si hay motivos para dudar de su afirmación.

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	**0,0**
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	**0,1**
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	**0,2**
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	**0,3**
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	**0,4**
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	**0,5**
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	**0,6**
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	**0,7**
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	**0,8**
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	**0,9**
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	**1,0**
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	**1,1**
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	**1,2**
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	**1,3**
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	**1,4**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	**1,5**
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	**1,6**
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	**1,7**
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	**1,8**
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	**1,9**
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	**2,0**
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	**2,1**
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	**2,2**
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	**2,3**
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	**2,4**
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	**2,5**
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	**2,6**
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	**2,7**
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	**2,8**
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	**2,9**
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	**3,0**
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	**3,1**
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	**3,2**
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	**3,3**
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	**3,4**
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	**3,5**
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	**3,6**

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

- En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio.
- En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.
- Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 ptos. Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Ejercicio 1

a) (**5 puntos**) Determinar la dimensión de la matriz X *(0,5 ptos)*, despejar la matriz X *(1 pto)* y calcular la solución (*3,5 ptos*). El desglose de la puntuación para el cálculo de la matriz solución será:

Obtener $C-A$ *(0,5 ptos)*, calcular la inversa de B *(2 ptos)*, calcular el producto $(C-A)B^{-1}$ *(1 pto)*. En el cálculo de la matriz inversa, si se ha optado por operaciones elementales, llevar la matriz inicial a una matriz triangular superior se valorará con *(1,5 ptos)* y por llegar a la matriz identidad *(0,5 ptos)*. Si el cálculo se ha realizado con la fórmula, al cálculo de la matriz adjunta se otorgará *(1 pto)*, al cálculo del determinante *(0,5 ptos)* y llegar al resultado final *(0,5 ptos)*.

b) (**5 puntos**) Escalonar la matriz del sistema o análisis de rangos para comprobar que se trata de un SCI *(3 ptos)*. Transformar la matriz resultante en sistema de ecuaciones y obtener el valor de una incógnita en función del grado de libertad (*1 pto*); obtener la solución (*1 pto*).

Ejercicio 2

a) **(10 puntos)** Planteamiento del problema *(3 ptos)*, representar la región factible *(3 ptos)* y cálculo de la solución óptima (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un problema mucho más sencillo que el original) *(4 ptos)*. El desglose será:

- Definir las variables de decisión *(0,25 ptos)* y la condición de no negatividad *(0,25 ptos)*, definir la función objetivo *(0,5 ptos)*. Definir las cuatro restricciones del enunciado (*2 ptos = 0,5 ptos* cada una).
- Representar la región factible (*2,5 ptos* = 0,5x5) y *0,5 ptos* por la intersección de todas ellas.
- En el cálculo de la solución óptima *(4 ptos)* (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un problema mucho más sencillo que el original) y se procederá como sigue:
  - Si se ha optado por evaluar la función objetivo en los vértices: calcular las coordenadas de los vértices (*2 ptos*; cada vértice 0,4*5), evaluar la función objetivo en los vértices (*1 pto*; 0,2*5). Determinar el vértice donde se alcanza el mínimo *(0,5 ptos)* y su valor *(0,5 ptos)*.
  - Si se ha optado por curvas de nivel: representar la primera recta *0,8 ptos*, una paralela *0,4 ptos*, identificar la dirección de mejora *0,5 ptos*. Razonar gráficamente el vértice solución *(0,3 ptos)*. Determinar analíticamente el mínimo *(0,5 ptos)* y su valor *(0,5 ptos)*.

Ejercicio 3

a) (5 puntos) Plantear la función beneficio $B(x)$ *(1 pto)*, calcular la derivada $B'(x)$ *(1 pto)*, calcular el punto crítico *(1 pto)*. Obtener la coordenada (x) del máximo, justificando que lo es *(1,5 ptos)*. Calcular el beneficio máximo *(0,5 ptos)*.

b) (5 puntos) Calcular $CM(x)$ y $CM'(x)$ (*2 ptos*), calcular los puntos críticos *(1,5 ptos)*. Obtener la coordenada (x) del mínimo, justificando que lo es *(1,5 ptos)*.

Ejercicio 4

a) (6 puntos) Calcular *f' (x) (2 ptos*), evaluar la derivada primera en *x = -1 (1 pto)* y obtener el valor de *m = 2* para que en *x = -1* haya un punto crítico *(1 pto)*. Analizar que en *x = -1* con *m = 2* existe un máximo relativo *(2 ptos)*.

b) (4 puntos) Expresar el integrando como suma de integrales inmediatas *(0,5 ptos)*, cálculo de las primitivas (*2 ptos*; *1 pto* cada una) y cálculo de la integral definida *(1 pto)*. Obtener el valor de m *(0,5 ptos)*.

Ejercicio 5

a) (6 puntos) Calcular la probabilidad de día nublado *(1 pto*) y la probabilidad de día despejado *(1 pto)*. Escribir el teorema de la probabilidad total, diagrama de árbol o tabla con los datos del enunciado *(2 ptos)*. Obtener la probabilidad solicitada *(2 ptos)*.

b) (4 puntos) Se puntuará con *(1 pto)* cada una de las cuestiones formuladas.

Ejercicio 6

a) (5 puntos) Saber qué cuantil buscar y calcularlo (*2 ptos*). Escribir la fórmula del error *(1 pto)*. Sustituir y calcular el valor de n *(2 ptos)*. Si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior, se restan *0,5 ptos*. Se penalizará con *1 pto* trabajar con la amplitud en vez de con el error.

b) (4 puntos) Escribir la fórmula de error, sustituir y calcularlo *(2 ptos)*. Poner la fórmula del intervalo de confianza y calcularlo *(2 ptos)*.

c) (1 punto) Es suficiente con argumentar que, al no estar el valor 20.000 dentro del intervalo, hay motivos para dudar –con los datos del problema– de la afirmación de la asociación.