PAU PORTUGAL

Matematica A (635) 2021-2024

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 25

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos

Toomates Coolección **Problem Solving** (en español):
Geometría Axiomática , Problemas de Geometría 1 , Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría , Álgebra , Teoría de números , Combinatoria , Probabilidad
Trigonometría , Desigualdades , Números complejos , Funciones

Toomates Coolección **Llibres de Text** (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) , Àlgebra , Proporcionalitat , Mesures geomètriques , Geometria analítica
Combinatòria i Probabilitat , Estadística , Trigonometria , Funcions , Nombres Complexos ,
Àlgebra Lineal , Geometria Lineal , Càlcul Infinitesimal , Programació Lineal , Mates amb Excel

Toomates Coolección **Compendiums**:
PAU España: Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares
PAU Internacional: Portugal A Portugal B Italia UK (A Level) IB Francia (BAC)
Canguro: ESP CAT FR USA UK AUS
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Internacional: IMO OMI IGO SMT INMO CMO REOIM Arquimede HMMT BMO
Pruebas acceso: ACM4 , CFGS , PAP
Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales, para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **Catálogo de libros** completo en http://www.toomates.net/biblioteca.htm
Encontrarás muchos más materiales para el aprendizaje de las matemáticas en **www.toomates.net**
Descarga toda la biblioteca Toomates Coolección en un solo archivo **Aquí** MEGA

Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**

Versión de este documento: **26/06/2024**

Índex.

	Fase 1			Fase 2			Especial		
	Enun	Sol	Crit	Enun	Sol	Crit	Enun	Sol	Crit
2021	4	12	24	35	43	58	68	76	83
2022	92	100	3	111	118	131	144	151	161
2023	172	180	183	204	212	223	236	244	252
2024	265	273	285						

Fuente.

https://recursos-para-matematica.webnode.pt/ensino-secundario2/exames-nacionais-de-matematica-a2/

Este documento forma parte de este grupo de recopilatorios:

Portugal 635 1997-2020 http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal635.pdf

Portugal 735 2006-2020 http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal735.pdf

Portugal 635 2021-2024 http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal635b.pdf

Portugal 735 2021-2024 http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal735b.pdf

Portugal 835 2021-2024 http://www.toomates.net/biblioteca/Portuga835.pdf

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 11 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \, \cos b + \operatorname{sen} b \, \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \, \cos b - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho \, e^{i\theta})^n = \rho^n \, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} \, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \, v)' = u' \, v + u \, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \, v - u \, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \, u^{n-1} \, u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \, e^u$

$(a^u)' = u' \, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy
- as coordenadas dos vértices E e G são $(7, 2, 15)$ e $(6, 10, 13)$, respetivamente;
- a reta EF é definida pela equação
  $(x, y, z) = (1, -2, 19) + k(-3, -2, 2),\ k \in \mathbb{R}$

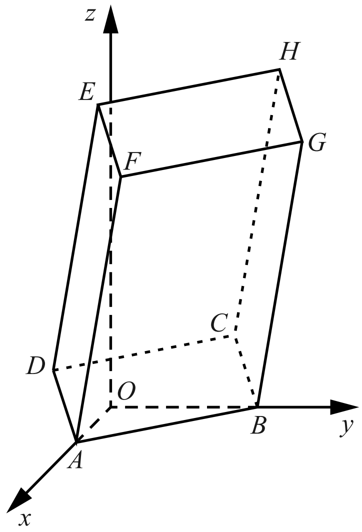


Figura 1

✱ 1.1. Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta EF e que passa no ponto E?

(A) $(x, y, z) = (7, -3, 3) + k(2, -3, 0),\ k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (7, 2, 15) + k(0, 3, -3),\ k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (7, -10, 3) + k(0, 3, 3),\ k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (7, 2, 15) + k(2, 0, -3),\ k \in \mathbb{R}$

✱ 1.2. Determine, sem recorrer à calculadora, a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto B e que passa no ponto D

2. Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro em O e raio 3 e o triângulo $[ABC]$

Sabe-se que:

- o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- α é a inclinação da reta AB $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Ox
- a reta BC é paralela ao eixo Oy

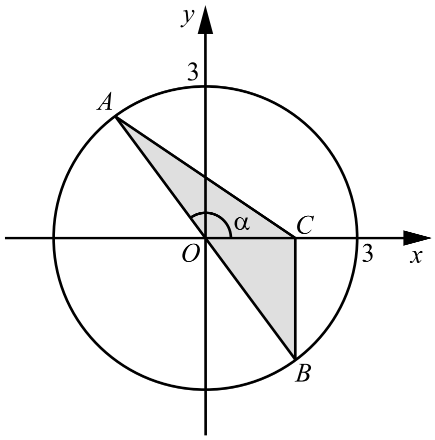


Figura 2

Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada pela expressão

$$-9 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

*** 3.** Numa escola frequentada por estudantes portugueses e estrangeiros, 60% dos alunos são raparigas e 15% são rapazes estrangeiros.

Escolheu-se, ao acaso, um aluno dessa escola e verificou-se que era um rapaz.

Qual é a probabilidade de ele ser português?

(A) 45% **(B)** 50% **(C)** $57{,}5\%$ **(D)** $62{,}5\%$

*** 4.** O corfebol é um desporto coletivo misto, com origem na Holanda.

Um clube de corfebol de um certo país vai participar num torneio internacional.

A comitiva vai deslocar-se por via terrestre, utilizando um automóvel de cinco lugares e uma carrinha de nove lugares. A comitiva é constituída por três dirigentes, um treinador, cinco jogadores do sexo masculino e cinco do sexo feminino.

Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de distribuir os catorze elementos da comitiva pelos catorze lugares disponíveis, sabendo-se que os dois condutores são dois dos dirigentes e que, no automóvel, vão dois jogadores de cada sexo.

5. Uma turma de 11.º ano é constituída por 30 alunos com idades de 15, 16 e 17 anos, dos quais 60% são raparigas. Sabe-se que um terço dos rapazes tem 17 anos e que um terço das raparigas tem 15 ou 16 anos.

O André e a Beatriz, alunos da turma, são gémeos e têm 16 anos.

Escolhem-se, ao acaso, cinco alunos da turma.

Determine a probabilidade de o grupo constituído por esses cinco alunos ser formado pelo André, pela Beatriz, por dois jovens com 17 anos e por outro com 15 ou 16 anos.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

*** 6.** Seja (v_n) uma progressão geométrica.

Sabe-se que $v_5 = 4$ e que $v_8 = 108$

Qual é o valor de v_6?

(A) 12 **(B)** 24 **(C)** 48 **(D)** 60

7. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

Determine, sem recorrer à calculadora, quantos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) pertencem ao intervalo $\left[\dfrac{83}{41}, \dfrac{67}{33}\right]$

*** 8.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{28}}$

Seja w o número complexo tal que $w = \dfrac{z_1}{z_2}$

Sabe-se que, no plano complexo, o afixo do número complexo w é um dos vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial e com outro vértice sobre o semieixo real positivo.

Qual é o número mínimo de vértices desse polígono?

(A) 7 **(B)** 14 **(C)** 21 **(D)** 28

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 1 + 2i$ e $z_3 = 2 - i$

Seja w o número complexo tal que $w = \dfrac{z_1 \times z_2}{z_3}$

Mostre, sem recorrer à calculadora, que a proposição seguinte é verdadeira.

$$|w| = \sqrt{13} \quad \wedge \quad \operatorname{Arg}(w) \in \left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[$$

10. Seja f a função, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2(1 + 2\ln x) & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{5 - 5e^{x-1}}{x^2 + 3x - 4} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Resolva os itens **10.1.** e **10.2.** sem recorrer à calculadora.

*** 10.1.** Averigue se a função f é contínua em $x = 1$

*** 10.2.** Estude, no intervalo $]0,1[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

11. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja g a função, de domínio $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, definida por $g(x) = x\cos x + \operatorname{sen} x$

Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\dfrac{1}{2}$

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \dfrac{x^3}{2x^2 - \ln x}$

Estude a função h quanto à existência de assíntota oblíqua ao seu gráfico e, caso esta exista, escreva a sua equação reduzida.

13. A Figura 3 representa um depósito de forma cilíndrica, instalado na horizontal, que contém uma certa quantidade de combustível.

Sabe-se que as bases do cilindro têm $1{,}8$ metros de diâmetro.

Num certo instante, iniciou-se o vazamento do depósito.

Seja $a(t)$ a altura, em metros, do combustível no depósito, t minutos após o início do vazamento.

Admita que $a(t) = 1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0039t)^{\frac{2}{3}}$

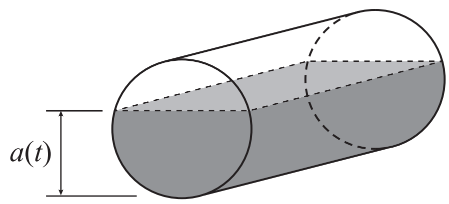


Figura 3

*** 13.1.** Qual é, em metros, a diferença entre a altura do combustível no depósito no início do vazamento e a altura do combustível quando este ocupa metade da capacidade do depósito?

(A) $0{,}72$ **(B)** $0{,}54$ **(C)** $0{,}36$ **(D)** $0{,}27$

*** 13.2.** Decorridos t_1 minutos após o início do vazamento, a altura do combustível no depósito é igual a um certo valor.

Sabe-se que, passado igual período de tempo, a altura do combustível no depósito é igual a metade desse valor.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_1, sabendo que esse valor existe e é único.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

14. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação

$$\ln\left((1-x)e^{x-1}\right) = x$$

✱ 15. Considere, para um certo número real positivo k, as funções f e g, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definidas por $f(x) = k\,\mathrm{sen}(2x)$ e $g(x) = k\cos x$

Sejam, num referencial ortonormado do plano, A, B e C os pontos de intersecção dos gráficos de f e g, sendo A o ponto de menor abcissa e C o ponto de maior abcissa.

Sabe-se que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de k

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.1.**	**10.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	**144**
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**5.**	**7.**	**9.**	**11.**	**12.**	**14.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	4 × 14 pontos											**56**
TOTAL												**200**

Exame Nacional de Matemática A

1.ª Fase | 2021 | Proposta de Resolução

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

Exame Nacional de Matemática A

1.ª Fase | 2021

Proposta de Resolução

1.

1.1. Duas rectas r e s são perpendiculares se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ forem perpendiculares, isto é $\vec{r}\cdot\vec{s}=0$, sendo $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vectores directores de r e s, respectivamente.

Assim, a opção correcta é a **C**, pois:

- um vector director da recta desta opção é $\vec{u}(0,3,3)$ e este vector é perpendicular ao vector $\vec{v}(-3,-2,2)$, pois $\vec{u}\cdot\vec{v}=(0,3,3)\cdot(-3,-2,2)=0-6+6=0$.

- o ponto E pertence a esta recta pois:

$$(7,2,15)=(7,-10,3)+k(0,3,3)\Leftrightarrow\begin{cases}7=7\\2=-10+3k\\15=3+3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7=7\\k=4\\k=4\end{cases}\text{, ou seja, }(7,2,15)=(7,-10,3)+4\times(0,3,3)$$

Resposta: C

1.2. A medida do raio da superfície esférica é igual a:

$$\overline{BD}=\overline{EG}=\sqrt{(7-6)^2+(2-10)^2+(15-13)^2}=\sqrt{1+64+4}=\sqrt{69}$$

O plano ABG é perpendicular à recta EF, pelo que um vector normal a ABG é $\vec{v}(-3,-2,2)$, que é um vector director da recta EF.

Logo, $ABG:-3x-2y+2z+d=0$

Como o ponto $G(6,10,13)$ pertence ao plano ABG, vem que:

$$ABG:-3\times6-2\times10+2\times13+d=0\Leftrightarrow-12+d=0\Leftrightarrow d=12$$

Logo, $ABG:-3x-2y+2z+12=0$

O ponto B pertence ao eixo Oy, pelo que as suas coordenadas são da forma $B(0,y,0)$. Como B pertence ao plano ABG, vem que $-3\times0-2y+2\times0+12=0\Leftrightarrow-2y=-12\Leftrightarrow y=6$.

Portanto, as coordenadas de B são $B(0,6,0)$ e uma equação da superfície esférica é:

$$(x-0)^2+(y-6)^2+(z-0)^2=\left(\sqrt{69}\right)^2\Leftrightarrow x^2+(y-6)^2+z^2=69$$

Outra resolução: o ponto B pertence ao eixo Oy, pelo que as suas coordenadas são da forma $B(0,y,0)$.

As rectas HG e BG são perpendiculares. Um vector director de BG é $\overrightarrow{BG}$ e como HG e EF são paralelas, um vector director de HG é $\vec{v}(-3,-2,2)$.

Assim, dado que $\overrightarrow{BG} = G - B = (6,10,13) - (0,y,0) = (6,10-y,13)$, vem que:

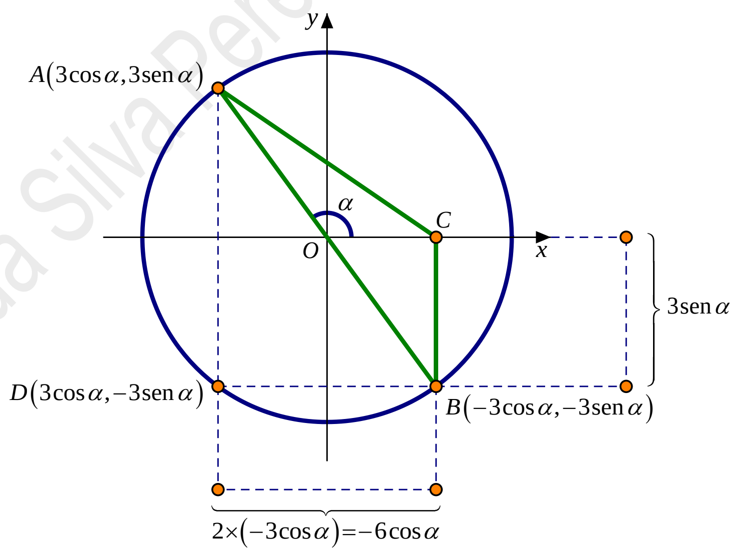
$$\overrightarrow{BG} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (6,10-y,13)\cdot(-3,-2,2) = 0 \Leftrightarrow -18-20+2y+26 = 0 \Leftrightarrow 2y = 12 \Leftrightarrow y = 6$$

Portanto, as coordenadas de B são $B(0,6,0)$ e uma equação da superfície esférica é:

$$(x-0)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2 = \left(\sqrt{69}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 69$$

2. A medida do raio da circunferência é 3, pelo que as coordenadas do ponto A, são $A(3\cos\alpha, 3\operatorname{sen}\alpha)$. Como o ponto B é o simétrico de A em relação à origem, vem que $B(-3\cos\alpha, -3\operatorname{sen}\alpha)$ e $C(-3\cos\alpha, 0)$, em que $3\cos\alpha < 0$ e $3\operatorname{sen}\alpha > 0$.

Seja $[BD]$ o segmento de recta paralelo a Ox, tal que D é o simétrico de A em relação ao eixo Ox, ou seja, sendo $[BC]$ a base do triângulo, a sua altura é $[BD]$:



Assim, a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $\dfrac{\overline{BC}\times\overline{BD}}{2} = \dfrac{-6\cos\alpha \times 3\operatorname{sen}\alpha}{2} = -9\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$.

3. Consideremos os acontecimentos A: «o estudante escolhido é rapaz» e B: «o estudante escolhido é estrangeiro».

Do enunciado sabe-se que $P\left(\overline{A}\right)=0,6 \Leftrightarrow P\left(A\right)=0,4$ e $P\left(A\cap B\right)=0,15$.

Pede-se a probabilidade de o estudante escolhido ser português, sabendo é que rapaz, ou seja, $P\left(\overline{B}\middle|A\right)$.

Assim, $P\left(\overline{B}\middle|A\right)=\dfrac{P\left(\overline{B}\cap A\right)}{P\left(A\right)}=\dfrac{P\left(A\right)-P\left(B\cap A\right)}{P\left(A\right)}=\dfrac{0,4-0,15}{0,4}=\dfrac{0,25}{0,4}=0,625$, ou seja, $62,5\%$.

Resposta: D

4. Tem-se que:

▪ dos três dirigentes escolhem-se dois para conduzirem cada um dos veículos. O número de maneiras de o fazer é ${}^3C_2$. Para cada uma destas maneiras, os dois dirigentes escolhidos permutam de $2!$ maneiras pelos dois veículos. Portanto, para as posições de condução nos dois veículos temos ${}^3C_2\times 2!={}^3A_2$ possibilidades.

▪ no carro têm de viajar dois jogadores do sexo masculino e dois do sexo feminino. Assim, dos cinco do sexo masculino escolhem-se dois, o número de maneiras de o fazer é ${}^5C_2$; e dos cinco do sexo femininos escolhem-se dois, o número de maneiras de o fazer é ${}^5C_2$. Para cada uma destas maneiras, os quatro jogadores permutam de $4!$ maneiras distintas nos quatro lugares do carro. Portanto, para ocupar os restantes quatro lugares do carro temos ${}^5C_2\times{}^5C_2\times 4!$ possibilidades.

▪ finalmente, as restantes oito pessoas permutam de $8!$ maneiras distintas nos restantes oito lugares da carrinha.

Assim, uma expressão que dá o número de maneiras diferentes de distribuir os catorze elementos pelos catorze lugares é ${}^3A_2\times{}^5C_2\times{}^5C_2\times 4!\times 8!$.

5. O número de casos possíveis é ${}^{30}C_5$, que é o número de maneiras de escolher cinco alunos entre os trinta.

Tem-se que:

▪ 60% são raparigas, ou seja $0,6\times 30=18$ são raparigas e portanto, doze são rapazes;

▪ um terço dos rapazes têm 17 anos, ou seja, $\dfrac{1}{3}\times 12=4$ têm 17 anos e portanto, os restantes oito rapazes têm 15 ou 16 anos;

▪ um terço das raparigas têm 15 ou 16 anos, ou seja, $\dfrac{1}{3}\times 18=6$ têm 15 ou 16 anos e portanto, as restantes doze raparigas têm 17 anos.

Portanto, dezasseis alunos têm 17 anos e catorze têm 15 ou 16 anos.

Assim, escolhem-se o André e a Beatriz, o número de maneiras de o fazer é ${}^{2}C_{2}$; dos dezasseis alunos com 17 anos escolhem-se dois, o número de maneiras de o fazer é ${}^{16}C_{2}$; e, finalmente, dos restantes doze alunos com 15 ou 16 anos escolhe-se um (excluem-se o André e a Beatriz), o número de maneiras de o fazer é ${}^{12}C_{1}$.

Logo, o número de casos favoráveis é ${}^{2}C_{2} \times {}^{16}C_{2} \times {}^{12}C_{1} = {}^{16}C_{2} \times 12$ e a probabilidade pedida é $\dfrac{{}^{16}C_{2} \times 12}{{}^{30}C_{5}} \approx 0{,}01$.

6. Seja r, com $r \in \mathbb{R}$, a razão da progressão geométrica (v_n).

Tem-se que $v_8 = v_5 \times r^3 \Leftrightarrow 108 = 4r^3 \underset{\div 4}{\Leftrightarrow} r^3 = 27 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow r = 3$.

Portanto, $v_6 = v_5 \times r = 4 \times 3 = 12$.

Resposta: A

7. Para n natural e ímpar, tem-se que $(-1)^{n+1} = 1$, pois se n é ímpar, então $n+1$ é par.

Logo, para n natural e ímpar, tem-se que $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}$.

Assim, $u_n \in \left[\dfrac{83}{41}, \dfrac{67}{33}\right] \Leftrightarrow \dfrac{83}{41} \le u_n \le \dfrac{67}{33} \Leftrightarrow 2 + \dfrac{1}{n} \le \dfrac{67}{33} \ \wedge \ 2 + \dfrac{1}{n} \ge \dfrac{83}{41} \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} \le \dfrac{67}{33} - 2 \ \wedge \ \dfrac{1}{n} \ge \dfrac{83}{41} - 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \le \frac{1}{33} \ \wedge \ \frac{1}{n} \ge \frac{1}{41} \underset{n>0}{\Leftrightarrow} n \ge 33 \ \wedge \ n \le 41 \Leftrightarrow 33 \le n \le 41$$

Portanto, os termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) que pertencem a $\left[\dfrac{83}{41}, \dfrac{67}{33}\right]$ são u_{33}, u_{35}, u_{37}, u_{39} e u_{41}, ou seja, cinco termos.

8. Tem-se que $w=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\cancel{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\cancel{2}e^{i\frac{3\pi}{28}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{28}\right)}=e^{i\frac{\pi}{7}}$.

Assim, como um outro vértice está no semieixo real positivo, esse vértice será o afixo do número complexo $e^{i(0)}$, pelo que sendo n o número de vértices, com $n\in\mathbb{N}$, vem que:

$$\frac{\pi}{7}-0=\frac{2k\pi}{n}\ ,\ k\in\mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow \frac{\cancel{\pi}}{7}=\frac{2k\cancel{\pi}}{n}\ ,\ k\in\mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow n=14k\ ,\ k\in\mathbb{Z}^+$$

Portanto, fazendo $k=1$ obtemos o número mínimo de vértices, pelo que esse número é $n=14\times1=14$.

Resposta: B

9. Tem-se que $w=\frac{z_1\times z_2}{z_3}=\frac{(-3+2i)(1+2i)}{2-i}=\frac{-3-6i+2i+4i^2}{2-i}=\frac{-3-4i-4}{2-i}=\frac{-7-4i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}$

$$=\frac{-14-7i-8i-4i^2}{2^2-i^2}=\frac{-14-15i+4}{4+1}=\frac{-10-15i}{5}=-2-3i$$

De uma outra forma: reparando que $(2-i)i=2i-i^2=1+2i$, vem que:

$$w=\frac{z_1\times z_2}{z_3}=\frac{(-3+2i)(1+2i)}{2-i}=\frac{(-3+2i)\,(\cancel{2-i})i}{\cancel{2-i}}=-3i+2i^2=-2-3i$$

Assim, $|w|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

Por outro lado, $\operatorname{Arg}(w)\in\left]-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right[$ se $\operatorname{Im}(w)<\operatorname{Re}(w)<0$. Assim, como $\operatorname{Im}(w)=-3$ e $\operatorname{Re}(w)=-2$ e como $-3<-2<0$ tem-se que $\operatorname{Im}(w)<\operatorname{Re}(w)<0$, pelo que $\operatorname{Arg}(w)\in\left]-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right[$.

$\therefore$ a proposição $|w|=\sqrt{13}\ \wedge\ \operatorname{Arg}(w)\in\left]-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right[$ é verdadeira.

10.

10.1. A função f é contínua em $x=1$ se $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x^2(1+2\ln x)\right)=-1^2\times\left(1+2\ln(1)\right)=-1\times(1+2\times 0)=-1$

- $f(1)=-1^2\times\left(1+2\ln(1)\right)=-1\times(1+2\times 0)=-1$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4}\underset{i)}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-5\left(e^{x-1}-1\right)}{(x-1)(x+4)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-5}{x+4}\times\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}\underset{\substack{y=x-1\\ x\to 1^+\Rightarrow y\to 0^+}}{=}\dfrac{-5}{5}\times\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}}=$

$=-1\times 1=-1$

Logo, a função f é contínua em $x=1$.

$i)\ x^2+3x-4=0\Leftrightarrow x=-4\ \vee\ x=1\Rightarrow x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$

10.2. Para $x\in\,]0,1[$, tem-se que $f(x)=-x^2(1+2\ln x)$, pelo que:

- $f'(x)=\left(-x^2\right)'(1+2\ln x)-x^2(1+2\ln x)'=-2x(1+2\ln x)-x^{\cancel{2}}\times 2\times\dfrac{1}{\cancel{x}}=-2x(1+2\ln x)-2x=$

$=-2x-4x\ln x-2x=-4x-4x\ln x=-4x(1+\ln x)$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow -4x(1+\ln x)=0\Leftrightarrow -4x=0\ \vee\ 1+\ln x=0\Leftrightarrow x=0\ \vee\ \ln x=-1\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=e^{-1}$

Como $x\in\,]0,1[$, vem que $x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ é o único zero de f' neste intervalo.

Elaborando uma tabela de sinal de f' e relacionando com a monotonia de f, vem:

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$-4x$	n.d.	$-$	$-$	$-$	n.d.
$1+\ln x$	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.
$f'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
f	n.d.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	n.d.

Logo, no intervalo $]0,1[$, a função f é crescente em $\left]0,\frac{1}{e}\right]$, é decrescente em $\left[\frac{1}{e},1\right[$ e tem máximo em $x=\frac{1}{e}$, que é $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\left(\frac{1}{e}\right)^2\left(1+2\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)=-\frac{1}{e^2}\left(1+2\ln\left(e^{-1}\right)\right)=-\frac{1}{e^2}\left(1+2\times(-1)\right)=-\frac{1}{e^2}\times(-1)=\frac{1}{e^2}$.

11. Para mostrar o que se pretende, basta mostrar que existe pelo menos um $c\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ tal que $g'(c)=-\frac{1}{2}$.

Tem-se que:

- $g'(x)=x'\cos x+x(\cos x)'+(\operatorname{sen} x)'=\cos x+x(-\operatorname{sen} x)+\cos x=2\cos x-x\operatorname{sen} x$

- a função g' é contínua em $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ por ser o produto e a diferença entre funções contínuas no seu domínio (funções polinomiais e trigonométricas)

- $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\times\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\times 0-\frac{\pi}{2}\times 1=-\frac{\pi}{2}$.

Como $-\frac{\pi}{2}<-\frac{1}{2}$, vem que $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)<-\frac{1}{2}$.

- $g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\frac{3\pi}{2}\times\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\times 0-\frac{3\pi}{2}\times(-1)=\frac{3\pi}{2}$.

Como $\frac{3\pi}{2}>-\frac{1}{2}$, vem que $g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)>-\frac{1}{2}$.

Logo, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) < -\frac{1}{2} < g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, pelo que, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ tal que $g'(c) = -\frac{1}{2}$ ou seja, existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico de g em que a recta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$.

12. Se o gráfico de h tiver assimptota oblíqua, o seu declive é dado por:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{2x^2-\ln x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^3-x\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}\left(2-\frac{\cancel{x}\ln x}{x^{\cancel{3}2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2-\frac{\ln x}{x^2}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2-\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{Limite notável}}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = \frac{1}{2-0\times\frac{1}{+\infty}} = \frac{1}{2-0\times0} = \frac{1}{2}$$

A ordenada na origem é dada por:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(h(x)-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-\ln x}-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2x^3}-\cancel{2x^3}+x\ln x}{4x^2-2\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\ln x}{x^{\cancel{2}}\left(4-\frac{2\ln x}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\left(4-\frac{\ln x}{x}\times\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{x}}{4-\frac{\ln x}{x}\times\frac{2}{x}} = \frac{\overbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}^{\text{Limite notável}}}{4-\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{Limite notável}}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}} = \frac{0}{4-0\times\frac{2}{+\infty}}$$

$$= \frac{0}{4-0\times0} = 0$$

Logo, a recta de equação $y = \frac{1}{2}x$ é a assimptota oblíqua do gráfico de h, quando $x \to +\infty$

13.

13.1. No início do vazamento a altura do combustível é dada por:

$$a(0)=1{,}8-(0{,}216+0{,}0039\times 0)^{\frac{2}{3}}=1{,}8-(0{,}216)^{\frac{2}{3}}$$

Quando o combustível ocupa metade da capacidade do depósito, a altura é metade da altura do depósito, isto é, $0{,}9$ metros, pelo que a diferença pedida é igual a $a(0)-0{,}9=1{,}8-(0{,}216)^{\frac{2}{3}}-0{,}9=0{,}54$.

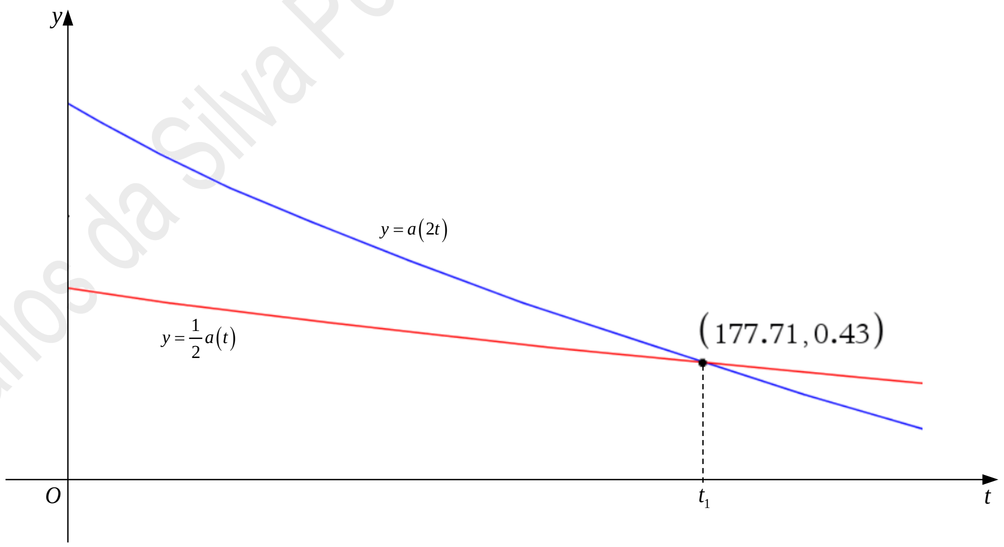
Resposta: B

13.2. Passados t_1 minutos após o início do vazamento, a altura do combustível é dada por $a(t_1)$. Passado o mesmo tempo, isto é, mais t_1 minutos, portanto no instante $t_1+t_1=2t_1$ minutos, a altura do combustível é dada por $a(2t_1)$. Neste instante $2t_1$ a altura do combustível era metade da altura do combustível no instante t_1, pelo que:

$$a(2t_1)=\frac{1}{2}a(t_1)$$

Portanto, pretende-se determinar t tal que $a(2t)=\frac{1}{2}a(t)$.

Definindo no editor de funções da calculadora gráfica $y_1=a(2t)$ e $y_2=\frac{1}{2}a(t)$, vem que:



Portanto, $a(2t)=\frac{1}{2}a(t)\Leftrightarrow t=t_1$, em que $t_1\approx 177{,}71$. Como $177{,}71=120+57{,}71$, o instante t_1 pedido, corresponde a 2 horas e 58 minutos, aproximadamente.

14. Tem-se que:

- $D=\{x\in\mathbb{R}:(1-x)e^{x-1}>0\}\underset{e^{x-1}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}}{=}\{x\in\mathbb{R}:1-x>0\}=\{x\in\mathbb{R}:x<1\}=]-\infty,1[$

- Neste domínio D, tem-se:

$$\ln\left((1-x)e^{x-1}\right)=x\Leftrightarrow(1-x)e^{x-1}=e^{x}\ \wedge\ x\in D\Leftrightarrow(1-x)\cancel{e^{x}}\times e^{-1}=\cancel{e^{x}}\ \wedge\ x\in D\Leftrightarrow$$

$$\underset{e^{x}\neq0,\ \forall x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}(1-x)\frac{1}{e}=1\ \wedge\ x\in D\Leftrightarrow 1-x=e\ \wedge\ x\in D\Leftrightarrow 1-e=x\ \wedge\ x\in D$$

Como $1-e\in D$, vem que o conjunto solução da equação é $\{1-e\}$.

15. Comecemos por determinar as coordenadas dos pontos A, B e C:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\cancel{k}\operatorname{sen}(2x)=\cancel{k}\cos x\underset{k>0\Rightarrow k\neq0}{\Leftrightarrow}2\operatorname{sen}x\cos x=\cos x\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}x\cos x-\cos x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos x(2\operatorname{sen}x-1)=0\Leftrightarrow\cos x=0\ \vee\ 2\operatorname{sen}x-1=0\Leftrightarrow\cos x=0\ \vee\ \operatorname{sen}x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k_1\pi\ \vee\ x=\frac{\pi}{6}+2k_1\pi\ \vee\ x=\frac{5\pi}{6}+2k_1\pi,\ k_1\in\mathbb{Z}$$

Assim:

- $k_1=0\to\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\ \vee\ x=\frac{\pi}{6}\ \vee\ x=\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e $\frac{5\pi}{6}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

- $k_1=1\to\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{2}\ \vee\ x=\frac{13\pi}{6}\ \vee$ ____ ; $\frac{3\pi}{2}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e $\frac{13\pi}{6}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

- $k_1=-1\to\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}\ \vee\ x=-\frac{11\pi}{6}\ \vee\ x=-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $-\frac{11\pi}{6}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e $-\frac{7\pi}{6}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Logo, como A é o ponto de menor abcissa e C é o de maior abcissa, tem-se:

- $A\left(-\frac{\pi}{2},g\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$, pelo que como $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=k\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=k\times0=0$, vem que $A\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$

- $B\left(\frac{\pi}{6},g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$, pelo que como $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=k\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=k\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{k\sqrt{3}}{2}$, vem que $B\left(\frac{\pi}{6},\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)$

- $C\left(\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, pelo que como $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = k\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = k \times 0 = 0$, vem que $C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

Finalmente, como o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em B, vem que os vectores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ são perpendiculares, pelo que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Como:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) - \left(\frac{\pi}{6}, \frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{BC} = A - B = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \left(\frac{\pi}{6}, \frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)$$

vem que:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} \times \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\pi^2}{9} + \frac{k^2 \times 3}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{k^2 \times 3}{4} = \frac{2\pi^2}{9} \Leftrightarrow k^2 = \frac{8\pi^2}{27} \underset{k>0}{\Leftrightarrow} k = \sqrt{\frac{8\pi^2}{27}}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{8}\sqrt{\pi^2}}{\sqrt{27}} \Leftrightarrow k = \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow k = \frac{2\sqrt{6}\,\pi}{9}$$

$$\therefore\ k = \frac{2\sqrt{6}\,\pi}{9}$$

FIM

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação

11 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... **12 pontos**

Opção **(C)**

1.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que o vetor de coordenadas $(-3, -2, 2)$ é normal ao plano ABG .... 1 ponto

Escrever $-3x - 2y + 2z + d = 0$ .... 2 pontos

Escrever $-3 \times 6 - 2 \times 10 + 2 \times 13 + d = 0$ .... 2 pontos

Obter o valor de d .... 1 ponto

Obter as coordenadas do ponto B .... 3 pontos

Determinar o raio da superfície esférica .... 3 pontos

Escrever a equação reduzida da superfície esférica $\left(x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 69\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Designemos por b a ordenada do ponto B

Reconhecer que o ponto B tem coordenadas $(0, b, 0)$ .... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GB}$ .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GE}$ .... 2 pontos

Escrever $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GE} = 0$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Determinar o valor de b .... 2 pontos

Determinar o raio da superfície esférica .... 3 pontos

Escrever a equação reduzida da superfície esférica $\left(x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 69\right)$ .... 2 pontos

2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Indicar as coordenadas do ponto A, em função de α .... 3 pontos

Indicar a ordenada do ponto B, em função de α .... 2 pontos

Indicar a abcissa do ponto C, em função de α .... 2 pontos

Escrever $\overline{CB}$, em função de α .... 2 pontos

Obter a altura do triângulo, em função de α .... 3 pontos

Obter a expressão pretendida (**ver nota**) .... 2 pontos

2.º Processo

Indicar a ordenada do ponto A, em função de α .... 2 pontos

Indicar a ordenada do ponto B, em função de α .... 2 pontos

Indicar a abcissa do ponto C, em função de α .... 2 pontos

Determinar a área do triângulo $[AOC]$, em função de α .... 3 pontos

Determinar a área do triângulo $[BOC]$, em função de α .... 3 pontos

Obter a expressão pretendida (**ver nota**) .... 2 pontos

Nota – Se a expressão apresentada não for $-9 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3. .... **12 pontos**

Opção **(D)**

4. .... **14 pontos**

Apresentar a expressão

$\left({}^3A_2 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \times 4! \times 8! \text{ ou equivalente}\right)$ (**ver nota**) .... 14 pontos

Nota – Por cada fator incorreto ou não apresentado, devem ser descontados 3 pontos. Caso seja considerada a operação adição, em vez da operação multiplicação, na conjugação das contagens dos elementos da comitiva em cada um dos veículos, devem ser descontados 5 pontos.
Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, a classificação a atribuir à resposta é 0 pontos.

5. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar o número de alunos com 17 anos e o número de alunos com 15 ou 16 anos .... 2 pontos

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{30}C_5$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: ${}^{16}C_2 \times 12$ (**ver notas 2 e 3**) .... 6 pontos

Obter a probabilidade pedida $(0{,}01)$ (**ver nota 4**) .... 2 pontos

2.º Processo

Determinar o número de alunos com 17 anos e o número de alunos com 15 ou 16 anos .... 2 pontos

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{30}A_5$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: ${}^{16}C_2 \times 12 \times 5!$ (**ver notas 2 e 3**) .... 6 pontos

Obter a probabilidade pedida $(0{,}01)$ (**ver nota 4**) .... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{30}C_5$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^{30}A_5$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada for equivalente a ${}^{16}C_2 \times 14$ (1.º processo de resolução) ou a ${}^{16}C_2 \times 14 \times 5!$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 3 pontos.
3. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{16}C_2 \times 12$ ou a ${}^{16}C_2 \times 14$ (1.º processo de resolução), ou a ${}^{16}C_2 \times 12 \times 5!$ ou a ${}^{16}C_2 \times 14 \times 5!$ (2.º processo de resolução), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
4. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação de 0 pontos deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0, 1]$

6. .... **12 pontos**

Opção **(A)**

7. .... **14 pontos**

Reconhecer que, para n ímpar, $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ .... 4 pontos

Escrever $2 + \frac{1}{n} \geq \frac{83}{41} \wedge 2 + \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33}$ .... 4 pontos

Obter $n \geq 33 \wedge n \leq 41$ .... 3 pontos

Responder ao problema (5) .... 3 pontos

8. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

9. .... **14 pontos**

Escrever $w = \dfrac{(-3+2i)(1+2i)}{2-i}$ .... 1 ponto

Obter $w = \dfrac{-7-4i}{2-i}$ .... 2 pontos

Escrever $w = \dfrac{(-7-4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$ .... 2 pontos

Obter $w = -2-3i$ .... 3 pontos

Determinar $|w|$ .... 3 pontos

Justificar que $\operatorname{Arg}(w) \in \left]-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{2}\right[$ .... 3 pontos

10.1. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(-x^2(1+2\ln x)\right)$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ .... 10 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} = -5 \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{e^{x-1}-1}{(x-1)(x+4)}$ .... 3 pontos

Escrever

$-5 \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{e^{x-1}-1}{(x-1)(x+4)} = -5 \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} \times \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x+4}$ .. 2 pontos

Escrever

$-5 \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} \times \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x+4} \underset{y=x-1}{=} - \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{e^y-1}{y}$ .... 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -1$ .... 1 ponto

Referir que $f(1) = -1$ .... 1 ponto

Concluir que a função f é contínua em $x = 1$ .... 1 ponto

10.2. .... **14 pontos**

Determinar $f'(x)$ em $]0,1[$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Escrever $f'(x)=0$ .... 1 ponto

Determinar o zero de f' em $]0,1[$ .... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f em $]0,1[$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Apresentar os intervalos de monotonia da função em $]0,1[$ (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Reconhecer que o extremo relativo é $f\left(\frac{1}{e}\right)$ .... 1 ponto

Determinar $f\left(\frac{1}{e}\right)$ $\left(\frac{1}{e^2}\right)$ .... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que a função f é crescente em $\left]0,\frac{1}{e}\right[$, em vez de $\left]0,\frac{1}{e}\right]$, e decrescente em $\left]\frac{1}{e},1\right[$, em vez de $\left[\frac{1}{e},1\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

11. .... **14 pontos**

Determinar $g'(x)$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Referir que a função g' é contínua em $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ .... 2 pontos

Calcular $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .... 2 pontos

Calcular $g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ .... 2 pontos

Referir que $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) < -\frac{1}{2} < g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ .... 3 pontos

Invocar o teorema de Bolzano-Cauchy para concluir o pretendido .... 2 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

12. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}$ .... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{2x^2-\ln x}}{x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{2x^2-\ln x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^3 - x\ln x}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \frac{1}{2}$ .... 3 pontos

Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[h(x) - \frac{1}{2}x\right]$ .... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[h(x) - \frac{1}{2}x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - \ln x} - \frac{1}{2}x\right)$ ...... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - \ln x} - \frac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x \ln x}{4x^2 - 2\ln x}$ ..... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[h(x) - \frac{1}{2}x\right] = 0$ .... 4 pontos

Concluir que a reta de equação $y = \frac{1}{2}x$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função h .... 1 ponto

13.1. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

13.2. .... **14 pontos**

Apresentar a equação

$$1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0078t)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \times \left(1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0039t)^{\frac{2}{3}}\right)$$

(ou uma equação equivalente) (**ver notas 1 e 2**) .... 5 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 3**) .... 4 pontos

Apresentar as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) .... 2 pontos

Apresentar o valor de t_1 na forma pedida $(2\,\text{h}\ 58\,\text{min})$ .... 3 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, se for inequívoco que correspondem à resolução da equação que traduz corretamente o problema.

3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

14. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar o domínio da condição .... 2 pontos

Escrever $\ln(1-x)+\ln e^{x-1}=x$ .... 4 pontos

Obter $\ln(1-x)+x-1=x$ .... 2 pontos

Obter $\ln(1-x)=1$ .... 2 pontos

Obter $1-x=e$ .... 3 pontos

Obter $x=1-e$ .... 1 ponto

2.º Processo

Determinar o domínio da condição .... 2 pontos

Escrever $(1-x)e^{x-1}=e^{x}$ .... 4 pontos

Obter $1-x=\dfrac{e^{x}}{e^{x-1}}$ .... 4 pontos

Obter $1-x=e$ .... 3 pontos

Obter $x=1-e$ .... 1 ponto

15. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Resolver a equação $k\operatorname{sen}(2x)=k\cos x$ em $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ .... 3 pontos

Escrever as coordenadas dos pontos A e C .... 1 ponto

Escrever as coordenadas do ponto B, com a ordenada em função de k .... 2 pontos

Determinar as coordenadas dos vectores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, em função de k .... 2 pontos

Determinar $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}$, em função de k .... 2 pontos

Resolver a equação $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}=0$ .... 2 pontos

Apresentar o valor de k $\left(\sqrt{\dfrac{8}{27}}\,\pi\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Resolver a equação $k\operatorname{sen}(2x)=k\cos x$ em $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ .... 3 pontos

Escrever as coordenadas dos pontos A e C .... 1 ponto

Escrever as coordenadas do ponto B, com a ordenada em função de k .... 2 pontos

Determinar $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, em função de k .... 2 pontos

Resolver a equação $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ .... 4 pontos

Apresentar o valor de k $\left(\sqrt{\frac{8}{27}\pi}\right)$ .... 2 pontos

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.1.**	**10.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	**144**
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**5.**	**7.**	**9.**	**11.**	**12.**	**14.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	4 × 14 pontos											**56**
TOTAL												**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 11 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um trapézio $[PQRS]$, de bases $[PQ]$ e $[RS]$, em que o lado $[PS]$ é perpendicular às bases.

Tem-se $P(1,-1,2)$, $Q(-2,1,1)$ e $R(-5,5,-3)$

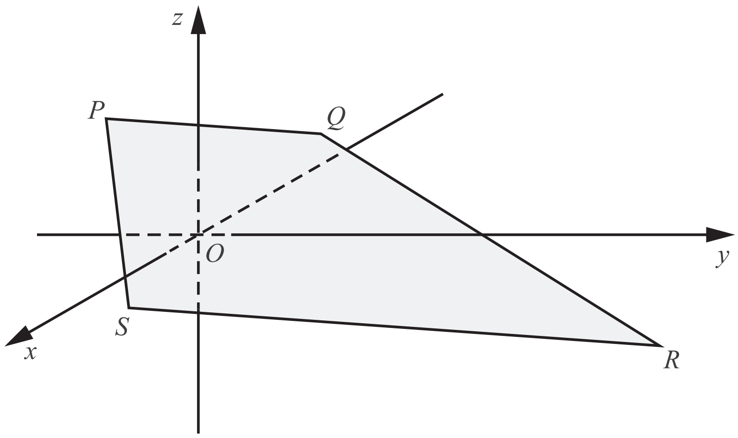


Figura 1

*** 1.1.** Qual das condições seguintes define a superfície esférica de centro no ponto R e que passa no ponto Q?

(A) $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=59$

(B) $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=41$

(C) $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=41$

(D) $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=59$

*** 1.2.** Determine uma equação do plano perpendicular à reta RS e que passa no ponto P

Apresente essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$

2. Sabe-se que $\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{5}$ e que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+2\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$

Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$ e $c\in\mathbb{N}$

3. Numa dada localidade, existe um clube onde se pratica badmínton e ténis.

* 3.1. Com doze raquetes distintas, sendo seis de badmínton e seis de ténis, formam-se, ao acaso, dois conjuntos de seis raquetes cada um.

Qual é o valor, arredondado às centésimas, da probabilidade de cada um dos dois conjuntos ficar com três raquetes de badmínton e três raquetes de ténis?

(A) $0{,}22$ **(B)** $0{,}43$ **(C)** $0{,}50$ **(D)** $0{,}87$

* 3.2. Relativamente a este clube, sabe-se que:

- cada sócio pratica uma e só uma das duas modalidades;
- 65% dos sócios são mulheres;
- $\frac{1}{7}$ dos homens pratica badmínton;
- $\frac{5}{6}$ dos praticantes de badmínton são mulheres.

Escolhe-se, ao acaso, um sócio deste clube.

Determine a probabilidade de o sócio escolhido ser uma mulher que pratica ténis.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. Considere, num plano α, duas retas paralelas r e s

Assinalam-se, na reta r, cinco pontos distintos e, na reta s, um certo número n de pontos, igualmente distintos.

Sabe-se que, com os pontos assinalados nas duas retas, é possível definir exatamente 175 triângulos.

Determine o valor de n

* 5. Na Figura 2, está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função g

Seja (v_n) a sucessão de termo geral $v_n = 2 - \frac{5}{n+3}$

A que é igual $\lim g(v_n)$?

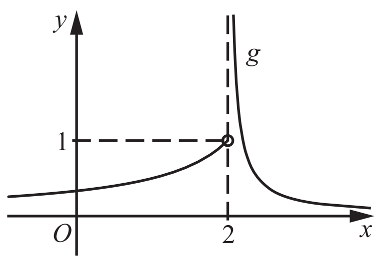


Figura 2

(A) 0 **(B)** 1

(C) 2 **(D)** $+\infty$

6. Seja (u_n) uma progressão aritmética.

Sabe-se que, relativamente a (u_n), a soma do sexto termo com o vigésimo é igual a -5 e que o décimo nono termo é igual ao quádruplo do sétimo termo.

Determine a soma dos dezasseis primeiros termos desta progressão.

*** 7.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 2e^{i\frac{3\pi}{5}}$

Seja w o número complexo tal que $z \times w = i$

Qual dos valores seguintes é um argumento do número complexo w ?

(A) $\frac{19\pi}{10}$ **(B)** $\frac{2\pi}{5}$ **(C)** $-\frac{2\pi}{5}$ **(D)** $-\frac{19\pi}{10}$

8. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $(1+2i)z + (1-2i)\overline{z} + 10 = 0$ define, no plano complexo, uma reta.

Considere todos os números complexos cujos afixos pertencem a esta reta.

Determine qual deles tem menor módulo.

Apresente esse número complexo na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$

9. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - e^{-x}}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **9.1.** e **9.2.** sem recorrer à calculadora.

*** 9.1.** Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

*** 9.2.** Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -2

10. Seja h a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $h(x) = \operatorname{sen} x + \cos^2 x$

Estude, sem recorrer à calculadora, a função h quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

11. Num laboratório cuja temperatura ambiente é constante, aqueceu-se uma substância até atingir uma certa temperatura, superior à temperatura ambiente, e, a seguir, deixou-se arrefecer essa substância durante uma hora.

Admita que a temperatura dessa substância, em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento, é dada por

$$T(t) = 20 + 100e^{-kt}, \quad 0 \leq t \leq 60$$

em que k é uma constante real positiva.

*** 11.1.** Durante o arrefecimento, houve um instante t_1 em que a temperatura da substância foi 30 ºC.

Qual é o valor de k ?

(A) $\ln\left(\frac{10}{t_1}\right)$ **(B)** $t_1 - \ln 10$ **(C)** $\frac{\ln 10}{t_1}$ **(D)** $t_1 + \ln 10$

*** 11.2.** Considere $k = 0{,}04$

Sabe-se que, durante os primeiros t_2 minutos, a taxa média de variação da função T foi igual a $-2{,}4$

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_2, sabendo que esse valor existe e é único.

Apresente o resultado em minutos e segundos (segundos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{x^2 - x} + k & \text{se} \quad x < 0 \\ 2 + x \ln x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Sabe-se que existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

Determine o valor de k

13. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação

$$x \ln(1-x) - \ln(1-x) = (1-x)\ln(3-2x)$$

*** 14.** Na Figura 3, está representada a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- os pontos A, B e C pertencem à circunferência;
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e o ponto B pertence ao primeiro quadrante;
- a amplitude do ângulo BOC é igual ao dobro da amplitude do ângulo AOB
- a área do triângulo $[AOB]$ é igual a k $\left(0 < k < \frac{1}{2}\right)$

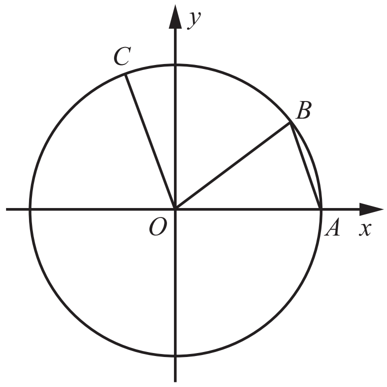


Figura 3

Mostre que a ordenada do ponto C é dada, em função de k, por $6k - 32k^3$

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**5.**	**7.**	**9.1.**	**9.2.**	**11.1.**	**11.2.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	**144**
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.**	**12.**	**13.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	4 × 14 pontos											**56**
TOTAL												**200**

Recursos Para Matemática

Exame Nacional de Matemática A

2.ª Fase | 2021 | Proposta de Resolução

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

Exame Nacional de Matemática A

2.ª Fase | 2021

Proposta de Resolução

1.

1.1. O centro da superfície esférica é o ponto R de coordenadas $(-5,5,-3)$.

Como a superfície esférica passa no ponto $Q(-2,1,1)$, a medida do comprimento do seu raio é igual a:

$$\overline{RQ}=\sqrt{(-5+2)^2+(5-1)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{(-3)^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16+16}=\sqrt{41}$$

Portanto, uma condição que define a superfície esférica de centro em R e que passa no ponto Q é:

$$(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=\left(\sqrt{41}\right)^2 \Leftrightarrow (x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=41$$

Resposta: C

1.2. Seja α o plano perpendicular à recta RS que contém o ponto P.

Como o plano α é perpendicular à recta RS, um vector normal a α é $\overrightarrow{RS}$. Mas, como o quadrilátero $[PQRS]$ é um trapézio, em que as bases são $[PQ]$ e $[RS]$, vem que os lados $[PQ]$ e $[RS]$ são paralelos e, portanto, os vectores $\overrightarrow{RS}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são colineares, pelo que o vector $\overrightarrow{PQ}$ também é normal a α.

Assim, dado que $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-2,1,1)-(1,-1,2)=(-3,2,-1)$, vem que:

$$\alpha:-3x+2y-z+d=0$$

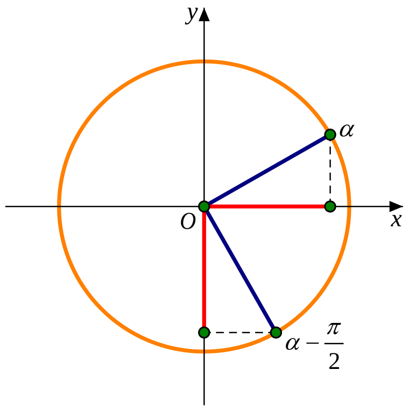
Como $P(1,-1,2)$ pertence a α, substituindo, vem:

$$-3\times1+2\times(-1)-2+d=0 \Leftrightarrow -3-2-2+d=0 \Leftrightarrow -7+d=0 \Leftrightarrow d=7$$

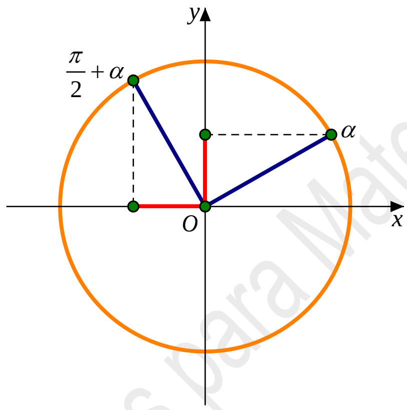
$\therefore\ \alpha:-3x+2y-z+7=0 \Leftrightarrow 3x-2y+z-7=0$

2. Tem-se que $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) \underset{\substack{\text{Período fundamental} \\ \text{da tangente é } \pi}}{=} \operatorname{tg}(-\alpha) \underset{\substack{\text{A função tangente} \\ \text{é ímpar}}}{=} -\operatorname{tg}\alpha$

Por outro lado:



$$\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$$



$$\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(-\frac{8\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$$

$$=\cos\left(-4\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha$$

Portanto, como $\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{5}$, vem que $-\cos\alpha=-\frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{5}$ e pretende-se determinar o valor de:

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+2\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha+2(-\operatorname{sen}\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{sen}\alpha$$

Assim, como $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ e $\cos\alpha=\frac{1}{5}$, vem que:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\left(\frac{1}{5}\right)^2=1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha=1-\frac{1}{25} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha=\frac{24}{25} \underset{\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha>0}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen}\alpha=\sqrt{\frac{24}{25}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{24}}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Finalmente, como $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, vem que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{\cancel{5}}}{\frac{1}{\cancel{5}}} = 2\sqrt{6}$, pelo que:

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+2\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha = -2\sqrt{6}-2\times\frac{2\sqrt{6}}{5} = -2\sqrt{6}-\frac{4\sqrt{6}}{5} = -\frac{14\sqrt{6}}{5}$$

3.

3.1. O número de casos possíveis é ${}^{12}C_6$, das doze raquetes escolhem-se seis para o primeiro conjunto. As outras seis vão para o segundo conjunto. (ou $\frac{{}^{12}C_6}{2}$ se considerarmos os dois conjuntos indistinguíveis)

O número de casos favoráveis é ${}^{6}C_3 \times {}^{6}C_3$, para o primeiro conjunto, escolhem-se três raquetes de badmínton entre as seis e escolhem-se três raquetes de ténis entre as seis. (ou $\frac{{}^{6}C_3 \times {}^{6}C_3}{2}$ se considerarmos os dois conjuntos indistinguíveis)

A probabilidade pedida é $\frac{{}^{6}C_3 \times {}^{6}C_3}{{}^{12}C_6} \approx 0,43$.

Resposta: B

3.2. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: «o sócio escolhido é mulher»

B: «o sócio escolhido pratica badmínton»

Pretende-se determinar a probabilidade de o sócio escolhido ser uma mulher que pratica ténis, ou seja $P\left(A\cap\overline{B}\right)$.

Como $P\left(A\cap\overline{B}\right) = P(A) - P(A\cap B) = 0,65 - P(A\cap B)$, só precisamos de saber o valor de $P(A\cap B)$.

Do enunciado sabe-se:

- $P(A) = 65\%$, ou seja, $P(A) = 0,65$, pelo que $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0,65 = 0,35$
- $P\left(B\middle|\overline{A}\right) = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{P\left(B\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow P\left(B\cap\overline{A}\right) = \frac{1}{7}P\left(\overline{A}\right) \Leftrightarrow P\left(B\cap\overline{A}\right) = \frac{1}{7}\times 0,35 \Leftrightarrow \overbrace{P\left(B\cap\overline{A}\right)}^{P(B)-P(A\cap B)} = 0,05 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(B) - P(A\cap B) = 0,05 \Leftrightarrow P(B) = P(A\cap B) + 0,05$$

- $P(A|B)=\frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{5}{6} \Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{5P(B)}{6} \underset{P(B)=P(A\cap B)+0,05}{\Leftrightarrow} P(A\cap B)=\frac{5(P(A\cap B)+0,05)}{6} \Leftrightarrow$

$$\underset{\times 6}{\Leftrightarrow} 6P(A\cap B)=5P(A\cap B)+0,25 \Leftrightarrow P(A\cap B)=0,25$$

$\therefore\ P(A\cap \bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=0,65-0,25=0,40$, ou seja, $P(A\cap \bar{B})=40\%$.

Outra resolução: considerando os mesmos acontecimentos, já vimos que:

$$P(A)=0,65 \Leftrightarrow P(\bar{A})=0,35,\ P(B\cap \bar{A})=0,05 \text{ e } P(A\cap B)=\frac{5P(B)}{6}$$

Pretende-se $P(A\cap \bar{B})$

Preenchendo uma tabela:

	A	$\bar{A}$	p.m.
B	$\frac{5P(B)}{6}$	$0,05$	$P(B)$
$\bar{B}$			
p.m.	$0,65$	$0,35$	

Logo, $\frac{5P(B)}{6}+0,05=P(B) \underset{\times 6}{\Leftrightarrow} 5P(B)+0,3=6P(B) \Leftrightarrow P(B)=0,3$

Portanto, $P(A\cap B)=\frac{5P(B)}{6}=\frac{5\times 0,3}{6}=0,25$, pelo que $P(A\cap \bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=0,65-0,25=0,40$, ou seja, $P(A\cap \bar{B})=40\%$.

4. Para formar um triângulo com os pontos que estão sobre as rectas temos de escolher dois pontos da recta r e um ponto da recta s, o número de maneiras de o fazer é ${}^5C_2\times {}^nC_1=10n$, ou temos de escolher um ponto da recta r e dois pontos da recta s, o número de maneiras de o fazer é:

$${}^5C_1\times {}^nC_2=5\times\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{5n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}}=\frac{5n(n-1)}{2}$$

Assim, o número de triângulos distintos que se podem formar com os $n+5$ pontos das duas rectas é dado, em função de n, por $10n+\frac{5n(n-1)}{2}=\frac{20n+5n(n-1)}{2}$.

Logo, $\frac{20n+5n(n-1)}{2}=175 \underset{\times 2}{\Leftrightarrow} 20n+5n^2-5n=350 \Leftrightarrow 5n^2+15n-350=0 \underset{\div 5}{\Leftrightarrow} n^2+3n-70=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 1\times(-70)}}{2\times 1} \Leftrightarrow n=-10 \ \vee \ n=7$$

Como $n\in\mathbb{N}$, vem que $n=7$.

5. Tem-se que $\lim v_n=\lim\left(2-\frac{5}{n+3}\right)=2-\frac{5}{+\infty}=2-0^+=2^-$, pelo que $\lim g(v_n)=\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=1$.

Resposta: B

6. Seja r a razão da progressão aritmética (u_n).

Sabe-se que $u_6+u_{20}=-5$ e que $u_9=4u_7$. Pretende-se determinar $u_1+u_2+\ldots+u_{16}=\frac{u_1+u_{16}}{2}\times 16$.

Tem-se que:

- $u_{19}=4u_7 \underset{\substack{u_{19}=u_1+18r \\ u_7=u_1+6r}}{\Leftrightarrow} u_1+18r=4(u_1+6r) \Leftrightarrow u_1+18r=4u_1+24r \Leftrightarrow -6r=3u_1 \Leftrightarrow r=-\frac{3u_1}{6} \Leftrightarrow r=-\frac{u_1}{2}$

- $u_6+u_{20}=-5 \underset{\substack{u_6=u_1+5r \\ u_{20}=u_1+19r}}{\Leftrightarrow} u_1+5r+u_1+19r=-5 \Leftrightarrow 2u_1+24r=-5 \underset{r=-\frac{u_1}{2}}{\Leftrightarrow} 2u_1+24\times\left(-\frac{u_1}{2}\right)=-5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2u_1-12u_1=-5 \Leftrightarrow -10u_1=-5 \Leftrightarrow u_1=\frac{1}{2} \underset{r=-\frac{u_1}{2}=-\frac{1}{2}u_1}{\Rightarrow} r=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} \Leftrightarrow r=-\frac{1}{4}$$

Como $u_{16}=u_1+15r=\frac{1}{2}+15\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{15}{4}=-\frac{13}{4}$, vem que:

Assim, $u_1+u_2+\ldots+u_{16}=\frac{u_1+u_{16}}{2}\times 16=\frac{\frac{1}{2}-\frac{13}{4}}{2}\times 16=\frac{-\frac{11}{4}}{2}\times 16=-\frac{11}{8}\times 16=-11\times 2=-22$.

7. Tem-se que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, pelo que:

$$z \times w = i \Leftrightarrow w = \frac{i}{z} \Leftrightarrow z = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{3\pi}{5}}} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{5}\right)} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{10}\right)} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{10}+2\pi\right)} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}e^{i\frac{19\pi}{10}}$$

$\therefore$ Um argumento de w é $\frac{19\pi}{10}$.

Resposta: A

8. Tomando $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(1+2i)z + (1-2i)\overline{z} + 10 = 0 \Leftrightarrow (1+2i)(x+yi) + (1-2i)(x-yi) + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \cancel{yi} + \cancel{2xi} + 2yi^2 + x - \cancel{yi} - \cancel{2xi} + 2yi^2 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y - 2y + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x + 10 = 4y \underset{\div 4}{\Leftrightarrow} y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

De uma outra forma: tendo em conta que $w + \overline{w} = 2\,\mathrm{Re}(w)$ e que $\overline{w_1} \times \overline{w_2} = \overline{w_1 \times w_2}$, vem que:

$$(1+2i)z + (1-2i)\overline{z} + 10 = 0 \underset{\overline{1+2i}=1-2i}{\Leftrightarrow} \underbrace{(1+2i)z + \overline{(1+2i)z}}_{2\mathrm{Re}((1+2i)z)} + 10 = 0 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}\big((1+2i)z\big) = -10$$

Mas, $(1+2i)z = (1+2i)(x+yi) = x + yi + 2xi + 2yi^2 = x - 2y + i(2x+y)$, pelo que $\mathrm{Re}\big((1+2i)z\big) = x - 2y$.

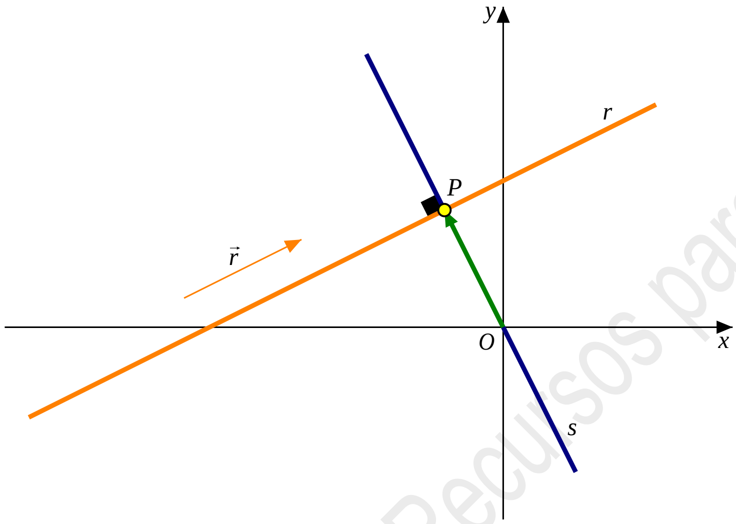
Logo, $(1+2i)z + (1-2i)\overline{z} + 10 = 0 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}\big((1+2i)z\big) = -10 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\big((1+2i)z\big) = -5 \Leftrightarrow x - 2y = -5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x + 5 = 2y \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

Sejam r a recta dada e P um ponto de r.

Determinar o número complexo cujo afixo pertence à recta r e cujo módulo é o menor possível é equivalente a determinar o ponto da recta r cuja distância à origem é mínima, sendo que este ponto é o afixo do complexo pedido.

Assim, sendo $\vec{r}$ um vector director da recta r, a distância de P à origem é mínima se $\vec{r}\cdot\overrightarrow{OP}=0$:



O declive da recta r é $\frac{1}{2}$, pelo que $\vec{r}$ pode ser $\vec{r}(2,1)$. Como P pertence à recta r, vem que as suas coordenadas são da forma $P\left(x,\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right)$ e $\overrightarrow{OP}=P-O=\left(x,\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right)-(0,0)=\left(x,\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right)$.

Logo, $\vec{r}\cdot\overrightarrow{OP}=0\Leftrightarrow(2,1)\cdot\left(x,\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2x+\frac{x}{2}+\frac{5}{2}=0\underset{\times 2}{\Leftrightarrow}4x+x+5=0\Leftrightarrow 5x=-5\Leftrightarrow x=-1$

Portanto, $P\left(-1,-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)$, ou seja, $P(-1,2)$, pelo que o número complexo de menor módulo cujo afixo pertence à recta r é $-1+2i$.

Outra resolução: o ponto P da recta r cuja distância à origem é mínima, é o ponto de intersecção da recta perpendicular à recta r, que contém a origem.

Assim, sendo s essa recta, vem que $m_s=-\frac{1}{m_r}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$.

Como a recta s contém a origem, vem que a sua equação reduzida é $y=-2x$.

Fazendo a intersecção entre as duas rectas, tem-se:

$$\begin{cases} y=\frac{x}{2}+\frac{5}{2} \\ y=-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x=\frac{x}{2}+\frac{5}{2} \\ y=-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x=x+5 \\ y=-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x=5 \\ y=-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2\times(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow P(-1,2)$$

Logo, número complexo de menor módulo cujo afixo pertence à recta r é $-1+2i$.

Outra resolução: Depois de substituir na equação z por $x+yi$ conclui-se que $y=\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$, pelo que os números complexos cujos afixo pertencem à recta definida pela equação dada são da forma $z=x+\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right)i$.

Assim, pretende-se determinar $x\in\mathbb{R}$ de modo que $|z|$ seja mínimo.

Tem-se que $|z|=\sqrt{x^2+\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{x^2}{4}+\frac{5x}{2}+\frac{25}{2}}=\sqrt{\frac{5x^2}{4}+\frac{5x}{2}+\frac{25}{4}}$

O valor de x para o qual $|z|=\sqrt{\frac{5x^2}{4}+\frac{5x}{2}+\frac{25}{4}}$ é mínimo é o mesmo valor para o qual a função $y=\frac{5x^2}{4}+\frac{5x}{2}+\frac{25}{4}$ tem um mínimo. Como a função $y=\frac{5x^2}{4}+\frac{5x}{2}+\frac{25}{4}$ é quadrática, o valor de x para o qual esta função tem um mínimo corresponde á abcissa do vértice (é um mínimo porque a parábola que é o gráfico da função tem a concavidade voltada para cima).

Podemos determinar essa abcissa usando a derivada de y, essa abissa corresponde ao zero de y' **(1.º processo)** ou podemos encontrar as abcissas de dois pontos do gráfico de y com a mesma ordenadas, a abcissa do vértice será o ponto médio dessas duas abcissas **(2.º processo)**.

- **(1.º processo)** $y'=\left(\frac{5x^2}{4}+\frac{5x}{2}+\frac{25}{4}\right)'=\frac{5x}{2}+\frac{5}{2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\frac{5x}{2}+\frac{5}{2}=0\Leftrightarrow\frac{5x}{2}=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow x=-1$

- **(2.º processo – vou encontrar as abcissas dos pontos cuja ordenada é igual a $\frac{25}{4}$)**

$$y=\frac{25}{4}\Leftrightarrow\frac{5x^2}{4}+\frac{5x}{2}+\cancel{\frac{25}{4}}=\cancel{\frac{25}{4}}\underset{\times 4}{\Leftrightarrow}5x^2+10x=0\Leftrightarrow 5x(x+2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x=0 \ \vee \ x+2=0\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=-2$$

Logo, a abcissa do vértice da parábola $\frac{0-2}{2}=-1$, ou seja, o valor de x que se pretende é -1

Nota: claro que podemos usar a fórmula para determinar a abcissa do vértice de uma parábola que é dada no 10.º ano. Sendo $y=ax^2+bx+c$ uma função quadrática, as coordenadas do vértice são dadas por $\left(-\frac{b}{2a}, y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$. No nosso caso só nos interessa a abcissa, que é dada por:

$$-\frac{\frac{5}{2}}{2\times\frac{5}{4}}=-\frac{\cancel{\frac{5}{2}}}{\cancel{\frac{5}{2}}}=-1$$

Qualquer um destes processos conduz ao resultado correcto.

Portanto, como $x=-1$ o número complexo de menor módulo cujo afixo pertence à recta definida pela equação dada é:

$$z=-1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)i=-1+2i$$

9.

9.1. Quando $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-e^{-x}}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}-\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x}\underset{\substack{y=-x\Leftrightarrow x=-y\\ x\to-\infty\Rightarrow y\to+\infty}}{=}1-\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{-y}=1+\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{y}}_{\text{Limite notável}}=1+\infty=+\infty$$

Logo, o gráfico de f não tem assimptota horizontal quando $x\to-\infty$.

Quando $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}-3\right)\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x+1}-\lim_{x\to+\infty}3=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}\times\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+1}-3=$$

$$\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow x>0\\ Logo,\ \sqrt{x^2}=|x|=x}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}-3=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{(+\infty)^2}}}{1+\frac{1}{+\infty}}-3=\frac{\sqrt{1+0}}{1+0}-3=1-3=-2$$

Logo, a recta de equação $y=-2$ é assimptota horizontal ao gráfico de f, quando $x\to+\infty$.

9.2. Sendo t a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -2, tem-se que o seu o declive é dado por $f'(-2)$

Para $x<0$, tem-se que $f(x)=\frac{x-e^{-x}}{x}=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}-\frac{e^{-x}}{x}=1-\frac{e^{-x}}{x}$, pelo que, para $x<0$:

$$f'(x)=\left(1-\frac{e^{-x}}{x}\right)'=0-\frac{\left(e^{-x}\right)'x-e^{-x}\times x'}{x^2}=-\frac{-e^{-x}x-e^{-x}\times 1}{x^2}=\frac{e^{-x}x+e^{-x}}{x^2}=\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

Logo, o declive da recta t é igual a $f'(-2)=\frac{e^2(-2+1)}{(-2)^2}=-\frac{e^2}{4}$, pelo que $t:y=-\frac{e^2}{4}x+b$.

As coordenadas do ponto de tangência são $(-2,f(-2))=\left(-2,1+\frac{e^2}{2}\right)$, pois $f(-2)=1-\frac{e^2}{-2}=1+\frac{e^2}{2}$.

Substituindo na equação de t, vem que:

$$1+\frac{e^2}{2}=-\frac{e^2}{4}\times(-2)+b\Leftrightarrow 1+\frac{e^2}{2}=\frac{2e^2}{4}+b\Leftrightarrow 1+\cancel{\frac{e^2}{2}}=\cancel{\frac{e^2}{2}}+b\Leftrightarrow b=1$$

$\therefore\ t:y=-\frac{e^2}{4}x+1$

10. Tem-se que:

- $h'(x)=\left(\operatorname{sen}x+\cos^2 x\right)'=\cos x+2\cos x(\cos x)'=\cos x+2\cos x(-\operatorname{sen}x)=\cos x-2\operatorname{sen}x\cos x$

  $=\cos x(1-2\operatorname{sen}x)$

- $h'(x)=0\Leftrightarrow \cos x(1-2\operatorname{sen}x)=0\Leftrightarrow \cos x=0\ \vee\ 1-2\operatorname{sen}x=0\Leftrightarrow \cos x=0\ \vee\ \operatorname{sen}x=\frac{1}{2}$

No intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, a equação $\cos x=0$ não tem soluções e a equação $\operatorname{sen}x=\frac{1}{2}$ tem apenas uma solução, que é $\frac{\pi}{6}$, pelo que o único zero de h' é $\frac{\pi}{6}$.

Se quisermos apresentar as soluções gerais da equação, tem-se:

$$h'(x)=0\Leftrightarrow \cos x=0\ \vee\ \operatorname{sen}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \vee\ x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \vee\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

Assim:

- $k=0 \rightarrow \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2} \vee x=\frac{\pi}{6} \vee x=\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2} \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\pi}{6} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ e $\frac{5\pi}{6} \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

- $k=1 \rightarrow \Leftrightarrow$ ____ $\vee x=\frac{13\pi}{6} \vee$ ____ ; $\frac{13\pi}{6} \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

- $k=-1 \rightarrow \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2} \vee x=-\frac{11\pi}{6} \vee x=-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2} \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $-\frac{11\pi}{6} \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ e $-\frac{7\pi}{6} \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

Portanto, o único zero de h' é $\frac{\pi}{6}$.

Recorrendo a um quadro de sinal de h' e relacionando com a monotonia de h, tem-se:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	n.d.
h	mín.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	n.d.

Logo, h é crescente em $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$, é decrescente em $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$ e tem:

- mínimo relativo em $x=0$ que é $h(0)=\operatorname{sen}(0)+\cos^2(0)=0+1^2=1$

- máximo absoluto em $x=\frac{\pi}{6}$ que é $h\left(\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

11.

11.1. No instante t_1 a temperatura da substância foi de $30\,^{\circ}\mathrm{C}$, ou seja, $T(t_1)=30$.

Assim:

$$T(t_1)=30 \Leftrightarrow 20+100e^{-kt_1}=30 \Leftrightarrow 100e^{-kt_1}=10 \Leftrightarrow e^{-kt_1}=\frac{10}{100} \Leftrightarrow e^{-kt_1}=\frac{1}{10} \Leftrightarrow -kt_1=\underbrace{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}_{\ln 1-\ln 10=-\ln 10} \Leftrightarrow k=\frac{\ln 10}{t_1}$$

Resposta: C

11.2. Para $k=0,04$, tem-se que $T(t)=20+100e^{-0,04t}$.

A taxa de variação média da função T nos primeiros t_2 minutos é dada por:

$$\frac{T(t_2)-T(0)}{t_2-0}=\frac{20+100e^{-0,04t_2}-\left(20+100e^{-0,04\times 0}\right)}{t_2}=\frac{20+100e^{-0,04t_2}-20-100e^{0}}{t_2}=\frac{100e^{-0,04t_2}-100}{t_2}$$

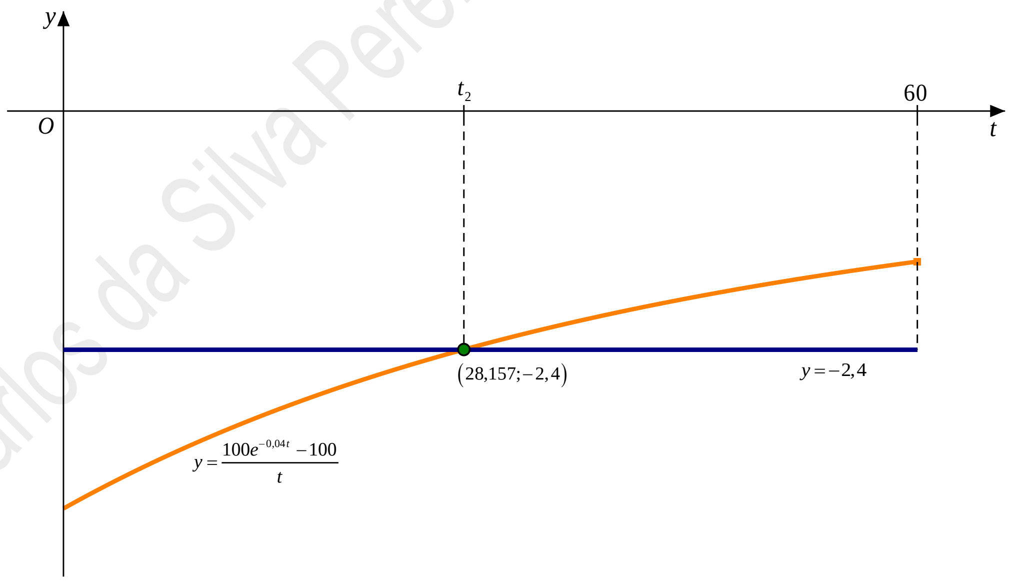
Como a taxa de variação média da função T nos primeiros t_2 minutos é igual a $-2,4$, vem que t_2 é a solução da equação:

$$\frac{T(t)-T(0)}{t-0}=-2,4 \Leftrightarrow \frac{100e^{-0,04t}-100}{t}=-2,4$$

Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se:

$$y_1=\frac{100e^{-0,04t}-100}{t} \qquad \text{e} \qquad y_2=-2,4$$

na janela $[0,60]\times[-4,0]$:



Logo, $\frac{100e^{-0,04t}-100}{t}=-2,4 \Leftrightarrow t=t_2$, em que $t_2\approx 28,157$.

Como $0,157\times 60\approx 9$ segundos, o instante t_2 corresponde, aproximadamente, a 28 minutos e 9 segundos.

12. Como $0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vem que $\lim_{x \to 0} g(x)$ existe se $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x)$.

Assim:

- $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k \right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\cancel{x}(x^2 - 1)}{\cancel{x}(x-1)} + k \right) = \frac{0^2 - 1}{0 - 1} + k = \frac{-1}{-1} + k = k + 1$

- $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (2 + x \ln x) \underset{\substack{y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty}}{\overset{(0 \times \infty)}{=}} 2 + \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) \right) \underset{\ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln 1 - \ln y = -\ln y}{=} 2 - \underbrace{\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Limite notável}} = 2 - 0 = 2$

Logo, $k + 1 = 2 \Leftrightarrow k = 1$.

13. Tem-se que:

- $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x > 0 \ \wedge \ 3 - 2x > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x < 1 \ \wedge \ x < \frac{3}{2}\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\} =]-\infty, 1[$

- Neste domínio D, tem-se:

$$x \ln(1-x) - \ln(1-x) = (1-x)\ln(3-2x) \ \wedge \ x \in D \Leftrightarrow -\ln(1-x)(1-x) = (1-x)\ln(3-2x) \ \wedge \ x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = (1-x)\ln(1-x) + (1-x)\ln(3-2x) \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow 0 = (1-x)\left(\ln(1-x) + \ln(3-2x)\right) \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow 1 - x = 0 \ \vee \ \ln\left((1-x)(3-2x)\right) = 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ (1-x)(3-2x) = e^0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ 3 - 2x - 3x + 2x^2 = 1 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2} \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = 2 \ \wedge \ x \in D$$

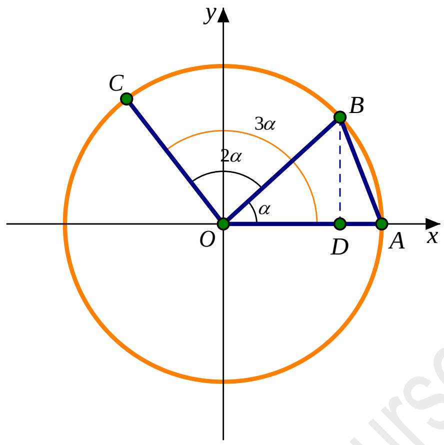
Como $1 \notin D$, $2 \notin D$ e $\frac{1}{2} \in D$, vem que o conjunto solução da equação é:

$$\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

14. Seja α a amplitude do ângulo AOB.

Como a amplitude do ângulo BOC é o dobro da amplitude do ângulo AOB, vem que a amplitude do ângulo BOC é 2α, pelo que a amplitude do ângulo AOC é $\alpha + 2\alpha = 3\alpha$.

Consideremos a seguinte figura, em que D é a projecção ortogonal do ponto B no eixo Ox:



Assim, a ordenada do ponto C é dada por $\operatorname{sen}(3\alpha)$ e como a área do triângulo $[AOB]$ é igual a k, vem que:

$$A_{[AOB]} = k \Leftrightarrow \frac{\overline{OA} \times \overline{BD}}{2} = k \Leftrightarrow \frac{1 \times \overline{BD}}{2} = k \Leftrightarrow \overline{BD} = 2k$$

Logo, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BD}}{1} \Leftrightarrow \overline{BD} = \operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = 2k$ e portanto:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - (2k)^2 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - 4k^2$$

Então, a ordenada do ponto C é dada por:

$$\operatorname{sen}(3\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha + 2\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos(2\alpha) + \operatorname{sen}(2\alpha)\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha\left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right) + 2\operatorname{sen}\alpha\overbrace{\cos\alpha\cos\alpha}^{\cos^2\alpha} =$$

$$= 2k\left(1 - 4k^2 - 4k^2\right) + 2 \times 2k \times \left(1 - 4k^2\right) = 2k\left(1 - 8k^2\right) + 4k\left(1 - 4k^2\right)$$

$$= 2k - 16k^3 + 4k - 16k^3 = 6k - 32k^3$$

FIM

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação 10 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... **12 pontos**

Opção **(C)**

1.2. .... **14 pontos**

Identificar o vetor $\overrightarrow{PQ}$ como um vetor normal ao plano pedido .... 3 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{PQ}$ .... 2 pontos

Escrever $-3x+2y-z+d=0$ .... 2 pontos

Escrever $-3\times 1+2\times(-1)-2+d=0$ .... 4 pontos

Obter o valor de d .... 1 ponto

Escrever uma equação do plano na forma pedida

$\left(-3x+2y-z+7=0\right.$ ou outra equação equivalente$\left.\right)$ .... 2 pontos

2. .... **14 pontos**

Escrever $\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$ .... 2 pontos

Concluir que $\cos\alpha=\frac{1}{5}$ .... 1 ponto

Escrever $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$ .... 2 pontos

Escrever $\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha$ .... 2 pontos

Obter $\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{24}}{5}$ .... 3 pontos

Obter $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{24}$ .... 3 pontos

Apresentar o resultado na forma pedida $\left(\frac{-7\sqrt{24}}{5}\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ .... 1 ponto

3.1. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

3.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Designemos por M o acontecimento «o sócio escolhido é mulher», por H o acontecimento «o sócio escolhido é homem», por B o acontecimento «o sócio escolhido pratica badmínton» e por T o acontecimento «o sócio escolhido pratica ténis».

Escrever $P(M)=0{,}65$ .... 1 ponto

Obter $P(H)=0{,}35$ .... 1 ponto

Escrever $P(B\mid H)=\frac{1}{7}$ .... 2 pontos

Obter $P(B\cap H)=0{,}05$ .... 2 pontos

Escrever $P(M\mid B)=\frac{5}{6}$ .... 2 pontos

Escrever $P(B)=P(B\cap M)+P(B\cap H)$ .... 1 ponto

Obter $P(B\cap M)=0{,}25$ .... 3 pontos

Obter a probabilidade pedida (40%) .... 2 pontos

2.º Processo

Designemos por a a probabilidade de o sócio escolhido praticar badmínton.

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam «é homem, é mulher» e «pratica ténis, pratica badmínton» .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «65% dos sócios são mulheres» .... 2 pontos

Obter o valor a colocar na célula da tabela relativa à probabilidade de o sócio ser homem .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «$\frac{1}{7}$ dos homens pratica badmínton» .... 2 pontos

Colocar a na célula da tabela relativa à probabilidade de o sócio escolhido praticar badmínton .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «$\frac{5}{6}$ dos praticantes de badmínton são mulheres» .... 2 pontos

Determinar o valor de a .... 2 pontos

Obter a probabilidade pedida (40%) .... 3 pontos

4. .... **14 pontos**

Equacionar o problema .... 8 pontos

Escrever ${}^{5}C_2\times n$ .... 3 pontos

Escrever ${}^{n}C_2\times 5$ .... 3 pontos

Escrever a equação ${}^{5}C_2\times n+{}^{n}C_2\times 5=175$ .... 2 pontos

OU

Escrever ${}^{n+5}C_3$ .... 3 pontos

Escrever ${}^{n}C_3+{}^{5}C_3$ .... 3 pontos

Escrever a equação ${}^{n+5}C_3-\left({}^{n}C_3+{}^{5}C_3\right)=175$ .... 2 pontos

Resolver a equação .... 5 pontos

Apresentar o valor de n (7) (**ver nota**) .... 1 ponto

Nota – Se a etapa anterior tiver sido pontuada com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

5. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

6. .... **14 pontos**

Escrever $\begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ u_{19} = 4u_7 \end{cases}$ .... 2 pontos

Escrever $\begin{cases} u_1 + 5r + u_1 + 19r = -5 \\ u_1 + 18r = 4(u_1 + 6r) \end{cases}$

(ou um sistema equivalente, nas variáveis u_1 e r) .... 3 pontos

Obter o valor de r .... 2 pontos

Obter o valor de u_1 .... 2 pontos

Escrever $S_{16} = \dfrac{u_1 + u_1 + 15r}{2} \times 16$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o valor de S_{16} (-22) .... 3 pontos

7. .... **12 pontos**

Opção **(A)**

8. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Seja $z = x + yi$

Escrever $(1+2i)(x+yi) + (1-2i)(x-yi) + 10 = 0$ .... 2 pontos

Obter $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ .... 5 pontos

Escrever $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = -2x \end{cases}$ .... 3 pontos

Resolver o sistema .... 3 pontos

Concluir que o número complexo pedido é $-1+2i$ .... 1 ponto

2.º Processo

Seja $z = x + yi$

Escrever $(1+2i)(x+yi) + (1-2i)(x-yi) + 10 = 0$ .... 2 pontos

Obter $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ .... 5 pontos

Escrever $z = x + \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)i$ .... 2 pontos

Obter $|z| = \sqrt{\dfrac{5x^2+10x+25}{4}}$ .... 2 pontos

Determinar a abcissa do vértice da parábola que é o gráfico da função real de variável real definida por $5x^2+10x+25$ .... 2 pontos

Concluir que o número complexo pedido é $-1+2i$ .... 1 ponto

9.1. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .... 7 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-e^{-x}}{x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-e^{-x}}{x} = 1 - \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x}$ .... 2 pontos

Escrever $1 - \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} \underset{y=-x}{=} 1 + \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{e^{y}}{y}$ .... 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 \right)$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 \right) = -3 + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$ .... 1 ponto

Concluir que o gráfico de f não tem qualquer assíntota horizontal quando $x\to-\infty$ e que tem uma assíntota horizontal de equação $y=-2$ quando $x\to+\infty$ .... 2 pontos

9.2. .... **14 pontos**

Nota prévia – Se for utilizada a expressão $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3$, a classificação máxima a atribuir à resposta é 7 pontos.

Identificar o declive da reta pedida com $f'(-2)$ .... 2 pontos

Determinar $f'(-2)$ (**ver nota**) .... 7 pontos

Obter uma expressão de $f'(x)$, em $]-\infty, 0[$ .... 5 pontos

Obter $f'(-2)$ .... 2 pontos

Calcular $f(-2)$ .... 2 pontos

Obter a equação reduzida da reta pedida $\left(y = -\dfrac{e^2}{4}x + 1 \right)$ .... 3 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

10. .... **14 pontos**

Determinar $h'(x)$ (**ver nota 1**) .... 3 pontos

Escrever $h'(x)=0$ .... 1 ponto

Determinar os zeros de h' .... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de h' e de monotonia de h (ou equivalente) .. 4 pontos

Apresentar os intervalos de monotonia da função (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Determinar $h(0)$ e $h\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $\left(1 \text{ e } \frac{5}{4}\right)$ .... 3 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que a função h é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{6}\right[$, em vez de $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, e decrescente em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$, em vez de $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

11.1. .... **12 pontos**

Opção **(C)**

11.2. .... **14 pontos**

Determinar $T(0)$ .... 2 pontos

Apresentar a equação $\frac{20+100e^{-0,04t}-120}{t}=-2,4$ (ou uma equação equivalente) (**ver notas 1 e 2**) .... 4 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 3**) .... 4 pontos

Apresentar a abcissa do ponto relevante .... 2 pontos

Apresentar o valor de t_2 na forma pedida $(28\,\text{min}\ 9\,\text{s})$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, se for inequívoco que correspondem à resolução da equação que traduz corretamente o problema.
3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

12. .... **14 pontos**

Determinar $\lim_{x \to 0^-} g(x)$ .... 6 pontos

Escrever $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k \right)$ .... 1 ponto

Escrever $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k \right) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x^2 - 1)}{x(x - 1)} + k$ .... 2 pontos

Escrever $\lim_{x \to 0^-} \frac{x(x^2 - 1)}{x(x - 1)} + k = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} + k$ .... 1 ponto

Obter $\lim_{x \to 0^-} g(x) = 1 + k$ .... 2 pontos

Determinar $\lim_{x \to 0^+} g(x)$ .... 7 pontos

Escrever $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (2 + x \ln x)$ .... 1 ponto

Escrever

$\lim_{x \to 0^+} (2 + x \ln x) \underset{y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y} \right) \right)$ .... 3 pontos

Escrever $\lim_{y \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y} \right) \right) = 2 - \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y}$ .... 2 pontos

Obter $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 2$ .... 1 ponto

Concluir que $k = 1$ .... 1 ponto

13. .... **14 pontos**

Determinar o domínio da condição .... 2 pontos

Obter $(x - 1) \ln(1 - x) = (1 - x) \ln(3 - 2x)$ .... 2 pontos

Obter $\ln\big((1 - x)(3 - 2x)\big) = 0$ .... 4 pontos

Obter $(1 - x)(3 - 2x) = 1$ .... 3 pontos

Resolver a equação $(1 - x)(3 - 2x) = 1$ .... 2 pontos

Apresentar a solução $\left(\frac{1}{2} \right)$ .... 1 ponto

14. .... **14 pontos**

Designemos por α a amplitude do ângulo AOB

Determinar $\operatorname{sen} \alpha$, em função de k .... 2 pontos

Indicar a ordenada do ponto C, em função de α .... 2 pontos

Escrever $\operatorname{sen}(3\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha + 2\alpha)$ .... 2 pontos

Obter a expressão pedida .... 8 pontos

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**5.**	**7.**	**9.1.**	**9.2.**	**11.1.**	**11.2.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	**144**
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.**	**12.**	**13.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	4 × 14 pontos											**56**
TOTAL												**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2021

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 11 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide regular de base quadrada $[ABCD]$ e vértice E

Sabe-se que:

- a base da pirâmide está contida no plano xOz
- o vértice A pertence ao semieixo positivo Oz e o vértice B pertence ao semieixo negativo Ox
- o vértice E tem coordenadas $(-2, 6, 2)$
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(-1, 6, 2)$
- o volume da pirâmide é 20

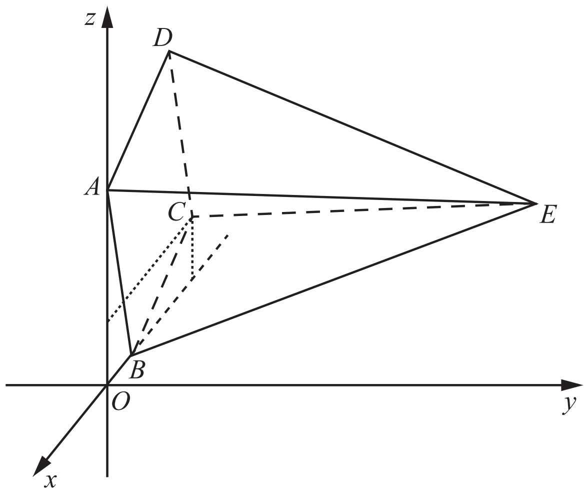


Figura 1

*** 1.1.** Seja α o plano perpendicular à reta BE e que passa no ponto de coordenadas $(1, 0, 1)$

Qual das equações seguintes é uma equação do plano α ?

(A) $-x + 6y + 2z = 0$ **(B)** $x + 6y + 2z - 3 = 0$

(C) $x - 6y - 2z + 1 = 0$ **(D)** $2x - y + 4z - 5 = 0$

*** 1.2.** Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$

2. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. xOy, o arco de circunferência AB, contido no primeiro quadrante do plano cartesiano, cujo centro é a origem do referencial e cujo raio é igual a r $(r > 0)$.

O ponto A pertence ao eixo Ox e o ponto B pertence ao eixo Oy

Seja P um ponto do arco AB, distinto de A e de B, e seja d o comprimento do arco AP

O ponto S pertence ao eixo das ordenadas e tem ordenada igual à do ponto P. O ponto T pertence ao eixo das abcissas e tem abcissa igual à do ponto P

Mostre que uma expressão que dá o valor de $\overline{BS} + \overline{TA}$, em função de d e de r, é

$$r\left(2 - \operatorname{sen}\left(\frac{d}{r}\right) - \cos\left(\frac{d}{r}\right)\right)$$

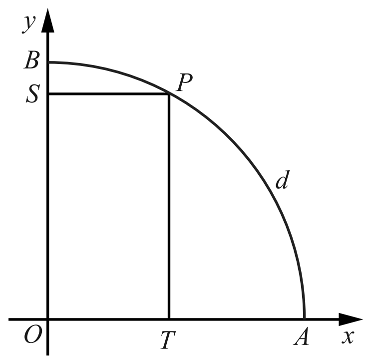


Figura 2

*** 3.** Na Figura 3, está representada, a sombreado, num referencial o.n. xOy, a região do plano cartesiano definida pela condição $0 \leq x \leq 10 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 10$

Considere todos os pontos que pertencem a essa região e cujas coordenadas são números inteiros.

Escolhe-se, ao acaso, um desses pontos.

Qual é o valor, arredondado às milésimas, da probabilidade de esse ponto pertencer à reta de equação $y = x + 7$?

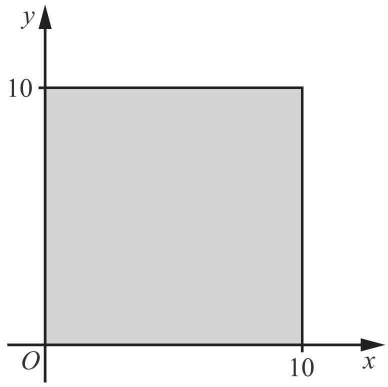


Figura 3

(A) $0{,}025$ **(B)** $0{,}033$

(C) $0{,}041$ **(D)** $0{,}057$

*** 4.** A Fernanda tem cinco livros diferentes e sete canetas, também diferentes, para repartir pelos seus dois netos, o Armando e o Catarino.

A Fernanda vai oferecer três livros e três canetas a um dos netos, e os restantes objetos ao outro, ou quatro livros e duas canetas a um dos netos, e os restantes objetos ao outro.

Determine, nestas condições, de quantos modos diferentes pode a Fernanda repartir os doze objetos pelos seus dois netos.

5. Seja Ω, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) \neq 0$
- $P(B) = \frac{3}{2} P(A)$
- $P(B \mid A) = \frac{1}{2}$

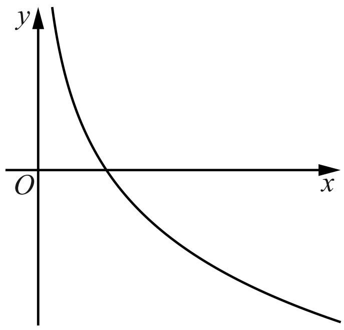
Mostre que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) + 2P(A) = 1$

6. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = 2n^2 - n$

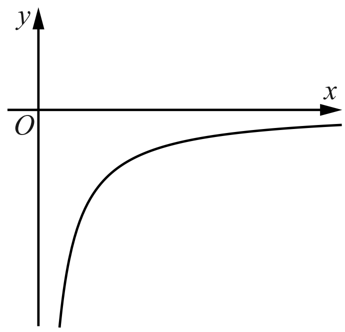
Em relação a uma certa função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que $\lim f\left(\frac{1}{u_n}\right) = +\infty$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ?

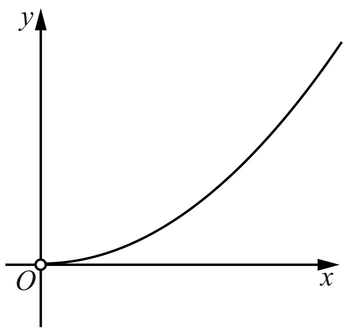
(A)



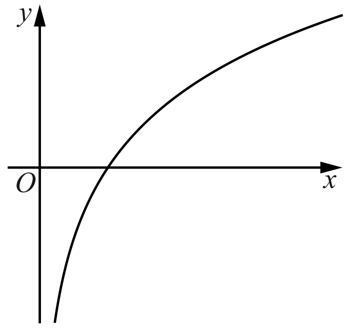
(B)



(C)



(D)



7. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2n + 1$

Determine, sem recorrer à calculadora, a soma dos primeiros duzentos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n)

*** 8.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números complexos z_1 e z_2 tais que, para $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $z_1 = e^{i\theta}$ e $z_2 = 2e^{i(\theta+\pi)}$

A qual dos quadrantes do plano complexo pertence o afixo do número complexo $z_1 + z_2$?

(A) Primeiro **(B)** Segundo **(C)** Terceiro **(D)** Quarto

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_2 = 2i$

Determine, sem recorrer à calculadora, os números complexos z que são solução da equação

$$iz^2 + {z_1}^2 \times \left(\overline{z_2}\right)^3 - 2 = 0$$

Apresente esses números na forma trigonométrica.

10. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 + \ln(3 - 2x) & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x^2} + k & \text{se} \quad x > 1 \end{cases} \qquad (k \text{ é um número real})$$

Resolva os itens **10.1.** e **10.2.** sem recorrer à calculadora.

*** 10.1.** Determine k, sabendo que a função f é contínua em $x = 1$

*** 10.2.** Estude, no intervalo $]-\infty, 1[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

11. Seja g a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por

$$g(x) = \log_2(1 - \cos x) + \log_2(1 + \cos x) + 2\log_2(2\cos x)$$

Mostre que $g(x) = 2\log_2\left(\operatorname{sen}(2x)\right)$

12. Para conhecer a variação do número de bactérias de uma determinada estirpe, colocou-se num tubo de ensaio fechado, com alguns nutrientes, um certo número de bactérias dessa estirpe.

Admita que, nessas condições, o número, N, em milhares, de bactérias vivas existentes no tubo, t horas após a sua colocação nesse tubo, é dado por

$$N(t) = N_0\, e^{1{,}08t - 0{,}3t^2}$$

em que N_0 representa a dimensão, em milhares, da população inicial.

*** 12.1.** Com o decorrer do tempo, para que tende o número de bactérias vivas existentes no tubo?

(A) $+\infty$ **(B)** $0{,}78N_0$ **(C)** N_0 **(D)** 0

*** 12.2.** Considere $N_0 = 1{,}63$

Num certo instante, t_1, havia, no tubo de ensaio, mais meio milhar de bactérias vivas do que uma hora antes desse instante.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de t_1, sabendo que este valor existe e é único.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

13. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} & \text{se} \quad x \leq 1 \\[2mm] \dfrac{x - 1}{e^{x-2}} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Estude, sem recorrer à calculadora, a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso existam, escreva as suas equações.

14. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que verificam a condição

$$e^{-x}\left(4+e^{2x}\right)\geq 5 \;\wedge\; -2\leq x\leq 2$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

*** 15.** Na Figura 4, estão representadas, em referencial o.n. xOy, partes dos gráficos das funções f e g, ambas de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $f(x)=2x^2$ e $g(x)=-(x-1)^2$ e a única reta não horizontal que é tangente, simultaneamente, ao gráfico de f e ao gráfico de g

Seja A o ponto de tangência dessa reta com o gráfico de f e seja B o ponto de tangência dessa mesma reta com o gráfico de g

Determine, sem recorrer à calculadora, as abcissas dos pontos A e B

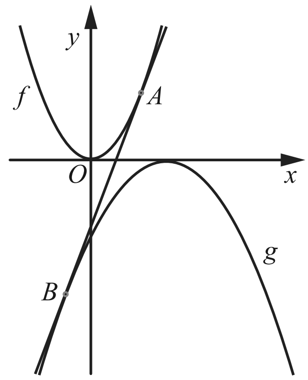


Figura 4

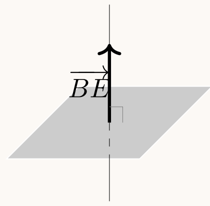
FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.1.**	**10.2.**	**12.1.**	**12.2.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	**144**
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**5.**	**7.**	**9.**	**11.**	**13.**	**14.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	4 × 14 pontos											**56**
TOTAL												**200**

1.

1.1. Como o plano α é perpendicular à reta BE, o vetor $\overrightarrow{BE} = (-1,6,2)$ é um vetor normal do plano, pelo que a equação do plano é da forma:



$$-x + 6y + 2z + d = 0$$

E como o ponto de coordenadas $(1,0,1)$ pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$-1+6(0)+2(1)+d = 0+d = 0 \Leftrightarrow -1+0+2+d = 0 \Leftrightarrow 1+d = 0 \Leftrightarrow d = -1$$

E assim, uma equação do plano α, é:

$$-x + 6y + 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow x - 6y - 2z + 1 = 0$$

Resposta: **Opção C**

1.2. Como a base da pirâmide está contida no plano xOz e o vértice que não pertence à base, o vértice E, tem coordenadas $(-2,6,2)$, então a altura da pirâmide é a distância do ponto E ao plano xOz, ou seja 6.

Como o volume da pirâmide é 20, podemos calcular a área da base:

$$V_{[ABCDE]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times 6 \Leftrightarrow 20 = \frac{6 \times A_{[ABCD]}}{3} \Leftrightarrow 20 = 2 \times A_{[ABCD]} \Leftrightarrow \frac{20}{2} = A_{[ABCD]} \Leftrightarrow 10 = A_{[ABCD]}$$

E assim, com $[ABCD]$ é um quadradado, podemo determinar a medida do lado $[AB]$, ou seja a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$:

$$\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = \sqrt{10}$$

Como o $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(-1,6,2)$ podemos determinar as coordenadas do ponto B a partir das coordenadas do ponto E:

$$B + \overrightarrow{BE} = E \Leftrightarrow B = E - \overrightarrow{BE} \Leftrightarrow B = (-2,6,2) - (-1,6,2) = (-2-(-1),6-6,2-2) = (-1,0,0)$$

Como o vértice A pertence ao semieixo positivo Oz, tem abcissa e ordenada nulas, ou seja, as suas coordenadas são da forma $(0,0,z)$; $z \in \mathbb{R}^+$, pelo que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são da forma:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,0,0) - (0,0,z) = (-1,0,-z);\ z \in \mathbb{R}^+$$

Desta forma determinamos o valor de z, recorrendo ao valor da norma:

$$\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + z^2} = \sqrt{10} \Rightarrow (-1)^2+0^2+z^2 = 10 \Leftrightarrow z^2 = 10-1 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow z = \pm 3$$

Como $\overrightarrow{AB} = (-1,0,-z)$; $z \in \mathbb{R}^+$, temos que $\overrightarrow{AB} = (-1,0,-3)$

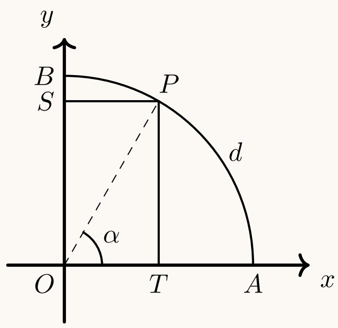
2. Considerando α como a amplitude do ângulo AOP, temos que as coordenadas do ponto P são:

$$P(r\cos\alpha, r\,\text{sen}\,\alpha)$$

E assim, como $\overline{OA} = \overline{OB} = r$, $\overline{OT} = x_P = r\cos\alpha$ e $\overline{OS} = y_P = r\text{sen}\,\alpha$, vem que:

$$\overline{BS} + \overline{TA} = \overline{OB} - \overline{OS} + \overline{OA} - \overline{OT} = r - r\cos\alpha + r - r\,\text{sen}\,\alpha =$$

$$= r(1 - \cos\alpha + 1 - \,\text{sen}\,\alpha) = r(2 - \,\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha)$$



Como d o comprimento do arco AP, definido pelo ângulo α, e o perímetro da circunferência é $2\pi r$, correspondente a um ângulo de amplitude 2π radianos, então podemos identificar uma relação entre α, r e d:

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{d}{2\pi r} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi \times d}{2\pi \times r} \Leftrightarrow \alpha = \frac{d}{r}$$

E assim, temos que:

$$\overline{BS} + \overline{TA} = r\left(2 - \text{sen}\left(\frac{d}{r}\right) - \cos\left(\frac{d}{r}\right)\right)$$

3. Observando que entre 0 e 10 existem 11 valores números inteiros (incluindo estes limites), então o número de pontos cujas coordenadas são números inteiros, na região indicada, ou seja, o número de casos possíveis, é:

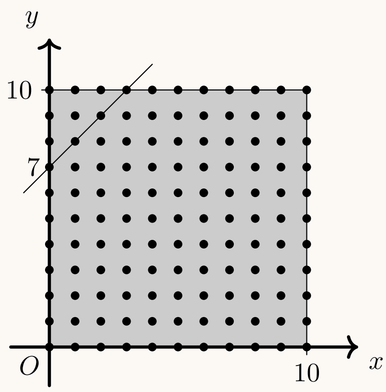
$$11 \times 11 = 121$$

A reta de equação $y = x + 7$ contém 4 dos pontos com coordenadas inteiras que pertencem a esta região $\big((0,7); (1,8); (2,9) \text{ e } (3,10)\big)$, o seja, o número de casos favoráveis é 4.

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos que o valor, arredondado às milésimas, da probabilidade de selecionar ao acaso um dos pontos identificados e ele pertencer à reta dada, é:

$$\frac{4}{121} \approx 0{,}033$$

Resposta: **Opção B**



4. Se a Fernanda oferecer 3 dos 5 livros e 3 das 7 canetas a um dos netos, como a ordem de seleção não é relevante e o beneficiário deste conjunto pode ser qualquer um dos dois netos o número de formas diferentes de fazer a repartição é:

$$2 \times^5 C_3 \times^7 C_3$$

Se a alternativa for oferecer 4 dos 5 livros e 2 das 7 canetas a um dos netos, como a ordem de seleção continua a não ser relevante e o beneficiário deste conjunto também pode ser qualquer um dos dois netos o número de formas diferentes de fazer a repartição é:

$$2 \times^5 C_4 \times^7 C_2$$

Como as qualquer uma destas alternativas pode acontecer em alternativa, temos que o número de modos diferentes pode a Fernanda repartir os doze objetos pelos seus dois netos é:

$$2 \times^5 C_3 \times^7 C_3 + 2 \times^5 C_4 \times^7 C_2 = 910$$

5. Temos que:

- $P(B|A) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2}P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + \frac{3}{2}P(A) - \frac{1}{2}P(A) = P(A) + \frac{2}{2}P(A) = 2P(A)$
- $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 2P(A)$

E assim, temos que:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) + 2P(A) = 1 - 2P(A) + 2P(A) = 1$$

6. Temos que:

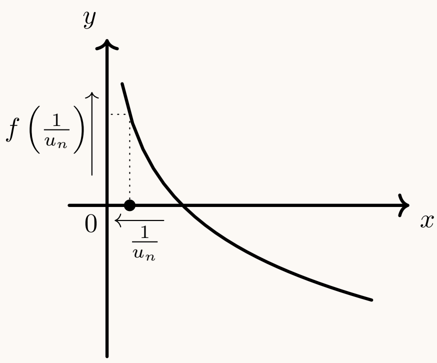
$\lim u_n = \lim(2n^2 - n) = \lim \left(n(2n-1)\right) = +\infty \times \infty = +\infty$

Logo: $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

E assim, vem que:

$$\lim f\left(\frac{1}{u_n}\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Desta forma, dos gráficos apresentados, o único que representa uma função que pode verificar esta condição é o gráfico da opção (A).



Resposta: **Opção A**

7. Os termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) são aqueles cuja ordem é da forma $2k-1$ $(k \in \mathbb{N})$, ou seja a sucessão dos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) é:

$$v_k = 2(2k-1) + 1 = 4k - 2 + 1 = 4k - 1$$

Ou seja, é uma progressão aritmética de razão 4, pelo que a soma dos 200 primeiros termos é:

$$S_{200} = \frac{v_1 + v_{200}}{2} \times 200 = \frac{4(1) - 1 + 4(200) - 1}{2} \times 200 = \frac{4 - 2 + 800}{2} \times 200 = \frac{802}{2} \times 200 = 401 \times 200 = 80200$$

8. Escrevendo z_1 e z_2 na forma algébrica, com o objetivo de fazer a adição, temos:

- $z_1 = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$
- $z_2 = 2e^{i(\theta+\pi)} = 2\left(\cos(\theta+\pi) + i \operatorname{sen}(\theta+\pi)\right) = 2\left(-\cos\theta + i(-\operatorname{sen}\theta)\right) = -2\cos\theta - 2i\operatorname{sen}\theta$

E assim, vem que:

$$z_1 + z_2 = e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta + \left(-2\cos\theta - 2i\operatorname{sen}\theta\right) = \cos\theta - 2\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta - 2i\operatorname{sen}\theta =$$

$$= -\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta = -\left(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\right) = -z_1$$

Assim, temos que:

$$\arg(z_1 + z_2) = \arg(-z_1) = \pi + \theta$$

E como $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, o afixo do número complexo $z_1 + z_2$ pertence ao 3.º quadrante.

Resposta: **Opção C**

9. Temos que:

- $z_1{}^2 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times e^{2\times i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}i$
- $(\overline{z_2})^3 = \left(\overline{2i}\right)^3 = (-2i)^3 = (-2)^3 i^3 = -8 \times (-i) = 8i$
- $z_1{}^2 \times (\overline{z_2})^3 = \frac{1}{4}i \times 8i = \frac{8}{4}i^2 = 2 \times (-1) = -2$

Assim, temos que:

$$iz^2 + z_1{}^2 \times (\overline{z_2})^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 + (-2) - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow iz^2 = 4 \Leftrightarrow z^2 = \frac{4}{i} \Leftrightarrow z^2 = \frac{4\times i}{i\times i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{4i}{-1} \Leftrightarrow z^2 = -4i \Leftrightarrow z^2 = 4e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow z = \sqrt{4e^{i\frac{3\pi}{2}}} \Leftrightarrow z = \sqrt{4}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1\}$$

Assim, os dois números complexos que são solução da equação, escritos na forma trigonométrica, são:

- $(k=0) \rightarrow \sqrt{4}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2(0)\pi}{2}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}}{2}\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- $(k=1) \rightarrow \sqrt{4}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2(1)\pi}{2}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{2}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}$

10.

10.1. Como a função f é contínua em $x=1$, temos que:

$$f(1) = \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x)$$

Assim, temos que:

- $f(1) = 1 - 2 + \ln(3 - 2(1)) = 1 - 2 + \ln(1) = -1 + 0 = -1$
- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{\text{sen}\,(x-1)}{1-x^2} + k\right) = \frac{\text{sen}\,(1-1)}{1-1^2} + k = \frac{0}{0} + k$ (Indeterminação)

  (fazendo $y = x-1$, se $x \to 1$, então $y \to 0$, e observando que $1-x^2 = 1^2 - x^2 = (1-x)(1+x) = -(x-1)(x+1)$)

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{\text{sen}\,(x-1)}{1-x^2}+k\right) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{\text{sen}\,(x-1)}{-(x-1)(x+1)}+k\right) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{\text{sen}\,(x-1)}{x-1}\times\frac{1}{-(x+1)}+k\right) =$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{\text{sen}\,(x-1)}{x-1}\times\lim_{x\to1^+}\frac{1}{-(x+1)}+\lim_{x\to1^+} k = \underbrace{\lim_{y\to0}\frac{\text{sen}\,y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}\times\frac{1}{-(1+1)}+k = 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+k = -\frac{1}{2}+k$$

Como a função é contínua em $x=1$, podemos determinar o valor de k:

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}+k = -1 \Leftrightarrow k = -1+\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{2}{2}+\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

10.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, em $]-\infty,1[$:

$$f'(x) = \left(x-2+\ln(3-2x)\right)' = (x)'-(2)'+(\ln(3-2x))' = 1-0+\frac{(3-2x)'}{(3-2x)} = 1+\frac{0-2}{3-2x} = 1-\frac{2}{3-2x}$$

Calculando os zeros da derivada da função f, em $]-\infty,1[$, temos:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{2}{3-2x}=0 \Leftrightarrow 1=\frac{2}{3-2x} \underset{x\neq\frac{3}{2}}{\Leftrightarrow} 3-2x=2 \Leftrightarrow 3-2=2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}=x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1
f'	+	0	−	n.d.
f	↗	Máx.	↘	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right[$;
- tem um máximo relativo que é:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}-2+\ln\left(3-2\times\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}+\ln(3-1) = -\frac{3}{2}+\ln(2) = \ln 2-\frac{3}{2}$$

11. Recorrendo às regras operatórias de logaritmos, e observando que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x.\cos x$, temos:

$$g(x) = \log_2(1-\cos x)+\log_2(1+\cos x)+2\log_2(2\cos x) = \log_2\left((1-\cos x)(1+\cos x)\right)+\log_2(2\cos x)^2 =$$

$$= \log_2(1+\cos x-\cos x-\cos^2 x)+\log_2(4\cos^2 x) = \log_2(1-\cos^2 x)+\log_2(4\cos^2 x) =$$

$$= \log_2(\operatorname{sen}^2 x)+\log_2(4\cos^2 x) = \log_2(2^2\operatorname{sen}^2 x.\cos^2 x) = \log_2(2\operatorname{sen} x.\cos x)^2 =$$

$$= \log_2\left(\operatorname{sen}(2x)\right)^2 = 2\log_2\left(\operatorname{sen}(2x)\right)$$

12.

12.1. Com o decorrer do tempo, ou seja, quando $t\to+\infty$, o número de bactérias vivas existentes no tubo é dado por:

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(N_0e^{1,08t-0,3t^2}\right) = \lim_{t\to+\infty} N_0\times\lim_{t\to+\infty} e^{1,08t-0,3t^2} = N_0\times e^{-\infty} = N_0\times 0 = 0$$

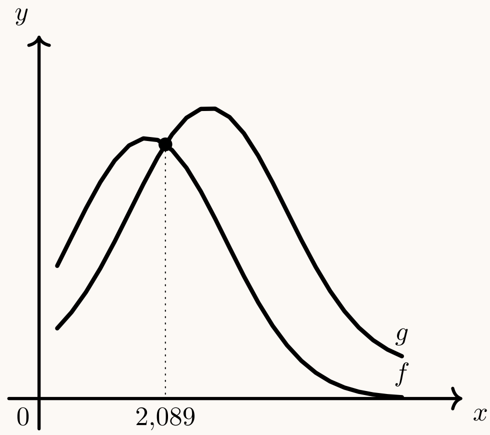
Resposta: **Opção D**

12.2. Como no instante, t_1 , havia, no tubo de ensaio, mais meio milhar de bactérias vivas do que uma hora antes desse instante, temos que:

$$N(t_1) = N(t_1 - 1) + \frac{1}{2}$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $f(x) = 1{,}63e^{1{,}08x-0{,}3x^2}$ e $g(x) = -1{,}63e^{1{,}08(x-1)-0{,}3(x-1)^2} + \frac{1}{2}$, numa janela compatível com o contexto descrito ($0 < x < 6$), correspondente a 12 horas), reproduzido na figura ao lado, e usando a funcionalidade da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às milésimas) das coordenadas do ponto de interseção, cuja abcissa é o valor de t_1:

$$(2{,}089,\ 4{,}202)$$



Assim temos que o instante $t_1 \approx 2{,}089$, e como 0,089 horas corresponde a $0{,}089 \times 60 \approx 5$ temos que o instante t_1 ocorreu 2 horas e 5 minutos após a colocação das bactérias no tubo de ensaio.

13. Como o domínio da função é $\mathbb{R}$, podem existir assíntotas horizontais do gráfico de f quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{e^{x-2}} = \frac{+\infty-1}{e^{+\infty-2}} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty}$ (Indeterminação)

(fazendo $y = x - 2$, temos $x = y + 2$ e se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{y+2-1}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y+1}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y}{e^y} + \frac{1}{e^y}\right) = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} + \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} + \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = \frac{\lim\limits_{y\to+\infty} 1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} + \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{+\infty} = 0 + 0 = 0$$

Desta forma temos que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ e que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, pelo que as retas de equações $y = 1$ e $y = 0$ são assíntotas horizontais do gráfico de f, para $x \to -\infty$ e para $x \to +\infty$, respetivamente.

14. Resolvendo a inequação, temos:

$$e^{-x}(4+e^{2x}) \geq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} \times (4+e^{2x}) \geq 5 \Leftrightarrow \frac{4}{e^x} + \frac{e^{2x}}{e^x} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{4}{e^x} + \frac{e^{2x}}{e^x} \geq \frac{5e^x}{e^x} \underset{e^x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 4+e^{2x} \geq 5e^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 4 \geq 0$$

Considerando $y = e^x$, temos que: $y^2 - 5y + 4 \geq 0$

Como $y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 4$, e o coeficiente de y^2 é positivo, então: $y^2 - 5y + 4 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1 \vee y \geq 4$

Assim, como $y = e^x$, temos que:

$$e^{-x}(4+e^{2x}) \geq 5 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \vee e^x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq \ln 1 \vee x \geq \ln 4 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq \ln 4$$

E como $-2 \leq x \leq 2$, temos que o conjunto dos números reais que verificam a condição dada é:

$$\big(]-\infty,0] \cup [\ln 4, +\infty[\big) \cap [-2,2] = [-2,0] \cup [\ln 4,2]$$

15. Como a reta é tangente, simultaneamente, ao gráfico de f e ao gráfico de g, o seu declive corresponde ao valor das derivadas nos respetivos pontos de tangência.

Designado por a a abcissa do ponto A e por b a abcissa do ponto B, como as ordenadas dos pontos A e B, são, respetivamente $f(a) = 2a^2$ e $g(b) = -(b-1)^2$, então o declive da reta é:

$$m_{AB} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{2a^2 - (-(b-1)^2)}{a-b} = \frac{2a^2 + (b-1)^2}{a-b}$$

Por outro lado, temos que:

- $f'(x) = (2x^2)' = 2 \times 2x = 4x$, pelo que $m_{AB} = f'(a) = 4a$
- $g'(x) = \big(-x-1)^2\big)' = -2(x-1) = -2x+2$, pelo que $m_{AB} = g'(b) = -2b+2$
- $f'(a) = g'(b) \Leftrightarrow 4a = -2b+2 \Leftrightarrow 2a = -b+1 \Leftrightarrow b = -2a+1$

E assim, substituindo na expressão anterior, temos que:

$$m_{AB} = \frac{2a^2+(b-1)^2}{a-b} = \frac{2a^2+(-2a+1-1)^2}{a-(-2a+1)} = \frac{2a^2+(-2a)^2}{a+2a-1)} = \frac{2a^2+4a^2}{3a-1} = \frac{6a^2}{3a-1}$$

Temos ainda que:

$$m_{AB} = f'(a) \Leftrightarrow \frac{6a^2}{3a-1} = 4a \underset{a\neq\frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} 6a^2 = 4a(3a-1) \Leftrightarrow 6a^2 = 12a^2 - 4a \Leftrightarrow 6a^2 - 12a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow -3a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow a(-3a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee -3a+2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee 2 = 3a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee \frac{2}{3} = a \wedge a \neq \frac{1}{3}$$

Como a reta não é horizontal o declive não pode ser zero, pelo que a abcissa do ponto A é $a = \dfrac{2}{3}$ e a abcissa do ponto B é $b = -2a+1 = -2\left(\dfrac{2}{3}\right) + 1 = -\dfrac{4}{3} + 1 = -\dfrac{1}{3}$

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2021

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação 9 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... **12 pontos**

Opção **(C)**

1.2. .... **14 pontos**

Reconhecer que $B + \overrightarrow{BE} = E$ .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto B .... 2 pontos

Reconhecer que a altura da pirâmide é igual a 6 .... 2 pontos

Determinar a área da base da pirâmide .... 2 pontos

Determinar $\overline{AB}$ .... 1 ponto

Determinar a cota do ponto A .... 2 pontos

Apresentar as coordenadas do ponto A .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ $\left((-1, 0, -3)\right)$ .... 1 ponto

2. .... **14 pontos**

Designemos por α a amplitude do ângulo AOP, em radianos

Reconhecer que $\overline{BS} = r - \overline{OS}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\overline{TA} = r - \overline{OT}$ .... 1 ponto

Escrever $\alpha = \dfrac{d}{r}$ .... 2 pontos

Escrever $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OT}}{r}$ .... 2 pontos

Obter $\overline{OT} = r\cos\left(\dfrac{d}{r}\right)$ .... 2 pontos

Escrever $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overline{OS}}{r}$ .... 2 pontos

Obter $\overline{OS} = r\operatorname{sen}\left(\dfrac{d}{r}\right)$ .... 2 pontos

Obter a expressão pretendida .... 2 pontos

3. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

4. .... **14 pontos**

Apresentar a expressão

$\left(2\times{}^5C_3\times{}^7C_3+2\times{}^5C_4\times{}^7C_2\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ (**ver nota 1**)........................... 13 pontos

Obter o valor pedido (910) (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Notas:

1. Se uma das parcelas não for apresentada, devem ser descontados 8 pontos. Por cada parcela incorreta devem ser descontados 7 pontos, salvo se a incorreção se limitar à falta do fator 2. Neste caso, devem ser descontados 2 pontos por cada parcela em que tal erro ocorre. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a etapa anterior tiver sido pontuada com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

5. .... **14 pontos**

Escrever $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ .... 2 pontos

Obter $P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}P(A)$ .... 2 pontos

Substituir $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ por $P(\overline{A\cup B})$ .... 2 pontos

Substituir $P(\overline{A\cup B})$ por $1-P(A\cup B)$ .... 2 pontos

Substituir $P(A\cup B)$ por $P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ .... 2 pontos

Obter $P(\overline{A}\cap\overline{B})+2P(A)=1$ .... 4 pontos

6. .... **12 pontos**

Opção **(A)**

7. .... **14 pontos**

Designemos por (a_n) a sucessão dos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n)

Referir que (a_n) é uma progressão aritmética de primeiro termo igual a 3 e razão igual a 4 .... 5 pontos

Escrever $S_{200}=\dfrac{a_1+a_{200}}{2}\times 200$ .... 1 ponto

Determinar a_{200} .... 5 pontos

Obter a soma pedida $(80\,200)$ .... 3 pontos

8. .... **12 pontos**

Opção **(C)**

9. .... **14 pontos**

Substituir z_1 e z_2 na equação dada .... 1 ponto

Identificar z_1^2 com $\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}$ .... 1 ponto

Identificar $\overline{z_2}$ com $-2i$ .... 1 ponto

Obter $iz^2 - 4 = 0$ .... 4 pontos

Obter $z^2 = -4i$ .... 2 pontos

Identificar $-4i$ com $4e^{i\frac{3\pi}{2}}$ .... 1 ponto

Escrever $z = 2e^{i\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}}$ (com $k \in \{0,1\}$) .... 2 pontos

Obter as soluções da equação $\left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right.$ e $\left.2e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)$ .... 2 pontos

10.1. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ ou $f(1)$ .... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ .... 9 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x^2} + k\right)$ .... 1 ponto

Escrever

$\lim\limits_{x \to 1^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x^2} + k\right) = \lim\limits_{x \to 1^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(1-x)(1+x)} + k\right)$ .... 2 pontos

Escrever

$\lim\limits_{x \to 1^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(1-x)(1+x)} + k\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} \times \lim\limits_{x \to 1^+}\frac{-1}{x+1} + k$ .... 2 pontos

Escrever

$\lim\limits_{x \to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} \times \lim\limits_{x \to 1^+}\frac{-1}{x+1} + k \underset{y=x-1}{=}$

$\underset{y=x-1}{=} \lim\limits_{y \to 0^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + k$ .... 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\frac{1}{2} + k$ .... 1 ponto

Escrever $-\frac{1}{2} + k = -1$ .... 2 pontos

Obter o valor de k $\left(-\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

10.2. .... **14 pontos**

Determinar $f'(x)$ em $\left]-\infty, 1\right[$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Escrever $f'(x) = 0$ .... 1 ponto

Determinar o zero de f' em $\left]-\infty, 1\right[$ .... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f em $\left]-\infty, 1\right[$
(ou equivalente) .... 4 pontos

Apresentar os intervalos de monotonia da função em $\left]-\infty, 1\right[$ (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Reconhecer que o extremo relativo é $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Determinar $f\left(\frac{1}{2}\right)$ $\left(-\frac{3}{2} + \ln 2\right)$ .... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que a função f é crescente em $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$, em vez de $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$, e decrescente em $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, em vez de $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

11. .... **14 pontos**

Escrever $g(x) = \log_2\left((1-\cos x)(1+\cos x)\right) + 2\log_2(2\cos x)$ .... 2 pontos

Escrever $g(x) = \log_2(1-\cos^2 x) + 2\log_2(2\cos x)$ .... 2 pontos

Escrever $g(x) = \log_2(\operatorname{sen}^2 x) + 2\log_2(2\cos x)$ .... 2 pontos

Escrever $g(x) = 2\log_2(\operatorname{sen} x) + 2\log_2(2\cos x)$ .... 2 pontos

Escrever $g(x) = 2\left(\log_2(\operatorname{sen} x) + \log_2(2\cos x)\right)$ .... 2 pontos

Escrever $g(x) = 2\log_2(2\operatorname{sen} x\cos x)$ .... 2 pontos

Obter $g(x) = 2\log_2\left(\operatorname{sen}(2x)\right)$ .... 2 pontos

12.1. .... **12 pontos**

Opção **(D)**

12.2. .... **14 pontos**

Apresentar a equação $N(t_1) = N(t_1 - 1) + 0{,}5$ (ou uma equação equivalente) (**ver notas 1 e 2**) .... 5 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 3**) .... 4 pontos

Apresentar as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) .... 2 pontos

Apresentar o valor de t_1 na forma pedida $(2\,\mathrm{h}\ 5\,\mathrm{min})$ .... 3 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, se for inequívoco que correspondem à resolução da equação que traduz corretamente o problema.
3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

13. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ .... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f, quando $x \to -\infty$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ .... 9 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 1}{e^{x-2}}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 1}{e^{x-2}} \underset{y = x - 2}{=} \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{y + 1}{e^y}$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{y + 1}{e^y} = \lim\limits_{y \to +\infty} \left(\dfrac{y}{e^y} + \dfrac{1}{e^y} \right)$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{y \to +\infty} \left(\dfrac{y}{e^y} + \dfrac{1}{e^y} \right) = \lim\limits_{y \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\frac{e^y}{y}} + \dfrac{1}{e^y} \right)$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ .... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f, quando $x \to +\infty$ .... 1 ponto

14. .... **14 pontos**

Escrever $e^{-x}\left(4+e^{2x}\right)\geq 5 \Leftrightarrow 4e^{-x}+e^{x}-5\geq 0$ .... 2 pontos

Obter $4e^{-x}+e^{x}-5\geq 0 \Leftrightarrow e^{2x}-5e^{x}+4\geq 0$ .... 2 pontos

Escrever $e^{2x}-5e^{x}+4\geq 0 \underset{y=e^{x}}{\Leftrightarrow} y^{2}-5y+4\geq 0$ .... 2 pontos

Obter $y^{2}-5y+4\geq 0 \Leftrightarrow y\leq 1 \vee y\geq 4$ .... 3 pontos

Escrever $y\leq 1 \vee y\geq 4 \underset{y=e^{x}}{\Leftrightarrow} e^{x}\leq 1 \vee e^{x}\geq 4$ .... 1 ponto

Obter $e^{x}\leq 1 \vee e^{x}\geq 4 \Leftrightarrow x\leq 0 \vee x\geq \ln 4$ .... 2 pontos

Apresentar o conjunto pedido $\left([-2,0]\cup[\ln 4,2]\right)$ .... 2 pontos

15. .... **14 pontos**

Designemos por a a abcissa do ponto A e por b a abcissa do ponto B

Determinar $f'(x)$ .... 1 ponto

Determinar $g'(x)$ .... 2 pontos

Obter $f'(a)=g'(b)\Leftrightarrow b=1-2a$ .... 3 pontos

Escrever as coordenadas de A, em função de a .... 1 ponto

Escrever as coordenadas de B, em função de a .... 2 pontos

Obter o declive da reta AB, em função de a .... 2 pontos

Identificar o declive da reta AB com $f'(a)$ .... 1 ponto

Obter o valor de a $\left(\frac{2}{3}\right)$ .... 1 ponto

Obter o valor de b $\left(-\frac{1}{3}\right)$ .... 1 ponto

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.1.**	**10.2.**	**12.1.**	**12.2.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	**144**
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**5.**	**7.**	**9.**	**11.**	**13.**	**14.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	4 × 14 pontos											**56**
TOTAL												**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

✱ **1.** Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão convergente?

(A) $(-1)^n \times n$ **(B)** $\dfrac{(-1)^n}{n}$ **(C)** $(-1)^n + n$ **(D)** $(-1)^n - n$

2. A soma dos cinco primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\dfrac{2}{3}$ é 211 .

Determine o quinto termo desta progressão.

✱ **3.** Seja Ω , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma dada experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(\overline{B}) = 0{,}6$;
- $P(A \cup B) = 0{,}6$;
- $A \cap B = \varnothing$.

Qual é o valor de $P(\overline{A})$?

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}4$ **(C)** $0{,}6$ **(D)** $0{,}8$

✱ **4.** O Semáforo é um jogo matemático em que se usa um tabuleiro retangular de 3×4 casas e se dispõe de peças verdes, peças amarelas e peças encarnadas. As peças da mesma cor são iguais.

Na Figura 1, está representado um tabuleiro do jogo Semáforo cujas casas foram numeradas de 1 a 12 .

Pretende-se colocar 2 peças no tabuleiro, uma peça por casa, de modo a obter uma configuração colorida. Para o efeito, dispõe-se de várias peças de cada cor.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Figura 1

Considera-se uma configuração colorida o resultado da colocação de duas peças no tabuleiro. Duas configurações coloridas são diferentes se diferirem nas casas ocupadas pelas peças usadas ou na cor dessas peças.

A expressão seguinte permite determinar o número de configurações coloridas diferentes que é possível obter.

$$3 \times {}^{12}C_2 \; + \; {}^{3}C_2 \times {}^{12}A_2$$

Explique, no contexto descrito, cada parcela desta expressão.

5. Dos alunos que participaram num torneio de jogos matemáticos, que incluiu os jogos Semáforo e Rastros, sabe-se que:

- metade dos alunos jogou Semáforo;
- um quarto dos alunos não jogou Rastros;
- um quinto dos alunos que não jogaram Rastros jogou Semáforo.

Determine a probabilidade de um aluno que participou no torneio, escolhido ao acaso, não ter jogado Semáforo e ter jogado Rastros.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

6. Na Figura 2, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone reto de vértice V e base de centro no ponto A.

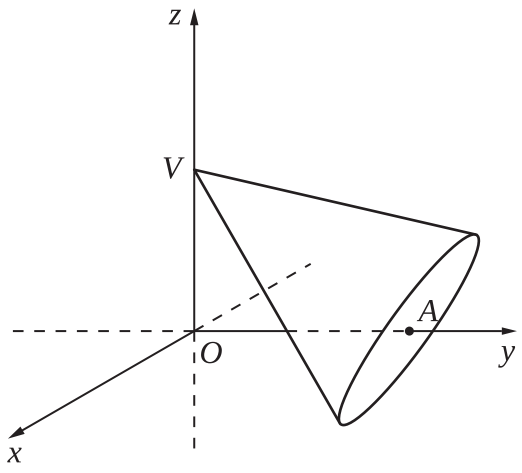


Figura 2

Sabe-se que:

- o ponto V pertence ao eixo Oz, e o ponto A pertence ao eixo Oy;
- a base do cone tem raio 3 e está contida no plano definido por $4y - 3z = 16$.

* **6.1.** Qual das seguintes equações define um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone e que passa no ponto de coordenadas $(1, 2, -1)$?

(A) $4y - 3z = 11$ **(B)** $3x + 4y + z = 10$

(C) $3y + 4z = 8$ **(D)** $x + 3y + 4z = 3$

* **6.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o volume do cone.

7. Na Figura 3, está representada, em referencial o.n. Oxy , a circunferência de equação $(x+2)^2+(y-1)^2=9$.

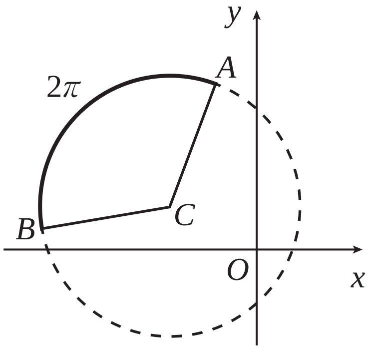


Figura 3

O ponto C é o centro da circunferência.

A e B são dois pontos da circunferência.

O arco de circunferência AB tem comprimento 2π .

Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

8. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2-x}}{x+2} & \text{se} \quad x<-2 \vee x \geq 2 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^2-4} & \text{se} \quad -2<x<2 \end{cases}$$

Resolva os itens **8.1.** e **8.2.** sem recorrer à calculadora.

* **8.1.** Averigue se a função f é contínua em $x=2$.

* **8.2.** Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $]-\infty, -2[$, e determine esses extremos, caso existam.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

9. Na Figura 4, está representado um cabo suspenso pelas suas extremidades em dois postes iguais, distanciados 10 metros entre si. Os postes estão instalados perpendicularmente ao solo, num terreno plano e horizontal. O ponto do cabo mais próximo do solo é equidistante dos dois postes.

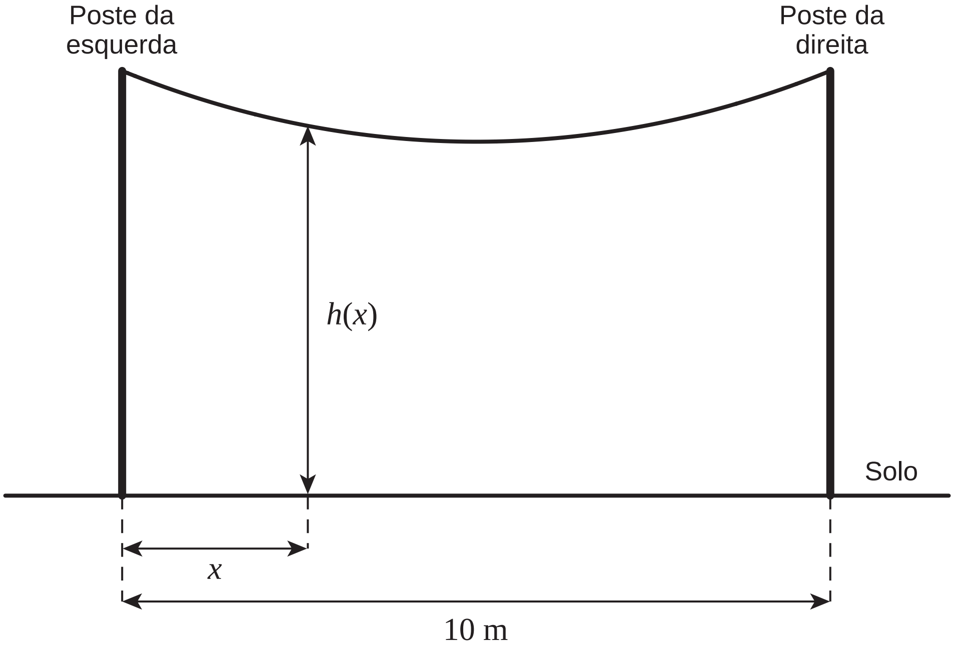


Figura 4

Seja h a função, de domínio $[0, 10]$, definida por $h(x) = 6{,}3\left(e^{\frac{x-5}{12{,}6}} + e^{\frac{5-x}{12{,}6}}\right) - 7{,}6$.

Admita que $h(x)$ é a altura, relativamente ao solo, em metros, de um ponto do cabo situado a x metros do poste da esquerda.

* **9.1.** Qual é a distância, arredondada às décimas de metro, da base do poste da esquerda ao ponto do cabo que está mais próximo do solo?

(A) $7{,}1$ m **(B)** $7{,}3$ m **(C)** $7{,}6$ m **(D)** $7{,}8$ m

* **9.2.** Para um ponto do cabo situado a d metros do poste da esquerda, verifica-se que, diminuindo 50% essa distância, a altura, relativamente ao solo, diminui 30 centímetros.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de d, sabendo-se que este valor existe e é único.

Apresente o resultado arredondado às décimas de metro.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas.

✱ 10. Na Figura 5, estão representados, no plano complexo, os afixos de cinco números complexos.

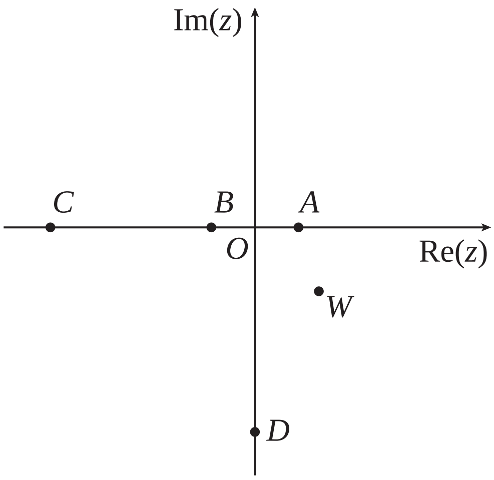


Figura 5

O ponto A pertence ao semieixo real positivo, os pontos B e C pertencem ao semieixo real negativo, e o ponto D pertence ao semieixo imaginário negativo.

O ponto W é o afixo de um número complexo w tal que $\operatorname{Im}(w) = -\operatorname{Re}(w)$ e $\operatorname{Re}(w) > 1$.

Qual dos pontos seguintes pode ser o afixo do número complexo $-iw^2$?

(A) Ponto A **(B)** Ponto B

(C) Ponto C **(D)** Ponto D

11. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a equação $z^3 = \left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}\right)^6$.

Determine o número complexo que é solução da equação e cujo afixo, no plano complexo, pertence ao terceiro quadrante.

Apresente o resultado na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

✱ 12. Na Figura 6, está representado o triângulo $[ABC]$.

Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo BAC .

Sabe-se que:

- $C\hat{B}A = 2x$;
- $\overline{BC} = 2 \text{ cm}$.

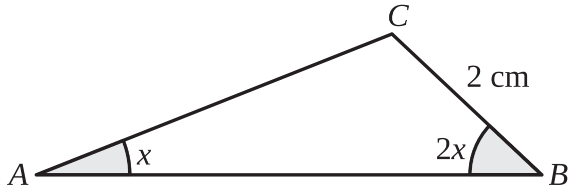


Figura 6

Mostre que o comprimento de $[AB]$, em centímetros, é dado, para cada valor de x , pela expressão

$$8\cos^2 x - 2$$

13. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja g a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $g(x) = 5x - 3\ln(x-1)$.

Estude a função g quanto à existência de assíntotas verticais e de assíntotas oblíquas ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.

14. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine os números reais que são solução da equação

$$(e^x - 1)\ln(5-2x) + e^x \ln(3-x) = \ln(3-x)$$

* **15.** Seja k um número real não nulo, e seja f a função definida, em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = \dfrac{k}{x}$.

Considere dois pontos do gráfico de f, A e B , sendo A o de menor abcissa. Considere, também, o ponto desse gráfico em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta AB .

Mostre que, para qualquer valor de k , as abcissas dos três pontos são termos consecutivos de uma progressão geométrica.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>3.</td><td>4.</td><td>6.1.</td><td>6.2.</td><td>8.1.</td><td>8.2.</td><td>9.1.</td><td>9.2.</td><td>10.</td><td>12.</td><td>15.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">2.</td><td colspan="2">5.</td><td colspan="2">7.</td><td colspan="2">11.</td><td colspan="2">13.</td><td colspan="2">14.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 × 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

Exame Nacional de Matemática A

1.ª Fase | 2022 | Proposta de Resolução

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

Exame Nacional de Matemática A

1.ª Fase | 2022

Proposta de Resolução

1. A opção correcta é a **B**, pois:

para n par, $\lim \frac{(-1)^n}{n} = \lim \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0$ e para n ímpar, $\lim \frac{(-1)^n}{n} = \lim \frac{-1}{n} = \frac{-1}{+\infty} = 0$

Logo, $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$, sendo, portanto, convergente

Resposta: B

2. Seja (u_n) a progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$ cuja soma dos seus cinco primeiros termos é 211.

Assim como a soma dos cinco primeiros termos da progressão geométrica (u_n) é dada por $u_1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}}$, vem que:

$$u_1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}} = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1-\frac{2^5}{3^5}}{\frac{1}{3}} = 211 \Leftrightarrow 3u_1 \times \left(1-\frac{32}{243}\right) = 211 \Leftrightarrow 3u_1 \times \frac{211}{243} = 211 \Leftrightarrow 3u_1 = \cancel{211} \times \frac{243}{\cancel{211}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{243}{3} \Leftrightarrow u_1 = 81$$

Logo, $u_5 = u_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 81 \times \frac{2^4}{3^4} = \cancel{81} \times \frac{16}{\cancel{81}} = 16$.

3. Tem-se que $A \cap B = \varnothing$, pelo que os acontecimentos A e B são incompatíveis e portanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \underset{P(\overline{B})=0{,}6 \Leftrightarrow P(B)=0{,}4}{\Leftrightarrow} 0{,}6 = P(A) + 0{,}4 \Leftrightarrow P(A) = 0{,}2.$$

Logo, $P(\overline{A}) = 0{,}8$

Resposta: D

4. As peças podem ser da mesma cor ou de cores diferentes.

Assim:

- $3\times {}^{12}C_2$: é o número de maneiras de escolher uma das três cores, ${}^{3}C_1=3$, e, para cada uma destas maneiras, escolher duas das doze casas do tabuleiro para as duas peças da mesma cor – o número de maneiras de o fazer é ${}^{12}C_2$;

- ${}^{3}C_2\times {}^{12}A_2$: é o número de maneiras de escolher duas das três cores, ${}^{3}C_2$, e, para cada uma destas maneiras, escolher ordenadamente duas das doze casas do tabuleiro para as duas peças de cores diferentes – o número de maneiras de o fazer é ${}^{12}A_2$.

5. Sejam A e B os acontecimentos:

A: «o aluno jogou o jogo Semáforo» B: «o aluno jogou o jogo Rastos»

Do enunciado sabe-se que $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(\overline{B})=\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(B)=\frac{3}{4}$ e $P(A|\overline{B})=\frac{1}{5}$.

Pretende-se $P(\overline{A}\cap B)$.

Tem-se que $P(A|\overline{B})=\frac{1}{5}\Leftrightarrow \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow \overbrace{P(A\cap\overline{B})}^{P(A)-P(A\cap B)}=\frac{1}{5}\times P(\overline{B})\Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\Leftrightarrow$

$$\underset{P(A)=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow}\frac{1}{2}-P(A\cap B)=\frac{1}{20}\Leftrightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{20}=P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{9}{20}$$

Logo, $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}-\frac{9}{20}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

Outra resolução (utilizando uma tabela):

Tem-se que:

- $P(A)=\frac{1}{2}$ e $P(\overline{B})=\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(B)=\frac{3}{4}$

- $P(A|\overline{B})=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{5}\times P(\overline{B})\Leftrightarrow P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{20}$

Pretende-se $P\left(\overline{A}\cap B\right)$

Preenchendo uma tabela:

	A	$\overline{A}$	p.m.
B	$\frac{1}{2}-\frac{1}{20}=\frac{9}{20}$	$\frac{3}{4}-\frac{9}{20}=\frac{6}{20}$	$\frac{3}{4}$
$\overline{B}$	$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{4}$
p.m.	$\frac{1}{2}$	$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	1

Logo, $P\left(\overline{A}\cap B\right)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

6.

6.1. Um vector normal ao plano que contém a base do cone é $\vec{n}(0,4,-3)$.

O ponto de coordenadas $(1,2,-1)$ pertence ao plano pedido e qualquer vector normal a um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone este é perpendicular ao vector $\vec{n}(0,4,-3)$.

Logo, a única equação que define um plano nas condições do enunciado é a da opção **D**.

De facto, um vector normal a $x+3y+4z=3$ é $\vec{n}_1(1,3,4)$ e $\vec{n}_1\cdot\vec{n}=(1,3,4)\cdot(0,4,-3)=0+12-12=0$, pelo que este plano é perpendicular ao plano que contém a base do cone. Por outro lado, o ponto de coordenadas $(1,2,-1)$ pertence ao plano definido pela equação da opção **D**, pois $1+3\times2+4\times(-1)=3\Leftrightarrow 7-4=3\Leftrightarrow 3=3$, que é uma proposição verdadeira.

Resposta: D

6.2. Tem-se que o volume do cone é dado por $\frac{1}{\cancel{3}}\times\pi\times3^{\cancel{2}}\times\overline{AV}=3\pi\overline{AV}$.

▪ o ponto A pertence ao eixo Oy, pelo que as suas coordenadas são da forma $A(0,y,0)$. Como A pertence ao plano que contém a base do cone, substituindo, vem que:

$$4y-3\times0=16\Leftrightarrow 4y=16\Leftrightarrow y=4\Rightarrow A(0,4,0)$$

▪ a recta AV é perpendicular ao plano que contém a base do cone (por conter a altura). Como um vector normal a esse plano é $\vec{n}(0,4,-3)$, um vector director da recta AV é $\vec{n}(0,4,-3)$, pelo que:

$$AV:(x,y,z)=(0,4,0)+k(0,4,-3),\ k\in\mathbb{R}$$

O ponto V pertence ao eixo Oz, pelo que as suas coordenadas são da forma $V(0,0,z)$. Assim, como V pertence à recta AV, substituindo, vem:

$$(0,0,z)=(0,4,0)+k(0,4,-3)\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\0=4+4k\\z=-3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\k=-1\\z=-3\times(-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\k=-1\Rightarrow V(0,0,3)\\z=3\end{cases}$$

Logo, $\overline{AV}=\sqrt{(0-0)^2+(4-0)^2+(0-3)^2}=5$ e o volume do cone é $3\pi\times5=15\pi$.

7. Tem-se que $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\times\cos\left(A\hat{C}B\right)$.

Como a circunferência tem raio 3, vem que $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|=\left\|\overrightarrow{CB}\right\|=3$

O comprimento do arco AB é dado por $A\hat{C}B\times\overline{AC}$, pelo que $A\hat{C}B\times3=2\pi\Leftrightarrow A\hat{C}B=\frac{2\pi}{3}$.

Logo, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\times\cos\left(A\hat{C}B\right)=3\times3\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=9\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{2}$.

8.

8.1. A função f é contínua em $x=2$ se $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=f(2)$. Assim:

▪ $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{e^{2-x}}{x+2}=\frac{e^{2-2}}{2+2}=\frac{e^0}{4}=\frac{1}{4}$ e $f(2)=\frac{e^{2-2}}{2+2}=\frac{e^0}{4}=\frac{1}{4}$

▪ $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^2-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to2^-}\frac{\operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{1}{x+2}\times\lim\limits_{x\to2^-}\frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2}=$

$$\underset{\substack{y=x-2\\x\to2^-\Rightarrow y\to0^-}}{=}\frac{1}{2+2}\times\underbrace{\lim_{y\to0^-}\frac{\operatorname{sen}y}{y}}_{\text{Limite notável}}=\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}$$

Logo, f é contínua em $x=2$.

8.2. Para $x \in \left]-\infty,-2\right[$ tem-se que $f(x)=\dfrac{e^{2-x}}{x+2}$. Assim:

- $f'(x)=\dfrac{\left(e^{2-x}\right)'(x+2)-e^{2-x}(x+2)'}{(x+2)^2}=\dfrac{-e^{2-x}(x+2)-e^{2-x}}{(x+2)^2}=\dfrac{e^{2-x}(-x-2-1)}{(x+2)^2}=\dfrac{e^{2-x}(-3-x)}{(x+2)^2}$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{2-x}(-3-x)}{(x+2)^2}=0 \Leftrightarrow e^{2-x}(-3-x)=0 \;\wedge\; \underbrace{(x+2)^2 \neq 0}_{\substack{\text{Condição universal} \\ \text{em }]-\infty,-2[}} \Leftrightarrow \underbrace{e^{2-x}=0}_{\text{Eq. impossível em } \mathbb{R}} \;\vee\; -3-x=0 \Leftrightarrow x=-3$

O sinal de f' depende apenas do sinal de $-3-x$, pois $e^{2-x}>0$ e $(x+2)^2>0$ para todo o $x \in \left]-\infty,-2\right[$.

Fazendo uma tabela de variação do sinal de f':

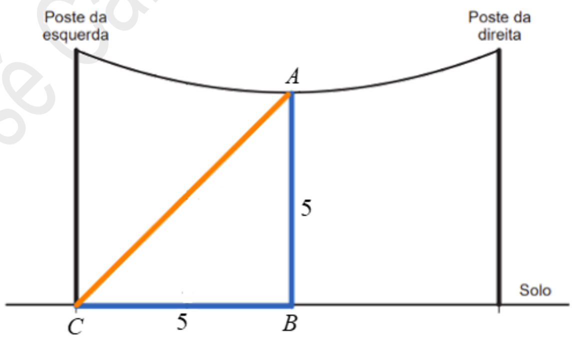
x	$-\infty$	-3		-2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n.d.
f	↗	máx.	↘	n.d.

No intervalo $\left]-\infty,-2\right[$, a função f é decrescente em $\left[-3,-2\right[$, é crescente em $\left]-\infty,-3\right]$ e tem máximo relativo em $x=-3$, que é igual a $f(-3)=\dfrac{e^{2-(-3)}}{-3+2}=\dfrac{e^5}{-1}=-e^5$.

9.

9.1. O ponto do cabo mais próximo do solo encontra-se a cinco metros do poste da esquerda (e a cinco do poste da direita, pelo que a sua altura solo é igual a:

$$h(5)=6{,}3\times\left(e^{\frac{5-5}{12{,}6}}+e^{\frac{5-5}{12{,}6}}\right)-7{,}6=6{,}3\times\left(e^0+e^0\right)-7{,}6=2\times 6{,}3-7{,}6=12{,}6-7{,}6=5$$



Sendo A o ponto do fio mais próximo do solo, B a sua projecção ortogonal o C o ponto da base do poste da esquerda, pelo teorema de Pitágoras, vem:

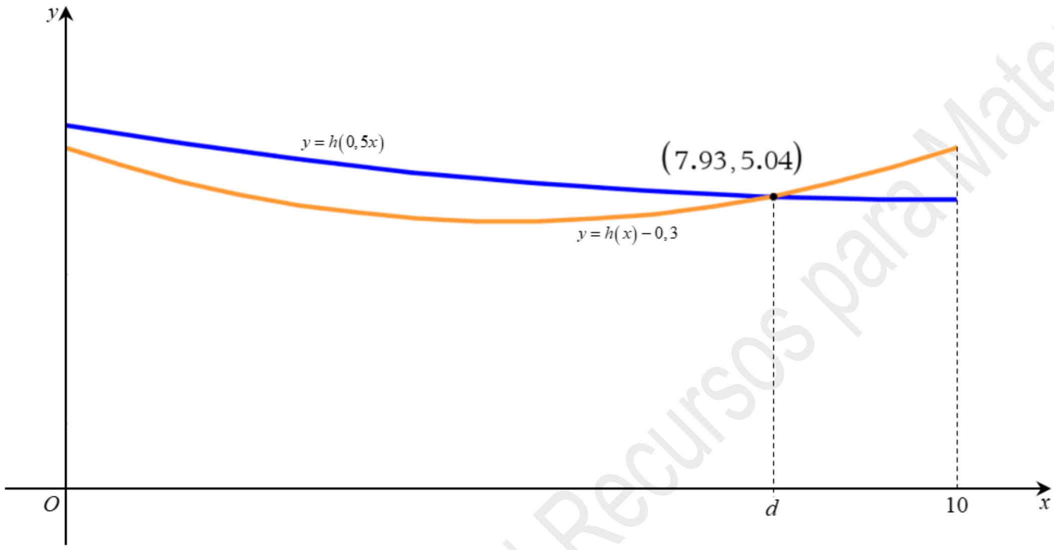
$$\overline{AC}=5^2+5^2 \underset{\overline{AC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AC}=\sqrt{50} \Leftrightarrow \overline{AC}\approx 7{,}1$$

$\overline{AC}$ é a medida pedida e $[ABC]$ é rectângulo em B.

Resposta: A

9.2. Se um ponto se encontra a d metros do poste da esquerda, então a altura é dada por $h(d)$. Se essa distância diminui 50%, isto é, passa a ser $d-0,5d=0,5d$, a sua altura é dada por $h(0,5d)$, que é 30 cm $(0,3\text{ m})$ inferior a $h(d)$, ou seja, $h(0,5d)=h(d)-0,3$

Portanto, pretende-se $x\in[0,10]$ tal que $h(0,5x)=h(x)-0,3$:



Portanto, $h(0,5x)=h(x)-0,3 \Leftrightarrow x=d$, em que $d\approx 7,9$ metros.

10. Tem-se que $\operatorname{Im}(w)=-\operatorname{Re}(w)$, pelo que sendo $a=\operatorname{Re}(w)$, vem que $w=a-ai$, com $a>1$.

Assim, $-i\,w^2=-i(a-ai)^2=-i\left(a^2-2a^2i+a^2i^2\right)=-i\left(\cancel{a^2}-2ai-\cancel{a^2}\right)=2a^2i^2=-2a^2$.

Portanto, w é um número real negativo inferior a -2, dado que $a>1\Leftrightarrow a^2>1\Leftrightarrow -2a^2<-2$.

Assim, dos pontos apresentando o único que pode ser o afixo de $-i\,w^2$ é o C.

Resposta: C

11. Tem-se que:

- $\left|-\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

Sendo α um argumento de $-\sqrt{3}+i$ tem-se que $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{-\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e α pertence ao segundo quadrante, pelo que α pode ser $-\dfrac{\pi}{6}+\pi=\dfrac{5\pi}{6}$. Logo, $-\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Assim, $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}\right)^6=\left(\frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^6=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^6=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\times 6\right)}=\frac{2^6}{\left(\sqrt{2}\right)^6}e^{i(2\pi)}=\frac{64}{8}e^{i(0)}=8e^{i(0)}$

Logo, a soluções da equação $z^3=\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}\right)^6 \Leftrightarrow z^3=8e^{i(0)}$ são as raízes cúbicas de $8e^{i(0)}$, que são dadas por:

$$\sqrt[3]{8}\,e^{i\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{2k\pi}{3}}\text{, com } k\in\{0,1,2\}$$

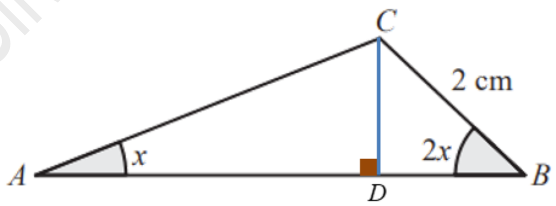
Então:

- se $k=0$, então $z=2e^{i(0)}=2$, cujo afixo não pertence ao terceiro quadrante;
- se $k=1$, então $z=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$, cujo afixo pertence ao segundo quadrante;
- se $k=2$, então $z=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$, cujo afixo pertence ao terceiro quadrante.

∴ O número complexo que é solução da equação e cujo afixo pertence ao terceiro quadrante é:

$$2e^{i\frac{4\pi}{3}}=2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1-\sqrt{3}\,i$$

12. Seja D a projecção ortogonal do vértice C no lado $[AB]$:



Assim, tem-se:

- $\cos(2x)=\frac{\overline{BD}}{2}\Leftrightarrow \overline{BD}=2\cos(2x)$ e $\mathrm{sen}(2x)=\frac{\overline{CD}}{2}\Leftrightarrow \overline{CD}=2\,\mathrm{sen}(2x)$
- $\mathrm{tg}\,x=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}\Leftrightarrow \overline{AD}\times\mathrm{tg}\,x=2\,\mathrm{sen}(2x)\Leftrightarrow \overline{AD}\times\frac{\cancel{\mathrm{sen}\,x}}{\cos x}=2\times 2\cancel{\mathrm{sen}\,x}\cos x \underset{\substack{x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[\\ \Rightarrow \mathrm{sen}\,x\neq 0 \text{ e } \cos x\neq 0}}{\Leftrightarrow} \overline{AD}=4\cos^2 x$

Logo, $AB = \overline{AD} + \overline{BD} = 4\cos^2 x + 2\cos(2x) = 4\cos^2 x + 2\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) =$

$$\underset{\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x}{=} 4\cos^2 x + 2\left(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x\right) = 4\cos^2 x + 4\cos^2 x - 2 = 8\cos^2 x - 2$$

Outra resolução: pela Lei dos senos, tem-se que:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(A\hat{C}B\right)}{\overline{AB}} = \frac{\operatorname{sen} x}{2} \underset{A\hat{C}B = \pi - 3x}{\Leftrightarrow} \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(\pi - 3x)}^{=\operatorname{sen}(3x)}}{\overline{AB}} = \frac{\operatorname{sen} x}{2} \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}(3x) = \overline{AB} \times \operatorname{sen} x \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}(2x + x) = \overline{AB} \times \operatorname{sen} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\operatorname{sen}(2x)\cos x + \operatorname{sen} x \cos(2x)\right) = \overline{AB} \times \operatorname{sen} x$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 2\cancel{\operatorname{sen} x}\cos x \cos x + 2\cancel{\operatorname{sen} x}\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) = \overline{AB} \times \cancel{\operatorname{sen} x}$$

$$\underset{\substack{x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\\ \Rightarrow \operatorname{sen} x \neq 0 \\ \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x}}{\Leftrightarrow} \overline{AB} = 4\cos^2 x + 2\left(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 4\cos^2 x + 4\cos^2 x - 2 \Leftrightarrow \overline{AB} = 8\cos^2 x - 2$$

13. Tem-se que $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(5x - 3\ln(x-1)\right) = 5 \times 1 - 3\ln\left(1^+ - 1\right) = 5 - 3\ln\left(0^+\right) = 5 - 3 \times (-\infty) = +\infty$

Logo, a recta de equação $x = 1$ é assimptota vertical ao gráfico de g. Como g é contínua em $\left]1, +\infty\right[$, o seu gráfico não tem mais assimptotas verticais.

Assimptota oblíqua:

- $$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x - 3\ln(x-1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}} - 3\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)}{x} = 5 - 3\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x} =$$

$$= 5 - 3\underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\textit{Limite notável}} - 3\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x} = 5 + 3 \times 0 - 3 \times \frac{\overbrace{\ln\left(1 - \frac{1}{+\infty}\right)}^{\ln(1+0) = \ln 1 = 0}}{+\infty} = 5 - 3 \times \frac{0}{+\infty} = 5 - 3 \times 0 = 5$$

- $$b = \lim_{x \to +\infty} \left(g(x) - mx\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\cancel{5x} - 3\ln(x-1) - \cancel{5x}\right) = -3\ln(+\infty - 1) = -3\ln(+\infty) = -3 \times (+\infty) = -\infty$$

Logo, o gráfico de g não tem assimptota oblíqua.

14. Tem-se que $D=\{x\in\mathbb{R}:5-2x>0 \ \wedge \ 3-x>0\}=\left\{x\in\mathbb{R}:x<\frac{5}{2} \ \wedge \ x<3\right\}=\left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$.

Neste domínio D, tem-se:

$$\begin{aligned}(e^x-1)\ln(5-2x)+e^x\ln(3-x)=\ln(3-x) &\Leftrightarrow (e^x-1)\ln(5-2x)+e^x\ln(3-x)-\ln(3-x)=0\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (e^x-1)\ln(5-2x)+\ln(3-x)(e^x-1)=0\\
&\Leftrightarrow (e^x-1)\left(\ln(5-2x)+\ln(3-x)\right)=0\\
&\Leftrightarrow e^x-1=0 \ \vee \ \ln(5-2x)+\ln(3-x)=0\\
&\Leftrightarrow e^x=1 \ \vee \ \ln\left((5-2x)(3-x)\right)=0\\
&\Leftrightarrow e^x=e^0 \ \vee \ 15-5x-6x+2x^2=e^0 \ \wedge \ x\in D\\
&\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ 2x^2-11x+14=0 \ \wedge \ x\in D\\
&\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=\frac{11\pm\sqrt{(-11)^2-4\times2\times14}}{2\times2} \ \wedge \ x\in D\\
&\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=2 \ \vee \ x=\frac{7}{2} \ \wedge \ x\in D\end{aligned}$$

Como $0\in D$, $2\in D$ e $\frac{7}{2}\notin D$, o conjunto solução da equação é $\{0,2\}$.

15. Sejam a e b as abcissas dos pontos A e B, respectivamente, com $0<a<b$. Portanto:

$$A(a,f(a)),\text{ ou seja } A\left(a,\frac{k}{a}\right) \quad \text{e} \quad B(b,f(b)),\text{ ou seja } B\left(b,\frac{k}{b}\right)$$

Tem-se que $m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{\frac{k}{a}-\frac{k}{b}}{a-b}=\frac{\frac{kb-ka}{ab}}{a-b}=\frac{-k\cancel{(a-b)}}{\cancel{(a-b)}ab}\underset{a<b\Rightarrow a-b\neq0}{=}-\frac{k}{ab}$

Seja r a recta tangente ao gráfico de f num ponto $C(c,f(c))$, com $c>0$, que é paralela à recta AB.

Assim, $m_r = m_{AB} \Leftrightarrow f'(c) = -\dfrac{k}{ab}$ e portanto, como $f'(x) = \dfrac{k' \times x - k \times x'}{x^2} = \dfrac{0 - k \times 1}{x^2} = -\dfrac{k}{x^2}$, vem que:

$$f'(c) = -\frac{k}{ab} \Leftrightarrow \cancel{-}\frac{\cancel{k}}{c^2} = \cancel{-}\frac{\cancel{k}}{ab} \underset{k \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{c^2} = \frac{1}{ab} \Leftrightarrow c^2 = ab \Leftrightarrow c = \sqrt{ab}$$

Logo, as abcissas dos três pontos são a, $\sqrt{ab}$ e b e como $0 < a < b$, vem:

- $0 < a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b} \underset{\sqrt{a} > 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{a} \times \sqrt{a} < \sqrt{b} \times \sqrt{a} \Leftrightarrow a < \sqrt{ab}$

- $0 < a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b} \underset{\sqrt{b} > 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{a} \times \sqrt{b} < \sqrt{b} \times \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{ab} < b$

Portanto, $a < \sqrt{ab} < b$ e as três abcissas são três termos consecutivos de uma progressão geométrica, dado que:

$$\frac{b}{\sqrt{ab}} = \frac{b}{\sqrt{ab}} \times \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = \frac{\cancel{b}\sqrt{ab}}{a\cancel{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$$

FIM

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 7 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \, \cos b + \operatorname{sen} b \, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \, \cos b - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

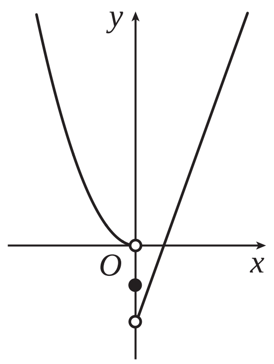
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

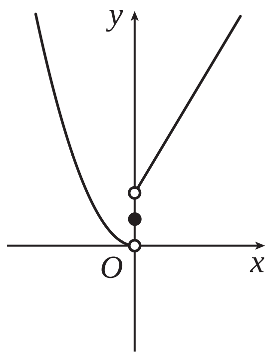
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

*** 1.** Em qual das opções seguintes está representada graficamente, em referencial o.n. Oxy, uma função que tem um mínimo em $x = 0$?

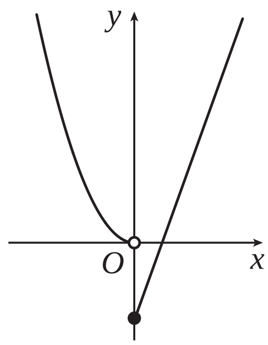
(A)



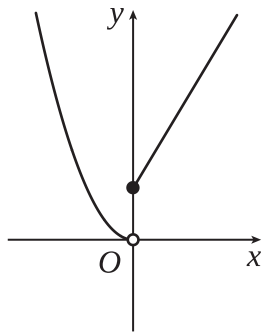
(B)



(C)



(D)



*** 2.** A soma de todos os elementos de uma dada linha do triângulo de Pascal é igual a $16\,384$.

Qual é o valor do quarto elemento da linha seguinte?

(A) 286 **(B)** 455 **(C)** 715 **(D)** 1365

*** 3.** Dos passageiros de um voo de avião do Porto para Faro sabe-se que, antes do embarque:

- 70% nunca tinham viajado de avião;
- $\frac{2}{5}$ já tinham estado em Faro;
- metade dos que já tinham estado em Faro já tinha viajado de avião.

Admita que a ordem de saída dos passageiros deste voo é aleatória.

O primeiro passageiro a sair do avião nunca tinha estado em Faro.

Qual é a probabilidade de esta ter sido a primeira viagem de avião desse passageiro?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4. Um saco contém 12 cartões com a forma de retângulos geometricamente iguais: 3 azuis, 2 brancos, 3 pretos e 4 vermelhos.

Os 12 cartões vão ser retirados, sucessivamente e ao acaso, do saco e dispostos sobre uma mesa, alinhados pela ordem em que são retirados.

Determine a probabilidade de os cartões azuis ficarem todos juntos.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5. Na Figura 1, está representado o cubo $[ABCDEFGH]$.

Fixado um determinado referencial o.n. $Oxyz$, tem-se:

$A(-2,5,0)$, $B(1,-1,2)$ e $C(3,2,8)$.

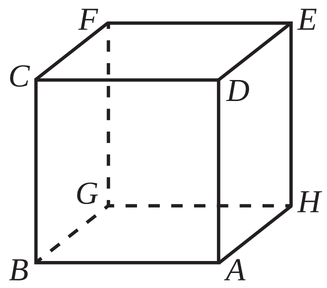


Figura 1

*** 5.1.** Qual é o valor de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HE}$?

(A) -49 **(B)** 0

(C) 7 **(D)** 49

*** 5.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Sabe-se que o vértice E do cubo pertence à reta definida pela equação

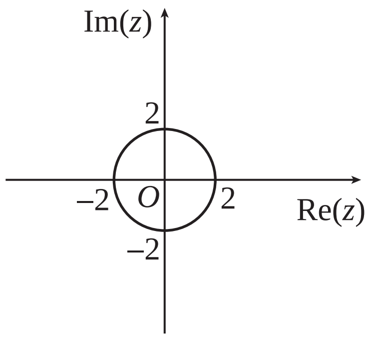
$$(x, y, z) = (0, 0, 3) + k(1, -1, -1), \quad k \in \mathbb{R}$$

Determine as coordenadas do vértice E .

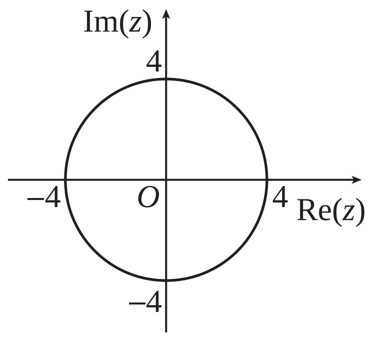
*** 6.** Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $z \times \overline{z} = 4$.

Em qual das opções seguintes está representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

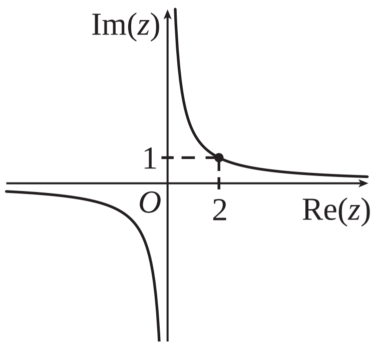
(A)



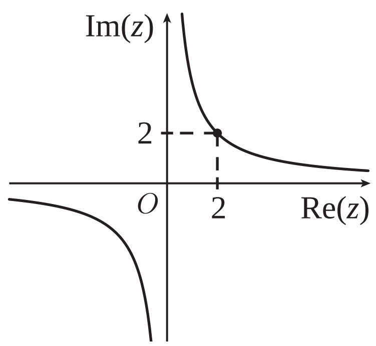
(B)



(C)



(D)



7. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número complexo $z = \frac{4}{1-i} + 4i^{18}$.

O número complexo z é uma das raízes cúbicas de um número complexo w .

Determine as restantes raízes cúbicas de w e apresente-as na forma trigonométrica.

*** 8.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \ln\sqrt{e+x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Averigue se a função f é contínua em $x = 0$.

9. Seja g uma função derivável, de domínio $]-\infty, \pi[\setminus \{0\}$, cuja derivada, g' , é dada por

$$g'(x) = \begin{cases} 3e^{2x} - 7e^{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ x + 2\cos^2 x & \text{se} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Resolva os itens **9.1.** e **9.2.** sem recorrer à calculadora.

*** 9.1.** Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $]0, \pi[$.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g .

*** 9.2.** Considere, em referencial o.n. Oxy , o gráfico da função g .

Determine, no intervalo $]-\infty, 0[$, a abcissa do ponto do gráfico da função g em que a reta tangente ao gráfico da função é paralela à reta de equação $y = -2x$.

10. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja h a função, de domínio $]0, +\infty[$, definida por $h(x) = \dfrac{e^x + \ln x}{e^x - 1}$.

Estude a função h quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

11. Um tanque, que inicialmente tinha um certo volume de água salgada, dispõe de duas torneiras, uma de enchimento e outra de vazamento. As duas torneiras são abertas, em simultâneo, sendo vertida água do mar para o tanque até este estar cheio.

Admita que a massa de sal, m , em quilogramas, no tanque, t minutos após a abertura das torneiras, até o tanque estar cheio, é dada por

$$m(t) = \frac{30(1+0{,}006t)^3 - 29}{(1+0{,}006t)^2} \quad , \quad \text{com } t \in [0, 250]$$

*** 11.1.** Qual é, com aproximação às unidades, a percentagem de aumento da massa de sal no tanque, no primeiro minuto após a abertura das torneiras?

(A) 152% **(B)** 52% **(C)** 250% **(D)** 25%

*** 11.2.** Existe um instante a partir do qual, passada meia hora, a massa de sal no tanque triplica.

Determine, recorrendo à calculadora, esse instante, sabendo-se que existe e é único.

Apresente o resultado em minutos e segundos (com os segundos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas.

12. Seja (u_n) a sucessão definida por

$$u_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{se} \quad n \leq 3 \\ \dfrac{4n-1}{n+3} & \text{se} \quad n > 3 \end{cases}$$

Mostre que a sucessão (u_n) é limitada.

13. Seja a um número real.

Considere a função polinomial definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + a^2x + \sqrt{2}$.

Mostre que, para qualquer valor de a, a função não tem extremos.

14. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Na Figura 2, estão representadas, em referencial o.n. Oxy , as retas r e s .

A reta r é definida pela equação $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1$.

A reta s passa pela origem do referencial e tem inclinação α .

O ponto A é o ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox .

O ponto B é o ponto de intersecção das duas retas.

Sabe-se que $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Determine a área do triângulo $[AOB]$.

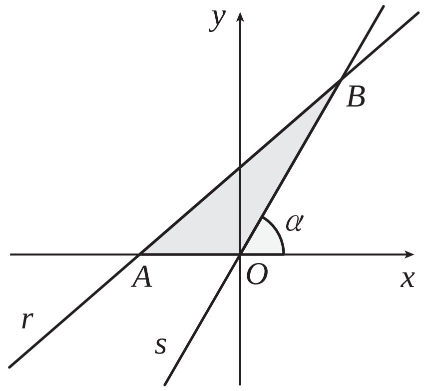


Figura 2

*** 15.** Considere, num referencial o.n. Oxy, o gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, e uma reta r, não vertical, que passa no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

Sejam A e B os pontos de intersecção da reta r com o gráfico da função f.

Mostre que o ângulo convexo AOB é um ângulo reto.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**11.1.**	**11.2.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	12	14	12	14	12	14	14	14	12	14	14	**158**

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**4.**	**7.**	**10.**	**12.**	**13.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos						**42**
TOTAL							**200**

Prova 635

2.ª Fase

EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA A

2.ª FASE | 2022 | PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Recursos Para Matemática

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA A

2.ª FASE | 2022

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. A opção correcta é a **C**, dado que existe um $\delta > 0$ tal que $f(0) \leq f(x)$ para todo o $x \in]-\delta, \delta[\cap D_f$.

Resposta: C

2. A soma de todos os elementos de uma certa linha n do triângulo de Pascal é dada por 2^n, pelo que:

$$2^n = 16384 \underset{16384=2^{24}}{\Leftrightarrow} 2^n = 2^{14} \Leftrightarrow n = 14$$

Logo, a linha em questão é a 14, pelo que o quarto elemento da linha seguinte é ${}^{15}C_3 = 455$.

Resposta: B

3. Sejam A e B os acontecimentos:

A: «passageiro que nunca tinha viajado de avião»

B: «passageiro que já tinha estado em Faro»

Do enunciado sabe-se que:

- $P(A) = 70\%$, ou seja, $P(A) = \frac{7}{10} \Leftrightarrow P(\bar{A}) = \frac{3}{10}$
- $P(B) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(\bar{B}) = \frac{3}{5}$
- $P(\bar{A}|B) = \frac{1}{2}$

Pretende-se $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\overbrace{P(A \cap \bar{B})}^{=P(A)-P(A\cap B)}}{\frac{3}{5}} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{7}{10} - P(A \cap B)}{\frac{3}{5}}$.

Tem-se que $P(\bar{A}|B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \underset{P(B)=\frac{2}{5}}{\Leftrightarrow} P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{5} \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow$

$$\underset{P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)}{\Leftrightarrow} P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} \underset{P(B)=\frac{2}{5}}{\Leftrightarrow} \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

Logo, $P(A|\bar{B}) = \frac{\frac{7}{10} - \frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{6}$.

Outra resolução (utilizando uma tabela):

Tem-se que:

- $P(A)=70\%$, ou seja, $P(A)=\frac{7}{10} \Leftrightarrow P(\overline{A})=\frac{3}{10}$

- $P(B)=\frac{2}{5} \Leftrightarrow P(\overline{B})=\frac{3}{5}$

- $P(\overline{A}|B)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2} \underset{P(B)=\frac{2}{5}}{\Leftrightarrow} P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{5} \Leftrightarrow P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{5}$

Pretende-se $P(A|\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}$

Preenchendo uma tabela:

	A	$\overline{A}$	p.m.
B	$\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\overline{B}$	$\frac{7}{10}-\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$
p.m.	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

Logo, $P(A|\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{6}$.

4. O número de casos possíveis é ${}^{12}C_3\times{}^{9}C_2\times{}^{7}C_3\times{}^{4}C_4$ (escolhem-se três das doze posições para os cartões azuis, ${}^{12}C_3$; das restantes nove posições, escolhem-se duas para os cartões brancos, ${}^{9}C_2$; das restantes sete posições, escolhem-se três para os cartões pretos, ${}^{7}C_3$; as quatro posições que sobram ficam para os cartões vermelhos, ${}^{4}C_4$)

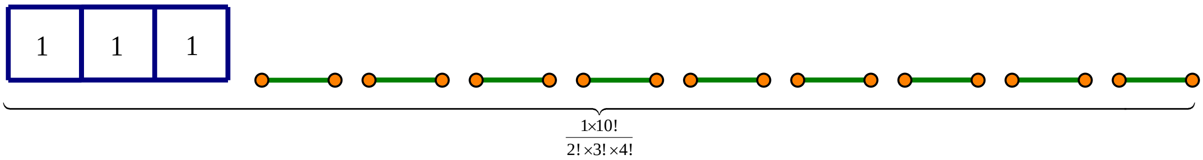
O número de casos favoráveis é $10\times{}^{9}C_2\times{}^{7}C_3\times{}^{4}C_4$ (os cartões azuis podem ser colocados de dez maneiras distintas: os três da posição 1 à 3, ou da 2 à 4, ou da 3 à 5, ou da 4 à 6, ou da 7 à 9, ou da 8 à 10, ou da 9 à 11, ou da 10 à 12; em seguida, das restantes nove posições, escolhem-se duas para os cartões brancos, ${}^{9}C_2$; das restantes sete posições, escolhem-se três para os cartões pretos, ${}^{7}C_3$; as quatro posições que sobram ficam para os cartões vermelhos, ${}^{4}C_4$).

Portanto, a probabilidade pedida é $\dfrac{10\times {}^{9}C_2 \cancel{\times {}^{7}C_3 \times {}^{4}C_4}}{{}^{12}C_3\times {}^{9}C_2 \cancel{\times {}^{7}C_3\times {}^{4}C_4}}=\dfrac{10}{220}=\dfrac{1}{22}$.

Outra resolução:

O número de casos possíveis é $\dfrac{12!}{3!\times 2!\times 3!\times 4!}$ (permutam-se os doze cartões pelas doze posições, em que há três cartões azuis iguais, dois cartões brancos iguais, três cartões pretos iguais e quatro cartões vermelhos iguais)

Para o número de casos favoráveis, agrupamos num bloco os três cartões azuis. Assim, o bloco de cartões azuis e os restantes nove cartões perfazem dez cartões a permutar (o bloco de três cartões azuis conta como apenas um cartão), pelo que o número de maneiras de dispor os doze cartões de modo que os azuis fiquem todos juntos é $\dfrac{10!}{2!\times 3!\times 4!}$:



Portanto, a probabilidade pedida é $\dfrac{\dfrac{10!}{2!\cancel{\times 3!\times 4!}}}{\dfrac{12!}{3!\times 2!\cancel{\times 3!\times 4!}}}=\dfrac{\cancel{10!}\times 3!}{12\times 11\times \cancel{10!}}=\dfrac{\cancel{6}}{2\times \cancel{6}\times 11}=\dfrac{1}{22}$.

Outra resolução:

Considerando os cartões, e não as disposições diferentes, o número de casos possíveis é $12!$, doze cartões a permutarem em doze posições.

Agrupando num bloco os três cartões azuis, o bloco de cartões azuis e os restantes nove cartões perfazem dez cartões a permutar, pelo que o número de casos favoráveis é $10!\times 3!$ (o bloco de três cartões azuis e o restantes nove cartões permutam entre si de $10!$ maneiras distintas e os três cartões azuis permutam entre si, dentro no bloco, de $3!$ maneiras distintas).

Portanto, a probabilidade pedida é $\dfrac{3!\times 10|}{12!}=\dfrac{6\times \cancel{10!}}{12\times 11\times \cancel{10!}}=\dfrac{\cancel{6}}{2\times \cancel{6}\times 11}=\dfrac{1}{22}$.

5.

5.1. Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{HE}$ são perpendiculares, pelo que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HE} = 0$.

Resposta: B

5.2. O ponto E pertence à recta definida por $(x, y, z) = (0,0,3) + k(1,-1,-1)$, $k \in \mathbb{R}$, pelo que as suas coordenadas são da forma $E(k,-k,3-k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, o ponto pertence ao plano ADE, que contém o ponto $A(-2,5,0)$ e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{AB}$, ou seja, o vector $\overrightarrow{AB}$ é um vector normal a ADE.

Assim, como $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,-1,2) - (-2,5,0) = (3,-6,2)$, pelo que $ADE: 3x - 6y + 2z + d = 0$.

Como $A(-2,5,0)$ pertence ao plano ADE, substituindo, vem que:

$$3 \times (-2) - 6 \times 5 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow -6 - 30 + d = 0 \Leftrightarrow d = 36$$

Logo, $ADE: 3x - 6y + 2z + 36 = 0$.

Como $E(k,-k,3-k)$ pertence ao plano ADE, substituindo, vem que:

$$3k - 6 \times (-k) + 2 \times (3-k) + 36 = 0 \Leftrightarrow 3k + 6k + 6 - 2k + 36 = 0 \Leftrightarrow 7k = -42 \Leftrightarrow k = -6$$

Portanto, $E(-6,-(-6),3-(-6))$, ou seja, $E(-6,6,9)$.

6. Seja $z = x + yi$.

Tem-se que $z \times \overline{z} = 4 \Leftrightarrow (x + yi) \times (x - yi) = 4 \Leftrightarrow x^2 - (yi)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - y^2 i^2 = 4 \underset{i^2 = -1}{\Leftrightarrow} x^2 + y^2 = 4$, que define a circunferência de raio $\sqrt{4} = 2$ centrada na origem.

Resposta: A

7. Tem-se que $z=\frac{4}{1-i}+4i^{18} \underset{i^{18}=i^{16}\times i^2=-1}{=} \frac{4}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}-4=\frac{4+4i}{1^2-i^2}=\frac{4+4i}{2}=2-2i-4=-2+2i$

Escrevendo z na forma trigonométrica, vem que:

- $|z|=|-2+2i|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

- Sendo α um argumento de z, vem que $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{-1}=-1$ e $\alpha\in 2.^{\text{o}}Q$, pelo que α pode ser $-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$.

Logo, $z=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Como z é uma das raízes cúbicas de um certo complexo w, vem que restantes raízes cúbicas de w são:

- $z=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}2\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$

- $z=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+2\times\frac{2\pi}{3}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{12}}=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{25\pi}{12}-2\pi\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

8. A função f é contínua em $x=0$ se $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$. Assim:

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\sqrt{e+x}\right)=\ln\left(\sqrt{e+0}\right)=\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}$

- $f(0)=\ln\left(\sqrt{e+0}\right)=\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1-\cos x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\overbrace{(1-\cos x)(1+\cos x)}^{=1^2-\cos^2 x=\operatorname{sen}^2 x}}{x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\times\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}=$

$$=1\times\frac{\operatorname{sen}(0)}{1+\cos(0)}=1\times\frac{0}{1+1}=1\times0=0$$

Logo, f é não contínua em $x=0$.

9.

9.1. Para $x \in \left]0, \pi\right[$ tem-se que $g'(x) = x + 2\cos^2 x$.

Tem-se que:

- $g''(x) = \left(x + 2\cos^2 x\right)' = 1 + 2 \times 2\cos x \times \underbrace{(\cos x)'}_{=-\operatorname{sen} x} = 1 - 2 \times \underbrace{2\operatorname{sen} x \cos x}_{=\operatorname{sen}(2x)} = 1 - 2\operatorname{sen}(2x)$

- $g''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\operatorname{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Assim:

- $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} \ \vee \ x = \frac{5\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12} \in \left]0, \pi\right[$ e $\frac{5\pi}{12} \in \left]0, \pi\right[$

- $k = 1 \rightarrow x = \frac{13\pi}{12} \ \vee \ x = \frac{17\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12} \notin \left]0, \pi\right[$ e $\frac{17\pi}{12} \notin \left]0, \pi\right[$

- $k = -1 \rightarrow x = -\frac{11\pi}{12} \ \vee \ x = -\frac{7\pi}{12}$; $-\frac{11\pi}{12} \notin \left]0, \pi\right[$ e $-\frac{7\pi}{12} \notin \left]0, \pi\right[$

Logo, os zeros de g'' pertencentes ao intervalo $\left]0, \pi\right[$ são $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{5\pi}{12}$.

Elaborando uma tabela de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g , vem:

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π
$g''(x)$	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$	n.d.
Gráfico de g	n.d.	$\cup$	p.i.	$\cap$	p.i.	$\cup$	n.d.

No intervalo $\left]0, \pi\right[$, o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{\pi}{12}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{12}, \pi\right[$, e tem ponto de inflexão em $x = \frac{\pi}{12}$ e em $x = \frac{5\pi}{12}$.

9.2. Para $x \in]-\infty, 0[$ tem-se que $g'(x) = 3e^{2x} - 7e^{x}$.

Pretende-se determinar a abcissa do ponto do gráfico de g em que a recta tangente é paralela à recta de equação $y = -2x$. Assim, se a recta tangente é paralela à recta de equação $y = -2x$, então as duas rectas têm o mesmo declive, ou seja, têm declive -2, pelo que pretende-se determinar $x \in]-\infty, 0[$ tal que $g'(x) = -2$.

Assim, $g'(x) = -2 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 7e^{x} = -2 \Leftrightarrow 3\left(e^{x}\right)^2 - 7e^{x} + 2 = 0$

Fazendo $y = e^{x}$, a equação fica:

$$3y^2 - 7y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{7 \pm 5}{6}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \ \vee \ y = 2$$

$$\underset{y=e^x}{\Leftrightarrow} e^{x} = \frac{1}{3} \ \vee \ e^{x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \underbrace{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}_{=\ln 1 - \ln 3 = -\ln 3} \ \vee \ x = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln 3 \ \vee \ x = \ln 2$$

Como $-\ln 3 < 0$ e $\ln 2 > 0$, vem que a abcissa do ponto do gráfico de g cuja recta tangente é paralela à recta de equação $y = -2x$ é $-\ln 3$.

10. Assimptotas verticais:

Tem-se que, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} = \frac{e^0 + \ln\left(0^+\right)}{e^{0^+} - 1} = \frac{1 + (-\infty)}{1^+ - 1} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

Logo, a recta de equação $x = 0$ é assimptota vertical ao gráfico de h. Como h é contínua em $]0, +\infty[$, o seu gráfico não tem mais assimptotas verticais.

Assimptota horizontal:

Tem-se que, $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{\ln x}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{e^x}}{1 - \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x}} = \frac{1 + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{e^x}{x}}}{1 - \frac{1}{e^{+\infty}}} =$

$$= \frac{1 + \frac{\overbrace{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}}^{\text{Limite notável}}}{\underbrace{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Limite notável}}}}{1 - \frac{1}{+\infty}} = \frac{1 + \frac{0}{+\infty}}{1 - 0} = \frac{1 + 0}{1} = 1$$

Logo, a recta de equação $y = 1$ é assimptota horizontal ao gráfico de h, quando $x \to +\infty$.

11.

11.1. No instante inicial a massa de sal no tanque é igual a $m(0)=\frac{30(1+0{,}006\times 0)^3-29}{(1+0{,}006\times 0)^2}=\frac{30\times 1^3-29}{1^2}=1$.

No primeiro minuto a massa de sal no tanque é igual a $m(1)=\frac{30(1+0{,}006\times 1)^3-29}{(1+0{,}006\times 1)^2}\approx 1{,}5249$

Portanto, a percentagem de aumento da massa de sal no tanque é:

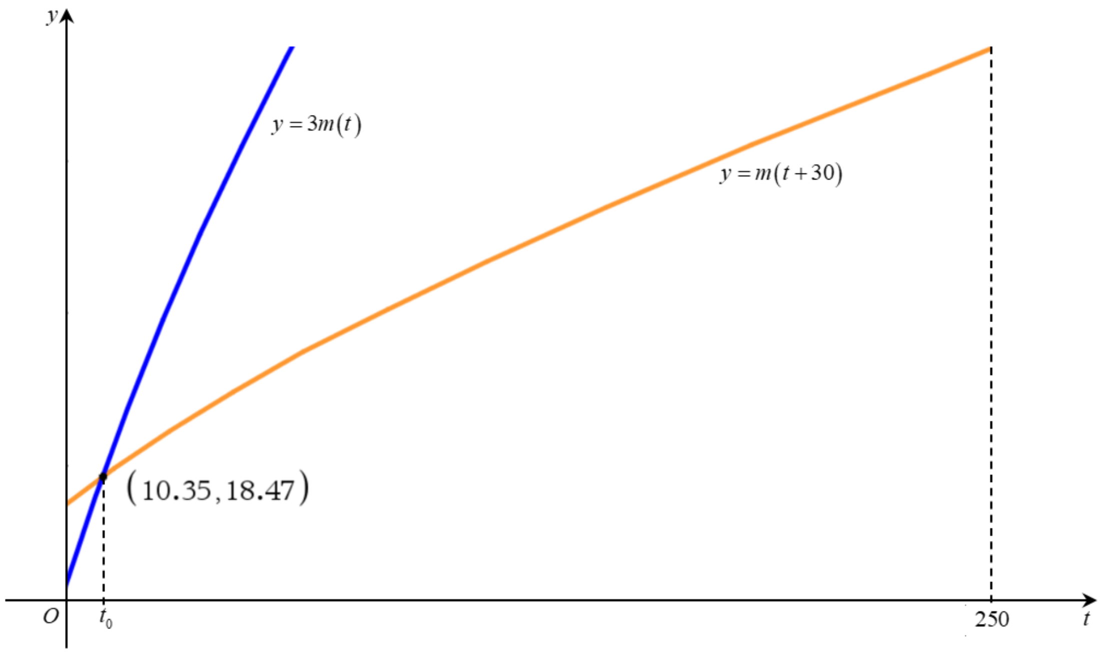
$$\frac{m(1)-m(0)}{m(0)}\times 100\approx\frac{1{,}5249-1}{1}\times 100=52{,}49$$, ou seja, aproximadamente 52%

Resposta: B

11.2. Num certo instante t a massa de sal no tanque é dada por $m(t)$. Passada meia hora, ou seja, 30 minutos, a massa de sal no tanque é dada por $m(t+30)$ e esta massa é o triplo da que existia no instante t, ou seja:

$$m(t+30)=3m(t)$$

Portanto, pretende-se $x\in[0,250]$ tal que $m(t+30)=3m(t)$:



Portanto, $m(t+30)=3m(t)\Leftrightarrow t=t_0$, em que $t_0\approx 10{,}35$, que corresponde a 10 minutos e 21 segundos, dado que $0{,}35\times 60=21$.

12. Tem-se que $\lim(u_n)=\lim\frac{4n-1}{n+3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\frac{4\cancel{n}}{\cancel{n}}=4$, pelo que (u_n) é convergente.

Como toda a sucessão convergente é limitada, vem que (u_n) é limitada.

Outra resolução:

Tem-se que $u_1=(-1)^1=-1$, $u_2=(-1)^2=1$ e $u_3=(-1)^3=-1$

Para todo o $n\geq 4$, tem-se que:

$$u_n=\frac{4n-1}{n+3}=\frac{4n+12-12-1}{n+3}=\frac{4n+12-13}{n+3}=\frac{4(n+3)-13}{n+3}=\frac{4\cancel{(n+3)}}{\cancel{n+3}}-\frac{13}{n+3}=4-\frac{13}{n+3}$$

Assim, para todo o $n\geq 4$, tem-se que, $0<\frac{13}{n+3}\leq\frac{13}{7}$, pelo que:

$$-\frac{13}{7}\leq-\frac{13}{n+3}<0\Leftrightarrow-\frac{13}{7}+4\leq 4-\frac{13}{n+3}<0+4\Leftrightarrow\frac{15}{7}\leq 4-\frac{13}{n+3}<4$$

Logo, para todo o $n\in\mathbb{N}$, tem-se que $-1\leq u_n<4$, pelo que (u_n) é limitada.

13. Tem-se que $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+ax^2+a^2x+\sqrt{2}\right)'=\frac{1}{\cancel{3}}\times\cancel{3}x^2+2ax+a^2+0=x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

Assim, como $(x+a)^2\geq 0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$, vem que $f'(x)\geq 0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$, pelo que f é crescente em $\mathbb{R}$ e portanto não tem extremos relativos.

14. Tem-se que:

▪ fazendo $y=0$ na equação de r, vem $\frac{\sqrt{3}}{2}x+1=0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$, pelo que $A\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},0\right)$ e portanto:

$$\overline{AO}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

▪ $\cos\alpha=\frac{1}{2}\underset{\alpha\in[0,\pi[}{\Leftrightarrow}\alpha=\frac{\pi}{3}$, pelo que o declive da recta s é igual a $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

Assim, como a recta s passa na origem, vem que $s: y=\sqrt{3}x$

B é o ponto de intersecção das rectas r e s e a sua ordenada corresponde à altura do triângulo $[AOB]$ em relação ao lado $[AO]$. Assim:

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}x = \sqrt{3}x + 2 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x = 2 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Portanto, a ordenada do ponto B é 2 e a área do triângulo $[AOB]$ é igual a $\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \times \cancel{2}}{\cancel{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

15. Sejam a e b as coordenadas do pontos A e B, respectivamente, ou seja, $A(a, a^2)$ e $B(b, b^2)$

Assim, o declive da recta r é dada por $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{g(a) - g(b)}{a - b} = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{\cancel{(a-b)}(a+b)}{\cancel{a-b}} \underset{a-b \neq 0}{=} a + b$

Como o ponto de coordenadas $(0,1)$ pertence à recta r, vem que $r: y = (a+b)x + 1$

Como o ponto de coordenadas $A(a, a^2)$ pertence à recta r, vem que:

$$a^2 = (a+b)a + 1 \Leftrightarrow \cancel{a^2} = \cancel{a^2} + ab + 1 \Leftrightarrow ab = -1$$

(Da mesma forma, o ponto de coordenadas $B(b, b^2)$ pertence à recta r, pelo que: $b^2 = (a+b)b + 1 \Leftrightarrow \cancel{b^2} = ab + \cancel{b^2} + 1 \Leftrightarrow ab = -1$)

O ângulo convexo AOB é recto se $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. Como $\overrightarrow{OA} = A - O = (a, a^2)$ e $\overrightarrow{OB} = B - O = (b, b^2)$, vem que:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (a, a^2) \cdot (b, b^2) = ab + a^2b^2 = ab + (ab)^2 = -1 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$$

$\therefore$ O ângulo convexo AOB é recto

FIM

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Critérios de Classificação 13 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **12 pontos**

Opção **(C)**

2. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

3. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Designemos por A o acontecimento «o passageiro já tinha viajado de avião» e por F o acontecimento «o passageiro já tinha estado em Faro».

1.º Processo

Escrever $P(\overline{A}) = 0{,}7$ .... 1 ponto

Escrever $P(F) = \frac{2}{5}$ .... 1 ponto

Escrever $P(A \mid F) = \frac{1}{2}$ .... 1 ponto

Identificar o valor pedido com $P(\overline{A} \mid \overline{F})$ .... 1 ponto

Obter $P(A \cap F)$ $\left(\frac{1}{5}\right)$ .... 2 pontos

Escrever $P(\overline{A} \cap \overline{F}) = 1 - P(A \cup F)$ .... 2 pontos

Obter $P(A \cup F)$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 2 pontos

Obter $P(\overline{A} \cap \overline{F})$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Obter $P(\overline{F})$ $\left(\frac{3}{5}\right)$ .... 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\frac{5}{6}\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam: A e $\overline{A}$; F e $\overline{F}$ .. 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{A})$ $(0{,}7)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(F)$ $\left(\frac{2}{5}\right)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{F})$ $\left(\frac{3}{5}\right)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(A \cap F)$ $\left(\frac{1}{5}\right)$ .... 3 pontos

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{A} \cap F)$ $\left(\frac{1}{5}\right)$ .... 2 pontos

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{A} \cap \overline{F})$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 2 pontos

Identificar o valor pedido com $P(\overline{A} \mid \overline{F})$ .... 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\frac{5}{6}\right)$ .... 2 pontos

4. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos possíveis $\left({}^{12}C_3 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3\right)$ (**ver nota 1**) .... 5 pontos

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos favoráveis $\left(10 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3\right)$ (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Aplicar a regra de Laplace (**ver nota 3**) .... 2 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{1}{22}\right)$ (**ver notas 3 e 4**) .... 2 pontos

2.º Processo

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos possíveis $\left({}^{12}A_3 \times {}^{9}A_2 \times {}^{7}A_3 \times 4!\right)$ (**ver nota 1**) .... 5 pontos

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos favoráveis $\left(10 \times 3! \times {}^{9}A_2 \times {}^{7}A_3 \times 4!\right)$ (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Aplicar a regra de Laplace (**ver nota 3**) .... 2 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{1}{22}\right)$ (**ver notas 3 e 4**) .... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{12}C_3 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3$ (1.º processo) ou a ${}^{12}A_3 \times {}^{9}A_2 \times {}^{7}A_3 \times 4!$ (2.º processo), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada não for equivalente a $10 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3$ (1.º processo) ou a $10 \times 3! \times {}^{9}A_2 \times {}^{7}A_3 \times 4!$ (2.º processo), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
4. Se o valor obtido não pertencer ao intervalo $[0, 1]$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

5.1. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

5.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que $\overrightarrow{AB}$ é um vetor normal ao plano ADE .... 1 ponto

Determinar as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ .... 1 ponto

Obter uma equação cartesiana do plano ADE .... 5 pontos

Escrever $3x - 6y + 2z + d = 0$ .... 2 pontos

Escrever $3 \times (-2) - 6 \times 5 + 2 \times 0 + d = 0$ .... 2 pontos

Obter o valor de d .... 1 ponto

Identificar as coordenadas do vértice E com $(k, -k, 3-k)$ .... 3 pontos

Escrever $3 \times k - 6 \times (-k) + 2 \times (3-k) + 36 = 0$ .... 2 pontos

Obter o valor de k .... 1 ponto

Escrever as coordenadas do vértice E $((-6, 6, 9))$ .... 1 ponto

2.º Processo

Determinar as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ .... 1 ponto

Identificar as coordenadas do vértice E com $(k, -k, 3-k)$ .... 3 pontos

Determinar as coordenadas de $\overrightarrow{AE}$ em função de k .... 2 pontos

Escrever $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ .... 4 pontos

Obter o valor de k .... 3 pontos

Escrever as coordenadas do vértice E $((-6, 6, 9))$ .... 1 ponto

6. .... **12 pontos**

Opção **(A)**

7. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar i^{18} com -1 .... 2 pontos

Substituir $\frac{4}{1-i}$ por $\frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)}$ .... 2 pontos

Obter $z=-2+2i$ .... 2 pontos

Obter z na forma trigonométrica $\left(2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)$ .... 2 pontos

Obter $|z|$ .... 1 ponto

Obter um argumento de z .... 1 ponto

Reconhecer que as restantes raízes cúbicas de w são

$2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\ k\in\{1,2\}$ .... 4 pontos

Obter os números pedidos $\left(2\sqrt{2}\,e^{i\frac{17\pi}{12}}\right.$ e $\left.2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Identificar i^{18} com -1 .... 2 pontos

Substituir $\frac{4}{1-i}$ por $\frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)}$ .... 2 pontos

Obter $z=-2+2i$ .... 2 pontos

Obter z na forma trigonométrica $\left(2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)$ .... 2 pontos

Obter $|z|$ .... 1 ponto

Obter um argumento de z .... 1 ponto

Reconhecer que $w=z^3$ .... 1 ponto

Determinar w .... 1 ponto

Reconhecer que as raízes cúbicas de w são

$2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\ k\in\{0,1,2\}$ .... 2 pontos

Obter os números pedidos $\left(2\sqrt{2}\,e^{i\frac{17\pi}{12}}\right.$ e $\left.2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}\right)$ .... 2 pontos

8. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ .... 9 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos x}{x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$ ...... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\times\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$ ... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ .... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ou $f(0)$ .... 4 pontos

Concluir que a função f não é contínua em $x=0$ .... 1 ponto

9.1. .... **14 pontos**

Determinar $g''(x)$ em $]0,\pi[$ (**ver nota 1**) .... 3 pontos

Escrever $g''(x)=0$ .... 1 ponto

Determinar os zeros de $g''(x)$ em $]0,\pi[$ .... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g'' e de sentido das concavidades do gráfico de g em $]0,\pi[$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Apresentar os intervalos em que a concavidade do gráfico da função é voltada para cima e em que é voltada para baixo, em $]0,\pi[$ (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Indicar as abcissas dos pontos de inflexão $\left(\dfrac{\pi}{12}\right.$ e $\left.\dfrac{5\pi}{12}\right)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. Se for referido que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]0,\dfrac{\pi}{12}\right[$ e $\left]\dfrac{5\pi}{12},\pi\right[$, em vez de $\left]0,\dfrac{\pi}{12}\right]$ e $\left[\dfrac{5\pi}{12},\pi\right[$, e voltada para baixo em $\left]\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right[$, em vez de $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

9.2. .... **14 pontos**

Reconhecer que o declive da reta tangente é igual a -2 .... 2 pontos

Escrever $g'(x)=-2$ .... 2 pontos

Escrever $3e^{2x}-7e^{x}=-2$ .... 1 ponto

Escrever $3e^{2x}-7e^{x}+2=0$ .... 1 ponto

Obter $e^{x}=\dfrac{7\pm\sqrt{25}}{6}$ .... 3 pontos

Obter $e^{x}=\dfrac{1}{3}\ \vee\ e^{x}=2$ .... 1 ponto

Obter $x=\ln\dfrac{1}{3}\ \vee\ x=\ln 2$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $\left(\ln\dfrac{1}{3}\ \text{ ou }\ -\ln 3\right)$ .... 2 pontos

10. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^{+}} h(x)$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{e^{x}+\ln x}{e^{x}-1}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 0^{+}} h(x)=-\infty$ .... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico da função h .... 1 ponto

Justificar a inexistência de outras assíntotas verticais ao gráfico da função h ... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$ .... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{x}+\ln x}{e^{x}-1}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1+\dfrac{\ln x}{e^{x}}}{1-\dfrac{1}{e^{x}}}$ .... 2 pontos

Escrever $\dfrac{1+\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{e^{x}}}{1-\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{e^{x}}}$ .... 1 ponto

Escrever $\dfrac{1+\dfrac{\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}}{\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{x}}{x}}}{1-0}$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=1$ .... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico da função h .... 1 ponto

11.1. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

11.2. .... **14 pontos**

Apresentar a equação $m(t+30)=3m(t)$
(ou uma equação equivalente) (**ver notas 1 e 2**) .... 6 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 3**) .... 4 pontos

Apresentar a abcissa do ponto relevante .... 2 pontos

Apresentar o valor de t na forma pedida $(10 \text{ min } 21 \text{ s})$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que correspondem à resolução da equação que traduz corretamente o problema.
3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

12. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Obter $\dfrac{4n-1}{n+3}=4-\dfrac{13}{n+3}$ .... 2 pontos

Obter $0<\dfrac{13}{n+3}\leq\dfrac{13}{7}$, para $n\geq 4$ .... 2 pontos

Obter $\dfrac{15}{7}\leq 4-\dfrac{13}{n+3}<4$, para $n\geq 4$ .... 5 pontos

Obter $-1\leq u_n<4$, para qualquer $n\in\mathbb{N}$ .... 4 pontos

Concluir que (u_n) é limitada .... 1 ponto

2.º Processo

Mostrar que (u_n) é minorada .... 6 pontos

Indicar um minorante, m .... 1 ponto

Justificar que $u_n\geq m$, para qualquer $n\in\mathbb{N}$ .... 5 pontos

Mostrar que (u_n) é majorada .... 7 pontos

Indicar um majorante, M .... 1 ponto

Justificar que $u_n\leq M$, para qualquer $n\in\mathbb{N}$ .... 6 pontos

Concluir que (u_n) é limitada .... 1 ponto

3.º Processo

Referir que uma sucessão convergente é limitada .... 6 pontos

Calcular $\lim u_n$ .... 6 pontos

Escrever $\lim u_n = \lim \frac{4n-1}{n+3}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim \frac{4n-1}{n+3} = \lim \frac{4-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter $\lim u_n = 4$ .... 2 pontos

Referir que (u_n) é convergente .... 1 ponto

Concluir que (u_n) é limitada .... 1 ponto

13. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Escrever $f'(x)=0$ .... 1 ponto

Determinar o zero de f' .... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f (ou equivalente) .. 4 pontos

Referir que f é crescente .... 1 ponto

Concluir que f não tem extremos .... 2 pontos

2.º Processo

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Escrever $f'(x)=0$ .... 1 ponto

Determinar o binómio discriminante da equação $f'(x)=0$ .... 2 pontos

Referir que f' tem apenas um zero .... 1 ponto

Reconhecer que o gráfico de f' é uma parábola com a concavidade voltada para cima .... 1 ponto

Referir que $f'(x) \geq 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ .... 1 ponto

Concluir que f é crescente .... 3 pontos

Concluir que f não tem extremos .... 2 pontos

3.º Processo

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Obter $f'(x) = (x+a)^2$ .... 3 pontos

Referir que $f'(x) \geq 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ .... 3 pontos

Concluir que f é crescente .... 3 pontos

Concluir que f não tem extremos .... 2 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

14. .... **14 pontos**

Obter $\overline{OA}$ .... 2 pontos

Obter $\tan\alpha$ .... 2 pontos

Determinar a ordenada do ponto B .... 7 pontos

Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever uma equação da reta s .... 3 pontos

Obter a abcissa do ponto B .... 3 pontos

Obter a ordenada do ponto B .... 1 ponto

2.º Processo

Escrever a ordenada do ponto B em função da respetiva abcissa.. 2 pontos

Escrever $\sqrt{3} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}x_B + 1}{x_B}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter x_B .... 2 pontos

Obter a ordenada do ponto B .... 1 ponto

Escrever uma expressão para a área do triângulo $[AOB]$ .... 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} \text{ ou } \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ .... 2 pontos

15. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Designemos por a a abcissa do ponto A e por b a abcissa do ponto B.

Escrever as coordenadas de A em função de a .... 1 ponto

Escrever as coordenadas de B em função de b .... 1 ponto

Obter o declive da reta AB em função de a e de b .... 2 pontos

Obter a equação $y = (b + a)x + 1$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter $ab = -1$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Determinar $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ .... 3 pontos

Concluir que o ângulo convexo AOB é um ângulo reto .... 1 ponto

2.º Processo

Designemos por m o declive da reta AB.

Escrever $y = mx + 1$ .... 2 pontos

Obter $x = \dfrac{m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}$ .... 3 pontos

Escrever as coordenadas do ponto A em função de m .... 2 pontos

Escrever as coordenadas do ponto B em função de m .... 2 pontos

Determinar $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ .... 4 pontos

Concluir que o ângulo convexo AOB é um ângulo reto .... 1 ponto

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>2.</td><td>3.</td><td>5.1.</td><td>5.2.</td><td>6.</td><td>8.</td><td>9.1.</td><td>9.2.</td><td>11.1.</td><td>11.2.</td><td>15.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">4.</td><td colspan="2">7.</td><td colspan="2">10.</td><td colspan="2">12.</td><td colspan="2">13.</td><td colspan="2">14.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 × 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2022

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 7 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma hexagonal reto $[ABCDEFGHIJKL]$, cujas bases são hexágonos regulares.

Sabe-se que:

- os vértices A e B pertencem ao semieixo positivo Ox , e o vértice F pertence ao semieixo positivo Oy ;
- o plano BCJ é definido pela equação $3x - \sqrt{3}\,y - 6 = 0$;
- o centro do prisma, ponto equidistante de todos os seus vértices, é o ponto $M\left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$.

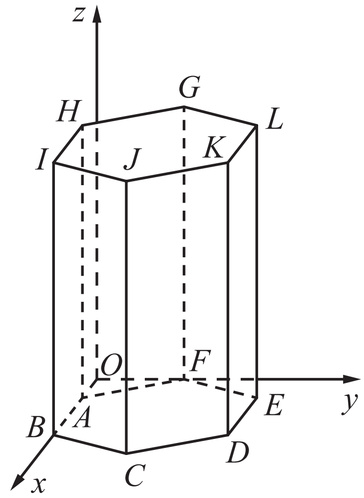


Figura 1

* **1.1.** Qual das seguintes equações define o plano que contém a face $[GHIJKL]$?

(A) $z = 2$ **(B)** $z = 4$

(C) $x = \frac{4}{3}$ **(D)** $x = \frac{8}{3}$

* **1.2.** Determine, sem recorrer à calculadora, uma equação cartesiana do plano LEF .

Apresente a equação na forma $ax + by + cz + d = 0$, em que a , b , c e d são números reais.

2. Na Figura 2, está representado um triângulo, $[ABC]$, inscrito numa semicircunferência de diâmetro $\overline{AC} = 4$.

Seja α a amplitude do ângulo CAB .

Mostre que a área da região sombreada na figura é dada, em função de α , por

$$2\pi - 4\,\mathrm{sen}\,(2\alpha)$$

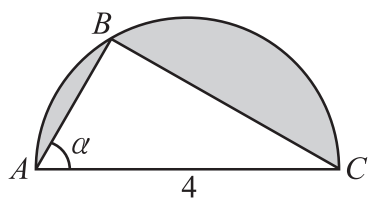


Figura 2

* **3.** Considere todos os números naturais de cinco algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos de 0 a 5 .

Destes números, quantos têm o algarismo das unidades igual a 5 ?

(A) 625 **(B)** 256 **(C)** 128 **(D)** 96

*** 4.** Uma empresa tem 60 funcionários. Todos trabalham cinco dias por semana, mas fazem-no em regimes diferentes, como a seguir se descreve:

- 40% trabalham todos os dias em regime presencial;
- 25% trabalham todos os dias à distância;
- os restantes trabalham dois dias em regime presencial e três dias à distância.

Selecionam-se, ao acaso, quatro funcionários dessa empresa.

A expressão seguinte permite determinar a probabilidade de serem selecionados, no máximo, três funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana.

$$\frac{{}^{60}C_4 - {}^{45}C_4}{{}^{60}C_4}$$

Explique esta expressão no contexto descrito.

Na sua resposta:

– enuncie a regra de Laplace;

– explique o número de casos possíveis;

– explique o número de casos favoráveis.

5. Seja Ω , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos independentes $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$, com $P(A) \neq 0$.

Mostre que $P(B) + P(A) \times \left(1 - P(B \mid A)\right) = P(A) + P(B) \times P(\overline{A})$.

*** 6.** Seja k um número natural.

Qual é o limite da sucessão (u_n) definida por $u_n = \left(\frac{n+k}{n}\right)^n$?

(A) 1 **(B)** $+\infty$ **(C)** e^k **(D)** e^{-k}

7. De uma progressão aritmética, (v_n) , sabe-se que $v_3 = 1$ e $v_{10} = \frac{5}{4} v_9$.

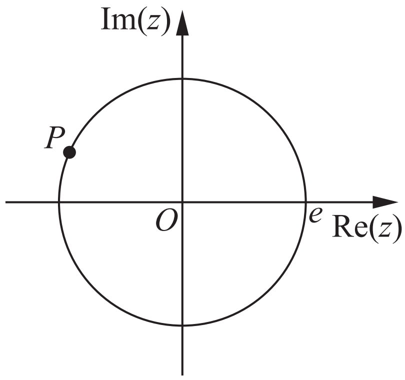
Averigue, sem recorrer à calculadora, se -50 é termo da progressão (v_n) .

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z = e\,e^{ie}$.

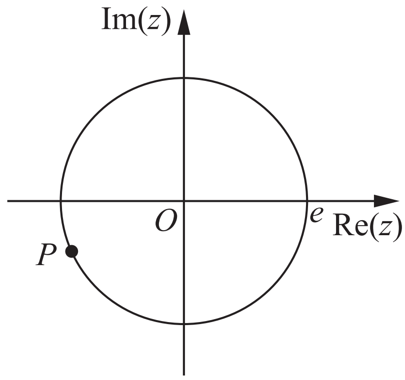
Seja P o afixo de z no plano complexo.

Em qual das opções seguintes pode estar representado, no plano complexo, o ponto P ?

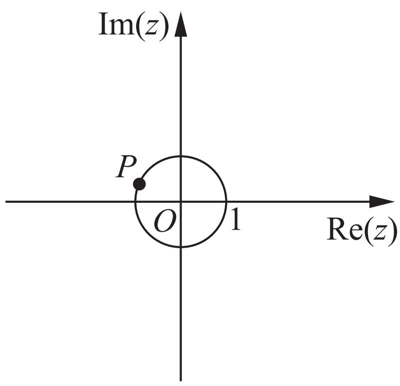
(A)



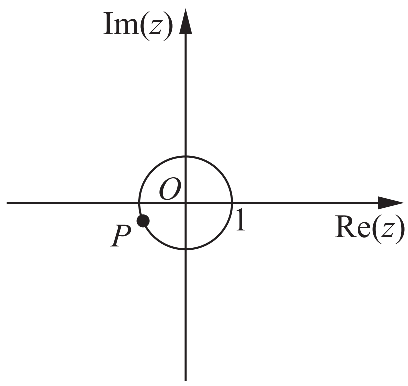
(B)



(C)



(D)



9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números complexos z_1 e z_2 , dados por:

- $z_1 = (1+i)^2 \times (2+i) + i^7$;
- $z_2 = \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta$, com $\theta \in [0, 2\pi[$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de θ tal que $z_1 \times z_2 = 3 + 2i$.

10. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{e^{5x} - 1} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \dfrac{3}{5} & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Averigue, sem recorrer à calculadora, se a função f é contínua em $x = 0$.

11. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \ln(1 + e^x) - x$.

Resolva os itens **11.1.** e **11.2.** sem recorrer à calculadora.

* **11.1.** O gráfico de g tem uma assíntota oblíqua, quando x tende para $-\infty$, e tem uma assíntota horizontal, quando x tende para $+\infty$.

Determine uma equação de cada uma dessas assíntotas.

11.2. Num referencial o.n. Oxy, seja r a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0.

Sejam A e B os pontos de intersecção da reta r com os eixos coordenados.

Mostre que a área do triângulo $[OAB]$ é igual a $(\ln 2)^2$.

12. Na Figura 3, estão representadas, em referencial o.n. Oxy, parte do gráfico de uma função, h, e uma reta, s.

Sabe-se que:

- a função h, de domínio $\mathbb{R}$, é definida por $h(x) = x^2$;
- a reta s tem declive positivo, m, e intersecta o gráfico da função h nos pontos A e B;
- o ponto A tem coordenadas $(-1, 1)$.

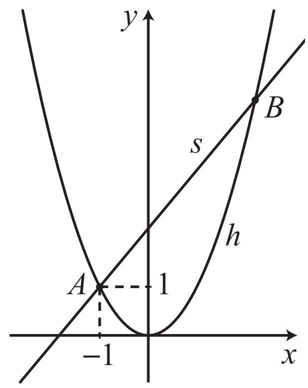


Figura 3

* **12.1.** Qual das expressões seguintes representa a ordenada na origem da reta s?

(A) $m + 1$

(B) $m + 2$

(C) $(m + 1)^2$

(D) $(m + 2)^2$

* **12.2.** Sabe-se que as coordenadas do ponto B são da forma $(m + 1, (m + 1)^2)$.

Considere o ponto C, projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo Oy.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de m para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 4, sabendo-se que existe e é único.

Apresente o valor de m arredondado às centésimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita obter o valor de m;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.

*** 13.** Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, de domínio $\mathbb{R}^+$, é definida por $g'(x) = \dfrac{x - e^{3x}}{x}$.

Estude, sem recorrer à calculadora, a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g .

14. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são solução da equação

$$\frac{1}{2}\log_2(9x+1) = \log_2(6x)$$

*** 15.** Seja k um número real positivo.

Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por $f(x) = \sqrt{kx} - \ln(kx)$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o contradomínio da função f.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.**	**11.1.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	14	**158**

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**5.**	**7.**	**9.**	**11.2.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos						**42**
TOTAL							**200**

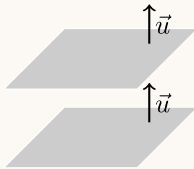
1.

1.1. Como o vértice A pertence ao semieixo positivo Ox e o vértice F pertence ao semieixo positivo Oy, então a base $[ABCDEF]$ do prisma pertence ao plano xOy.
Como o prisma hexagonal $[ABCDEFGHIJKL]$ é reto, a base $[GHIJKL]$ é paralela ao plano xOy, o seja o plano que contem esta face é definido por uma equação da forma $z = k$, $k \in \mathbb{R}$

Como o ponto M, equidistante de ambas as bases tem de cota 2, então a altura do prima é $2 \times 2 = 4$, ou seja, a equação do plano que contém a face $[GHIJKL]$ é $z = 4$

Resposta: **Opção B**

1.2. Como as bases do prisma são hexágonos regulares, as faces laterais opostas são paralelas, pelo que os planos BCJ e LEF são paralelos, ou seja os respetivos vetores normais são colineares.



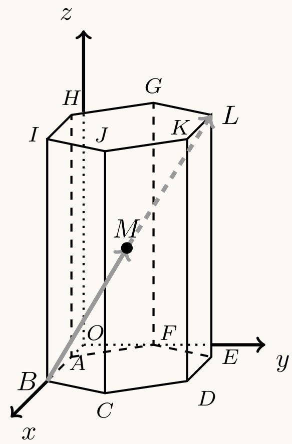
Observando a equação que define o plano BCJpodemos verificar que um vetor normal deste plano (e também do plano LEF é $\overrightarrow{u} = (3, -\sqrt{3},0)$, pelo que o plano LEF é da forma

$$3x - \sqrt{3}y + d = 0$$

Como o ponto B tem ordenada e cota nulas e pertence ao plano BCJ, determinamos a sua abcissa, x_B, substituindo as coordenas conhecidas na equação do plano:

$$3x_B - \sqrt{3} \times 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x_B - 0 = 6 \Leftrightarrow x_B = \frac{6}{3} \Leftrightarrow x_B = 2$$

Como o ponto M é o centro do prisma, também é o ponto médio do segmento $[BL]$, e assim, temos que: $L = M + \overrightarrow{BM}$



Determinando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BM}$, temos:

$$\overrightarrow{BM} = M - B = \left(\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right) - (2,0,0) = \left(\frac{4}{3} - \frac{6}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right) =$$

$$= \left(-\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right)$$

Pelo que as coordenadas do ponto L são:

$$L = M + \overrightarrow{BM} = \left(\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right) + \left(-\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right) = \left(\frac{2}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3},4\right)$$

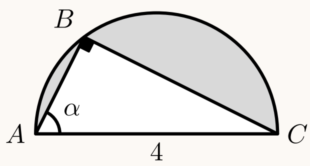
Como o ponto L pertence ao plano LEF, substituindo as coordenadas na equação anteriormente identificada, podemos determinar o valor do parâmetro d:

$$3 \times \frac{2}{3} - \sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} + d = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{4 \times \sqrt{3}^2}{3} + d = 0 \Leftrightarrow 2 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow -2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$$

Assim, uma equação do plano uma equação cartesiana do plano LEF, na forma indicada, é:

$$3x - \sqrt{3}y + 0z + 2 = 0$$

2. Como qualquer triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo, temos que a medida da hipotenusa do triângulo é $\overline{AC} = 4$, e recorrendo às definições de seno e cosseno, para determinar as medidas da base ($\overline{BC}$) e da altura ($\overline{AB}$), vem:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BC}}{4} \Leftrightarrow \overline{BC} = 4\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{4} \Leftrightarrow \overline{AB} = 4\cos\alpha$$

Como o raio da circunferência é metade do respetivo diâmetro, $r = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{4}{2} = 2$, temos que a área da região é a diferença da área do semicírculo e da área do triângulo:

$$A = \frac{A_\circ}{2} - A_{[ABC]} = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{\pi(2)^2}{2} - \frac{4\operatorname{sen}\alpha \times 4\cos\alpha}{2} = \frac{4\pi}{2} - 8\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha =$$

$$= 2\pi - 4 \times 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2\pi - 4\operatorname{sen}(2\alpha)$$

3. Como o número deve ter 5 algarismos diferentes como os 6 algarismos de 0 a 5, e o algarismo das unidades deve ser 5, existe apenas uma alternativa para o algarismo das unidades.

   Como o algarismo das dezenas de milhar não pode ser zero, nem 5 (que é o algarismo das unidades), existem 4 alternativas para este algarismo.

   Para o terceiro algarismo escolhido, por exemplo o dos milhares, voltam a existir 4 alternativas, porque o zero já pode ser considerado nesta posição, e para as restantes duas posições existem, respetivamente 3 e 2 alternativas.

   Assim, a quantidade de números que existem nas condições descritas, é:

$$4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$$

   Resposta: **Opção D**

4. Determinando a probabilidade com recurso à regra de LaPlace, calculamos o quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.

   Como a empresa tem 60 funcionários, o número de grupos de 4 funcionários que podem ser formados, sem sequência ou hierarquia, ou seja, o número de casos possíveis é ${}^{60}C_4$.

   O número de funcionários que trabalham em regime presencial corresponde a 75% do total de trabalhadores (sendo excluídos os 25% que trabalham exclusivamente a distância), ou seja $0{,}75 \times 60 = 45$.
   Como se pretende calcular a probabilidade de serem selecionados, no máximo, três funcionários que trabalham em regime presencial, podemos calcular o número de casos favoráveis pela diferença de todos os grupos que se podem constituir e o número de grupos que é constituído exclusivamente pelos funcionários que trabalham em regime presencial, ou seja ${}^{60}C_4 - {}^{45}C_4$.

   Assim, recorrendo à regra de LaPlace, a probabilidade de serem selecionados, no máximo, três funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana, é: $\frac{{}^{60}C_4 - {}^{45}C_4}{{}^{60}C_4}$

5. Como A e B são acontecimentos independentes, temos que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
P(B) + P(A) \times (1 - P(B|A)) &= P(B) + P(A) \times \left(1 - \frac{P(B \cap A)}{P(A)}\right) && (1)\\
&= P(B) + P(A) - P(B \cap A) \\
&= P(B) + P(A) - P(A) \times P(B) && (2)\\
&= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \\
&= P(A) + P(B)\Big(1 - P(A)\Big) \\
&= P(A) + P(B) \times P\left(\overline{A}\right) && (3)
\end{aligned}$$

(1) Definição de probabilidade condicionada
(2) Hipótese: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
(3) Teorema: $P\left(\overline{X}\right) = 1 - P(X)$

Logo $P(B) + P(A) \times (1 - P(B|A)) = P(A) + P(B) \times P\left(\overline{A}\right)$ *q.e.d.*

6. Usando a definição do número e, temos que:

$$\lim u_n = \lim \left(\frac{n+k}{n}\right)^n = \lim \left(\frac{n}{n} + \frac{k}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

Resposta: **Opção C**

7. De acordo com a enunciado, e com a definição de progressão aritmética, temos que:

- $v_3 = 1 \Leftrightarrow v1 + 2r = 1 \Leftrightarrow v_1 = 1 - 2r$
- $v_{10} = v_1 + 9r = 1 - 2r + 9r = 1 + 7r$
- $v_9 = v_1 + 8r = 1 - 2r + 8r = 1 + 6r$

Desta forma, vem que a razão é:

$$v_{10} = \frac{5}{4}v_9 \Leftrightarrow 1 + 7r = \frac{5}{4}(1 + 6r) \Leftrightarrow 1 + 7r = \frac{5}{4}1 + \frac{30r}{4} \Leftrightarrow 7r - \frac{30r}{4} = \frac{5}{4} - 1 \Leftrightarrow -\frac{2r}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2r = 1 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$$

E o primeiro termo é: $v_1 = 1 - 2r = 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 1 = 2$

Assim o termo geral da sucessão é: $v_n = 2 - \frac{1}{2}(n-1)$

Desta forma, resolvendo a equação $v_n = -50$, vem:

$$v_n = -50 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}(n-1) = -50 \Leftrightarrow -\frac{n}{2} + \frac{1}{2} = -50 - 2 \Leftrightarrow -\frac{n}{2} = -52 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{n}{2} = -\frac{105}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 2 \times \frac{105}{2} \Leftrightarrow n = 105$$

Como a solução da equação é um número natural, então -50 é o termo de ordem 105 da sucessão (v_n), ou seja, $v_{105} = -50$

8. Como $z = ee^{ie}$, temos que:

   - $|z| = e$, pelo que o afixo de z é um ponto pertencente à circunferência de centro na origem e raio e
   - $\operatorname{Arg}(z) = e$, como $e \approx 2{,}7$ temos que $\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}(z) < \pi$, pelo que o afixo de z é um ponto do 2.º quadrante.

   Resposta: **Opção A**

9. Simplificando a expressão de z_1, como $i^7 = i^{4+3} = i^3 = -i$, temos que:

$$z_1 = (1+i)^2 \times (2+i) + i^7 = (1+2i+i^2) \times (2+i) - i = 2i \times (2+i) - i =$$

$$= (1+2i-1) \times (2+i) - i = 2i(2+i) - i = 4i + 2i^2 - i = 3i + 2(-1) = -2+3i$$

   Assim, podemos determinar o valor de z_2:

$$z_1 \times z_2 = 3+2i \Leftrightarrow z_2 = \frac{3+2i}{z_1} \Leftrightarrow z_2 = \frac{3+2i}{-2+3i} \Leftrightarrow z_2 = \frac{(3+2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} \Leftrightarrow z_2 = \frac{-6-9i-4i-6i^2}{(-2)^2-(3i)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{-6-13i-6(-1)}{4-9(-1)^2} \Leftrightarrow z_2 = \frac{-6+6-13i}{4+9} \Leftrightarrow z_2 = -\frac{13i}{13} \Leftrightarrow z_2 = -i$$

   Logo temos que:

$$z_2 = \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta = -i \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta = 0 - i$$

   Ou seja $\operatorname{sen}\theta = 0 \wedge \cos\theta = -1$, pelo que $\theta = \pi$

10. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

    - $f(0) = \frac{3}{5}$
    - $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{e^{5x}-1} = \frac{3(0)}{e^{5(0)}-1} = \frac{0}{e^0-1} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{e^{5x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{e^{5x}-1}{3x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{(e^{5x}-1)\times\frac{5}{3}}{3x\times\frac{5}{3}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{(e^{5x}-1)\times\frac{5}{3}}{5x}} =$$

    (considerando $y = 5x$, temos que se $x \to 0$, então $y \to 0$)

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{(e^{y}-1)\times\frac{5}{3}}{y}} = \frac{\lim\limits_{y\to 0} 1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{(e^{y}-1)\times\frac{5}{3}}{y}} = \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim\limits_{y\to 0}\frac{5}{3}} = \frac{1}{1\times\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

    Como $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, então a função f é contínua em $x = 0$.

11.

11.1. Determinando a equação da assíntota horizontal do gráfico de g, quando $x \to +\infty$, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(1+e^x) - x\big) = \ln(1+e^{+\infty}) - \infty = +\infty - \infty \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(1+e^x) - x\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(1+e^x) - \ln e^x\big) = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{1+e^x}{e^x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{e^x} + \frac{e^x}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{+\infty}} + 1\right) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$$

Logo a reta definida por $y = 0$ é uma assíntota do gráfico de g, quando $x \to +\infty$

Determinando o declive da assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to -\infty$, temos:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x) - x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\ln(1+e^x)}{x} - \frac{x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\ln(1+e^x)}{x} - 1\right) = \frac{\ln(1+e^{-\infty})}{-\infty} - 1 = \frac{\ln(1+0^+)}{-\infty} - 1 = \frac{0^+}{-\infty} - 1 = 0^- - 1 = -1$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$b = \lim_{x\to^-\infty} \big(g(x) - mx\big) = \lim_{x\to-\infty} \big(\ln(1+e^x) - x - (-1)x\big) = \lim_{x\to-\infty} \big(\ln(1+e^x) - x + x\big) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = \ln(1+e^{-\infty}) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to -\infty$, é:

$$y = -1 \times x + 0 \Leftrightarrow y = -x$$

11.2. Determinando a expressão da função derivada, temos:

$$g'(x) = \big(g(x)\big)' = \big(\ln(1+e^x) - x\big)' = \big(\ln(1+e^x)\big)' - (x)' = \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} - 1 = \frac{(1)' + (e^x)'}{1+e^x} - 1 =$$

$$= \frac{0+e^x}{1+e^x} - 1 = \frac{e^x}{1+e^x} - 1$$

O declive da reta tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa 0, é dado por:

$$m = g'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} - 1 = \frac{1}{1+1} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico de abcissa 0, temos:

$$g(0) = \ln(1+e^0) - 0 = \ln(1+1) = \ln 2$$

Como o ponto de abcissa 0, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

$$\ln 2 = -\frac{1}{2} \times 0 + b \Leftrightarrow \ln 2 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0, é:

$$y = -\frac{1}{2} \times x + \ln 2 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + \ln 2$$

Assim, as coordenadas do pontos A e B, são:

- $A(0, \ln 2)$ porque $g(0) = \ln 2$
- $B(2\ln 2{,}0)$ porque $0 = -\frac{x}{2} + \ln 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \ln 2 \Leftrightarrow x = 2\ln 2$

E assim, a área do triângulo $[OAB]$ é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\ln 2 \times 2\ln 2}{2} = \frac{2(\ln 2)^2}{2} = (\ln 2)^2$$

12.

12.1. Considerando o ponto P como o ponto de interseção da reta s com o eixo Oy temos que as respetivas coordenadas são $P(0{,}b)$, sendo b para calcular a ordenada na origem da reta s.

Assim, temos que o declive da reta s, é:

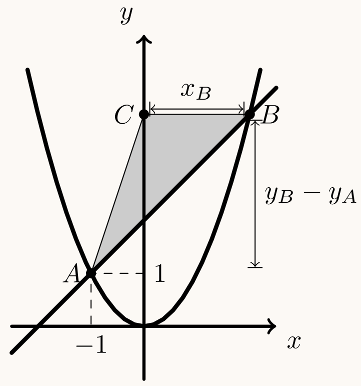
$$m = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{b-1}{0-(-1)} = \frac{b-1}{1} = b - 1$$

Como $m = b - 1$, temos que:

$$m = b - 1 \Leftrightarrow b = m + 1$$

Resposta: **Opção A**

12.2. Como o ponto C é projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo Oy, as coordenadas do ponto C são $(0,(m+1)^2)$, e o valor de m para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 4 , é a solução da equação:

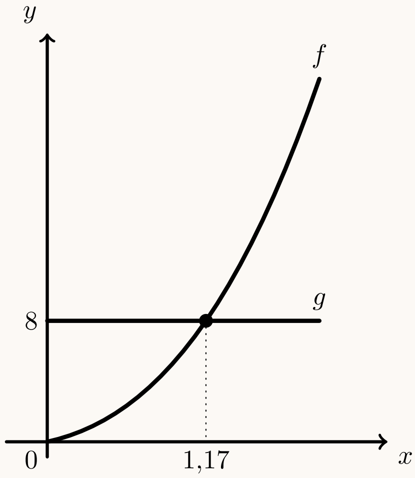


$$A_{[ABC]} = 4 \Leftrightarrow \frac{x_B \times (y_B - y_A)}{2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+1) \times \left((m+1)^2 - 1\right)}{2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^3 - (m+1) = 8$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $f(x) = (x+1)^3 - (x+1)$ e $g(x) = 8$, numa janela que permita a visualização da interseção dos dois gráficos, reproduzido na figura ao lado, e usando a funcionalidade da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às centésimas) das coordenadas do ponto de interseção, cuja abcissa é o valor de m pretendido:



$$(1{,}17\,;\,8)$$

Assim, o valor arredondado às centésimas de m para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 4, é 1,17.

13. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$g''(x) = \left(g'(x)\right)' = \left(\frac{x-e^{3x}}{x}\right)' = \frac{(x-e^{3x})'(x)-(x-e^{3x})(x)'}{x^2} = \frac{\left((x)'-(3x)'e^{3x}\right)(x)-(x-e^{3x})\times 1}{x^2} =$$

$$= \frac{\left(1-3e^{3x}\right)(x)-(x-e^{3x})}{x^2} = \frac{x-3xe^{3x}-x+e^{3x}}{x^2} = \frac{-3xe^{3x}+e^{3x}}{x^2} = \frac{e^{3x}(-3x+1)}{x^2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$g''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^{3x}(-3x+1)}{x^2}=0 \Leftrightarrow e^{3x}(-3x+1)=0 \land \underbrace{x^2\neq 0}_{\text{PV, } x>0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{3x}=0}_{\text{Cond. impossível}} \lor -3x+1=0 \Leftrightarrow 1=3x \Leftrightarrow \frac{1}{3}=x$$

Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x	0		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
e^{3x}	n.d.	$+$	$+$	$+$
$-3x+1$	n.d.	$+$	0	$-$
x^2	n.d.	$+$	$+$	$+$
g''	n.d.	$+$	0	$-$
g	n.d.	$\cup$	Pt. I.	$\cap$

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0,\frac{1}{3}\right]$
- tem um único ponto de inflexão, cuja abcissa é $x=\frac{1}{3}$.

14. As soluções da equação pertencem ao conjunto $\{x\in\mathbb{R} : 9x+1>0 \land 6x>0\}$

Como $9x>-1 \land 6x>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{9} \land x>0 \Leftrightarrow x>0$, temos que $x\in\left]0,+\infty\right[$, e resolvendo a equação, vem que:

$$\frac{1}{2}\log_2(9x+1)=\log_2(6x) \Leftrightarrow \log_2(9x+1)=2\log_2(6x) \Leftrightarrow \log_2(9x+1)=\log_2(6x)^2 \Leftrightarrow 9x+1=(6x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x+1=36x^2 \Leftrightarrow -36x^2+9x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4(-36)(1)}}{2\times(-36)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-9+15}{-72} \lor x=\frac{-9-15}{-72} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{12} \lor x=\frac{1}{3}$$

Assim, como $x>0$, $x=-\frac{1}{12}$ não é solução da equação, pelo que o conjunto dos números reais que são solução da equação, é: $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

15. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, para estudar a monotonia da função e a existência de extremos:

$$f'(x) = \left(\sqrt{kx} - \ln(kx)\right)' = \left(\sqrt{kx}\right)' - \left(\ln(kx)\right)' = \left((kx)^{\frac{1}{2}}\right)' - \frac{(kx)'}{kx} = \frac{1}{2} \times (kx)^{1-\frac{1}{2}} \times (kx)' - \frac{k}{kx} =$$

$$= \frac{1}{2} \times (kx)^{-\frac{1}{2}} \times k - \frac{k}{kx} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{kx}} \times k - \frac{k}{kx} = \frac{k}{2\sqrt{kx}} - \frac{k}{kx} = \frac{k^2x - 2k\sqrt{kx}}{2kx\sqrt{kx}} =$$

$$= \frac{k\left(kx - 2\sqrt{kx}\right)}{k \times 2x\sqrt{kx}} \underset{k\neq 0}{=} \frac{kx - 2\sqrt{kx}}{2x\sqrt{kx}}$$

Calculando os zeros da derivada da função f, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{kx - 2\sqrt{kx}}{2x\sqrt{kx}} = 0 \Leftrightarrow kx - 2\sqrt{kx} = 0 \wedge \underbrace{2x\sqrt{kx} \neq 0}_{\text{Cond. universal para } x>0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow kx = 2\sqrt{kx} \Rightarrow (kx)^2 = \left(2\sqrt{kx}\right)^2 \Leftrightarrow (kx)^2 = 4kx \Leftrightarrow \frac{(kx)^2}{kx} = 4 \underset{kx\neq 0}{=} kx = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{k}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{4}{k}$	$+\infty$
$kx - 2\sqrt{kx}$	n.d.	$-$	0	$+$
$2x\sqrt{kx}$	n.d.	$+$	$+$	$+$
f'	n.d.	$-$	0	$+$
f	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Assim, podemos concluir que a função f tem um mínimo absoluto em $x = \frac{4}{k}$ porque é decrescente no intervalo $\left]0, \frac{4}{k}\right[$ e crescente no intervalo $\left]\frac{4}{k}, +\infty\right[$.

O valor do mínimo é:

$$f\left(\frac{4}{k}\right) = \sqrt{k \times \frac{4}{k}} - \ln\left(k \times \frac{4}{k}\right) = \sqrt{4} - \ln 4 = 2 - \ln 4$$

Como a função é contínua, porque é o produto, a diferença e a composição de funções contínuas, e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{kx} - \ln(kx)\right) = \sqrt{k \times 0^+} - \ln(k \times 0^+) = \sqrt{0} - \ln(0^+) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

então o contradomínio de f é

$$D'_f = [2 - \ln 4, +\infty[$$

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2022

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Critérios de Classificação

11 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

1.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que o plano LEF é paralelo ao plano BCJ .... 1 ponto

Reconhecer que o vetor de coordenadas $\left(3, -\sqrt{3}, 0\right)$ é normal ao plano LEF .... 1 ponto

Reconhecer que $L = B + 2\overrightarrow{BM}$ .... 2 pontos

Reconhecer que o ponto B tem ordenada e cota nulas .... 1 ponto

Determinar a abcissa do ponto B .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto L .... 2 pontos

Escrever $3x - \sqrt{3}\,y + d = 0$ .... 2 pontos

Escrever $3 \times \frac{2}{3} - \sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} + d = 0$ .... 1 ponto

Obter o valor de d .... 1 ponto

Escrever uma equação do plano na forma pedida ($3x - \sqrt{3}\,y + 2 = 0$ ou equivalente) .... 1 ponto

2.º Processo

Seja P a projeção ortogonal do ponto M no plano xOy .

Reconhecer que o plano LEF é paralelo ao plano BCJ .... 1 ponto

Reconhecer que o vetor de coordenadas $\left(3, -\sqrt{3}, 0\right)$ é normal ao plano LEF .... 1 ponto

Reconhecer que $E = P + 2\overrightarrow{BP}$ .... 2 pontos

Reconhecer que o ponto B tem ordenada e cota nulas .... 1 ponto

Determinar a abcissa do ponto B .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto E .... 2 pontos

Escrever $3x - \sqrt{3}\,y + d = 0$ .... 2 pontos

Escrever $3 \times \frac{2}{3} - \sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} + d = 0$ .... 1 ponto

Obter o valor de d .... 1 ponto

Escrever uma equação do plano na forma pedida ($3x - \sqrt{3}\,y + 2 = 0$ ou equivalente) .... 1 ponto

2. .... **14 pontos**

Reconhecer que o ângulo ABC é reto .... 1 ponto

Reconhecer que $\mathrm{A}_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\cos \alpha = \dfrac{\overline{AB}}{4}$ .... 2 pontos

Obter $\overline{AB} = 4 \cos \alpha$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\overline{BC}}{4}$ .... 2 pontos

Obter $\overline{BC} = 4 \operatorname{sen} \alpha$ .... 1 ponto

Escrever $\mathrm{A}_{[ABC]} = \dfrac{4 \cos \alpha \times 4 \operatorname{sen} \alpha}{2}$ .... 1 ponto

Obter $\mathrm{A}_{[ABC]} = 8 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$ .... 1 ponto

Obter $\mathrm{A}_{[ABC]} = 4 \operatorname{sen}(2\alpha)$ .... 2 pontos

Obter a área do semicírculo (2π) .... 1 ponto

Concluir o pretendido .... 1 ponto

3. .... **12 pontos**

Opção **(D)**

4. .... **14 pontos**

Tópicos de resposta

A) Enunciado da regra de Laplace: quando os casos possíveis são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis.

B) Explicação do número de casos possíveis: é o número de conjuntos de quatro funcionários que é possível formar.

C) Explicação do número de casos favoráveis: selecionar, ao acaso, no máximo, três funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana é o contrário de selecionar, ao acaso, quatro funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana; assim, o número de casos favoráveis é igual à diferença entre o número de casos possíveis e o número de conjuntos de quatro funcionários que é possível formar, selecionados de entre os 45 $(75\%$ de $60)$ que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana.

Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.	14
5	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com falhas na utilização do vocabulário específico da Matemática.	13
4	Na resposta, são contemplados apenas dois tópicos, com utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.	9
3	Na resposta, são contemplados apenas dois tópicos, com falhas na utilização do vocabulário específico da Matemática.	8
2	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.	4
1	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com falhas na utilização do vocabulário específico da Matemática.	3

5. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Utilizar a fórmula da probabilidade condicionada .... 4 pontos

Utilizar a igualdade $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .... 3 pontos

Aplicar a propriedade da probabilidade do acontecimento contrário .... 3 pontos

Concluir que a igualdade é verdadeira .... 4 pontos

2.º Processo

Utilizar a igualdade $P(B \mid A) = P(B)$ .... 7 pontos

Aplicar a propriedade da probabilidade do acontecimento contrário .... 3 pontos

Concluir que a igualdade é verdadeira .... 4 pontos

6. .... **12 pontos**

Opção **(C)**

7. .... **14 pontos**

Nota prévia – Se for considerada uma progressão geométrica, em vez de uma progressão aritmética, a classificação a atribuir à resposta é 0 pontos.

Seja r a razão da progressão aritmética (v_n) .

Reconhecer que $v_{10} = v_3 + 7r$ .... 2 pontos

Reconhecer que $v_9 = v_3 + 6r$ .... 2 pontos

Obter $v_3 + 7r = \frac{5}{4}(v_3 + 6r)$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $r = -\frac{1}{2}$ .... 1 ponto

Obter $v_n = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}n$ .... 3 pontos

Escrever $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}n = -50$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $n = 105$ .... 1 ponto

Concluir que -50 é termo da progressão (v_n) .... 1 ponto

8. .... **12 pontos**

Opção **(A)**

9. .... **14 pontos**

Substituir i^7 por $-i$ .... 1 ponto

Obter $(1+i)^2 = 2i$ .... 1 ponto

Obter $z_1 = -2+3i$ .... 2 pontos

Escrever $z_2 = \dfrac{3+2i}{z_1}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $z_2 = -i$ .... 3 pontos

Obter o valor pedido (π) .... 5 pontos

Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $\operatorname{sen}\theta = 0 \ \wedge \ \cos\theta = -1$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Concluir que $\theta = \pi$ .... 2 pontos

2.º Processo

Reconhecer que $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ .... 2 pontos

Reconhecer que $z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ .... 1 ponto

Concluir que $\theta = \pi$ .... 2 pontos

10. .... **14 pontos**

Reconhecer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{e^{5x}-1} = \left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-1}{3x}\right)^{-1}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-1}{3x} = \dfrac{5}{3} \times \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-1}{5x}$ .... 2 pontos

Escrever $\dfrac{5}{3} \times \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-1}{5x} \underset{y=5x}{=} \dfrac{5}{3} \times \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^{y}-1}{y}$ .... 2 pontos

Escrever $\dfrac{5}{3} \times \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^{y}-1}{y} = \dfrac{5}{3}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{e^{5x}-1} = \dfrac{3}{5}$ .... 1 ponto

Referir que $f(0) = \dfrac{3}{5}$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{3}{5}$ .... 1 ponto

Concluir que a função f é contínua em $x = 0$ .... 2 pontos

11.1. .... **14 pontos**

Determinar uma equação da assíntota oblíqua .... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(1+e^x) - x}{x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(1+e^x) - x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{\ln(1+e^x)}{x} - 1\right)$ ... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{\ln(1+e^x)}{x} - 1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} - 1$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = -1$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to -\infty} (g(x) + x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\ln(1+e^x) - x + x)$ ..... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to -\infty} (g(x) + x) = 0$ .... 1 ponto

Concluir que uma equação da assíntota oblíqua é $y = -x$ ..... 1 ponto

Determinar uma equação da assíntota horizontal .... 6 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(1+e^x) - x)$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(1+e^x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(1+e^x) - \ln e^x)$.. 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(1+e^x) - \ln e^x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)\right)$ .. 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)\right)$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ .... 1 ponto

Concluir que uma equação da assíntota horizontal é $y = 0$ .... 1 ponto

11.2. .... **14 pontos**

Identificar o declive da reta r com $g'(0)$ .... 2 pontos

Determinar $g'(0)$ (**ver nota**) .... 5 pontos

Obter uma expressão de $g'(x)$ .... 3 pontos

Obter $g'(0)$ .... 2 pontos

Calcular $g(0)$ .... 1 ponto

Escrever a equação reduzida da reta r .... 2 pontos

Obter $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ .... 2 pontos

Concluir o pretendido .... 2 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função g, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

12.1. .... **12 pontos**

Opção **(A)**

12.2. .... **14 pontos**

Reconhecer que as coordenadas do ponto C são $\left(0,(m+1)^2\right)$ .... 1 ponto

Reconhecer que a altura do triângulo $[ABC]$ relativa a $[BC]$ é $(m+1)^2-1$.. 2 pontos

Apresentar a equação $\frac{(m+1)\left((m+1)^2-1\right)}{2}=4$ (ou uma equação equivalente) (**ver notas 1 e 2**) .... 4 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 3**) .... 4 pontos

Apresentar a abcissa do ponto relevante .... 2 pontos

Apresentar o valor de m na forma pedida $(1{,}17)$ .... 1 ponto

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que correspondem à resolução da equação que traduz corretamente o problema.
3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

13. .... **14 pontos**

Determinar $g''(x)$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Determinar o zero de g'' .... 4 pontos

Escrever $g''(x)=0$ .... 1 ponto

Obter o zero de g'' .... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g'' e de sentido da concavidade do gráfico de g (ou equivalente) .... 3 pontos

Referir que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]0,\frac{1}{3}\right]$ (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Referir que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$ (**ver nota 3**) .... 1 ponto

Indicar a abcissa do ponto de inflexão do gráfico da função g $\left(\frac{1}{3}\right)$ .... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função $g,$ a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]0,\frac{1}{3}\right[$, em vez de em $\left]0,\frac{1}{3}\right]$, esta etapa deve ser considerada cumprida.
3. Se for referido que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$, em vez de em $\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

14. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar o domínio da condição .... 4 pontos

Escrever $\log_2(9x+1) = 2\log_2(6x)$ .... 1 ponto

Obter $\log_2(9x+1) = \log_2(6x)^2$ .... 3 pontos

Obter $9x+1 = (6x)^2$ .... 1 ponto

Resolver a equação $9x+1 = (6x)^2$ .... 3 pontos

Apresentar o conjunto pedido $\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Determinar o domínio da condição .... 4 pontos

Obter $\log_2\sqrt{9x+1} = \log_2(6x)$ .... 3 pontos

Obter $\sqrt{9x+1} = 6x$ .... 1 ponto

Resolver a equação $\sqrt{9x+1} = 6x$ .... 4 pontos

Apresentar o conjunto pedido $\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}\right)$ .... 2 pontos

15. .... **14 pontos**

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Determinar o zero de f' .... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f (ou equivalente) .. 3 pontos

Determinar $f\left(\frac{4}{k}\right)$ .... 1 ponto

Referir que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ ou que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ .... 2 pontos

Referir que a função f é contínua em $]0, +\infty[$ .... 2 pontos

Apresentar o contradomínio da função f ($[2 - \ln 4, +\infty[$) .... 2 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função f, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.**	**11.1.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**		**5.**		**7.**		**9.**		**11.2.**		**14.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												**42**
TOTAL													**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$?

(A) 1 **(B)** $2e$ **(C)** e^2 **(D)** $+\infty$

2. A Figura 1 representa uma linha poligonal simples que começou a ser construída a partir do segmento de reta $[AB]$. O segundo segmento de reta, com uma das extremidades em B, foi construído com mais 2 cm do que o primeiro, o terceiro segmento foi construído com mais 2 cm do que o segundo, e assim sucessivamente, tendo cada segmento de reta sempre mais 2 cm do que o anterior.

Continuando a construção da linha poligonal, do modo acima descrito, até ao 100.º segmento de reta, obtém-se uma linha poligonal com o comprimento total de 104 metros.

Determine o comprimento do segmento de reta $[AB]$.

Apresente o valor pedido em centímetros.

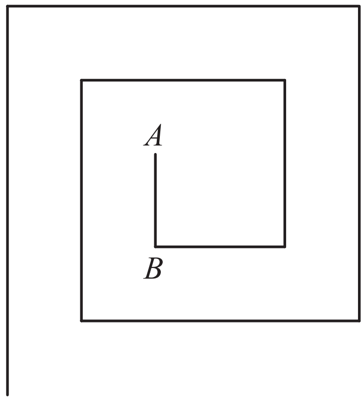


Figura 1

3. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja f uma função diferenciável, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada, f', é dada por

$$f'(x) = -2xe^{1-x^2}$$

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f, caso este(s) exista(m).

4. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4x-4}{e^{x-1}-1} & \text{se } x<1 \\ 7\times 3^{x-1}-3 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** sem recorrer à calculadora.

4.1. Averigue se a função g é contínua em $x=1$.

4.2. Resolva, no intervalo $[1,+\infty[$, a equação $\log_3(g(x)) = x + \log_3 2$.

5. Um grupo de jovens inscreveu-se num campo de férias que oferece as modalidades de *surf* e de *skate*.

* **5.1.** Dez dos jovens do grupo vão deslocar-se em fila, pela praia, para uma aula de *surf*.

A Ana, o Diogo e o Francisco são três desses jovens.

De quantas formas diferentes se podem dispor os jovens na fila, ficando a Ana, o Diogo e o Francisco juntos?

(A) $483\,840$ **(B)** $241\,920$ **(C)** $60\,480$ **(D)** $30\,240$

5.2. No ato da inscrição, todos os jovens do grupo responderam a um questionário sobre a prática das modalidades de *surf* e de *skate*.

De acordo com as respostas ao questionário:

- 65% praticavam *surf* ;
- 20% praticavam *skate* e não praticavam *surf* ;
- quatro em cada cinco dos que praticavam *surf* também praticavam *skate*.

Selecionou-se, ao acaso, um jovem que, no questionário, tinha respondido que não praticava *skate*.

Determine a probabilidade de esse jovem, no questionário, também ter respondido que praticava *surf*.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

* **5.3.** Considere que, no grupo, há 70 jovens com 13 ou 14 anos de idade, sendo o número de jovens com 14 anos maior do que o número de jovens com 13 anos.

Para realizar uma determinada tarefa, vão ser selecionados, aleatoriamente, dois desses jovens.

Sabe-se que a probabilidade de selecionar dois desses jovens com idades distintas é $\frac{16}{35}$.

Determine o número de jovens com 13 anos que há no grupo.

6. Na Figura 2, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular reto $[OABCDE]$, de bases $[ABC]$ e $[OED]$.

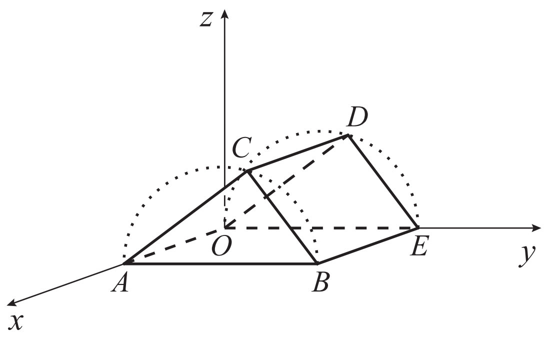


Figura 2

Sabe-se que:

- as bases do prisma estão inscritas em semicircunferências, respetivamente, de diâmetros $[AB]$ e $[OE]$;
- os vértices A e E do prisma pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos Ox e Oy;
- $\overline{OE} = 12{,}5$;
- a reta AC é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (10, 0, 0) + k(0, 4, 3)$, $k \in \mathbb{R}$.

*** 6.1.** Qual das seguintes equações vetoriais define a reta OD?

(A) $(x, y, z) = (0, 6, 8) + k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (0, -4, -3) + k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (0, -4, -3) + k(0, 3, -4)$, $k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (0, 6, 8) + k(0, 3, -4)$, $k \in \mathbb{R}$

*** 6.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto C.

7. Na Figura 3, estão representados, em referencial o.n. Oxy, uma circunferência de centro na origem e os pontos A, P e Q, que pertencem à circunferência.

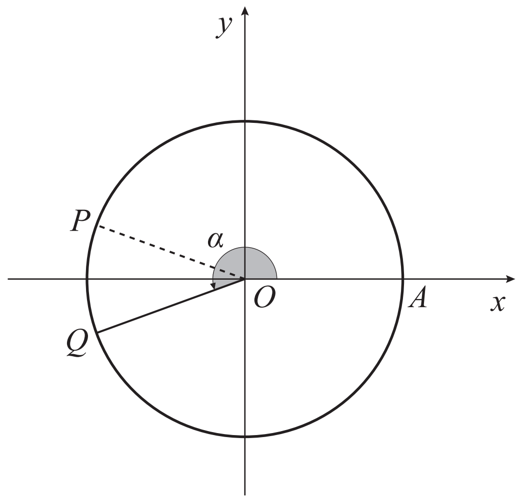


Figura 3

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$;
- o ângulo orientado AOQ tem amplitude $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$;
- os pontos P e Q têm a mesma abcissa;
- $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3$.

Determine o valor de $\cos(2\alpha)$.

8. Uma empresa está a desenvolver um programa de testes para melhorar a propulsão de foguetes.

Os foguetes utilizados partem do solo e seguem uma trajetória vertical.

Em relação a um dos modelos de foguete utilizados, admita que, após o lançamento e até se esgotar o combustível, a sua distância ao solo, a, em metros, é dada, a cada instante t, em segundos, por

$$a(t) = 100\left[t + (10-t)\ln\left(1-\frac{t}{10}\right)\right] - 4{,}9t^2 \text{ , com } t \in [0, 8]$$

Determine, utilizando a calculadora gráfica, o instante a partir do qual, durante 3 segundos, esse foguete percorre 25 metros.

Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

9. Sejam f e g funções duas vezes diferenciáveis, de domínios $\mathbb{R}$ e $]0, +\infty[$, respetivamente, e seja r a reta de equação $y = 2x - 1$.

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x + 1\right) = 0$;
- nos respetivos domínios, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima e o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo.

Considere as proposições seguintes.

I. O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para $+\infty$.

II. $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$.

III. $f''(x) < g''(x)$, $\forall\, x \in]0, +\infty[$.

Justifique que as proposições **I**, **II** e **III** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

*** 10.** Na Figura 4, estão representados, no plano complexo, os pontos A e B.

O ponto O é a origem do referencial.

O ponto A é o afixo de um número complexo z tal que $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Re}(z) > 0$.

O ponto B é o afixo de um número complexo w tal que o ângulo convexo AOB tem amplitude $\frac{5\pi}{8}$ radianos.

Qual dos valores seguintes é um argumento de $w \times z$?

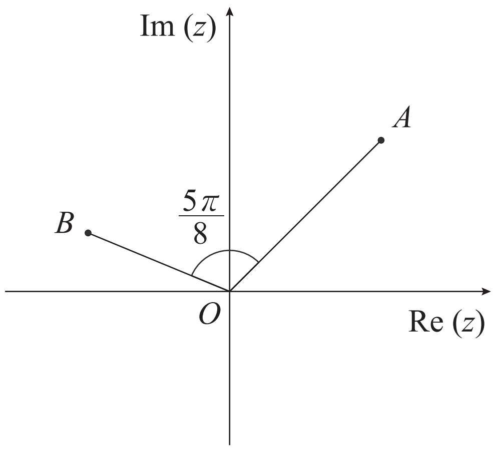


Figura 4

(A) $\frac{3\pi}{8}$ **(B)** $\frac{5\pi}{8}$

(C) $\frac{9\pi}{8}$ **(D)** $\frac{11\pi}{8}$

11. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $w = \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}} - i^{17}}{i}$.

Determine, em $\mathbb{C}$, as soluções da equação $z^2 = w$.

Apresente os valores pedidos na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

12. Seja f a função, de domínio $[0, \pi]$, definida por $f(x) = \mathrm{sen}(2x) + x$, e seja r a reta de equação $y = -x + 2$.

*** 12.1.** Qual das expressões seguintes pode definir a função derivada de f ?

(A) $2 - 2\cos^2 x$ **(B)** $2 - 2\,\mathrm{sen}^2 x$ **(C)** $3 - 4\cos^2 x$ **(D)** $3 - 4\,\mathrm{sen}^2 x$

12.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que o gráfico da função f intersecta a reta r em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[$.

*** 13.** Sejam a e b números reais, não nulos, tais que a reta de equação $y = ax + b$ é tangente ao gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx$.

Determine as coordenadas do ponto de tangência.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**3.**	**4.1.**	**5.1.**	**5.3.**	**6.1.**	**6.2.**	**8.**	**9.**	**10.**	**12.1.**	**13.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	14	12	14	12	14	14	14	12	12	14	**158**

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**4.2.**	**5.2.**	**7.**	**11.**	**12.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos						**42**
TOTAL							**200**

EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA A

1.ª FASE | 2023 | PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA A

1.ª FASE | 2023

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. Tem-se que $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}=\left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}=\left(e^{1}\right)^{2}=e^{2}$

Resposta: C

2. Seja (u_n) a sucessão que dá o comprimento do $n-$ésimo segmento de recta da linha poligonal. Assim, u_1 é o comprimento do primeiro segmento de recta, isto é $u_1=\overline{AB}$. Como cada segmento de recta, à excepção do primeiro, tem mais $2\,\text{cm}$ que o anterior, isto é, $u_{n+1}=u_n+2\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, vem que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2.

Por outro lado, prosseguindo a construção da linha até ao centésimo segmento de recta, obtém-se uma linha poligonal com 104 metros de comprimento, o que quer dizer que a soma dos 100 primeiros termos de (u_n) é 10400, dado que 104 metros correspondem a 10400 centímetros. Portanto:

$$S_{100}=10400\Leftrightarrow\frac{u_1+u_{100}}{2}\times\cancel{100}=104\cancel{00}\underset{u_{100}=u_1+99\times 2}{\Leftrightarrow}\frac{u_1+u_1+99\times 2}{2}=104\Leftrightarrow\frac{2u_1+198}{2}=104\Leftrightarrow$$

$$\underset{\times 2}{\Leftrightarrow}2u_1+198=104\times 2\Leftrightarrow 2u_1=208-198\Leftrightarrow 2u_1=10\Leftrightarrow u_1=5$$

Logo, o comprimento do segmento de recta é $5\,\text{cm}$.

3. Tem-se que:

- $f''(x)=(-2x)'e^{1-x^2}+(-2x)\left(1-x^2\right)'e^{1-x^2}=-2e^{1-x^2}-2x(-2x)e^{1-x^2}=-2e^{1-x^2}+4x^2e^{1-x^2}=e^{1-x^2}\left(4x^2-2\right)$

- $f''(x)=0\Leftrightarrow \underbrace{e^{1-x^2}=0}_{Eq.\ impossível\ em\ \mathbb{R}}\ \vee\ 4x^2-2=0\Leftrightarrow 4x^2=2\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{4}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{4}}\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \vee\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Elaborando um quadro de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
e^{1-x^2}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$4x^2-2$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Gráfico de f	$\cup$	p.i.	$\cap$	p.i.	$\cup$

Logo, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ e tem pontos de inflexão em $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e em $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.

4.1. A função g é contínua em $x=1$ se $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=g(1)$.

- $g(1)=7\times 3^{1-1}-3=7\times 3^0-3=7\times 1-3=4$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(7\times 3^{x-1}-3\right)=7\times 3^{1-1}-3=7\times 3^0-3=7\times 1-3=4$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{4x-4}{e^{x-1}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{4(x-1)}{e^{x-1}-1}=4\times\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-1}{e^{x-1}-1}\underset{\substack{y=x-1\\ x\to 1^-\Rightarrow y\to 0^-}}{=}4\times\lim\limits_{y\to 0^-}\frac{y}{e^y-1}=$

$$=4\times\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}}}=4\times\frac{1}{1}=4$$

Logo, g é contínua em $x=1$.

4.2. Tem-se que para $x\in\left]1,+\infty\right[$, $g(x)=7\times 3^{x-1}-3$. Assim, para $x>1$, vem que:

$$x>1\Leftrightarrow x-1>0\underset{\substack{y=3^x\text{ é crescente}\\ \text{em }\mathbb{R}}}{\Leftrightarrow}3^{x-1}>3^0\Leftrightarrow 7\times 3^{x-1}>7\times 3^0\Leftrightarrow 7\times 3^{x-1}-3>7\times 1-3\Leftrightarrow g(x)>4$$

Ou seja, para todo o $x\in\left]1,+\infty\right[$, $g(x)>4>0$, pelo que:

$$\log_3\left(g(x)\right)=x+\log_3 2\underset{x=\log_3 3^x}{\Leftrightarrow}\log_3\left(7\times 3^{x-1}-3\right)=\log_3\left(3^x\right)+\log_3 2\Leftrightarrow\log_3\left(7\times 3^{x-1}-3\right)=\log_3\left(2\times 3^x\right)\Leftrightarrow$$

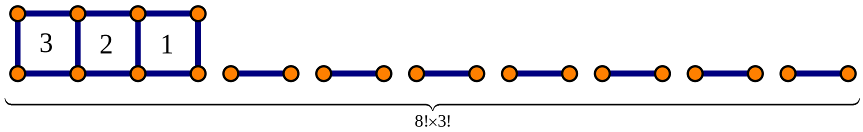
$$\Leftrightarrow 7\times 3^{x-1}-3=2\times 3^x\Leftrightarrow 7\times\frac{3^x}{3}-2\times 3^x=3\underset{\times 3}{\Leftrightarrow}7\times 3^x-6\times 3^x=9$$

$$\Leftrightarrow 3^x=9\Leftrightarrow 3^x=3^2\Leftrightarrow x=2$$

Como $2\in\left]1,+\infty\right[$, vem que o conjunto solução da equação é $\{2\}$.

5.

5.1. Agrupando num bloco a Ana, o Diogo e o Francisco, tem-se que este bloco e os restantes sete jovens permutam entre si de $8!$ maneiras distintas. No bloco, a Ana, o Diogo e o Francisco, permutam entre si $3!$ maneiras distintas:



Logo, o número de maneiras de dispor os dez jovens nas condições do enunciado é $8!\times 3!=241920$.

Resposta: B

5.2. Sejam A e B os acontecimentos:

A: «o jovem pratica *surf*» B: « o jovem pratica *skate*»

Do enunciado sabe-se que $P(A)=0{,}65$, $P(B\cap \overline{A})=0{,}2$ e $P(B|A)=\frac{4}{5}=0{,}8$.

Pretende-se $P(A|\overline{B})$.

Tem-se que:

$$P(B|A)=0{,}8 \Leftrightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)}=0{,}8 \Leftrightarrow P(B\cap A)=0{,}8\times P(A) \Leftrightarrow P(B\cap A)=0{,}8\times 0{,}65 \Leftrightarrow P(B\cap A)=0{,}52$$

Preenchendo uma tabela:

	A	$\overline{A}$	p.m.
B	$0{,}52$	$0{,}2$	$0{,}52+0{,}2=0{,}72$
$\overline{B}$	$0{,}65-0{,}52=0{,}13$		$1-0{,}72=0{,}28$
p.m.	$0{,}65$		1

Logo, $P(A|\overline{B})=\frac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0{,}13}{0{,}28}=\frac{13}{28}$.

5.3. Seja n o número de jovens com 13 anos. Logo o número de alunos com 14 anos é $70-n$.

Assim, o número de casos possíveis é ${}^{70}C_2 = 2415$, que é o número de maneira de escolher dois dos 70 jovem, e o número de casos favoráveis é ${}^{n}C_1 \times {}^{70-n}C_1 = n(70-n)$, que é o número de maneiras de escolher um jovens entre os n com 13 anos e escolher um jovem entre os $70-n$ com 14 anos.

Assim, vem que:

$$\frac{n(70-n)}{2415} = \frac{16}{35} \Leftrightarrow \frac{70n-n^2}{2415} = \frac{16}{35} \Leftrightarrow 35\left(70n-n^2\right) = 16\times 2415 \underset{\div 35}{\Leftrightarrow} 70n-n^2 = 16\times 69 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -n^2+70n-1104=0 \Leftrightarrow n = \frac{-70\pm\sqrt{70^2-4\times(-1)\times(-1104)}}{2\times(-1)}$$

$$\Leftrightarrow n = 24 \ \vee \ n = 46$$

Se $n=24$, então $70-n=70-24=46$, ou seja, se o número de jovens com 13 anos for 24, então o número de jovens com 14 anos será 46. Por outro, lado, Se $n=46$, então $70-n=70-46=24$, ou seja, se o número de jovens com 13 anos for 46, então o número de jovens com 14 anos será 24. Logo, como há mais jovens com 14 anos do que com 13 anos, vem que $n=24$ e, portanto, no grupo há 24 jovens com 13 anos.

6.

6.1. As rectas OD e AC são paralelas, pelo que, sendo $\vec{u}(0,4,3)$ um vector director de AC, então $\vec{u}$ é também vector director de OD, assim como qualquer vector colinear a este. Nas opções apresentadas, apenas um dos vectores é colinear com $\vec{u}$, o vector $\vec{v}\left(0,2,\frac{3}{2}\right)$, dado que $\vec{u}=2\vec{v}$. Assim, eliminamos as opções **C** e **D**.

Das opções **A** e **B**, a única a que o ponto $O(0,0,0)$ é a da opção **B**, dado que:

$$(0,0,0) = (0,-4,-3) + k\left(0,2,\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 0=-4+2k \\ 0=-3+\frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 4=2k \\ \cancel{3}=\frac{\cancel{3}}{2}k \end{cases} \begin{cases} 0=0 \\ 0=-4+2k \\ 0=-3+\frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ k=2 \\ k=2 \end{cases}$$

Resposta: B

6.2. O ponto C é o ponto de intersecção da recta AC com o plano BCE.

Como o ângulo ACB está inscrito numa semi-circunferência, vem que $A\hat{C}E = 90^\circ$, pelo que a recta AC é perpendicular o plano BCE e, portanto, um vector normal a BCE é $\vec{u}(0,4,3)$.

Logo, $BCE: 4y + 3z + d = 0$ e como $E(0;12,5;0)$, dado que $\overline{OE} = 12,5$, vem que:

$$4 \times 12,5 + 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -50 \Rightarrow BCE: 4y + 3z - 50 = 0$$

Como $AC: (x,y,z) = (10,0,0) + k(0,4,3)$, $k \in \mathbb{R}$, um ponto genérico da recta AC é do tipo $(10,4k,3k)$. Assim, substituindo na equação do plano BCE, vem:

$$4 \times 4k + 3 \times 3k - 50 = 0 \Leftrightarrow 16k + 9k = 50 \Leftrightarrow 25k = 50 \Leftrightarrow k = 2$$

$\therefore$ $C(10, 4 \times 2, 3 \times 2)$, ou seja, $C(10,8,6)$.

7. As coordenadas do ponto Q são da forma $(2\cos\alpha, 2\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, dado que a circunferência tem raio 2, pois $A(2,0)$.

Como o ponto P tem a mesma abcissa que o ponto Q e como ambos pertencem à circunferência, vem que a ordenada de P é simétrica da de Q, pelo que $P(2\cos\alpha, -2\,\mathrm{sen}\,\alpha)$.

Tem-se que:

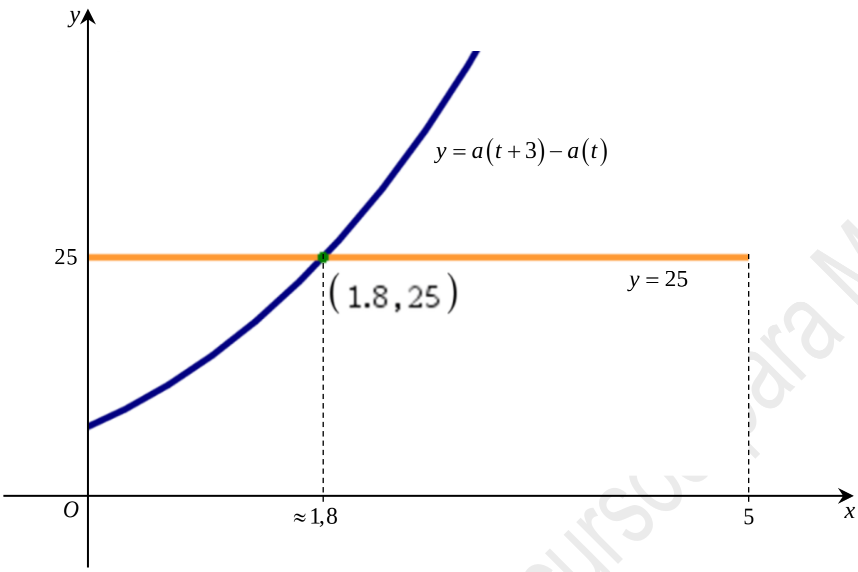
- $\overrightarrow{OP} = P - O = (2\cos\alpha, -2\,\mathrm{sen}\,\alpha) - (0,0) = (2\cos\alpha, -2\,\mathrm{sen}\,\alpha)$
- $\overrightarrow{OQ} = Q - O = (2\cos\alpha, 2\,\mathrm{sen}\,\alpha) - (0,0) = (2\cos\alpha, 2\,\mathrm{sen}\,\alpha)$

Logo, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3 \Leftrightarrow (2\cos\alpha, -2\,\mathrm{sen}\,\alpha) \cdot (2\cos\alpha, 2\,\mathrm{sen}\,\alpha) = 3 \Leftrightarrow 4\cos^2\alpha - 4\,\mathrm{sen}^2\,\alpha = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\underbrace{\left(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\,\alpha\right)}_{\cos(2\alpha)} = 3 \Leftrightarrow 4\cos(2\alpha) = 3 \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{3}{4}$$

8. Tem-se que a distância percorrida durante três segundos após um determinado instante é dada por $a(t+3)-a(t)$.

Assim, pretende-se determinar $t\in[0,5]$ tal que $a(t+3)-a(t)=25$



Logo, $t\approx 1{,}8$ segundos.

9.

I. Tem-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x+1\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=0$, pelo que a recta de equação $y=2x-1$ é assimptota oblíqua ao gráfico de f, quando $x\to+\infty$. Como esta recta não é horizontal, vem que a afirmação **I** é falsa.

II. A função g é diferenciável em, pelo que é também contínua em $\mathbb{R}$ e, consequentemente é contínua em $x=1$. Logo, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1)$.

Por outro lado, a recta r, de equação $y=2x-1$, é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1. Assim, o ponto de coordenadas $(1,g(1))$ pertence à recta r, pelo que, substituindo na equação de r, vem que $g(1)=2\times 1-1=1$.

Logo, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1)=1$, pelo que a afirmação **II** é falsa.

III. Como f é duas vezes diferenciável e como o seu gráfico tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$, vem que $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Como g é duas vezes diferenciável e como o seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]0,+\infty[$, vem que $g''(x)\leq 0$, $\forall x\in]0,+\infty[$.

Logo, $f''(x)\geq g''(x)$, $\forall x\in]0,+\infty[$, pelo que a afirmação **III** é falsa.

10. Como o z satisfaz a condição $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Re}(z)>0$, vem que o afixo de z, o ponto A, pertence à bissectriz do primeiro quadrante, pelo que um argumento de z é $\frac{\pi}{4}$.

Por outro lado, como B é o afixo de w e como $A\hat{O}B=\frac{5\pi}{8}$, vem que um argumento de w é $\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{8}=\frac{7\pi}{8}$.

Assim, $w\times z=|w|e^{i\frac{7\pi}{8}}\times|z|e^{i\frac{\pi}{4}}=|w|\times|z|e^{i\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)}=|w|\times|z|e^{i\frac{9\pi}{8}}$, e, portanto, um argumento de $w\times z$ é $\frac{9\pi}{8}$.

Resposta: C

11. Tem-se que:

$$w=\frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}-i^{17}}{i}=\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)-i^{16}\times i}{i}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-1\times i}{i}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{i}=\frac{-\sqrt{3}-i}{2i}\times\frac{-i}{-i}=\frac{\sqrt{3}i+i^2}{-2i^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}i-1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

As soluções da equação $z^2=w$ são as raízes quadradas de w. Assim, passando w para a forma trigonométrica, vem:

- $|w|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$

- Sendo α um argumento de w, vem que $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{-\frac{1}{\cancel{2}}}=-\sqrt{3}$ e α pertence ao segundo quadrante, pelo que α pode ser $-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$.

Logo, as raízes quadradas de w são dadas por $\sqrt{1}\,e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)}=e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)}$, com $k\in\{0,1\}$, pelo que:

- $k=0\rightarrow z_0=e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

- $k=1\rightarrow z_1=e^{i\frac{8\pi}{6}}=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

O conjunto solução da equação é $\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

12.

12.1. Tem-se que $f'(x)=\left(\operatorname{sen}(2x)+x\right)'=2\cos(2x)+1=2\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)+1=2\left(1-\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)+1=$

$$=2\left(1-2\operatorname{sen}^2 x\right)+1=2-4\operatorname{sen}^2 x+1=3-4\operatorname{sen}^2 x$$

Resposta: D

12.2. Pretende-se mostrar que a equação $f(x)=-x+2$ tem pelo menos uma solução em $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[$, ou seja:

$$\exists c\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[: f(c)=-c+2 \Leftrightarrow \exists c\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[: f(c)+c-2=0$$

Seja g definida em $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ por $g(x)=f(x)+x-2=\operatorname{sen}(2x)+x+x-2=\operatorname{sen}(2x)+2x-2$

- g é contínua em $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ pois é a composição e a soma entre funções contínuas no seu domínio.

- $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)+2\times\frac{\pi}{6}-2=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}-2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}-2\approx-0,09\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{6}\right)<0$

- $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{3}\right)+2\times\frac{\pi}{3}-2=\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{2\pi}{3}-2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{3}-2\approx0,96\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$

Logo, como $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $g\left(\frac{\pi}{3}\right)$ têm sinais contrários, pelo corolário do teorema de Bolzano:

$$\exists c\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[: g(c)=0 \Leftrightarrow \exists c\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[: f(c)+c-2=0$$

Fica assim provado que o gráfico da função f e a recta r intersectam-se pelo menos uma vez num ponto de abcissa pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[$.

13. Tem-se que $f'(x)=\left(ax^2+bx\right)'=2ax+b$. Como a recta de equação $y=ax+b$ é tangente ao gráfico de f, vem que $f'(x)=a \Leftrightarrow 2ax+b=a \Leftrightarrow 2ax=a-b \Leftrightarrow x=\dfrac{a-b}{2a}$.

Assim, a recta dada é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\dfrac{a-b}{2a}$, sendo que a sua ordenada é dada por:

$$y=\cancel{a}\times\frac{a-b}{2\cancel{a}}+b \underset{a\neq 0}{=} \frac{a-b}{2}+b=\frac{a-b+2b}{2}=\frac{a+b}{2}$$

Logo, as coordenadas do ponto de tangência são $\left(\dfrac{a-b}{2a},\dfrac{a+b}{2}\right)$, sendo que este ponto também pertence ao gráfico de f. Portanto:

$$f\left(\frac{a-b}{2a}\right)=\frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a\left(\frac{a-b}{2a}\right)^2+b\times\frac{a-b}{2a}=\frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \cancel{a}\times\frac{a^2-2ab+b^2}{4a^{\cancel{2}}}+\frac{ab-b^2}{2a}=\frac{a+b}{2} \Leftrightarrow$$

$$\underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{a^2-2ab+b^2}{4a}+\underset{\times 2}{\frac{ab-b^2}{2a}}=\underset{\times 2a}{\frac{a+b}{2}} \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} a^2-2ab+b^2+\cancel{2ab}-2b^2=2a^2+\cancel{2ab}$$

$$\Leftrightarrow -a^2-2ab-b^2=0 \underset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} \underbrace{a^2+2ab+b^2}_{(a+b)^2}=0 \Leftrightarrow (a+b)^2=0 \Leftrightarrow a+b=0 \Leftrightarrow b=-a$$

Logo, as coordenadas do ponto de tangência são $\left(\dfrac{a-(-a)}{2a},\dfrac{a-a}{2}\right)=\left(\dfrac{a+a}{2a},\dfrac{0}{2}\right)=\left(\dfrac{\cancel{2a}}{\cancel{2a}},0\right)\underset{a\neq 0}{=}(1,0)$.

Outra resolução:

A recta de equação $y=ax+b$ é tangente ao gráfico de f se a equação $f(x)=ax+b$ tiver apenas uma solução.

Assim, $f(x)=ax+b \Leftrightarrow ax^2+bx=ax+b \Leftrightarrow ax^2+bx-ax-b=0 \Leftrightarrow ax^2+x(b-a)-b=0$

Como esta equação é de segundo grau, então tem exactamente uma solução se o binómio discriminante for nulo, ou seja:

$$(b-a)^2-4a\times(-b)=0 \Leftrightarrow b^2-2ab+a^2+4ab=0 \Leftrightarrow \underbrace{a^2+2ab+b^2}_{(a+b)^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2=0 \Leftrightarrow a+b=0 \Leftrightarrow b=-a$$

Assim, como $b=-a$, vem que a equação fica:

$$ax^2+x(-a-a)-(-a)=0 \Leftrightarrow ax^2-2ax+a=0 \Leftrightarrow a\underbrace{\left(x^2-2x+1\right)}_{(x-1)^2}=0 \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Logo, a recta de equação $y=ax+b$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1, sendo que a sua ordenada é igual a $f(1)=a\times 1^2+b\times 1=a+b \underset{b=-a}{=} a-a=0$.

$\therefore$ As coordenadas do ponto de tangência são $(1,0)$.

FIM

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Critérios de Classificação

13 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentem organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentem organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Linguagem científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentem organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentem organizados por etapas:

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **12 pontos**

Opção **(C)**

2. .... **14 pontos**

Reconhecer que os comprimentos dos segmentos da linha poligonal são termos consecutivos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $\overline{AB}$ .... 2 pontos

Identificar a razão dessa progressão .... 2 pontos

Escrever o 100.º termo da progressão em função de $\overline{AB}$ .... 2 pontos

Escrever uma expressão para o comprimento da linha poligonal $\left(\dfrac{\overline{AB}+\overline{AB}+99\times 2}{2}\times 100,\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ .... 3 pontos

Igualar a expressão anterior a $10\,400$ .... 3 pontos

Obter o valor pedido (5 cm) .... 2 pontos

3. .... **14 pontos**

Determinar $f''(x)$ (**ver nota 1**) .... 3 pontos

Escrever $f''(x)=0$ .... 1 ponto

Determinar os zeros de f'' .... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f'' e de sentido das concavidades do gráfico de f (ou equivalente) .... 4 pontos

Apresentar os intervalos em que a concavidade do gráfico de f é voltada para cima e os intervalos em que é voltada para baixo (**ver nota 2**) .... 2 pontos

Indicar as abcissas dos pontos de inflexão $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right.$ e $\dfrac{\sqrt{2}}{2},$ ou equivalente$\left.\right)$ .... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. Se for referido que o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima em $\left]-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ e $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$, em vez de $\left]-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$, e voltada para baixo em $\left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$, em vez de $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

4.1. .... **14 pontos**

Reconhecer que a função g é contínua em $x=1$ se

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = g(1)$ .... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (7 \times 3^{x-1} - 3)$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 4$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ .... 8 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{4x-4}{e^{x-1}-1}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{4x-4}{e^{x-1}-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{4(x-1)}{e^{x-1}-1}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{4(x-1)}{e^{x-1}-1} = 4 \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-1}{e^{x-1}-1}$ .... 1 ponto

Obter $4 \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-1}{e^{x-1}-1} \underset{y=x-1}{=} 4 \lim\limits_{y \to 0^-} \dfrac{y}{e^{y}-1}$ .... 2 pontos

Obter $4 \lim\limits_{y \to 0^-} \dfrac{y}{e^{y}-1} = 4 \lim\limits_{y \to 0^-} \left(\dfrac{e^{y}-1}{y}\right)^{-1}$ (ou equivalente)..... 1 ponto

Reconhecer que $\lim\limits_{y \to 0^-} \left(\dfrac{e^{y}-1}{y}\right)^{-1} = \left(\lim\limits_{y \to 0^-} \dfrac{e^{y}-1}{y}\right)^{-1}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 4$ .... 1 ponto

Referir que $g(1) = 4$ .... 1 ponto

Concluir que a função g é contínua em $x=1$ .... 1 ponto

4.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Indicar o domínio da condição ou referir que $g(x) > 0$ em $[1, +\infty[$ .... 2 pontos

Escrever $\log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = x + \log_3 2$ .... 1 ponto

Escrever $\log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = \log_3(3^x) + \log_3 2$ .... 2 pontos

Escrever $\log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = \log_3(3^x \times 2)$ .... 2 pontos

Escrever $7 \times 3^{x-1} - 3 = 3^x \times 2$ .... 1 ponto

Reconhecer que $7 \times 3^{x-1} = \dfrac{7}{3} \times 3^x$ .... 1 ponto

Obter $3^x = 9$ .... 3 pontos

Obter a solução da equação (2) .... 2 pontos

2.º Processo

Indicar o domínio da condição ou referir que $g(x) > 0$ em $[1, +\infty[$ .... 2 pontos

Escrever $\log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = x + \log_3 2$ .... 1 ponto

Escrever $7 \times 3^{x-1} - 3 = 3^{x+\log_3 2}$ .... 2 pontos

Escrever $7 \times 3^{x-1} - 3 = 3^x \times 3^{\log_3 2}$ .... 2 pontos

Reconhecer que $7 \times 3^{x-1} = \frac{7}{3} \times 3^x$ .... 1 ponto

Reconhecer que $3^{\log_3 2} = 2$ .... 1 ponto

Obter $3^x = 9$ .... 3 pontos

Obter a solução da equação (2) .... 2 pontos

3.º Processo

Indicar o domínio da condição ou referir que $g(x) > 0$ em $[1, +\infty[$ .... 2 pontos

Escrever $\log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = x + \log_3 2$ .... 1 ponto

Escrever $\log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) - \log_3 2 = x$ .... 1 ponto

Escrever $\log_3\left(\frac{7 \times 3^{x-1} - 3}{2}\right) = x$ .... 2 pontos

Escrever $\frac{7 \times 3^{x-1} - 3}{2} = 3^x$ .... 2 pontos

Reconhecer que $7 \times 3^{x-1} = \frac{7}{3} \times 3^x$ .... 1 ponto

Obter $3^x = 9$ .... 3 pontos

Obter a solução da equação (2) .... 2 pontos

5.1. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

5.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Designemos por A o acontecimento «o jovem respondeu que praticava *surf*» e por B o acontecimento «o jovem respondeu que praticava *skate*».

1.º Processo

Escrever $P(A)=0{,}65$ .... 1 ponto

Escrever $P(B\cap\overline{A})=0{,}2$ .... 1 ponto

Escrever $P(B\mid A)=\frac{4}{5}$ .... 2 pontos

Identificar o valor pedido com $P(A\mid\overline{B})$ .... 2 pontos

Obter $P(A\cap B)$ $(0{,}52)$ .... 2 pontos

Obter $P(B)$ $(0{,}72)$ .... 2 pontos

Obter $P(\overline{B})$ $(0{,}28)$ .... 1 ponto

Obter $P(A\cap\overline{B})$ $(0{,}13)$ .... 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\frac{13}{28}\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Apresentar uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam:
A e $\overline{A}$; B e $\overline{B}$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(A)$ $(0{,}65)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(B\cap\overline{A})$ $(0{,}2)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(A\cap B)$ $(0{,}52)$ .... 3 pontos

Preencher a célula da tabela relativa a $P(A\cap\overline{B})$ $(0{,}13)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(B)$ $(0{,}72)$ .... 2 pontos

Identificar o valor pedido com $P(A\mid\overline{B})$ .... 2 pontos

Obter $P(\overline{B})$ $(0{,}28)$ .... 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\frac{13}{28}\right)$ .... 2 pontos

5.3. .... **14 pontos**

Designemos por n o número de jovens com 13 anos.

Identificar o número de jovens com 14 anos com $70-n$ .... 1 ponto

Identificar o número de casos possíveis com ${}^{70}C_2$ (ou com ${}^{70}A_2$) (**ver nota 1**) 4 pontos

Identificar o número de casos favoráveis em função de n com $n(70-n)$
(ou, tendo em conta a etapa anterior, com $2n(70-n)$) (**ver nota 2**) .... 3 pontos

Escrever a equação $\frac{n(70-n)}{{}^{70}C_2}=\frac{16}{35}$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter as soluções da equação $(24 \text{ e } 46)$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (24) .... 1 ponto

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{70}C_2$ (ou a ${}^{70}A_2$), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada não for equivalente a $n(70-n)$ (ou, tendo em conta a etapa anterior, a $2n(70-n)$), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

6.1. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

6.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Reconhecer que a reta AC é perpendicular ao plano BCD .... 1 ponto

Identificar o vetor de coordenadas $(0,4,3)$ como vetor normal
ao plano BCD .... 1 ponto

Obter as coordenadas de um ponto do plano BCD .... 2 pontos

Obter uma equação do plano BCD .... 4 pontos

- Escrever $4y+3z+d=0$ (ou equivalente) .... 2 pontos
- Escrever $4\times 12{,}5+3\times 0+d=0$ .... 1 ponto
- Obter o valor de d (-50) .... 1 ponto

Reconhecer que as coordenadas do ponto C são da forma $(10, 4k, 3k)$ ...... 2 pontos

Obter $16k+9k-50=0$ .... 2 pontos

Obter o valor de k (2) .... 1 ponto

Obter o pedido $((10,8,6))$ .... 1 ponto

2.º Processo

Reconhecer que as coordenadas do ponto A são $(10, 0, 0)$ .... 1 ponto

Reconhecer que as coordenadas do ponto B são $(10; 12{,}5; 0)$ .... 1 ponto

Reconhecer que as coordenadas do ponto C são da forma $(10, 4k, 3k)$ ...... 2 pontos

Reconhecer que os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ são perpendiculares .... 1 ponto

Obter as coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ em função de k .... 1 ponto

Obter as coordenadas de $\overrightarrow{BC}$ em função de k .... 1 ponto

Escrever $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .... 2 pontos

Obter $25k^2 - 50k = 0$ .... 2 pontos

Obter o valor de k (2) .... 2 pontos

Obter o pedido $((10, 8, 6))$ .... 1 ponto

3.º Processo

Reconhecer que as coordenadas do ponto A são $(10, 0, 0)$ .... 1 ponto

Reconhecer que as coordenadas do ponto B são $(10; 12{,}5; 0)$ .... 1 ponto

Reconhecer que as coordenadas do ponto C são da forma $(10, 4k, 3k)$ ...... 2 pontos

Reconhecer que o ponto C pertence à superfície esférica definida pela equação $(x-10)^2 + \left(y - \frac{25}{4}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2$ .... 4 pontos

Escrever $0^2 + \left(4k - \frac{25}{4}\right)^2 + (3k)^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2$ .... 2 pontos

Obter o valor de k (2) .... 3 pontos

Obter o pedido $((10, 8, 6))$ .... 1 ponto

7. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que o ponto Q tem coordenadas $(2\cos\alpha, 2\,\text{sen}\,\alpha)$ .... 3 pontos

Reconhecer que a ordenada do ponto P é $-2\,\text{sen}\,\alpha$ .... 3 pontos

Obter as coordenadas de $\overrightarrow{OP}$ .... 1 ponto

Obter as coordenadas de $\overrightarrow{OQ}$ .... 1 ponto

Obter $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 4\cos^2\alpha - 4\,\text{sen}^2\,\alpha$ .... 3 pontos

Reconhecer que $\cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha = \cos(2\alpha)$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{3}{4}\right)$ .... 1 ponto

2.º Processo

Reconhecer que $P\hat{O}Q = \alpha - (2\pi - \alpha)$ .... 4 pontos

Reconhecer que $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OA} = 2$ .... 1 ponto

Escrever $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2 \times 2 \times \cos(2\alpha - 2\pi)$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Reconhecer que $\cos(2\alpha - 2\pi) = \cos(2\alpha)$ .... 4 pontos

Escrever $4\cos(2\alpha) = 3$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\frac{3}{4}\right)$ .... 1 ponto

8. .... **14 pontos**

Identificar a distância percorrida pelo foguete durante os 3 segundos com $a(t+3) - a(t)$ .... 3 pontos

Apresentar a equação $a(t+3) - a(t) = 25$ (ou equivalente) (**ver nota 1**) ...... 2 pontos

Representar o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Assinalar o ponto relevante .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(1{,}8 \text{ s})$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que correspondem à resolução da equação que traduz corretamente o problema.
2. Se não for apresentado um referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

9. .... **14 pontos**

Tópicos de resposta

- Justifica que a proposição I é falsa: Dado que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x + 1) = 0$, a reta de equação $y = 2x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$, pelo que não existe assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$.
- Justifica que a proposição II é falsa: Dado que a reta de equação $y = 2x - 1$ é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 1, $g(1) = 1$ e, como g é diferenciável e, por conseguinte, contínua, $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 1$.
- Justifica que a proposição III é falsa: Dado que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima e o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo, $f''(x) \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$ e $g''(x) \leq 0, \forall\, x \in]0, +\infty[$, pelo que $f''(x) \geq g''(x), \forall\, x \in]0, +\infty[$.

Parâmetros	Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
A Conteúdos	**5**	Apresenta, de forma completa, as três justificações.	12
	4	Apresenta, de forma completa, duas justificações e, de forma incompleta, uma justificação.	10
	3	Apresenta, de forma completa, apenas duas justificações. OU Apresenta, de forma completa, uma justificação e, de forma incompleta, duas justificações.	8
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma justificação e, de forma incompleta, apenas outra justificação. OU Apresenta, de forma incompleta, as três justificações.	5
	1	Apresenta, de forma completa, apenas uma justificação. OU Apresenta, de forma incompleta, apenas duas justificações.	3
B Linguagem científica	**2**	Utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	2
	1	Utiliza, embora com uma ou mais falhas, o vocabulário específico da Matemática.	1

10. .... **12 pontos**

Opção **(C)**

11. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Substituir i^{17} por i .... 1 ponto

Obter $e^{i\frac{5\pi}{6}} - i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ .... 3 pontos

Obter $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .... 2 pontos

Obter $w = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .... 2 pontos

Obter $e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ como soluções da equação $z^2 = w$ .... 4 pontos

Obter os valores pedidos $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ e } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Substituir i^{17} por i .... 1 ponto

Obter $e^{i\frac{5\pi}{6}} - i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ .... 3 pontos

Obter $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .... 2 pontos

Escrever $(a+bi)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .... 2 pontos

Obter $a^2 - b^2 = -\frac{1}{2} \wedge 2ab = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .... 2 pontos

Obter os valores de a e de b .... 2 pontos

Apresentar os valores pedidos $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ e } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ .... 2 pontos

12.1. .... **12 pontos**

Opção **(D)**

12.2. .... **14 pontos**

Equacionar o problema $\left(f(x) = -x + 2\right.$, ou equivalente$\left.\right)$ .... 2 pontos

Considerar a função g, definida por $g(x) = f(x) + x - 2$ .... 2 pontos

Referir que a função g é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ (**ver notas 1 e 2**).. 2 pontos

Determinar $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ .... 2 pontos

Determinar $g\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .... 2 pontos

Concluir que $g\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0 < g\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Concluir o pretendido .... 2 pontos

Notas:

1. Se apenas for referido que a função g é contínua, esta etapa é considerada como cumprida.
2. Se for referido que a função g é contínua em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

13. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que, como f é uma função quadrática, a reta é tangente ao gráfico de f se a equação $ax^2 + bx = ax + b$ tiver apenas uma solução .... 3 pontos

Reconhecer que a equação anterior tem apenas uma solução se $(b-a)^2 + 4ab = 0$ .... 3 pontos

Concluir que $b = -a$ .... 2 pontos

Substituir b por $-a$ na equação $ax^2 + bx = ax + b$ .... 2 pontos

Obter a solução da equação anterior .... 2 pontos

Obter o pedido $((1,0))$ .... 2 pontos

2.º Processo

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Obter a solução da equação $f'(x) = a$ em função de a e de b .... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto de tangência em função de a e de b .... 3 pontos

Substituir, na equação $y = ax + b$, x e y, respetivamente, pela abcissa e pela ordenada do ponto de tangência .... 2 pontos

Concluir que $b = -a$ .... 3 pontos

Obter o pedido $((1,0))$ .... 2 pontos

Nota: Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**3.**	**4.1.**	**5.1.**	**5.3.**	**6.1.**	**6.2.**	**8.**	**9.**	**10.**	**12.1.**	**13.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	14	12	14	12	14	14	14	12	12	14	**158**

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**4.2.**	**5.2.**	**7.**	**11.**	**12.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos						**42**
TOTAL							**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\ e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim u_n = 0$.

Qual das expressões seguintes pode ser termo geral de (u_n) ?

(A) $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$ **(B)** $-\frac{n^2+1}{n}$ **(C)** $\frac{4n+3}{3n+4}$ **(D)** $\frac{(-1)^n}{n}$

2. Considere um triângulo equilátero, $[ABC]$, com $\overline{AB}=1$.

Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se um segundo triângulo; unindo os pontos médios dos lados do segundo triângulo, obtém-se um terceiro triângulo. Continuando a proceder deste modo, obtém-se uma sequência de n triângulos, sendo $n > 4$.

Na Figura 1, representam-se os primeiros quatro triângulos da sequência.

Mostre que a soma dos perímetros dos n triângulos da sequência é menor do que 6 unidades, qualquer que seja o valor de n .

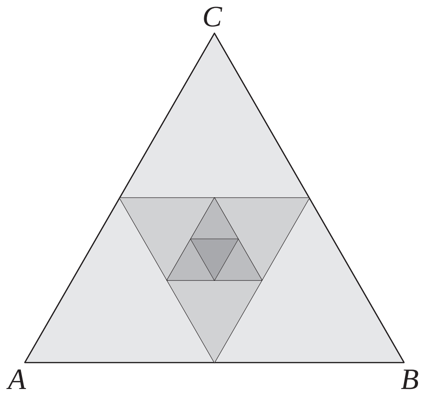


Figura 1

3. Considere todos os números naturais de seis algarismos que é possível formar com os algarismos de 1 a 9 .

Destes números, quantos têm exatamente dois cincos?

(A) $98\,415$ **(B)** $61\,440$ **(C)** $36\,015$ **(D)** $25\,200$

4. Seja E , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset E$ e $B \subset E)$.

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos equiprováveis;
- $P(\overline{A}) = 0{,}6$;
- $P(A \cup \overline{B}) = 0{,}7$.

Determine o valor de $P((A \cup \overline{B}) \mid B)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

✱ 5. Uma certa composição geométrica é formada por n hexágonos regulares inscritos em circunferências concêntricas, contidas num mesmo plano, de centro no ponto V, sendo $n > 3$.

A Figura 2 é um esquema de parte dessa composição, e nela estão representados três dos n hexágonos que formam a composição.

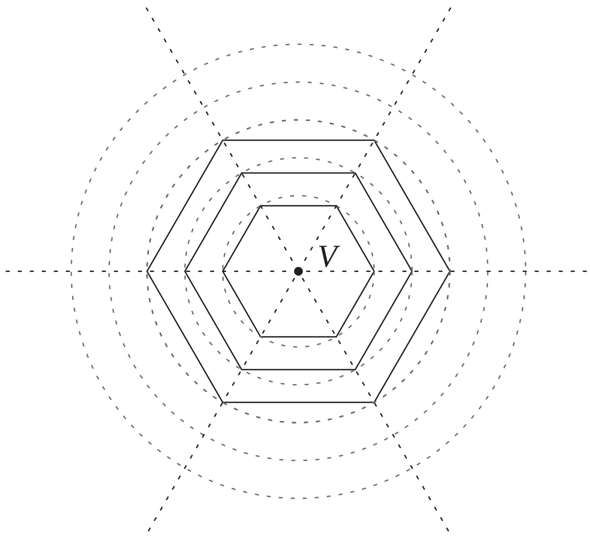


Figura 2

Considere o conjunto de pontos formado pelo ponto V e pelos vértices de todos os hexágonos da composição.

Sabe-se que, selecionando, ao acaso, dois pontos desse conjunto, a probabilidade de estes serem vértices do mesmo hexágono é igual a $\frac{5}{49}$.

Determine o valor de n.

6. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + e^{bx}$, em que a e b são números reais.

Sabendo que o gráfico da função f contém os pontos de coordenadas $(1, 5)$ e $(2, 7)$, determine os valores de a e de b.

✱ 7. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 2

8. Na Figura 3, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma hexagonal reto $[ABCDEFGHIJKL]$, de bases $[ABCDEF]$ e $[GHIJKL]$.

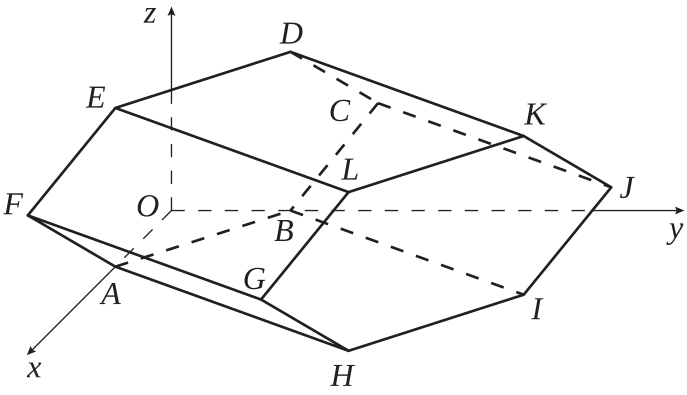


Figura 3

Sabe-se que:

- as coordenadas dos vértices A e G do prisma são, respetivamente, $(4, 0, 0)$ e $\left(12, \frac{13}{2}, 2\right)$;
- a reta EL é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (-2, -8, 4) + k(3, 4, 0)$, $k \in \mathbb{R}$.

*** 8.1.** Qual das seguintes equações define a superfície esférica de diâmetro $[AG]$?

(A) $(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{16}$

(B) $(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{4}$

(C) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{16}$

(D) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{4}$

*** 8.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do vértice F do prisma.

9. Na Figura 4, está representado, em referencial o.n. Oxy , o retângulo $[OABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox ;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy ;
- o ponto D pertence ao segmento de reta $[OA]$;
- o ponto E pertence ao segmento de reta $[CB]$;
- $\overline{EB} = \overline{OD} = \frac{\overline{OA}}{3}$;
- $\overline{OC} = \frac{\overline{OA}}{4}$;
- $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -7$.

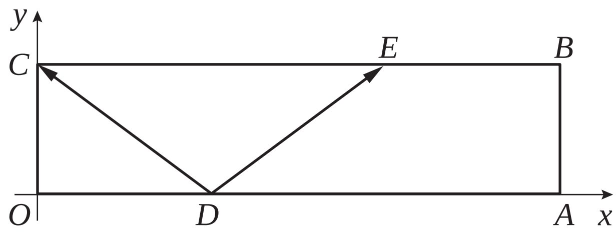


Figura 4

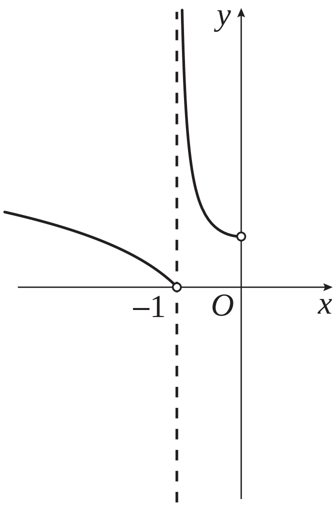
Determine $\overline{OA}$.

10. Seja g uma função par, diferenciável, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, tal que:

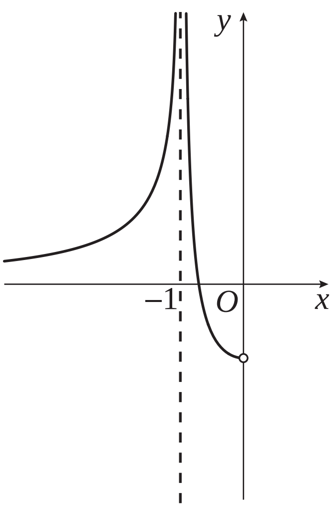
- $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$;
- $g(0) < 0$;
- $g'(x) < 0, \ \forall x \in]-\infty, -1[$.

Em cada um dos referenciais o.n. Oxy seguintes, **I**, **II** e **III**, estão representadas parte do gráfico de uma função e a assíntota a esse gráfico, de equação $x = -1$.

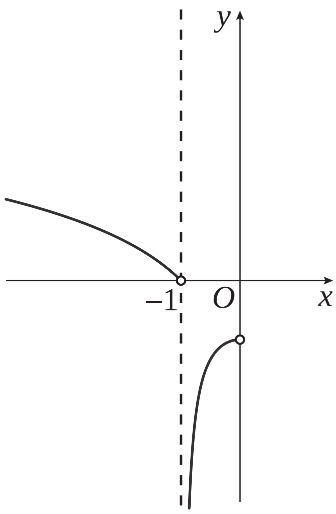
(I)



(II)



(III)



Justifique que em nenhum dos referenciais, **I**, **II** e **III**, pode estar representada parte do gráfico da função g em $]-\infty, 0[\setminus \{-1\}$.

Na sua resposta, apresente, para cada um dos referenciais, uma razão que justifique a impossibilidade de nele estar representada parte do gráfico da função g em $]-\infty, 0[\setminus \{-1\}$.

11. Na Figura 5, está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero, $[ABC]$, inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial, O .

O ponto A pertence ao semieixo imaginário positivo.

Os pontos A e B são os afixos dos números complexos z_1 e z_2, respetivamente .

A qual dos quadrantes do plano complexo pertence o afixo do número complexo $z_1^2 \times z_2$?

(A) Ao primeiro. **(B)** Ao segundo.

(C) Ao terceiro. **(D)** Ao quarto.

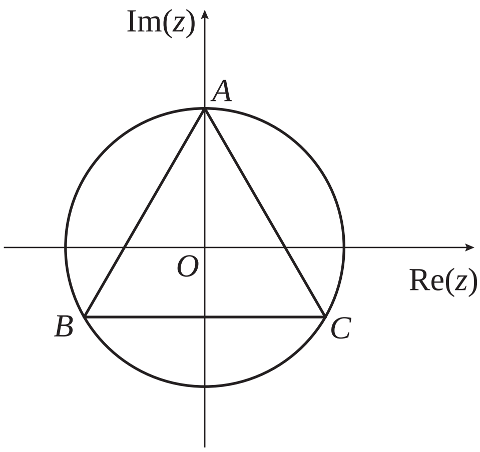


Figura 5

12. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z = \dfrac{2i^{11}e^{i\alpha}}{-1-\sqrt{3}\,i}$, com $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Sabe-se que:

- $\operatorname{Re}(z) = -\operatorname{Im}(z)$;
- o afixo de z pertence ao 4.º quadrante.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de α .

* **13.** Para fazer obras de remodelação das instalações, uma pequena empresa pretende pedir um empréstimo a um banco, a pagar em prestações mensais iguais.

De acordo com a proposta do banco, o valor da prestação mensal a pagar, p, em euros, é dado, em função da taxa de juro anual aplicada, j, em percentagem, pela expressão

$$p(j) = \frac{62{,}5j}{1-\left(1+\dfrac{j}{1200}\right)^{-120}} \quad , \quad \text{com } j > 0$$

Sabe-se que, no caso de a taxa de juro anual inicial duplicar, a prestação mensal aumentará 120 euros.

Determine, utilizando a calculadora gráfica, a taxa de juro anual inicial.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às milésimas.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

14. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \frac{\ln x + 2x}{x}$$

Resolva os itens **14.1.** e **14.2.** sem recorrer à calculadora.

* **14.1.** O gráfico da função f admite uma assíntota vertical e uma assíntota horizontal.

Determine uma equação de cada uma dessas assíntotas.

14.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos e determine esses extremos, caso existam.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia da função f.

15. Na Figura 6, estão representados, em referencial o.n. Oxy, uma semicircunferência de raio 2, e centro na origem do referencial, e o triângulo isósceles $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o vértice B pertence ao semieixo positivo Oy;
- o vértice C pertence ao semieixo negativo Ox;
- $\overline{AB} = \overline{BC}$;
- o lado $[AB]$ é tangente à semicircunferência no ponto T;
- $A\hat{O}T = \alpha$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

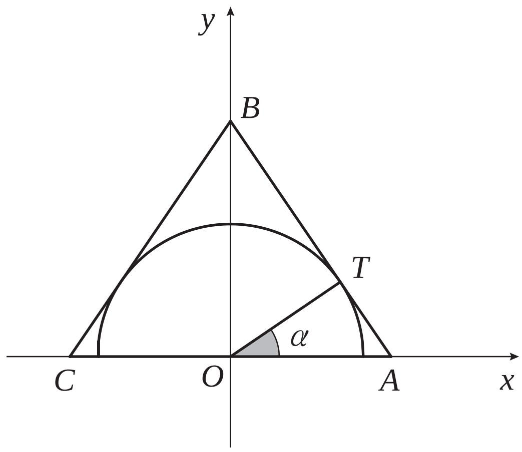


Figura 6

Prove que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de α, por $\dfrac{8}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$.

16. Considere as funções f e g, de domínio $]0, +\infty[$, definidas por $f(x) = \dfrac{k}{x}$ e por $g(x) = -\dfrac{k}{x}$, com $k > 0$.

Considere ainda:

- dois pontos P e Q, com a mesma abcissa, pertencentes, respetivamente, ao gráfico da função f e ao gráfico da função g;
- a reta s, tangente ao gráfico da função f no ponto P;
- a reta t, tangente ao gráfico da função g no ponto Q;
- o ponto R, ponto de intersecção das retas s e t.

Mostre que, qualquer que seja a abcissa dos pontos P e Q, a área do triângulo $[PQR]$ é igual a k.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**3.**	**5.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**10.**	**11.**	**13.**	**14.1.**	**15.**	**16.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	12	14	12	12	14	14	12	14	14	14	14	**158**

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**4.**	**6.**	**9.**	**12.**	**14.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos						**42**
TOTAL							**200**

Recursos Para Matemática

EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA A

2.ª FASE | 2023 | PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA A

2.ª FASE | 2023

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. A resposta correcta é a **D**, dado que:

- $\lim\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{-2}{n}\right)^n=e^{-2}$

- $\lim\left(-\frac{n^2+1}{n}\right)=\lim\left(-\frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}}-\frac{1}{n}\right)=-(+\infty)-\frac{1}{+\infty}=-\infty-0=-\infty$

- $\lim\frac{4n+3}{3n+4}=\lim\frac{\cancel{n}\left(4+\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n}\left(3+\frac{4}{n}\right)}=\frac{4+\frac{3}{+\infty}}{3+\frac{4}{+\infty}}=\frac{4+0}{3+0}=\frac{4}{3}$

- se n é par, então $\lim\frac{(-1)^n}{n}=\lim\frac{1}{n}=\frac{1}{+\infty}=0$ e se n é ímpar, então $\lim\frac{(-1)^n}{n}=\lim\frac{-1}{n}=\frac{-1}{+\infty}=0$, pelo que $\lim\frac{(-1)^n}{n}=0$.

Resposta: D

2. Seja (u_n) a sucessão que dá o perímetro do $n-$ésimo triângulo. Assim, como os triângulos são equiláteros e como para obter cada triângulo, à excepção do primeiro, unem-se os pontos médios do triângulo anterior, vem que lado de cada triângulo é metade do anterior, e portanto, o perímetro de cada triângulo é metade do anterior, isto é:

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Logo que (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Assim, como $u_1=3\overline{AB}=3\times1$, vem que a soma dos perímetros dos n triângulos da sequência é dada por:

$$S_n=u_1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=3\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}=6\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Como $\left(\frac{1}{2}\right)^n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$, vem que $-\left(\frac{1}{2}\right)^n<0\Leftrightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1\Leftrightarrow 6\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)<6$, pelo que se conclui que para todo o $n\in\mathbb{N}$ a soma dos perímetros dos n triângulos da sequência é inferior a 6.

3. Das seis posições possíveis escolhem-se duas para os dois 5, o número de maneiras de o fazer é ${}^6C_2$.

Para as restantes quatro posições temos oito possibilidades para cada uma delas, qualquer um dos algarismos, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 9.

Logo, o total de números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9, com exactamente dois cincos é ${}^6C_2 \times 8^4 = 61440$.

Resposta: B

4. Tem-se que:

$$P\left(\left(A \cup \bar{B}\right) \middle| B\right) = \frac{P\left(\left(A \cup \bar{B}\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\left(A \cap B\right) \cup \left(B \cap \bar{B}\right)\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\left(A \cap B\right) \cup \varnothing\right)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Assim:

- como A e B são equiprováveis, vem que $P(B) = P(A)$, pelo que:

$$P\left(\bar{A}\right) = 0,6 \Leftrightarrow 1 - P(A) = 0,6 \Leftrightarrow P(A) = 0,4 \Leftrightarrow P(B) = 0,4$$

- $P\left(A \cup \bar{B}\right) = 0,7 \Leftrightarrow P(A) + P\left(\bar{B}\right) - \underbrace{P\left(A \cap \bar{B}\right)}_{P(A) - P(A \cap B)} = 0,7 \Leftrightarrow \cancel{P(A)} + 1 - P(B) - \cancel{P(A)} + P(A \cap B) = 0,7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow +1 - 0,4 + P(A \cap B) = 0,7 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,7 - 1 + 0,4 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1$$

Logo, $P\left(\left(A \cup \bar{B}\right) \middle| B\right) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,1}{0,4} = \dfrac{1}{4}$.

5. Cada hexágono tem seis vértices, pelo que, como são n hexágonos, vem que existem $6n$ vértices nos n hexágonos. Como se escolhem dois pontos do conjunto formado pelo ponto V e pelos $6n$ vértices, vem que o número de casos possíveis é:

$${}^{6n+1}C_2 = \frac{(6n+1)!}{2!(6n+1-2)!} = \frac{(6n+1) \times 6n \times \cancel{(6n-1)!}}{2 \times \cancel{(6n-1)!}} = 3n(6n+1)$$

O número de casos favoráveis é $n \times {}^6C_2 = 15n$, que é o número de maneiras de escolher dois vértices de um dos n hexágonos.

Assim, para $n \in \mathbb{N}$, tem-se, $\dfrac{15\cancel{n}}{3\cancel{n}(6n+1)} = \dfrac{5}{49} \Leftrightarrow \dfrac{\cancel{5}}{6n+1} = \dfrac{\cancel{5}}{49} \Leftrightarrow 6n+1 = 49 \Leftrightarrow 6n = 48 \Leftrightarrow n = 8$.

6. Como os pontos de coordenadas $(1,5)$ e $(2,7)$ pertencem ao gráfico de f, vem que $f(1)=5$ e $f(2)=7$, pelo que:

$$\begin{cases} f(1)=5 \\ f(2)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+e^{b\times 1}=5 \\ a+e^{b\times 2}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{b}=5-a \\ a+\left(e^{b}\right)^{2}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{b}=5-a \\ a+(5-a)^{2}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{b}=5-a \\ a+25-10a+a^{2}=7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{b}=5-a \\ a^{2}-9a+18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{b}=5-a \\ a=\dfrac{9\pm\sqrt{(-9)^{2}-4\times1\times18}}{2\times1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{b}=5-a \\ a=3 \ \vee \ a=6 \end{cases}$$

Assim, para $a=3$, vem que $e^{b}=5-3 \Leftrightarrow e^{b}=2 \Leftrightarrow b=\ln 2$, e para $a=6$, vem que $e^{b}=5-6 \Leftrightarrow e^{b}=-1$, que é uma equação impossível, pelo que $a=3$ e $b=\ln 2$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\operatorname{sen}x\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\times\lim\limits_{x\to0}(2\cos x)=1\times2\cos(0)=1\times2\times1=2$.

Resposta: D

8.

8.1. O centro da superfície esférica é o ponto médio do segmento de recta $[AG]$, isto é:

$$M_{[AG]}\left(\frac{4+12}{2},\frac{0+\frac{13}{2}}{2},\frac{0+2}{2}\right)\text{, ou seja, } M_{[AG]}\left(8,\frac{13}{4},1\right)$$

A medida do raio é dada por $\overline{AM}=\sqrt{(4-8)^{2}+\left(0-\frac{13}{4}\right)^{2}+(0-1)^{2}}=\sqrt{16+\frac{169}{16}+1}=\sqrt{\frac{441}{16}}=\frac{21}{4}$

Assim, a equação da superfície esférica de diâmetro $[AG]$ é dada por:

$$(x-8)^{2}+\left(y-\frac{13}{4}\right)^{2}+(z-1)^{2}=\left(\frac{21}{4}\right)^{2} \Leftrightarrow (x-6)^{2}+\left(y-\frac{13}{4}\right)^{2}+(z-1)^{2}=\frac{441}{16}$$

Resposta: A

8.2. Como o prisma é hexagonal e recto, vem que recta FG é paralela à recta EL, pelo que um vector director da recta FG é o vector de coordenadas $\vec{r}(3,4,0)$.

Assim, como a recta FG, contém o ponto G, vem que uma equação vectorial da recta FG é:

$$(x,y,z)=\left(12,\frac{13}{2},2\right)+k(3,4,0)\,,\ k\in\mathbb{R}$$

Logo, as coordenadas do ponto F são da forma $F\left(12+3k,\frac{13}{2}+4k,2\right)$.

Mas os vectores $\overrightarrow{AF}$ e $\vec{r}$ são perpendiculares, pelo que $\overrightarrow{AF}\cdot\vec{r}=0$.

Como $\overrightarrow{AF}=F-A=\left(12+3k,\frac{13}{2}+4k,2\right)-(4,0,0)=\left(8+3k,\frac{13}{2}+4k,2\right)$, tem-se que:

$$\overrightarrow{AF}\cdot\vec{r}=0\Leftrightarrow\left(8+3k,\frac{13}{2}+4k,2\right)\cdot(3,4,0)=0\Leftrightarrow 3(8+3k)+4\left(\frac{13}{2}+4k\right)+2\times 0=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24+9k+26+16k=0\Leftrightarrow 25k=-50\Leftrightarrow k=-2$$

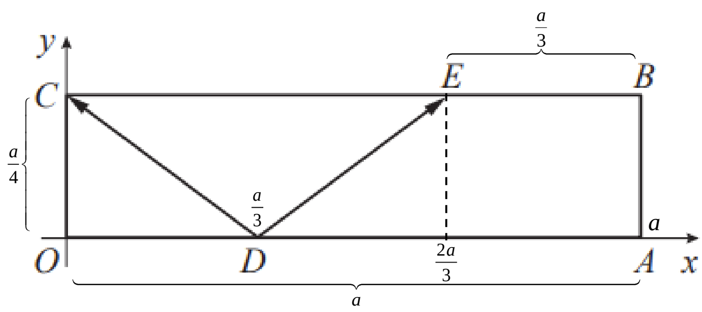
Logo, $F\left(12+3\times(-2),\frac{13}{2}+4\times(-2),2\right)$, ou seja, $F\left(6,-\frac{3}{2},2\right)$.

9. Seja $a\in\mathbb{R}^+$, a abcissa do ponto A. Assim, $\overline{OA}=a$.

Assim:

- como $\overline{OD}=\frac{\overline{OA}}{3}$, vem que $\overline{OD}=\frac{a}{3}$ e como D pertence ao eixo Ox, vem que $D\left(\frac{a}{3},0\right)$
- como $\overline{OC}=\frac{\overline{OA}}{4}$, vem que $\overline{OC}=\frac{a}{4}$, vem que a ordenada de E é $\frac{a}{4}$.

Por outro lado, $\overline{CE}=\overline{OA}-\overline{EB}=\overline{OA}-\frac{\overline{OA}}{3}=a-\frac{a}{3}=\frac{2a}{3}$, vem que a abcissa de E é $\frac{2a}{3}$, e portanto $E\left(\frac{2a}{3},\frac{a}{4}\right)$



Tem-se que:

- $\overrightarrow{DC} = C - D = \left(0, \frac{a}{4}\right) - \left(\frac{a}{3}, 0\right) = \left(-\frac{a}{3}, \frac{a}{4}\right)$

- $\overrightarrow{DE} = E - D = \left(\frac{2a}{3}, \frac{a}{4}\right) - \left(\frac{a}{3}, 0\right) = \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{4}\right)$

Portanto, $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -7 \Leftrightarrow \left(-\frac{a}{3}, \frac{a}{4}\right) \cdot \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{4}\right) = -7 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{16} = -7 \Leftrightarrow -\frac{7a^2}{144} = -7 \Leftrightarrow \cancel{7}a^2 = \cancel{7} \times 144 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2 = 144 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{144} \Leftrightarrow a = 12$$

$\therefore \overline{OA} = 12$

10.

I. A função g é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, pelo que também o é em $x = 0$, pelo que é contínua em $x = 0$. Logo, $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$ e, portanto, como $g(0) < 0$, vem que $\lim_{x \to 0} g(x) < 0$. Logo, o gráfico da opção **I** não pode representar a função g dado que o limite quando x tende para zero por valores à esquerda é positivo.

II. Dado que $g'(x) < 0$ para todo o $x \in]-\infty, -1[$, vem que g é decrescente em $]-\infty, -1[$, pelo que o gráfico da opção **II** não pode representar a função g, visto que a função representada neste gráfico é crescente em $]-\infty, -1[$.

III. Como a função g é par e como $\lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$, vem que $\lim_{x \to -1^+} g(x) = +\infty$, pelo que o gráfico da opção **III** não pode representar o gráfico de g, dado que nesta opção o limite quando x tende para -1 à sua direita é $-\infty$.

11. Tem-se que um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{2}$ e, dado que o triângulo $[ABC]$ é equilátero, um argumento de z_2 é $\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}$.

Assim, sendo r a medida do raio da circunferência, vem que $\overline{OA}=\overline{OB}=r$ e:

$$(z_1)^2\times z_2=\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2\times re^{i\frac{7\pi}{6}}=r^2e^{i\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)}\times re^{i\frac{7\pi}{6}}=r^3e^{i\left(\pi+\frac{7\pi}{6}\right)}=r^3e^{i\frac{13\pi}{6}}=r^3e^{i\left(\frac{13\pi}{6}-2\pi\right)}=r^3e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Logo, como o ângulo de amplitude $\frac{\pi}{6}$ pertence ao primeiro quadrante, vem que o afixo de $(z_1)^2\times z_2$ pertence ao primeiro quadrante.

Resposta: A

12. Como o afixo de z pertence ao quatro quadrante e satisfaz a condição $\operatorname{Re}(z)=-\operatorname{Im}(z)$, isto é, o seu afixo pertence também à bissectriz dos quadrantes pares, vem que um argumento de z é $-\frac{\pi}{4}$.

Tem-se que:

- $2i^{11}=2i^8\times i^3=2\times1\times(-i)=-2i=2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$
- $\left|-1-\sqrt{3}i\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$ e sendo θ um argumento de $-1-\sqrt{3}i$, vem que:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3} \text{ e } \theta \text{ pertence ao terceiro quadrante} \Rightarrow \frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$$

Logo, $-1-\sqrt{3}i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

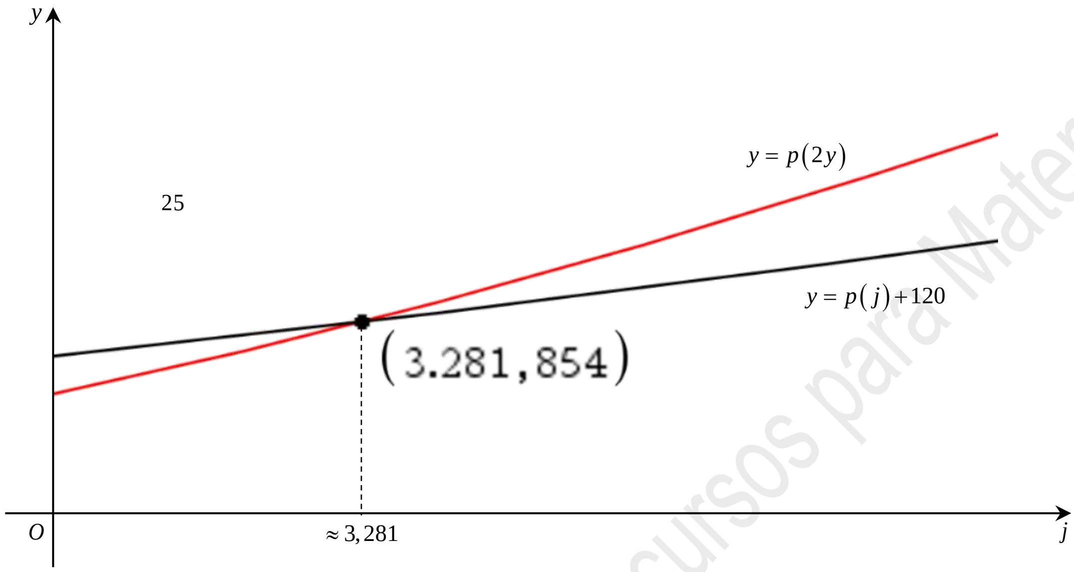
Assim, $z=\frac{2i^{11}e^{i\alpha}}{-1-\sqrt{3}i}=\frac{\cancel{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}e^{i\alpha}}{\cancel{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}}=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha-\frac{4\pi}{3}\right)}=e^{i\left(\alpha-\frac{11\pi}{6}\right)}$

Portanto, $\alpha-\frac{11\pi}{6}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha=\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha=\frac{19\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\therefore\ \alpha=\frac{19\pi}{12}\ (k=0)$

13. Tem-se que se a taxa duplica, então o juro a pagar é dado por $p(2j)$.

Assim, pretende-se determinar $j > 0$ tal que $p(2j) = p(j) + 120$



Logo, $j \approx 3,281\,\%$.

14.

14.1.

Assimptotas verticais

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x + 2x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}\right) = \frac{\ln(0^+)}{0^+} + 2 = \frac{-\infty}{0^+} + 2 = -\infty + 2 = -\infty$$

Logo, a recta de equação $x = 0$ é assimptota vertical ao gráfico de f .

Como f é contínua em $]0,+\infty[$, o seu gráfico não tem mais assimptotas verticais.

Assimptota horizontal

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x + 2x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}\right) = \underbrace{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Limite notável}} + 2 = 0 + 2 = 2$$

Logo, a recta de equação $y = 2$ é assimptota horizontal ao gráfico de f , quando $x \to +\infty$.

14.2. Tem-se que:

- $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x+2x}{x}\right)'=\dfrac{(\ln x+2x)'\times x-(\ln x+2x)\times x'}{x^2}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}+2\right)\times x-(\ln x+2x)\times 1}{x^2}=$

$$=\frac{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}+\cancel{2x}-\ln x-\cancel{2x}}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\ \wedge\ x^2\neq 0\Leftrightarrow -\ln x=-1\ \wedge\ x\neq 0\Leftrightarrow \ln x=1\ \wedge\ x\neq 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=e^1\ \wedge\ x\neq 0\Leftrightarrow x=e\ \wedge\ x\neq 0$$

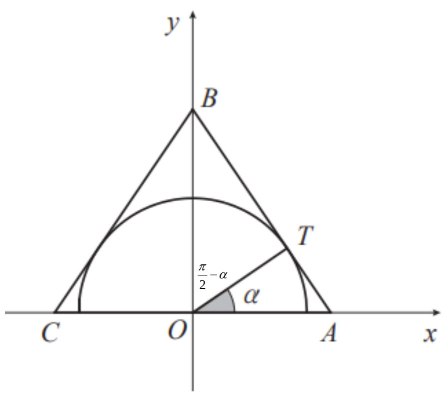
Elaborando um quadro de sinal de f' e relacionando com a monotonia de f, vem:

x	0		e	$+\infty$
$1-\ln x$	n.d.	$+$	0	$-$
x^2	n.d.	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$
f	n.d.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$

A função f é crescente em $]0,e]$, é decrescente em $[e,+\infty[$ e tem máximo em $x=e$, que é:

$$f(e)=\frac{\ln e+2e}{e}=\frac{1+2e}{e}=\frac{1}{e}+\frac{2\cancel{e}}{\cancel{e}}=\frac{1}{e}+2$$

15. Consideremos a figura:



A área do triângulo $[ABC]$ é dada por $\dfrac{\overline{AC}\times\overline{OB}}{2} \underset{\overline{AC}=2\overline{OA}}{=} \dfrac{\cancel{2}\overline{OA}\times\overline{OB}}{\cancel{2}} = \overline{OA}\times\overline{OB}$.

Como a recta AB é tangente à circunferência no ponto T, vem que os triângulos $[OTA]$ e $[OTB]$ são rectângulos em T, pelo que:

- $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OT}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{2}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \dfrac{2}{\cos\alpha}$

- $\underbrace{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{=\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\overline{OT}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \overline{OB} = \dfrac{2}{\operatorname{sen}\alpha}$

Portanto, a área de $[ABC]$ é dada, em função de α, por:

$$\frac{\overline{AC}\times\overline{OB}}{2} \underset{\overline{AC}=2\overline{OA}}{=} \frac{\cancel{2}\overline{OA}\times\overline{OB}}{\cancel{2}} = \overline{OA}\times\overline{OB} = \frac{2}{\cos\alpha}\times\frac{2}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{4}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{4\times 2}{\underbrace{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}_{=\operatorname{sen}(2\alpha)}} = \frac{8}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$$

16. Seja a a abcissa dos pontos P e Q.

Assim, como P e Q pertencem aos gráficos de f e g, respectivamente, vem que:

$$P(a, f(a))\text{, ou seja, } P\left(a,\frac{k}{a}\right) \text{ e } Q(a,g(a))\text{, ou seja, } P\left(a,-\frac{k}{a}\right)$$

Tem-se que $f'(x)=\left(\dfrac{k}{x}\right)' = \dfrac{k'\times x-k\times x'}{x^2} = \dfrac{0\times x-k\times 1}{x^2} = -\dfrac{k}{x^2}$ e $g'(x)=\left(-\dfrac{k}{x}\right)' = -\left(\dfrac{k}{x}\right)' = \dfrac{k}{x^2}$

Logo:

- sendo s a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a, vem que $m_s = -\dfrac{k}{a^2}$, pelo que $s: y = -\dfrac{k}{a^2}x + b_1$

Como $P\left(a,\dfrac{k}{a}\right)$ pertence à recta s, vem que $\dfrac{k}{a} = -\dfrac{k}{a^{\cancel{2}}}\times\cancel{a} + b_1 \Leftrightarrow b_1 = \dfrac{k}{a}+\dfrac{k}{a} \Leftrightarrow b_1 = \dfrac{2k}{a}$

Portanto, $s: y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2k}{a}$

- sendo t a recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa a, vem que $m_s = \frac{k}{a^2}$, pelo que $s: y = \frac{k}{a^2}x + b_2$

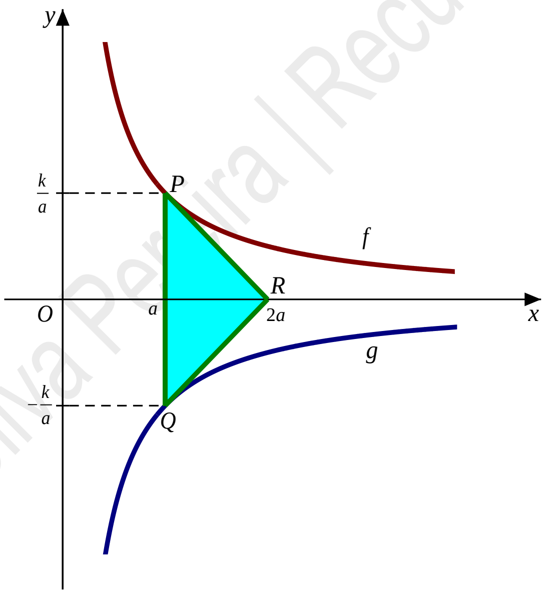
Como $Q\left(a, -\frac{k}{a}\right)$ pertence à recta s, vem que $-\frac{k}{a} = \frac{k}{a^{\cancel{2}}} \times \cancel{a} + b_2 \Leftrightarrow b_2 = -\frac{k}{a} - \frac{k}{a} \Leftrightarrow b_2 = -\frac{2k}{a}$

Portanto, $t: y = \frac{1}{a^2}x - \frac{2k}{a}$

- determinando as coordenadas do ponto de intersecção das rectas s e t, vem que:

$$-\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a} = \frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a} \Leftrightarrow \frac{2k}{a} + \frac{2k}{a} = \frac{k}{a^2}x + \frac{k}{a^2}x \Leftrightarrow \frac{4\cancel{k}}{\cancel{a}} = \frac{2\cancel{k}}{a^{\cancel{2}}}x \Leftrightarrow 4 = \frac{2x}{a} \Leftrightarrow 4a = 2x \Leftrightarrow x = 2a$$

A ordenada do ponto de intersecção é $y = \frac{k}{a^{\cancel{2}}} \times 2\cancel{a} - \frac{2k}{a} = \frac{2k}{a} - \frac{2k}{a} = 0 \Rightarrow R(2a, 0)$



A altura do triângulo $[PQR]$ é dada por $2a - a = a$, pelo que a área do triângulo $[PQR]$ é dada por:

$$\frac{1}{2} \times \frac{\overline{PQ} \times a}{2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{k}{a} - \left(-\frac{k}{a}\right)\right) \times a = \frac{1}{2} \times \left(\frac{k}{a} + \frac{k}{a}\right) \times a = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}k}{\cancel{a}} \times \cancel{a} = k$$

F I M

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Critérios de Classificação 13 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentem organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentem organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Linguagem científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentem organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentem organizados por etapas:

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **12 pontos**

Opção **(D)**

2. .... **14 pontos**

Reconhecer que os perímetros dos triângulos da sequência são termos consecutivos de uma progressão geométrica .... 2 pontos

Identificar a razão da progressão $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 2 pontos

Identificar o primeiro termo da progressão (3) .... 1 ponto

Mostrar o pretendido .... 9 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever uma expressão para a soma dos perímetros dos n triângulos $\left(S_n = 3 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right.$, ou equivalente$\left.\vphantom{\dfrac{1}{2}}\right)$ .... 3 pontos

Reconhecer que $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$ é uma condição universal .... 4 pontos

Concluir o pretendido .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever uma expressão para a soma dos perímetros dos n triângulos $\left(S_n = 3 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right.$, ou equivalente$\left.\vphantom{\dfrac{1}{2}}\right)$ .... 3 pontos

Calcular o limite da sucessão de termo geral S_n .... 3 pontos

Referir que (S_n) é crescente .... 2 pontos

Concluir o pretendido .... 1 ponto

3. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

4. .... **14 pontos**

Escrever $P((A\cup\overline{B})\,|\,B)=\dfrac{P((A\cup\overline{B})\cap B)}{P(B)}$ .... 1 ponto

Obter $P(A)$ $(0{,}4)$ .... 1 ponto

Reconhecer que $P(B)=P(A)$ .... 1 ponto

Obter $P(\overline{B})$ $(0{,}6)$ .... 1 ponto

Reconhecer que $(A\cup\overline{B})\cap B=A\cap B$ .... 3 pontos

Escrever $P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\cap\overline{B})$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter $P(A\cap\overline{B})$ $(0{,}3)$ .... 2 pontos

Escrever $P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap\overline{B})$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $P(A\cap B)$ $(0{,}1)$ .... 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(\dfrac{1}{4}\right)$ .... 1 ponto

5. .... **14 pontos**

Identificar o número de casos possíveis com
${}^{6n+1}C_2$ (ou com ${}^{6n+1}A_2$) (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Identificar o número de casos favoráveis com
${}^{6}C_2\times n$ (ou, tendo em conta a etapa anterior, com ${}^{6}A_2\times n$) (**ver nota 2**) .... 4 pontos

Escrever a equação $\dfrac{{}^{6}C_2\times n}{{}^{6n+1}C_2}=\dfrac{5}{49}$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter o valor pedido (8) .... 3 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{6n+1}C_2$ (ou a ${}^{6n+1}A_2$), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{6}C_2\times n$ (ou, tendo em conta a etapa anterior, a ${}^{6}A_2\times n$), a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

6. .... **14 pontos**

Reconhecer que $f(1)=5$ e que $f(2)=7$ .... 3 pontos

Escrever $a+e^b=5\ \wedge\ a+e^{2b}=7$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter as soluções da condição $a+e^b=5\ \wedge\ a+e^{2b}=7$ .... 9 pontos

- Obter $e^{2b}-e^b-2=0$ (ou equivalente) ou
  $a^2-9a+18=0$ (ou equivalente) .... 4 pontos
- Obter $e^b=2\ \vee\ e^b=-1$ ou $a=6\ \vee\ a=3$ .... 2 pontos
- Reconhecer que $e^b=-1$ é uma condição impossível .... 1 ponto
- Obter os valores pedidos $(a=3$ e $b=\ln 2)$ .... 2 pontos

7. .... **12 pontos**

Opção **(D)**

8.1. .... **12 pontos**

Opção **(A)**

8.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que a reta EL é perpendicular ao plano ABC .... 1 ponto

Identificar o vetor de coordenadas $(3, 4, 0)$ como vetor normal ao plano ABC .... 1 ponto

Obter uma equação do plano ABC .... 4 pontos

- Escrever $3x + 4y + d = 0$ .... 2 pontos
- Escrever $3 \times 4 + d = 0$ .... 1 ponto
- Obter o valor de d (-12) .... 1 ponto

Reconhecer que a reta FG é paralela à reta EL .... 2 pontos

Reconhecer que as coordenadas do ponto F são da forma $\left(12 + 3k, \frac{13}{2} + 4k, 2\right)$ .... 2 pontos

Escrever $3(12 + 3k) + 4\left(\frac{13}{2} + 4k\right) - 12 = 0$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter o valor de k (-2) .... 2 pontos

Obter o pedido $\left(\left(6, -\frac{3}{2}, 2\right)\right)$ .... 1 ponto

2.º Processo

Sejam (a, b, c) as coordenadas do ponto F.

Reconhecer que o vetor $\overrightarrow{AF}$ é perpendicular ao vetor de coordenadas $(3, 4, 0)$ .... 2 pontos

Determinar, em função de a, b e c, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AF}$ .... 2 pontos

Escrever $3(a-4)+4b=0$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Reconhecer que o vetor $\overrightarrow{GF}$ é colinear com o vetor de coordenadas $(3, 4, 0)$ .... 2 pontos

Determinar, em função de a, b e c, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GF}$ .... 2 pontos

Escrever $\dfrac{a-12}{3}=\dfrac{b-\frac{13}{2}}{4} \wedge c-2=0$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o pedido $\left(\left(6, -\dfrac{3}{2}, 2\right)\right)$ .... 2 pontos

9. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Seja a a abcissa do ponto A.

Reconhecer que as coordenadas dos pontos C, D e E são, respetivamente, $\left(0, \dfrac{a}{4}\right)$, $\left(\dfrac{a}{3}, 0\right)$ e $\left(\dfrac{2a}{3}, \dfrac{a}{4}\right)$ .... 3 pontos

Determinar as coordenadas de $\overrightarrow{DC}$ em função de a .... 3 pontos

Determinar as coordenadas de $\overrightarrow{DE}$ em função de a .... 3 pontos

Obter $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -\dfrac{a}{3} \times \dfrac{a}{3} + \dfrac{a}{4} \times \dfrac{a}{4}$ .... 3 pontos

Escrever $-\dfrac{a^2}{9}+\dfrac{a^2}{16}=-7$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter o valor pedido (12) .... 1 ponto

2.º Processo

Seja P a projeção ortogonal de E no segmento de reta $[OA]$.

Escrever $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$ .... 2 pontos

Escrever $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PE}$ .... 2 pontos

Escrever $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PE})$ .... 1 ponto

Obter $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PE}$ .... 2 pontos

Obter $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PE}$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\|\overrightarrow{DO}\| = \|\overrightarrow{DP}\|$ .... 1 ponto

Obter $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -\frac{\overline{OA}}{3} \times \frac{\overline{OA}}{3} + \frac{\overline{OA}}{4} \times \frac{\overline{OA}}{4}$ .... 2 pontos

Escrever $-\frac{\overline{OA}^2}{9} + \frac{\overline{OA}^2}{16} = -7$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter o valor pedido (12) .... 1 ponto

3.º Processo

Seja a o comprimento de $[OA]$ e seja α a amplitude do ângulo CDO.

Escrever $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = \|\overrightarrow{DC}\|\|\overrightarrow{DE}\| \cos(E\hat{D}C)$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\|\overrightarrow{DC}\| = \|\overrightarrow{DE}\|$ .... 1 ponto

Obter $\|\overrightarrow{DC}\|$ em função de a .... 2 pontos

Calcular $\cos(E\hat{D}C)$ .... 8 pontos

- Reconhecer que $C\hat{D}O = A\hat{D}E$ .... 1 ponto
- Reconhecer que $E\hat{D}C = \pi - 2\alpha$ .... 1 ponto
- Escrever $\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos(2\alpha)$ .... 1 ponto
- Escrever $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$ (ou equivalente) .... 1 ponto
- Obter o valor de $\cos\alpha$ .... 3 pontos
- Obter o valor de $\cos(E\hat{D}C)$ .... 1 ponto

Obter $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE}$ em função de a .... 1 ponto

Obter o valor pedido (12) .... 1 ponto

10. .... **14 pontos**

Tópicos de resposta

- Justifica a impossibilidade relativa ao referencial I: Dado que g, por ser diferenciável, é contínua, tem-se $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = g(0) < 0$. Na função representada no referencial I, o limite quando x tende para 0, por valores à esquerda, é positivo .
- Justifica a impossibilidade relativa ao referencial II: Dado que $g'(x) < 0, \forall\, x \in \left]-\infty, -1\right[$, g é decrescente em $\left]-\infty, -1\right[$. A função representada no referencial II não é decrescente no intervalo $\left]-\infty, -1\right[$.
- Justifica a impossibilidade relativa ao referencial III: Dado que g é par e $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$, tem-se $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = +\infty$, o que não se observa na representação gráfica do referencial III.

Parâmetros	Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
A Conteúdos	**5**	Apresenta, de forma completa, as três justificações.	12
	4	Apresenta, de forma completa, duas justificações e, de forma incompleta, uma justificação.	10
	3	Apresenta, de forma completa, apenas duas justificações. OU Apresenta, de forma completa, uma justificação e, de forma incompleta, duas justificações.	8
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma justificação e, de forma incompleta, apenas outra justificação. OU Apresenta, de forma incompleta, as três justificações.	5
	1	Apresenta, de forma completa, apenas uma justificação. OU Apresenta, de forma incompleta, apenas duas justificações.	3
B Linguagem científica	**2**	Utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	2
	1	Utiliza, embora com uma ou mais falhas, o vocabulário específico da Matemática.	1

11. .... **12 pontos**

Opção **(A)**

12. .... **14 pontos**

Substituir i^{11} por $-i$ .... 1 ponto

Escrever $-2i = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $2e^{i\frac{3\pi}{2}} \times e^{i\alpha} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Escrever $-1-\sqrt{3}\,i$ na forma trigonométrica .... 3 pontos

Determinar $\left|-1-\sqrt{3}\,i\right|$ .... 1 ponto

Determinar um argumento de $-1-\sqrt{3}\,i$ .... 2 pontos

Obter $z = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Reconhecer que $z = e^{i\frac{7\pi}{4}}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Concluir que $\alpha = \dfrac{19\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o valor pedido $\left(\dfrac{19\pi}{12}\right)$ .... 1 ponto

13. .... **14 pontos**

Identificar a prestação mensal após o acréscimo de 120 euros com $p(j)+120$ .... 2 pontos

Apresentar a equação $p(2j) = p(j)+120$ (ou equivalente) (**ver nota 1**) ..... 3 pontos

Representar o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Assinalar o ponto relevante .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(3{,}281\%)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que correspondem à resolução da equação que traduz corretamente o problema.

2. Se não for apresentado um referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

14.1. .... **14 pontos**

Determinar uma equação da assíntota vertical .... 6 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ .... 2 pontos

Concluir que $x = 0$ é uma equação da assíntota vertical .... 2 pontos

2.º Processo

Referir que a função f é contínua em $]0, +\infty[$ .... 4 pontos

Concluir que $x = 0$ é uma equação da assíntota vertical .... 2 pontos

Determinar uma equação da assíntota horizontal .... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x + 2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x} + 2\right)$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x} + 2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} + 2$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ .... 1 ponto

Concluir que $y = 2$ é uma equação da assíntota horizontal .. 2 pontos

14.2. .... **14 pontos**

Determinar $f'(x)$ (**ver nota 1**) .... 3 pontos

Escrever $f'(x) = 0$ .... 1 ponto

Determinar os zeros de f' .... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f .... 4 pontos

Apresentar os intervalos de monotonia de f (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Reconhecer que o extremo relativo é $f(e)$ .... 1 ponto

Determinar $f(e)$ $\left(\dfrac{1}{e} + 2\text{, ou equivalente}\right)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que a função f é crescente em $]0, e[$, em vez de $]0, e]$, e decrescente em $]e, +\infty[$, em vez de $[e, +\infty[$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

15. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $\frac{2}{\overline{OB}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter $\overline{OB} = \frac{2}{\text{sen}\,\alpha}$ .... 2 pontos

Escrever $\frac{2}{\overline{OA}} = \cos\alpha$ .... 2 pontos

Obter $\overline{OA} = \frac{2}{\cos\alpha}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\overline{AC} = \frac{4}{\cos\alpha}$ .... 1 ponto

Identificar a área do triângulo $[ABC]$ com

$\frac{\frac{4}{\cos\alpha} \times \frac{2}{\text{sen}\,\alpha}}{2}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $\frac{8}{2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}$ .... 1 ponto

Concluir o pretendido .... 2 pontos

2.º Processo

Reconhecer que α é a inclinação da reta OT .... 1 ponto

Reconhecer que o declive da reta AB é $-\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$ .... 1 ponto

Reconhecer que as coordenadas do ponto T são $(2\cos\alpha, 2\,\text{sen}\,\alpha)$ .... 1 ponto

Escrever $y = -\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}x + b$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter $b = \frac{2}{\text{sen}\,\alpha}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\overline{OB} = \frac{2}{\text{sen}\,\alpha}$ .... 1 ponto

Determinar a abcissa do ponto A .... 2 pontos

Escrever $-\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}x + \frac{2}{\text{sen}\,\alpha} = 0$ .... 1 ponto

Obter $x = \frac{2}{\cos\alpha}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\overline{AC} = \frac{4}{\cos\alpha}$ .... 1 ponto

Identificar a área do triângulo $[ABC]$ com

$\frac{\frac{4}{\cos\alpha} \times \frac{2}{\text{sen}\,\alpha}}{2}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $\frac{8}{2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}$ .... 1 ponto

Concluir o pretendido .... 2 pontos

16. .... **14 pontos**

Designe-se por a a abcissa dos pontos P e Q.

Reconhecer que as ordenadas dos pontos P e Q são, respetivamente, $\frac{k}{a}$ e $-\frac{k}{a}$ .... 2 pontos

Determinar $f'(x)$ e $g'(x)$ .... 2 pontos

Obter as equações das retas tangentes aos gráficos das funções f e g, respetivamente, nos pontos P e Q .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto R .... 2 pontos

Reconhecer que a é a altura do triângulo $[PQR]$ relativa ao lado $[PQ]$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\frac{2k}{a}$ é o comprimento de $[PQ]$ .... 2 pontos

Concluir o pretendido .... 2 pontos

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>3.</td><td>5.</td><td>7.</td><td>8.1.</td><td>8.2.</td><td>10.</td><td>11.</td><td>13.</td><td>14.1.</td><td>15.</td><td>16.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">2.</td><td colspan="2">4.</td><td colspan="2">6.</td><td colspan="2">9.</td><td colspan="2">12.</td><td colspan="2">14.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 × 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2023

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ $(n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

✱ 1. Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão monótona?

(A) $(n-5)^2$ **(B)** $\dfrac{(-1)^n}{n+3}$ **(C)** $(-2)^n$ **(D)** $\dfrac{1}{n}$

2. Uma composição geométrica é constituída por uma sequência de 25 semicircunferências em que, à exceção da primeira, o raio de cada semicircunferência é o dobro do raio da semicircunferência anterior.

A Figura 1 representa parte dessa composição, em que c_1 , c_2 e c_3 são as três primeiras semicircunferências, com 1 cm , 2 cm e 4 cm de raio, respetivamente.

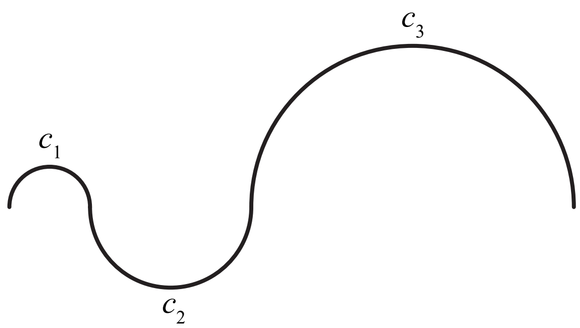


Figura 1

Determine o comprimento total da linha obtida com esta composição geométrica.

Apresente o resultado em quilómetros, arredondado às unidades.

✱ 3. Seja Ω o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A \cup B) = 0{,}8$;
- $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}5$.

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}3$ **(C)** $0{,}5$ **(D)** $0{,}6$

4. O Rui tem nove bombons com recheio de frutos secos: quatro de amêndoa, dois de avelã e três de noz.

4.1. Numa caixa com nove compartimentos, numerados de 1 a 9, o Rui vai colocar, aleatoriamente, os nove bombons, um bombom em cada compartimento.

Os nove compartimentos estão dispostos em três linhas por três colunas, como se ilustra na Figura 2.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 2

Determine a probabilidade de uma das três linhas ficar preenchida com três bombons de amêndoa.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

✱ **4.2.** Aos nove bombons com recheio de frutos secos, juntam-se vinte e dois bombons com recheio de caramelo.

Selecionam-se, sucessivamente, ao acaso e sem reposição, três bombons.

Considere os acontecimentos:

A: «o primeiro bombom tem recheio de frutos secos»;

B: «o segundo bombom tem recheio de frutos secos»;

C: «o terceiro bombom tem recheio de caramelo».

Justifique, sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, que o valor da probabilidade $P(C\,|\,(A \cap \overline{B}))$ é $\dfrac{21}{29}$.

Na sua resposta, tendo em conta o contexto descrito:

- interprete o significado de $P(C\,|\,(A \cap \overline{B}))$;
- explique o valor do numerador e o valor do denominador da fração apresentada.

5. Na Figura 3, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular reto $[OABCDE]$, de bases $[OAB]$ e $[CDE]$.

Sabe-se que:

- as coordenadas do ponto A são $(2\sqrt{3}, 6, 0)$;
- o ponto B pertence ao plano mediador do segmento de reta $[OA]$;
- a reta AB é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (0, 16, 0) + k(\sqrt{3}, -5, 0)$, $k \in \mathbb{R}$;
- o ponto D pertence ao eixo Oz e tem cota 5.

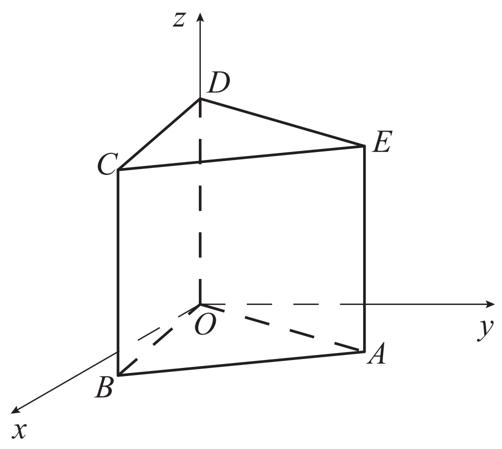


Figura 3

* **5.1.** Qual das seguintes equações define o plano que passa no ponto A e é perpendicular ao eixo Ox?

(A) $z = 0$ **(B)** $y = 6$ **(C)** $x = 2\sqrt{3}$ **(D)** $x + y + z = 0$

* **5.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o volume do prisma $[OABCDE]$.

6. Na Figura 4, estão representados, em referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica, o triângulo $[ABC]$ e a reta de equação $x = 1$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto B pertence à reta de equação $x = 1$;
- C é o ponto de intersecção da semirreta $\dot{O}B$ com a circunferência trigonométrica;
- $A\hat{O}B = \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Determine a área do triângulo $[ABC]$.

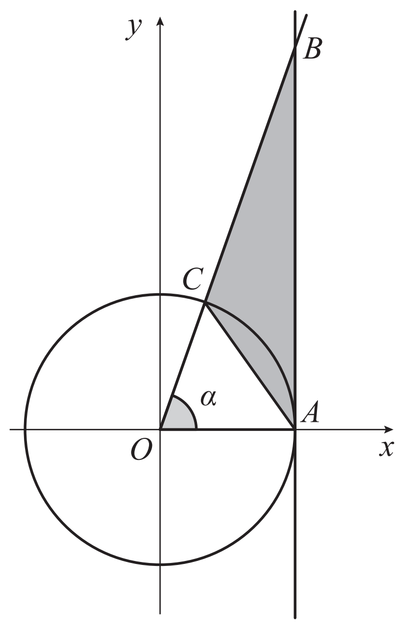


Figura 4

7. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida, para um certo $a \in \mathbb{R}^+$, por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{e^x - 1} & \text{se } x < 0 \\ \ln(2 - e^{-x}) + x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **7.1.** e **7.2.** sem recorrer à calculadora.

* **7.1.** Determine o valor de a para o qual existe $\lim_{x \to 0} f(x)$.

7.2. O gráfico de f admite uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$.

Determine uma equação dessa assíntota.

* **8.** Para certos valores de a e de b $(a > 1$ e $b > 1)$, tem-se $\log_a\left(\dfrac{b}{a}\right) = 2$.

Qual é o valor de $\log_a\left(\sqrt{a^3} \times b^2\right)$?

(A) $\dfrac{13}{2}$ **(B)** $\dfrac{15}{2}$ **(C)** $\dfrac{19}{2}$ **(D)** $\dfrac{21}{2}$

9. Considere a função g, de domínio $[0, \pi[$, definida por $g(x) = e^x \cos x$.

* **9.1.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine esses extremos, caso existam.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia da função g.

* **9.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe, pelo menos, um ponto do gráfico de g cuja ordenada é igual à abcissa, no intervalo $\left]\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

10. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{3}$$

11. Na Figura 5, estão representados, em referencial o.n. Oxy :

- uma circunferência, de centro na origem;
- o ponto A , ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo Ox ;
- a reta r , de equação reduzida $y = x - 6$.

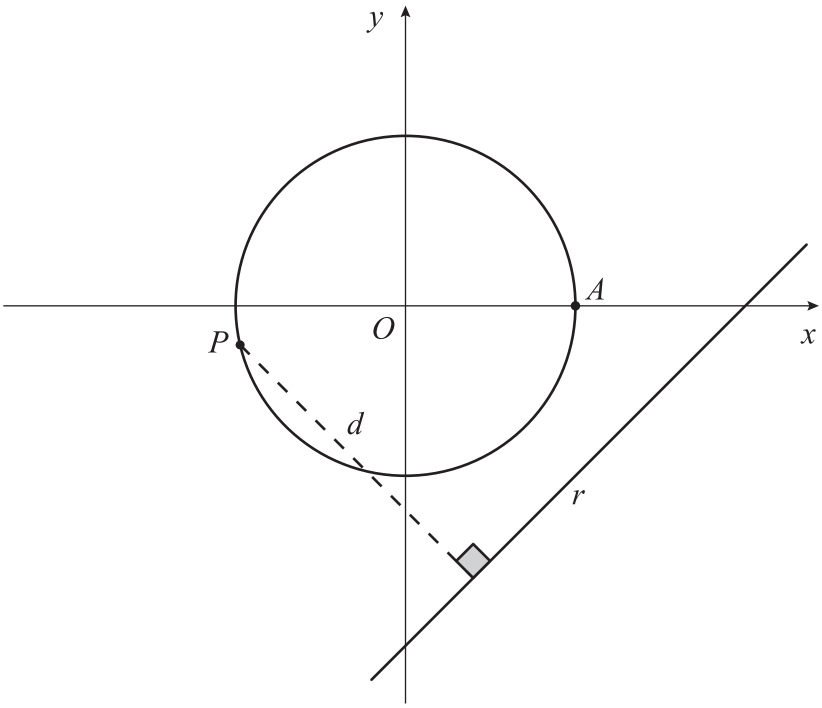


Figura 5

Considere que um ponto, P , partindo de A , se desloca sobre a circunferência, no sentido positivo, durante 7 segundos, percorrendo mais do que uma volta.

Nesse percurso, a distância, d , do ponto P à reta r , t segundos após o início do deslocamento, é dada por

$$d(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(2 + \operatorname{sen} t - \cos t) \text{ , com } t \in [0, 7]$$

Sabe-se que as distâncias máxima e mínima do ponto P à reta r são, respetivamente, $3\sqrt{2} + 3$ e $3\sqrt{2} - 3$.

Durante o percurso, existem dois instantes em que a distância do ponto P à reta r é igual ao diâmetro da circunferência.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, esses instantes.

Apresente os resultados em segundos, arredondados às décimas.

Não justifique a validade dos resultados obtidos.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale os pontos relevantes, que lhe permitem resolver a equação.

12. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{7}$.

Qual dos seguintes valores é um argumento de $2iz$?

(A) $\frac{5\pi}{14}$ **(B)** $\frac{9\pi}{14}$ **(C)** $\frac{6\pi}{7}$ **(D)** $\frac{8\pi}{7}$

13. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, os números

$$z_1 = -5i \text{ e } z_2 = -1 - \sqrt{3}\,i$$

Determine o menor número natural n para o qual o número complexo $w = \frac{z_1 + i^{23}}{z_2^n}$ é um imaginário puro.

14. Considere uma função, h , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = ax^2$, com $a \neq 0$, e dois pontos, A e B, do seu gráfico.

Mostre que o ponto de intersecção das retas tangentes ao gráfico de h nos pontos A e B pertence à reta vertical que contém o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**3.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**7.1.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**11.**	**12.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	12	14	12	14	14	12	14	14	14	12	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**		**4.1.**		**6.**		**7.2.**		**10.**		**13.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												**42**
TOTAL													**200**

1. Analisando a monotonia de cada uma das sucessões, temos:

   - $a_n = (n-5)^2$: Como $a_4 = 1$; $a_5 = 0$ e $a_6 = 1$, temos que $a_4 > a_5$ e $a_5 < a_6$, então a sucessão não é monótona;
   - $b_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$: Como $a_1 = -\frac{1}{4}$; $a_2 = \frac{1}{5}$ e $a_3 = -\frac{1}{6}$, temos que $a_1 < a_2$ e $a_2 > a_3$, então a sucessão não é monótona;
   - $c_n = (-2)^n$: Como $a_1 = -2$; $a_2 = 4$ e $a_3 = -8$, temos que $a_1 < a_2$ e $a_2 > a_3$, então a sucessão não é monótona;
   - $d_n = \frac{1}{n}$:

   $$d_{n+1} - d_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n^2+n} - \frac{n+1}{n^2+n} = \frac{n-n-1}{n^2+n} = -\frac{1}{n^2+n}$$

   Como $n \in \mathbb{N}$, então $n^2 + n > 0$,logo $d_{n+1} - d_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, a sucessão é monótona (decrescente).

   Resposta: **Opção D**

2. Temos que:

   - sequência dos raios das semicircunferências: $r_n = 2^{n-1}$;
   - sequência dos comprimentos das semicircunferências (semiperímeros das circunferências):

   $$c_n = \frac{2 \times \pi \times r_n}{2} = \pi \times 2^{n-1}$$

   Como os termos da sequência dos comprimentos das semicircunferências é uma progressão geométrica de razão 2, e cujo primeiro termo é $c_1 = \pi \times 2^0 = \pi$, então o comprimento total das 25 semicircunferências é a soma dos 25 primeiros termos da sequência:

   $$S_{25} = \pi \times \frac{1-2^{25}}{1-2} = \pi \times 33\,554\,431 \approx 1{,}0541 \times 10^8 \text{ cm} \approx 1054 \text{ km}$$

3. Como $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}5$, então:

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow 0{,}8 = P(B) + 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}3 = P(B)$$

   Resposta: **Opção B**

4.

4.1. Como os 9 bombons vão ser colocados em 9 compartimentos, existem ${}^9C_4$ formas de colocar os 4 amêndoa, e por cada uma destas formas existem ${}^5C_2$ formas de colocar os 2 de avelã nos restantes 5 compartimentos, e ainda ${}^3C_3$ formas de colocar os 3de noz, nos restantes três compartimentos, sendo esta última, uma forma única de colocar os bombons de noz.
Desta forma o número de casos possíveis é ${}^9C_4 \times {}^5C_2 \times {}^3C_3 = {}^9C_4 \times {}^5C_2$.

Para que uma linha fique preenchida só com bombons de amêndoa, para os restantes 6 compartimentos devemos selecionar 1 para colocar o de amêndoa restante $({}^6C_1)$, 2 dos 5 compartimentos restantes para os de avelã $({}^5C_2)$ e os restantes serão preenchidos com os de noz.
Como qualquer uma das 3 linhas pode ser a que será ocupada pelos bombons de amêndoa, o número de casos favoráveis é $3 \times {}^6C_1 \times {}^5C_2 \times {}^3C_3 = 3 \times {}^6C_1 \times {}^5C_2$.

Assim, recorrendo à regra de LaPlace, a probabilidade na forma de fração irredutível, é:

$$\frac{3 \times {}^6C_1 \times {}^5C_2}{{}^9C_4 \times {}^5C_2} = \frac{1}{7}$$

4.2. No contexto da situação descrita $A \cap \overline{B}$ representa o acontecimento: «o primeiro bombom ter recheio de frutos secos e o segundo não ter recheio de frutos secos», pelo que $P\left(C|A \cap \overline{B}\right)$ é a probabilidade de que o terceiro bombom tenha recheio de caramelo, sabendo que o primeiro tinha de frutos secos e o segundo de caramelo.
Como na primeira extração existiam 9 bombons com recheio de frutos secos e 22 de caramelo, na segunda extração deverão existir 8 de frutos secos e 22 de caramelo e na terceira extração deverão existir 8 de frutos secos e 21 de caramelo.

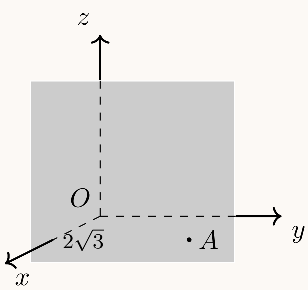
$$\boxed{\begin{array}{c}9\text{ FS}\\22\text{ C}\end{array}} \xrightarrow[\text{1 FS}]{\text{1.ª Ext.}} \boxed{\begin{array}{c}8\text{ FS}\\22\text{ C}\end{array}} \xrightarrow[\text{1 C}]{\text{2.ª Ext.}} \boxed{\begin{array}{c}8\text{ FS}\\21\text{ C}\end{array}} \xrightarrow[\text{1 C}]{\text{3.ª Ext.}}$$

Assim, como sabendo que o acontecimento representado por $A \cap \overline{B}$ ocorreu, para a probabilidade $P\left(C|A \cap \overline{B}\right)$, existem na terceira extração 21 bombons de caramelo, ou seja, 21 casos favoráveis; num total de $8 + 21 = 29$ bombons, ou seja, 29 pelo que, recorrendo à Regra de LaPlace, temos:

$$P\left(C|A \cap \overline{B}\right) = \frac{21}{29}$$

5.

5.1. Como um vetor diretor diretor da reta que contém o eixo Ox é $\overrightarrow{u} = (1,0,0)$ e para que um plano seja perpendicular a uma reta, o vetor normal do plano deve ser colinear com o vetor normal da reta, de entre as equações apresentadas, podemos identificar a que representa um plano cujo vetor normal é colinear com o vetor $\overrightarrow{u}$:



- $z = 0$, vetor normal: $\overrightarrow{v_A} = (0,0,1)$ e $(0,0,1) \neq k(1,0,0)$,$\forall k \in \mathbb{R}$
- $y = 6$, vetor normal: $\overrightarrow{v_B} = (0,6,0)$ e $(0,6,0) \neq k(1,0,0)$,$\forall k \in \mathbb{R}$
- $x = 2\sqrt{3}$, vetor normal: $\overrightarrow{v_C} = (2\sqrt{3},0,0)$ e $(2\sqrt{3},0,0) = 2\sqrt{3}(1,0,0)$
- $x + y + z = 0$, vetor normal: $\overrightarrow{v_D} = (1,1,1)$ e $(1,1,1) \neq k(1,0,0)$,$\forall k \in \mathbb{R}$

Resposta: **Opção C**

5.2. Como o ponto B pertence ao plano mediador do segmento de reta $[OA]$, designado por M o ponto médio de $[OA]$, temos que $[BM]$ é a altura do triângulo $[OAB]$ relativa à base $[OA]$.

Assim temos que:

- $\overline{OA} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}-0\right)^2 + (6-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4\times 3 + 36 + 0} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
- $M = \left(\dfrac{x_A + x_O}{2}, \dfrac{y_A + y_O}{2}, \dfrac{z_A + z_O}{2}\right) = \left(\dfrac{2\sqrt{3}+0}{2}, \dfrac{6+0}{2}, \dfrac{0+0}{2}\right) = \left(\sqrt{3},3,0\right)$

A equação do plano mediador de $[OA]$ (ao qual pertence o ponto B), é:

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 = (x-2\sqrt{3})^2+(y-6)^2+(z-0)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = x^2-4x\sqrt{3}+12+y^2-12y+36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = -4x\sqrt{3} + 12 - 12y + 36 \ \Leftrightarrow 4x\sqrt{3} + 12y - 48 = 0 \ \Leftrightarrow \sqrt{3}x + 3y - 12 = 0$$

Como o ponto B pertence à reta AB, então as suas coordenadas são da forma: $B(\sqrt{3}k,16-5k,0)$ pelo que podemos determinar o valor de k, substituindo as coordenadas no plano mediador de $[OA]$:

$$\sqrt{3}\times\sqrt{3}k + 3(16-5k) - 12 = 0 \ \Leftrightarrow\ 3k + 48 - 15k - 12 = 0 \ \Leftrightarrow\ 36 = 12k \ \Leftrightarrow\ \frac{250}{12} = k \ \Leftrightarrow\ k = 3$$

Desta forma temos que:

- $B\left(\sqrt{3}\times 3,16-5\times 3,0\right) = \left(3\sqrt{3},16-15,0\right) = \left(3\sqrt{3},1,0\right)$
- $\overline{BM} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2 + (1-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4\times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4$

E assim, vem que:

$$V_{[OABCDE]} = A_{[OAB]}\times\overline{OD} = \frac{\overline{OA}\times\overline{BM}}{2}\times\overline{OD} = \frac{4\sqrt{3}\times 4}{2}\times 5 = 2\sqrt{3}\times 4\times 5 = 40\sqrt{3}$$

6. Designando por P o ponto pertencente ao segmento de reta $[AB]$ com ordenada igual à do ponto C, temos que $[CP]$ é a altura do triângulo $[ABC]$, relativamente à base $[AB]$, e assim, vem que:

- $\overline{AB} = \operatorname{tg}\alpha$
- $\operatorname{tg}^2\alpha+1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \overline{AB}^1+1 = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{9}}-1 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 9-1 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{2}$
- $\overline{CP} = x_A - x_C = 1 - \cos\alpha = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

E assim, a área do triângulo $[ABC]$, é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB}\times\overline{CP}}{2} = \frac{2\sqrt{2}\times\frac{2}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

7.

7.1. Como o domínio de f é $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, para que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, então tem que se verificar $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

Assim, temos que:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln\left(2-e^{-x}\right)+x+2\right) = \ln(2-e^{0})+0+2 = \ln(2-1)+2 = \ln 1+2 = 0+2 = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\text{sen}\,(ax)}{e^x-1} = \dfrac{\text{sen}\,(a\times 0)}{e^0-1} = \dfrac{\text{sen}\,0}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}\,(ax)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\text{sen}\,(ax)}{e^x-1}\times\frac{ax}{ax}\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\text{sen}\,(ax)}{ax}\times\frac{ax}{e^x-1}\right) =$$

(considerando $y = ax$, temos que se $x\to 0^-$, então $y\to 0^-$, porque $a>0$)

$$= \underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{\text{sen}\,y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x\to 0^-} \left(a\times\frac{x}{e^x-1}\right) = 1\times \lim_{x\to 0^-} a \times \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{e^x-1} = a\times \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} =$$

$$= a\times \frac{\lim\limits_{x\to 0^-} 1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = a\times\frac{1}{1} = a$$

Logo, determinando o valor de a, vem: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \Leftrightarrow 2 = a$

7.2. Como o gráfico de f, admite uma assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$, podemos determinar o declive da assíntota:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(2-e^{-x}\right)+x+2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln\left(2-e^{-x}\right)}{+}\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\times\ln\left(2-e^{-x}\right)+1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\times \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(2-e^{-x}\right)\right) + \lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} =$$

$$= \frac{1}{+\infty}\times\ln(2-e^{\infty})+1+\frac{2}{+\infty} = 0\times\ln(2-1)+1+0 = 0\times\ln 1+1 = 0\times 0+1 = 0+1 = 1$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-1\times x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(2-e^{-x}\right)+x+2-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(2-e^{-x}\right)+2\right) = \ln\left(2-e^{-\infty}\right)+2 = \ln(2-e^{0})+2 = \ln(2+0)+2 = \ln 2+2$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de h, quando $x\to+\infty$, é:

$$y = 1\times x+\ln 2+2 \Leftrightarrow y = x+\ln 2+2$$

8. Recorrendo às propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_a\left(\frac{b}{a}\right) = 2 \Leftrightarrow \log_a b-\log_a a = 2 \Leftrightarrow \log_a b-1 = 2 \Leftrightarrow \log_a b = 2+1 \Leftrightarrow \log_a b = 3$$

E assim:

$$\log_a\left(\sqrt{a^3}\times b^2\right) = \log_a\sqrt{a^3}+\log_a b^2 = \log_a (a)^{\frac{3}{2}}+2\log_a b = \frac{3}{2}\times\log_a a+2\times 3 = \frac{3}{3}\times 1+6 = \frac{3}{2}+\frac{12}{2} = \frac{15}{2}$$

Resposta: **Opção B**

9.

9.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g:

$$g'(x) = (e^x \cos x)' = (e^x)' \times \cos x + e^2 \times (\cos x)' = e^x \cos x e^x (-\operatorname{sen} x) = e^x (\cos x - \operatorname{sen} x)$$

Calculando os zeros da derivada da função g, temos:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Cond. impossível}} \vee \cos x = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi , k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi , k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \underbrace{0x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}_{\text{Cond. impossível}} , k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi , k \in \mathbb{Z}$$

Assim, como o domínio de g é $[0,\pi[$, a única solução da equação é $x = \frac{\pi}{4}$,$(k = 0)$.

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
e^x	$+$	$+$	$+$	$+$	n.d.
$\cos x - \operatorname{sen} x$	$+$	$+$	0	$-$	n.d.
g'	$+$	$+$	0	$-$	n.d.
g	min.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right[$;
- tem um mínimo relativo que é: $g\,(0) = e^0(cos(0)) = 1 \times 1 = 1$;
- tem um máximo relativo que é: $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}}(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}$.

9.2. A abcissa dos pontos do gráficos da função g com a ordenada igual à abcissa são soluções da equação

$$g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0$$

Assim vamos mostrar que a função $h(x) = g(x) - x$ tem pelo menos um zero no intervalo $\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$.

Como a função g, e também a função h resultam de operações sucessivas de funções contínuas em $[0,\pi[$, são contínuas neste intervalo, e em particular no intervalo $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

Como $h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < h\left(\frac{\pi}{3}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$ tal que $h(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, uma solução da equação $h(x) = g(x) - x$ no intervalo $\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$, isto é, que existe, pelo menos, um ponto do gráfico de g cuja ordenada é igual à abcissa, neste intervalo.

C.A.

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} \approx 0{,}38$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \approx -1{,}57$$

10. Como $e^x > 0$ e $e^{-x} > 0$, então $e^x + e^{-x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que resolvendo a equação, temos:

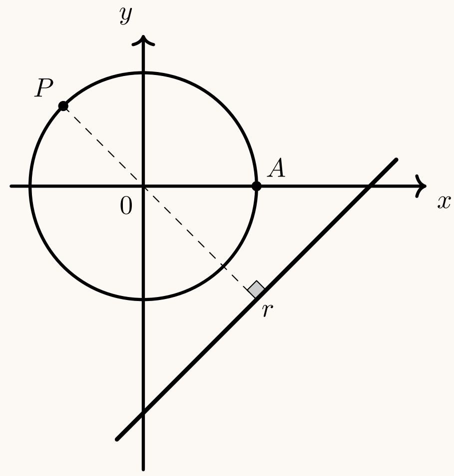
$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\left(e^x - e^{-x}\right) = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow 3e^x - 3e^{-x} - e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 4e^{-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^x - 4 \times \frac{1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 2e^x \times \frac{e^x}{e^x} - \frac{4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(e^x)^2 - 4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 4 = 0 \wedge \underbrace{e^x \neq 0}_{\text{Cond. universal}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{2}$$

C.S.$= \left\{ \frac{\ln 2}{2} \right\}$

11. Observando que a diferença entre a distância máxima e a distância mínima corresponde ao diâmetro, a, da circunferência, temos que:

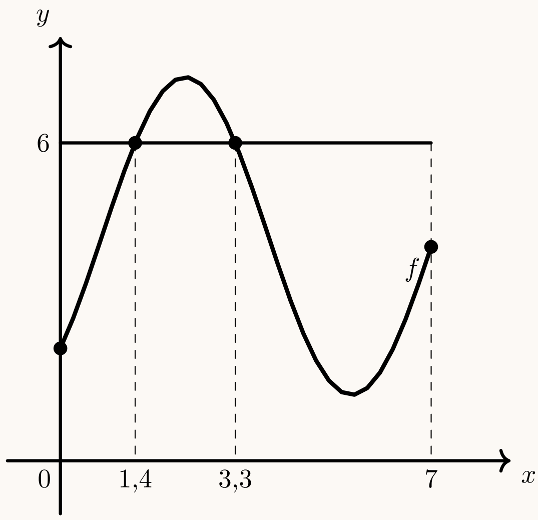


$$a = 3\sqrt{2} + 3 - (3\sqrt{2} - 3) = 3\sqrt{2} + 3 - 3\sqrt{2} + 3 = 3 + 3 = 6$$

Assim, os dois instantes em que a distância do ponto P à reta r é igual ao diâmetro da circunferência, são as soluções da equação

$$d(t) = a \Leftrightarrow d(t) = 6$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $f(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(2 + \operatorname{sen} x - \cos x)$, e a reta horizontal de equação $y = 6$, para $0 < x < 7$, reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às décimas) das abcissas dos pontos de interseção, a que correspondem os dois instantes em que a distância do ponto P à reta r é igual ao diâmetro da circunferência:



$$t_1 \approx 1{,}4\text{s e } t_2 \approx 3{,}3\text{s}$$

12. Como $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{7}$, considerando $\rho = |z|$, temos que $z = \rho e^{i\frac{\pi}{7}}$.

Como $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, então:

$$2iz = 2i \times z = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times \rho e^{i\frac{\pi}{7}} = 2\rho e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right)} = 2\rho e^{i\left(\frac{7\pi}{14} + \frac{2\pi}{14}\right)} = 2\rho e^{i\frac{9\pi}{14}}$$

Ou seja, $\operatorname{Arg}(2iz) = \frac{9\pi}{14}$.

Resposta: **Opção B**

13. Escrevendo z_2 na forma trigonométrica ($\rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 3º quadrante, logo $\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Logo $z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Como $i^{23} = i^{4\times 5+3} = i^3 = -i$, escrevendo $z_1 + i^{23}$ na forma trigonométrica, vem:

$$z_1 + i^{23} = -5i - i = -6i = 6e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Assim, simplificando a expressão de w, temos que:

$$w = \frac{z_1 + i^{23}}{z_2^n} = \frac{6e^{i\frac{3\pi}{2}}}{\left(2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^n} = \frac{6e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2^n e^{i\left(n\times\frac{4\pi}{3}\right)}} = \frac{6}{2^n}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{4n\pi}{3}\right)}$$

Como w é um imaginário puro se $\operatorname{Arg} w = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, temos que, para $k \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname{Arg} w = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - \frac{4n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{9\pi}{6} - \frac{8n\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} + \frac{6k\pi}{6} \Leftrightarrow 9\pi - 8n\pi = 3\pi + 6k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\pi - 3\pi - 8n\pi = 6k\pi \Leftrightarrow 6\pi - 8n\pi = 6k\pi \Leftrightarrow 2\pi(3-4n) = 6k\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi(3-4n)}{6\pi} = k \Leftrightarrow \frac{3-4n}{3} = k$$

Como $n \in \mathbb{N}$, o menor valor de n que corresponde a um valor inteiro de k é 3:

- $n = 1 \rightarrow k = \frac{3-4(1)}{3} = -\frac{1}{3}$
- $n = 2 \rightarrow k = \frac{3-4(2)}{3} = -\frac{5}{3}$
- $n = 3 \rightarrow k = \frac{3-4(3)}{3} = -\frac{9}{3} = -3$

14. Designando por m e n as abcissas dos pontos A e B, temos que as respetivas coordenadas e as do ponto médio são:

    - $A\big(m,h(m)\big) = (m,am^2)$
    - $B\big(n,h(n)\big) = (n,an^2)$
    - $M\left(\dfrac{m+n}{2},\dfrac{am^2+an^2}{2}\right)$

    Como a derivada da função h é $h'(x) = \big(ax^2\big)' = 2ax$, os declives das retas tangentes ao gráfico de h, nos pontos A e B, são:

    - $m_A = h'(m) = 2am$
    - $m_B = h'(n) = 2an$

    E assim, designado por podemos determinar uma expressão para a ordenada da origem para cada uma das equações da retas, substituindo a expressão do declive e das coordenadas dos pontos de tangência:

    - $y = m_A \times x + b_A \;\Leftrightarrow\; am^2 = 2am \times m + b_A \;\Leftrightarrow\; am^2 - 2am^2 = b_A \;\Leftrightarrow\; -am^2 = b_A$
    - $y = m_B \times x + b_B \;\Leftrightarrow\; an^2 = 2an \times n + b_B \;\Leftrightarrow\; an^2 - 2an^2 = b_B \;\Leftrightarrow\; -an^2 = b_B$

    Ou seja as equações das retas tangentes nos pontos A e B, são, respetivamente, $y = 2max - am^2$ e $y = 2nax - an^2$, pelo que a abcissa do ponto de interseção das retas é a solução da equação:

    $$2max - am^2 = 2nax - an^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{2max - am^2}{a} = \frac{2nax - an^2}{a} \;\Leftrightarrow$$
    $$\Leftrightarrow\; 2mx - m^2 = 2nx - n^2 \;\Leftrightarrow\; 2mx - 2nx = m^2 - n^2 \;\Leftrightarrow\; x(2m - 2n) = m^2 - n^2 \;\Leftrightarrow$$
    $$\Leftrightarrow\; x = \frac{(n-m)(n+m)}{2(m-n)} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{n+m}{2}$$

    Como as abcissas do ponto médio e do ponto de interseção das tangentes são iguais, logo, o ponto de interseção das tangentes pertence à reta vertical que contém o ponto médio.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2023

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Critérios de Classificação 13 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentem organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentem organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Linguagem científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentem organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentem organizados por etapas:

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **12 pontos**

Opção **(D)**

2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que os comprimentos das semicircunferências são termos consecutivos de uma progressão geométrica .... 3 pontos

Identificar a razão dessa progressão (2) .... 2 pontos

Obter o primeiro termo dessa progressão .... 2 pontos

Escrever uma expressão para o comprimento total da composição $\left(\pi\frac{1-2^{25}}{1-2},\text{ ou equivalente}\right)$ .... 5 pontos

Obter o valor pedido (1054 km) .... 2 pontos

2.º Processo

Reconhecer que os raios das semicircunferências são termos consecutivos de uma progressão geométrica .... 2 pontos

Identificar a razão dessa progressão (2) .... 2 pontos

Identificar o primeiro termo da progressão .... 1 ponto

Escrever uma expressão para a soma dos comprimentos dos raios $\left(\frac{1-2^{25}}{1-2},\text{ ou equivalente}\right)$ .... 4 pontos

Escrever uma expressão para o comprimento total da composição .... 3 pontos

Obter o valor pedido (1054 km) .... 2 pontos

3. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

4.1. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos.

1.º Processo

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos possíveis $\left({}^{9}C_4 \times {}^{5}C_2\right)$ (**ver nota 1**) .... 6 pontos

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos favoráveis $\left(3 \times 6 \times {}^{5}C_2\right)$ (**ver nota 2**) .... 6 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{1}{7}\right)$ (**ver nota 3**) .... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{9}C_4 \times {}^{5}C_2$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada não for equivalente a $3 \times 6 \times {}^{5}C_2$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se o valor obtido não pertencer ao intervalo $[0,1]$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2.º Processo

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos possíveis $(9!)$ (**ver nota 1**) .... 6 pontos

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos favoráveis $\left(3 \times {}^{4}A_3 \times 6!\right)$ (**ver nota 2**) .... 6 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{1}{7}\right)$ (**ver nota 3**) .... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a $9!$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada não for equivalente a $3 \times {}^{4}A_3 \times 6!$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se o valor obtido não pertencer ao intervalo $[0,1]$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3.º Processo

Considere-se apenas a disposição dos bombons com recheio de amêndoa.

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos possíveis $\left({}^{9}C_4\right)$ (**ver nota 1**) .... 6 pontos

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos favoráveis (3×6) (**ver nota 2**) .... 6 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{1}{7}\right)$ (**ver nota 3**) .... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{9}C_4$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada não for equivalente a 3×6 , a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se o valor obtido não pertencer ao intervalo $[0,1]$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

4.º Processo

Considere-se apenas a disposição dos bombons com recheio de amêndoa.

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos possíveis $\left({}^{9}A_4\right)$ (**ver nota 1**) .... 6 pontos

Apresentar uma expressão correspondente ao número de casos favoráveis $\left({}^{4}A_3 \times 3 \times 6\right)$ (**ver nota 2**) .... 6 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{1}{7}\right)$ (**ver nota 3**) .... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{9}A_4$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{4}A_3 \times 3 \times 6$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se o valor obtido não pertencer ao intervalo $[0,1]$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

4.2. .... **14 pontos**

Tópicos de resposta

- Interpreta o significado de $P(C \mid (A \cap \overline{B}))$ tendo em conta o contexto descrito:
  A expressão $P(C \mid (A \cap \overline{B}))$ representa a probabilidade de o terceiro bombom, selecionado ao acaso, ter recheio de caramelo, se o primeiro bombom selecionado tiver recheio de frutos secos e o segundo tiver recheio de caramelo.
- Explica o valor do denominador (29):
  Como inicialmente existem 31 bombons, após a seleção dos dois primeiros, existem 29 bombons disponíveis para a seleção do terceiro bombom.
- Explica o valor do numerador (21):
  Como inicialmente existem 22 bombons de caramelo, após a seleção de um bombom de frutos secos e de um bombom de caramelo, existem 21 bombons de caramelo disponíveis para a seleção do terceiro bombom.

Parâmetros	Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
A Conteúdos	**5**	Apresenta, de forma completa, os três tópicos.	12
	4	Apresenta, de forma completa, dois tópicos e, de forma incompleta, o outro tópico.	10
	3	Apresenta, de forma completa, apenas dois tópicos. OU Apresenta, de forma completa, um tópico e, de forma incompleta, os outros dois tópicos.	8
	2	Apresenta, de forma completa, um tópico e, de forma incompleta, apenas outro tópico. OU Apresenta, de forma incompleta, os três tópicos.	5
	1	Apresenta, de forma completa, apenas um tópico. OU Apresenta, de forma incompleta, apenas dois tópicos.	3
B Linguagem científica	**2**	Utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	2
	1	Utiliza, embora com uma ou mais falhas, o vocabulário específico da Matemática.	1

5.1. .... **12 pontos**

Opção **(C)**

5.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar $\overrightarrow{OA}$ como vetor normal ao plano mediador do segmento de reta $[OA]$ .... 1 ponto

Identificar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$ $\left((2\sqrt{3}, 6, 0)\right)$ .... 1 ponto

Obter as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[OA]$ $\left((\sqrt{3}, 3, 0)\right)$ .... 1 ponto

Obter uma equação do plano mediador do segmento de reta $[OA]$ .... 3 pontos

- Escrever $2\sqrt{3}\,x + 6y + d = 0$ (ou equivalente) .... 1 ponto
- Escrever $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 6 \times 3 + d = 0$ .... 1 ponto
- Obter o valor de d (-24) .... 1 ponto

Reconhecer que as coordenadas do ponto B são da forma $\left(\sqrt{3}\,k, 16 - 5k, 0\right)$ 1 ponto

Escrever $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 6(16 - 5k) - 24 = 0$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter o valor de k (3) .... 1 ponto

Obter as coordenadas do ponto B $\left((3\sqrt{3}, 1, 0)\right)$ .... 1 ponto

Obter a distância do ponto B ao ponto médio do segmento de reta $[OA]$ (4) 1 ponto

Obter $\overline{OA}$ $(4\sqrt{3})$.. 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(40\sqrt{3}\text{, ou equivalente}\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Designemos por $(a, b, 0)$ as coordenadas do ponto B.

Escrever $a^2 + b^2 = \left(a - 2\sqrt{3}\right)^2 + (b - 6)^2$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter a equação $4\sqrt{3}\,a + 12b - 48 = 0$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Reconhecer que as coordenadas do ponto B são da forma $\left(\sqrt{3}\,k, 16 - 5k, 0\right)$ 1 ponto

Escrever $4\sqrt{3} \times \sqrt{3}\,k + 12(16 - 5k) - 48 = 0$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter o valor de k (3) .... 1 ponto

Obter as coordenadas do ponto B $\left((3\sqrt{3}, 1, 0)\right)$ .... 1 ponto

Obter as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[OA]$ $\left((\sqrt{3}, 3, 0)\right)$ .... 1 ponto

Obter a distância do ponto B ao ponto médio do segmento de reta $[OA]$ (4) 1 ponto

Obter $\overline{OA}$ $(4\sqrt{3})$.. 1 ponto

Obter o valor pedido $\left(40\sqrt{3}\text{, ou equivalente}\right)$ .... 2 pontos

6. .... **14 pontos**

Reconhecer que a altura do triângulo $[ABC]$ relativa à base $[AB]$ é $1-\cos\alpha$ 2 pontos

Reconhecer que $\overline{AB} = \operatorname{tg}\alpha$ .... 2 pontos

Determinar $\operatorname{tg}\alpha$ .... 7 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelos menos, dois processos.

1.º processo

Escrever $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{8}$ .... 4 pontos

2.º processo

Escrever $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$ .... 2 pontos

Escrever $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{8}$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\text{, ou equivalente}\right)$ .... 3 pontos

7.1. .... **14 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\left(2-e^{-x}\right)+x+2\right)$ ...... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ .... 10 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{e^x-1}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{x} \times \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{e^x-1}$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{x} \underset{y=ax}{=} a\times\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}y}{y}$ .... 2 pontos

Obter $a\times\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}y}{y} = a$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{-1}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{-1} = \left(\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{-1}$ .... 1 ponto

Concluir que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = a\times 1 = a$ .... 1 ponto

Concluir que $a = 2$ .... 2 pontos

7.2. .... **14 pontos**

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2-e^{-x})+x+2}{x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2-e^{-x})+x+2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(2-e^{-x})}{x}+1+\dfrac{2}{x}\right)$ .... 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(2-e^{-x})}{x}\right)=0$ .... 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)=1$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}=1$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)-x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(2-e^{-x})+2)$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(2-e^{-x})+2) = \ln 2 + 2$ .... 2 pontos

Obter uma equação da assíntota $(y = x + \ln 2 + 2$, ou equivalente$)$ .... 1 ponto

8. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

9.1. .... **14 pontos**

Determinar $g'(x)$ (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Escrever $g'(x)=0$ .... 1 ponto

Determinar o zero de g' .... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g' e de monotonia de g .... 3 pontos

Apresentar os intervalos de monotonia de g (**ver nota 2**) .... 2 pontos

Reconhecer que os extremos relativos são $g(0)$ e $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.............................. 2 pontos

Determinar $g(0)$ e $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\left(1 \text{ e } \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que a função é crescente em $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$, em vez de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, e decrescente em $\left]\dfrac{\pi}{4}, \pi\right[$, em vez de $\left[\dfrac{\pi}{4}, \pi\right[$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

9.2. .... **14 pontos**

Equacionar o problema $(g(x) = x,$ ou equivalente$)$ .... 3 pontos

Considerar a função f, definida por $f(x) = g(x) - x$ .... 3 pontos

Referir que a função f é contínua em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ (**ver notas 1 e 2**) .... 2 pontos

Determinar $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .... 1 ponto

Determinar $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .... 1 ponto

Concluir que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (ou equivalente).. 2 pontos

Concluir o pretendido .... 2 pontos

Notas:

1. Se apenas for referido que a função f é contínua, esta etapa é considerada como cumprida.
2. Se for referido que a função f é contínua em $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

10. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Obter $3e^{x} - 3e^{-x} = e^{x} + e^{-x}$ .... 3 pontos

Obter $2e^{x} - 4e^{-x} = 0$ .... 3 pontos

Obter $e^{2x} = 2$ .... 4 pontos

Obter a solução da equação $\left(\frac{\ln 2}{2}, \text{ ou equivalente}\right)$ .... 4 pontos

2.º Processo

Obter $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{3}$ .... 4 pontos

Obter $3e^{2x} - 3 = e^{2x} + 1$ .... 3 pontos

Obter $e^{2x} = 2$ .... 3 pontos

Obter a solução da equação $\left(\frac{\ln 2}{2}, \text{ ou equivalente}\right)$ .... 4 pontos

11. .... **14 pontos**

Determinar o diâmetro da circunferência (6) .... 2 pontos

Apresentar a equação $d(t)=6$ (ou equivalente) (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Representar o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 2**) .... 4 pontos

Assinalar os pontos relevantes .... 2 pontos

Apresentar os valores pedidos $(1{,}4\text{ s}$ e $3{,}3\text{ s})$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que correspondem à resolução da equação que traduz corretamente o problema.
2. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

12. .... **12 pontos**

Opção **(B)**

13. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Substituir i^{23} por $-i$ .... 1 ponto

Obter $z_1 - i = -6i$ .... 1 ponto

Obter $-6i = 6e^{i\frac{3\pi}{2}}$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter $z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter um argumento de z_2^n em função de n (por exemplo, $\frac{4n\pi}{3}$) .... 1 ponto

Obter um argumento de w em função de n $\left(\text{por exemplo, } \frac{3\pi}{2} - \frac{4n\pi}{3}\right)$ ...... 2 pontos

Reconhecer que w é um imaginário puro se $\frac{3\pi}{2} - \frac{4n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $n = \frac{3-3k}{4},\ k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o valor pedido (3) .... 2 pontos

2.º Processo

Substituir i^{23} por $-i$ .... 1 ponto

Obter $z_1 - i = -6i$ .... 1 ponto

Reconhecer que w é um imaginário puro se e somente se z_2^n for
um número real .... 3 pontos

Obter $z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter um argumento de z_2^n em função de n $\left(\text{por exemplo, } \frac{4n\pi}{3}\right)$ .... 1 ponto

Reconhecer que z_2^n é um número real se $\frac{4n\pi}{3} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
(ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $n = \frac{3k}{4},\ k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o valor pedido (3) .... 2 pontos

14. .... **14 pontos**

Designemos por x_1 e x_2 as abcissas dos pontos A e B, respetivamente.

Reconhecer que as ordenadas dos pontos A e B são, respetivamente,
ax_1^2 e ax_2^2 .... 2 pontos

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Obter uma equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto A .... 2 pontos

Obter uma equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto B .... 2 pontos

Obter a abcissa do ponto de intersecção das retas tangentes .... 3 pontos

Reconhecer que a abcissa do ponto médio de $[AB]$ é $\frac{x_1 + x_2}{2}$ .... 1 ponto

Concluir o pretendido .... 2 pontos

Nota: Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**3.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**7.1.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**11.**	**12.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	12	14	12	14	14	12	14	14	14	12	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**		**4.1.**		**6.**		**7.2.**		**10.**		**13.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												**42**
TOTAL													**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \, \cos b + \operatorname{sen} b \, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \, \cos b - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

* **1.** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-1, 3]$.

Qual é o contradomínio da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x-2)+1$?

(A) $[-3, 1]$ **(B)** $[-2, 2]$

(C) $[0, 4]$ **(D)** $[1, 5]$

2. Uma orquestra está a realizar audições para novos instrumentistas.

* **2.1.** No primeiro dia das audições, participaram apenas candidatos a flautistas e a violinistas.

Sabe-se que:

- $\frac{3}{5}$ dos candidatos eram violinistas;
- o número de candidatos estrangeiros era igual ao número de candidatos portugueses;
- $\frac{3}{10}$ dos candidatos estrangeiros eram flautistas.

Seleciona-se, ao acaso, um dos candidatos que participaram no primeiro dia das audições.

Determine a probabilidade de esse candidato ser português, sabendo-se que é violinista.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

* **2.2.** Enquanto aguardam as audições, quatro violinistas, um violoncelista e três contrabaixistas vão sentar-se nas duas primeiras filas de uma plateia, tendo cada fila quatro lugares numerados de 1 a 4.

Qual das expressões seguintes representa o número de maneiras diferentes de dispor os oito músicos, ficando os três contrabaixistas numa fila?

(A) ${}^{4}C_{3} \times 3! \times 5!$ **(B)** $2 \times {}^{4}A_{3} \times 5!$

(C) $2 \times {}^{4}C_{3} \times 5!$ **(D)** ${}^{4}A_{3} \times 3 \times 5!$

2.3. Para se preparar para a audição de violino, a Constança praticou durante m dias.

Sabe-se que a Constança praticou:

- em cada dia, exceto no primeiro, sempre mais 10 minutos do que no dia anterior;
- 60 minutos no quarto dia;
- 2970 minutos no total dos m dias.

Determine o valor de m.

3. Na Figura 1, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma reto $[ABCDEFGH]$, de bases $[ABCD]$ e $[EFGH]$.

Sabe-se que:

- as bases do prisma são trapézios retângulos;
- o ponto A tem coordenadas $(4, -4, -3)$, e o ponto B tem a ordenada igual ao dobro da abcissa;
- uma equação da reta BC é $(x, y, z) = (3, 5, 1) + k(2, 3, 6), \quad k \in \mathbb{R}$.

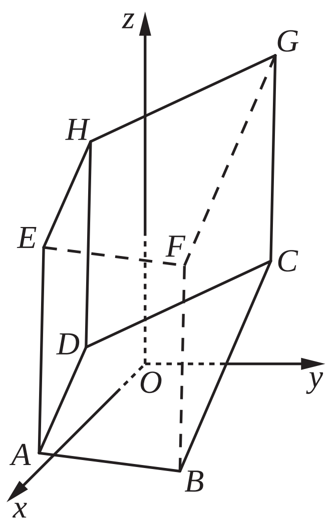


Figura 1

* **3.1.** Qual das equações seguintes é uma equação do plano ABF ?

(A) $2x + 3y + 6z + 22 = 0$ **(B)** $2x + 3y + 6z - 20 = 0$

(C) $3x - 2y - 20 = 0$ **(D)** $3x - 2y + 22 = 0$

* **3.2.** Determine, sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, a amplitude do ângulo convexo AOB.

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

3.3. Selecionam-se, ao acaso, dois vértices de cada uma das bases do prisma.

Determine a probabilidade de os quatro vértices selecionados não pertencerem a uma mesma face lateral do prisma.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o conjunto dos números reais que verificam a condição $\ln^2 x - \ln x - 2 < 0$.

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

5. Considere, para um certo valor de k real, a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^{x-1} - 1} - e^{x-k} & \text{se } x < 1 \\ \\ x^2 - 3x - 2\ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** sem recorrer à calculadora.

* **5.1.** Estude, no intervalo $]1, +\infty[$, a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

* **5.2.** Sabe-se que a função g é contínua em $x = 1$.

Determine o valor de k.

6. O gráfico da Figura 2 apresenta a distribuição das classificações finais, em valores, na disciplina de Português, dos 20 alunos de uma turma.

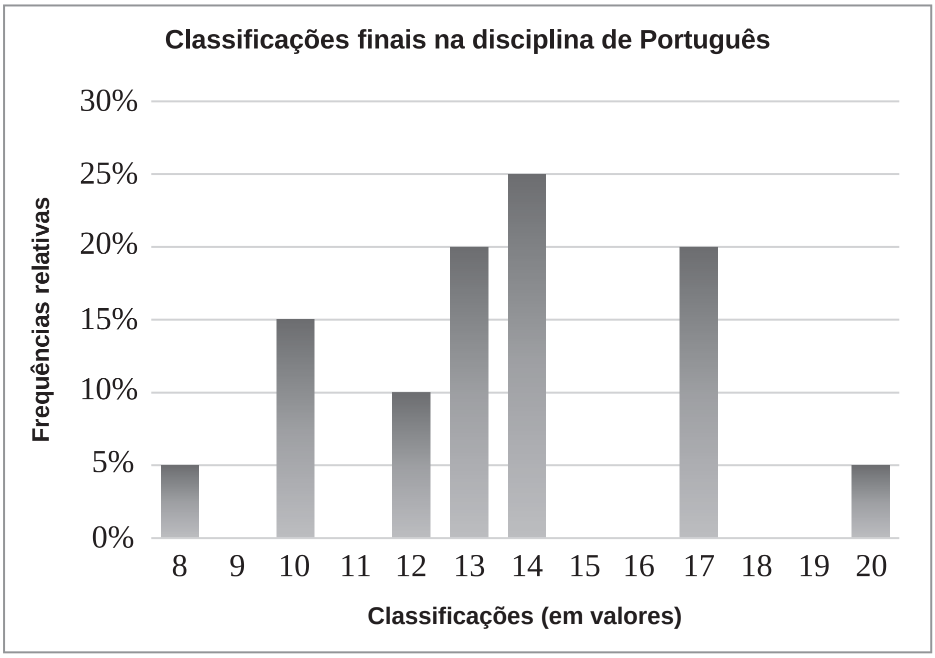


Figura 2

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados representados no gráfico da Figura 2.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Na turma, há ____**I**____ alunos com classificação final inferior a 13 valores na disciplina de Português.

A mediana da distribuição das classificações finais na disciplina de Português é ____**II**____ valores.

A classificação média final na disciplina de Português é ____**III**____ valores, e o desvio padrão desta distribuição, arredondado às décimas, é ____**IV**____ valores.

I	II	III	IV
a) 4	**a)** 12,5	**a)** 13,4	**a)** 2,9
b) 6	**b)** 13	**b)** 13,6	**b)** 3,8
c) 10	**c)** 13,5	**c)** 13,8	**c)** 4,1

7. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^4}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.

*** 8.** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- para qualquer número real a, $a \neq 2$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$, com $f(2) > 0$, e $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$;
- $f(1) \times f(3) < 0$.

Considere as proposições seguintes.

I. O teorema de Bolzano-Cauchy permite afirmar que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]1, 3[$.

II. A reta de equação $x = 2$ é assíntota ao gráfico da função $\frac{1}{f}$.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

9. Na Figura 3, estão representadas, em referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro em O e raio 2 e uma região sombreada composta pelo trapézio $[OBCD]$, retângulo em C e em D, e pelo sector circular correspondente ao ângulo orientado AOB, de amplitude α, em radianos, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, e raio $\overline{OA}$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência e ao semieixo positivo Ox;
- os pontos B e C pertencem à circunferência, sendo C o simétrico de B, em relação ao eixo Oy.

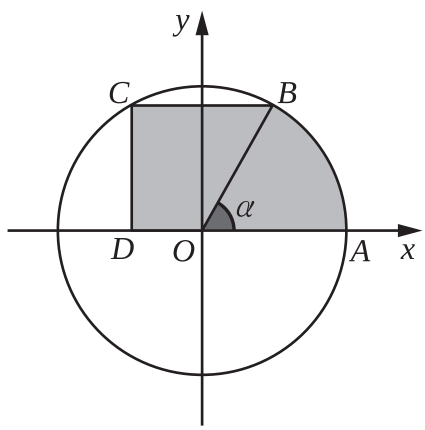


Figura 3

Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de α, pela expressão

$$2\alpha + 3\,\text{sen}\,(2\alpha)$$

10. Na Figura 4, está representada uma caixa que vai ser puxada ao longo de um plano horizontal, com recurso a uma haste rígida.

Nesta figura, o segmento de reta $[AB]$ representa a haste rígida, o ponto A representa o ponto em que a haste está fixada à caixa, e o ponto B representa o ponto em que vai ser exercida a força que permite deslocar a caixa.

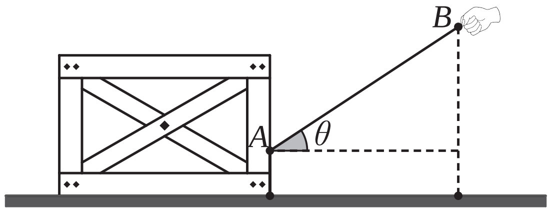


Figura 4

Seja θ a amplitude, em radianos, do ângulo que a força faz com a horizontal $\left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Admita que, para cada valor de θ, a intensidade mínima da força a aplicar no ponto B, para que se inicie o movimento da caixa, é dada, em newton, por

$$F(\theta) = \frac{4095}{5\,\text{sen}\,\theta + 12\cos\theta}$$

Existem dois valores distintos de θ aos quais corresponde a mesma intensidade mínima da força, em newton, a aplicar no ponto B, para que se inicie o movimento da caixa.

Sabe-se que um desses valores é o dobro do outro.

Seja θ_1 o menor desses valores $\left(\theta_1 \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de θ_1.

Apresente o resultado em radianos, arredondado às centésimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

11. Na Figura 5, está representado, no plano complexo, o triângulo $[ABC]$, cujos vértices pertencem à circunferência de raio 2 centrada na origem do referencial, sendo o ponto A pertencente ao semieixo imaginário negativo.

Os pontos A, B e C são os afixos das raízes cúbicas de um certo número complexo, w.

Em qual das seguintes opções se apresenta w, escrito na forma trigonométrica?

(A) $2e^{i\frac{\pi}{2}}$

(B) $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

(C) $8e^{i\frac{\pi}{2}}$

(D) $8e^{i\frac{3\pi}{2}}$

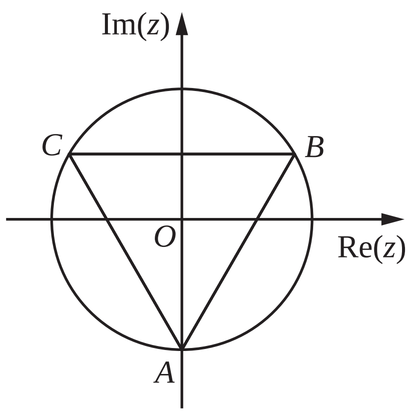


Figura 5

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z = \frac{4}{1+i} - \frac{2}{i^7}$.

Determine o número complexo w tal que o número complexo $z \times w$ tenha módulo $5\sqrt{2}$ e afixo pertencente à bissetriz do terceiro quadrante.

Apresente w na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

* **13.** Para certos valores reais de b e de m, não nulos, a reta de equação $y = mx + 1$ é tangente ao gráfico da função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 + bx + 5$ num ponto cuja abcissa é positiva.

Determine a abcissa desse ponto.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**8.**	**10.**	**11.**	**13.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	14	14	12	14	14	12	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.3.**		**3.3.**		**4.**		**7.**		**9.**		**12.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												**42**
TOTAL													**200**

EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA A

1.ª FASE | 2024 | PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Site: http://recursos-para-matematica.webnode.pt/

Facebook: https://www.facebook.com/recursos.para.matematica

EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA A

1.ª FASE | 2024

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. O contradomínio da função f é $[-1,3]$ e a função g e definida por $g(x)=f(x-2)+1$.

Tem-se que:

- $g_1(x)=f(x-2)\rightarrow$ corresponde a uma translação de vector $\vec{u}(2,0)$ (deslocamento horizontal de duas unidades para a direita), pelo que o contradomínio de g_1 é o mesmo do que o contradomínio de f;

- $g(x)=g_1(x)+1=f(x-2)+1\rightarrow$ corresponde a uma translação de vector $\vec{v}(0,1)$ (deslocamento vertical de uma unidade para cima), pelo que o contradomínio da função g é $[-1+1,3+1]=[0,4]$.

Resposta: C

2.

2.1. Sejam A e B os acontecimentos:

A: «o candidato era *violinista*» B: «o candidato era *português*»

Do enunciado sabe-se que $P(A)=\frac{3}{5}=0,6$, $P(B)=P(\overline{B})$ e $P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{3}{10}=0,3$.

Pretende-se $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{0,6}$.

Tem-se que $P(B)=P(\overline{B})\Leftrightarrow P(B)=1-P(B)\Leftrightarrow 2P(B)=1\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(B)=0,5$.

Por outro lado, $P(\overline{A}|\overline{B})=0,3\Leftrightarrow\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=0,3\underset{\substack{P(B)=1-P(B)=\\=1-0,5=0,5}}{\Leftrightarrow}\frac{P(\overline{A\cup B})}{0,5}=0,3\Leftrightarrow P(\overline{A\cup B})=0,3\times 0,5\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1-P(A\cup B)=0,15\Leftrightarrow 1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=0,15$$

$$\Leftrightarrow 1-(0,6+0,5-P(A\cap B))=0,15\Leftrightarrow 1-1,1+P(A\cap B)=0,15$$

$$\Leftrightarrow -0,1+P(A\cap B)=0,15\Leftrightarrow P(A\cap B)=0,25$$

Logo, $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{0,6}=\frac{0,25}{0,6}=\frac{5}{12}$.

2.2. Começamos por escolher a fila para os contrabaixistas. Assim, das duas filas escolhe-se uma. O número de maneiras de o fazer é ${}^2C_1 = 2$. Para cada uma destas maneiras, escolhem-se, ordenadamente, três lugares entres os quatro dessa fila para os três contrabaixistas. O número de maneiras de o fazer é ${}^4A_3$. Os restantes cinco músicos permutam de $5!$ maneiras distintas nos restantes cinco lugares.

Assim, uma resposta é $2 \times {}^4A_3 \times 5!$.

Resposta: B

2.3. Seja (u_n) a sucessão que dá o número de minutos que a Constança praticou para a audição no n-ésimo dia.

Como em cada dia, à excepção do primeiro, a Constança praticou mais 10 minutos do que no dia anterior, então (u_n) é uma progressão aritmética de razão 10.

No quarto dia praticou 60 minutos, pelo que $u_4 = 60$.

Ao fim de m dias, a Constança praticou, no total, 2970 minutos, pelo que:

$$\underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_m}_{\frac{u_1+u_m}{2}\times m} = 2970 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_m}{2} \times m = 2970$$

Tem-se que:

- $u_4 = u_1 + 3 \times 10 \Leftrightarrow 60 = u_1 + 30 \Leftrightarrow u_1 = 30$;
- $u_m = u_1 + (m-1) \times 10 = 30 + 10m - 10 = 20 + 10m$;

Logo, $\frac{u_1 + u_m}{2} \times m = 2970 \Leftrightarrow \frac{30+20+10m}{2} \times m = 2970 \Leftrightarrow \frac{50+10m}{2} \times m = 2970 \Leftrightarrow (25+5m) \times m = 2970 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 25m - 2970 = 0 \underset{\div 5}{\Leftrightarrow} m^2 + 5m - 594 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-594)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow m = -27 \quad \vee \quad m = 22$$

Como $m \in \mathbb{N}$, conclui-se que $m = 22$.

3.

3.1. A recta BC é perpendicular à plano ABE, pelo que $\vec{u}(2,3,6)$, que é um vector director da recta BC, é também um vector normal a ABE.

Logo, $ABE: 2x+3y+6z+d=0$.

Como o ponto $A(4,-4,-3)$ pertence ao plano ABE, substituindo na sua equação, vem:

$$2\times4+3\times(-4)+6\times(-3)+d=0 \Leftrightarrow 8-12-18+d=0 \Leftrightarrow -22+d=0 \Leftrightarrow d=22$$

$\therefore\ ABE: 2x+3y+6z+22=0$

Resposta: A

3.2. Como a ordenada igual ao dobro da sua abcissa, então as suas coordenadas são da forma $(x_B, 2x_B, z_B)$.

Como B pertence à recta BC, substituindo na sua equação, vem:

$$(x_B,2x_B,z_B)=(3,5,1)+k(2,3,6) \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=3+2k \\ 2x_B=5+3k \\ z_B=1+6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=3+2k \\ 2\times(3+2k)=5+3k \\ z_B=1+6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=3+2k \\ 6+4k=5+3k \\ z_B=1+6k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B=3+2\times(-1) \\ k=-1 \\ z_B=1+6\times(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=1 \\ k=-1 \\ z_B=-5 \end{cases}$$

Logo, $B(1,2\times1,-5)$, ou seja, $B(1,2,-5)$.

Tem-se que $A\hat{O}B=\overrightarrow{OA}\,\hat{}\,\overrightarrow{OB}$, tem-se que $\cos\left(A\hat{O}B\right)=\cos\left(\overrightarrow{OA}\,\hat{}\,\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}$.

Assim:

- $\overrightarrow{OA}=A-O=(4,-4,-3)-(0,0,0)=(4,-4,-3)\Rightarrow\left\|\overrightarrow{OA}\right\|=\sqrt{4^2+(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+16+9}=\sqrt{41}$;
- $\overrightarrow{OB}=B-O=(1,2,-5)-(0,0,0)=(1,2,-5)\Rightarrow\left\|\overrightarrow{OB}\right\|=\sqrt{1^2+2^2+(-5)^2}=\sqrt{1+4+25}=\sqrt{30}$;

- $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(4,-4,-3)\cdot(1,2,-5)=4\times1-4\times2-3\times(-5)=4-8+15=11$.

Portanto, $\cos\left(A\hat{O}B\right)=\cos\left(\overrightarrow{OA}\,\hat{}\,\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}=\dfrac{11}{\sqrt{41}\times\sqrt{30}}=\dfrac{11}{\sqrt{1230}}$.

Logo, $A\hat{O}B=\cos^{-1}\left(\dfrac{11}{\sqrt{1230}}\right)\approx72^{\circ}$.

3.3 Cada base tem quatro vértices. Como se escolhe dois de cada uma das duas bases, o número de casos possíveis é ${}^4C_2\times{}^4C_2$.

Para o número de casos favoráveis vamos considerar dois casos:

- Numa das bases, os dois vértices escolhidos são vértices de uma aresta.

Assim, temos quatro possibilidades numa das faces (por exemplo, na base $[ABCD]$, as possibilidades de escolha são A e B, B e C, C e D, e D e A). Na outra base só não podemos escolher os dois vértices da aresta que pertence à mesma base (por exemplo, se escolhermos A e B na base $[ABCD]$, na outra base não podemos escolher E e F). Assim, para este caso temos $4\times\left({}^4C_2-1\right)$ possibilidades.

- Numa das bases, os dois vértices escolhidos são vértices de uma diagonal.

Assim, temos duas possibilidades numa das faces (por exemplo, na base $[ABCD]$, as possibilidades de escolha são A e C, e B e D). Na outra base podemos escolher quaisquer outros dous vértices, uma vez que nunca pertencerão a uma mesma face lateral. Assim, para este caso temos $2\times{}^4C_2$ possibilidades.

Portanto, o número de casos favoráveis é $4\times\left({}^4C_2-1\right)+2\times{}^4C_2$ e a probabilidade pedida é:

$$\frac{4\times\left({}^4C_2-1\right)+2\times{}^4C_2}{{}^4C_2\times{}^4C_2}=\frac{8}{9}$$

Outra resolução: O contrário de os quatro vértices escolhidos não pertencerem a uma mesma base é os quatro vértices escolhidos pertencerem à mesma base. Assim, neste caso, o número de casos favoráveis ao acontecimento "os quatro pertencerem à mesma base" é 4 (escolher os quatro vértices de $[ADEH]$, ou de $[ABFE]$, ou de $[BCGF]$, ou de $[EFGH]$.

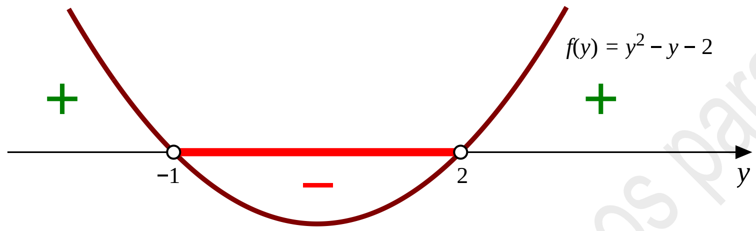
Portanto, a probabilidade pedida é $1-\dfrac{4}{{}^4C_2\times{}^4C_2}=1-\dfrac{4}{36}=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$.

4. O domínio de validade da condição é $D=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}=\mathbb{R}^+$.

Fazendo $y=\ln x$, a inequação fica, $y^2-y-2<0$.

Determinando os zeros: $y^2-y-2=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1} \Leftrightarrow y=-1 \ \vee \ y=2$

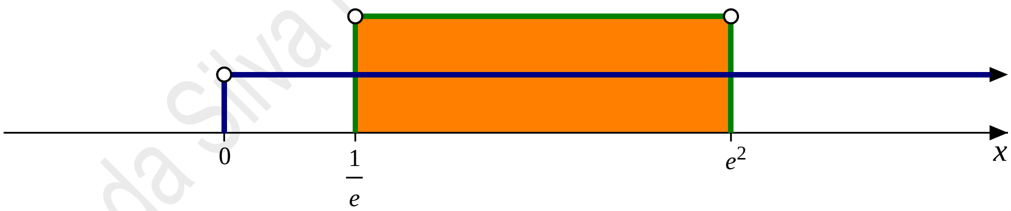
Esboçando o gráfico da função quadrática f, definida por $f(y)=y^2-y-2$:



Portanto, $y^2-y-2<0 \Leftrightarrow y>-1 \ \wedge \ y<2 \underset{y=\ln x}{\Leftrightarrow} \ln x>-1 \ \wedge \ \ln x<2 \underset{\substack{-1=\ln e^{-1}\\ 2=\ln e^2}}{\Leftrightarrow} \ln x>\ln e^{-1} \ \wedge \ \ln x<\ln e^2 \Leftrightarrow$

$\underset{e^{-1}=\frac{1}{e}}{\Leftrightarrow} x>\dfrac{1}{e} \ \wedge \ x<e^2$

Intersectando com o domínio (figura não à escala):



Portanto, o conjunto solução da condição é $\mathbb{R}^+\cap\left(\left]\dfrac{1}{e},e^2\right[\right)=\left]\dfrac{1}{e},e^2\right[$.

5.

5.1. Para $x \in]1,+\infty[$, $g(x) = x^2 - 3x + 2\ln x$

- $g'(x) = \left(x^2 - 3x - 2\ln x\right)' = 2x - 3 - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x}$

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x - 2}{x} = 0 \underset{x>1 \Rightarrow x \neq 0}{\Leftrightarrow} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$

Como $x \in]1,+\infty[$, o único zero de g' é 2. Elaborando um quadro de sinal de g' e relacionando com a monotonia de g, vem:

x	1		2	$+\infty$
$2x^2 - 3x - 2$	n.d.	$-$	0	$+$
x	n.d.	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
g	n.d.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$

Logo, em $]1,+\infty[$, a função g é decrescente em $]1,2]$, é crescente em $[2,+\infty[$ e tem mínimo relativo em $x = 2$, que é $g(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 2\ln 2 = -2 - 2\ln 2$.

5.2. A função g é contínua em $x = 1$ se $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = g(1)$.

- $g(1) = 1^2 - 3 \times 1 - 2\ln(1) = 1 - 3 - 2 \times 0 = -2$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(x^2 - 3x - 2\ln x\right) = 1^2 - 3 \times 1 - 2\ln(1) = 1 - 3 - 2 \times 0 = -2$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{1-x}{e^{x-1} - 1} - e^{x-k}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-(x-1)}{e^{x-1} - 1} - \lim\limits_{x \to 1^-} e^{x-k} = -\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x-1}{e^{x-1} - 1} - e^{1-k} =$

$$\underset{\substack{y = x-1 \\ x \to 1^- \Rightarrow y \to 0^-}}{=} -\lim_{y \to 0^-} \frac{y}{e^y - 1} - e^{1-k} = -\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Limite notável}}} - e^{1-k} = -\frac{1}{1} - e^{1-k} = -1 - e^{1-k}$$

Logo, $-1 - e^{1-k} = -2 \Leftrightarrow -e^{1-k} = -2 - 1 \Leftrightarrow -e^{1-k} = -1 \Leftrightarrow e^{1-k} = 1 \Leftrightarrow 1 - k = \ln 1 \Leftrightarrow 1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

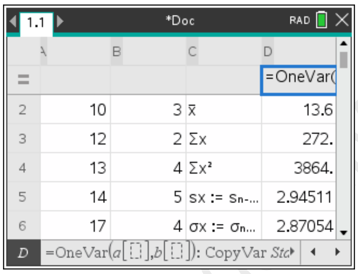
6. A percentagem de alunos com classificação interior a 13 é $5+15+10=30\%$. Portanto, $0,30\times 20=6$ alunos tiveram classificação inferior a 13, pelo que **I $\rightarrow$ b)**.

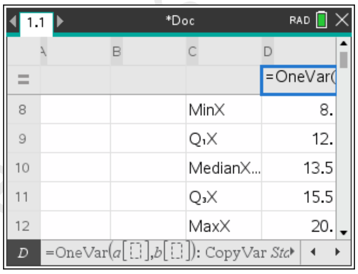
Introduzindo os dados numa calculadora, vamos determinar a mediana, a média e o desvio-padrão. Podemos, primeiro, construir uma tabela de frequências absolutas:

Classificações	Frequência Relativa	Frequência Absoluta
8	5%	$0,05\times 20=1$
10	15%	$0,15\times 20=3$
12	10%	$0,10\times 20=2$
13	20%	$0,20\times 20=4$
14	25%	$0,25\times 20=5$
17	20%	$0,20\times 20=4$
20	5%	$0,05\times 20=1$

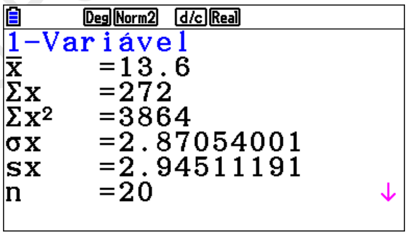
Assim, a mediana é $13,5$, a média é $13,6$ e o desvio-padrão é, aproximadamente, $2,9$. Na tabela seguinte apresentam-se os valores obtidos com as diferentes calculadoras:

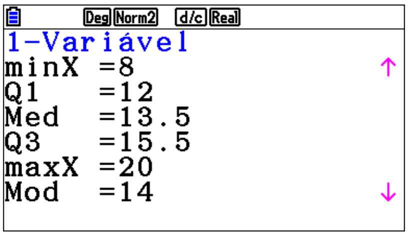
TI-Nsipe CX II-T





CASIO FX-CG50





NUMWORKS

Portanto, **II $\rightarrow$ c)**, **III $\rightarrow$ b)** e **IV $\rightarrow$ a)**.

7. Tem-se que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x^4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^4(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\operatorname{sen}^2 x}}{x^4(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^4(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{(0^-)^2} \times \frac{1}{1+\cos(0)}$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2}_{\text{Limite notável}} \times \frac{1}{0^+} \times \frac{1}{1+1} = 1^2 \times (+\infty) \times \frac{1}{2} = +\infty$$

Logo, a recta de equação $x = 0$ é assimptota vertical ao gráfico de f (poder-se-ia determinar $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, verificando que também é igual a $+\infty$, mas não é necessário). Como f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, o seu gráfico não tem mais assimptotas verticais.

8.

I. Dado que $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, a função f não é contínua em $x = 2$ e, portanto, não é contínua no intervalo $[1,3]$. Assim, por aplicação do teorema de Bolzano-Cauchy, não é possível concluir que a função f tem pelo menos um zero em $]1,3[$.

Logo, a afirmação **I.** é falsa.

II. Tem-se que:

- $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to 2^-} f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$;

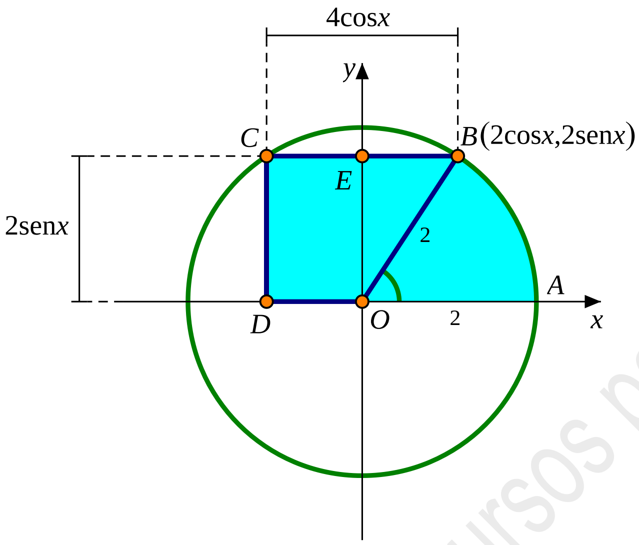
- $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to 2^+} f(x)} = \frac{1}{f(2)}$. Como $f(2) > 0$ e é finito, então $\frac{1}{f(2)}$ é um número real positivo.

Portanto, dado que $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)}$ e $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{f(x)}$ são finitos, o gráfico de f não tem assimptota vertical em $x = 2$.

Logo, a afirmação **II.** é falsa.

9. Consideremos a seguinte figura.

O ponto E é o ponto médio do segmento de recta $[BC]$.



Tem-se que:

- a área do sector circular AOB é dada por $\frac{\alpha}{2} \times 2^2 = 2\alpha$;

- a área do trapézio rectângulo $[OBCD]$ é dada por $\frac{\overline{OD}+\overline{BC}}{2} \times \overline{CD}$.

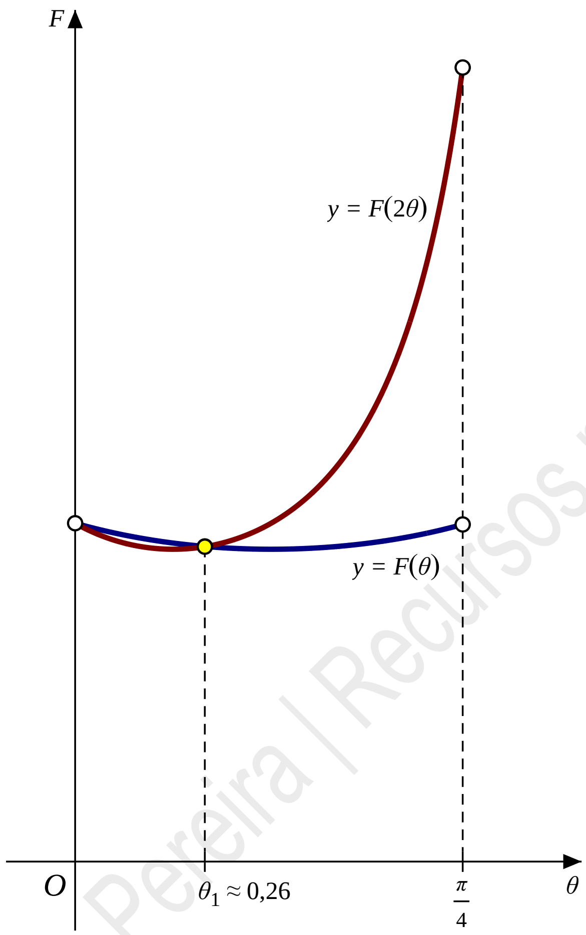
As coordenadas do ponto B são dadas por $(2\cos\alpha, 2\,\text{sen}\,\alpha)$, pelo que $\overline{BE} = 2\cos\alpha$ e $\overline{CD} = 2\,\text{sen}\,\alpha$. Portanto, $\overline{OD} = \overline{BE} = 2\cos\alpha$ e $\overline{BC} = 2\overline{BE} = 2 \times 2\cos\alpha = 4\cos\alpha$.

Portanto, a área da região sombreada da figura é dada por:

$$A_{sectorAOB} + A_{[OBCD]} = 2\alpha + \frac{2\cos\alpha + 4\cos\alpha}{2} \times 2\,\text{sen}\,\alpha = 2\alpha + \frac{6\cos\alpha}{2} \times 2\,\text{sen}\,\alpha = 2\alpha + 3\cos\alpha \times 2\,\text{sen}\,\alpha =$$

$$= 2\alpha + 3 \times \underbrace{2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}_{\text{sen}(2\alpha)} = 2\alpha + 3\,\text{sen}(2\alpha)$$

10. Pretende-se o menor valor $\theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ que é solução da equação $F(\theta) = F(2\theta)$.



Logo, $\theta_1 \approx 0,26$.

11. Como o raio da circunferência é 2, o número complexo cujo afixo é o ponto A é $-2i$.

Assim, $-2i$ é uma raiz cúbica de w, pelo que $w = (-2i)^3 = (-2)^3 i^3 = -8 \times (-i) = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Resposta: C

12. Tem-se que, $z=\frac{4}{1+i}-\frac{2}{i^7}\underset{i^7=i^3=-i}{=}\frac{4}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}-\frac{2}{-i}=\frac{4-4i}{1^2-i^2}+\frac{2}{i}\times\frac{-i}{-i}=\frac{4-4i}{2}-\frac{2i}{-i^2}=2-2i-2i=2-4i$.

Como o afixo de $z\times w$ pertence à bissectriz do terceiro quadrante, um seu argumento é $\frac{5\pi}{4}$. Assim, como o seu módulo é $5\sqrt{2}$, vem que $z\times w=5\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}=5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)=5\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-5-5i$.

Logo,

$$z\times w=-5-5i\Leftrightarrow w=\frac{-5-5i}{z}\Leftrightarrow w=\frac{-5-5i}{2-4i}\Leftrightarrow w=\frac{-5-5i}{2-4i}\times\frac{2+4i}{2+4i}\Leftrightarrow w=\frac{-10-20i-10i-20i^2}{2^2-4^2i^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w=\frac{-10-30i+20}{4+16}\Leftrightarrow w=\frac{10-30i}{20}\Leftrightarrow w=\frac{10}{20}-\frac{30i}{20}\Leftrightarrow w=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

13. A recta de equação $y=mx+1$ é tangente ao gráfico de f num ponto do seu gráfico. Seja $(a,f(a))$, com $a>0$, esse ponto (o ponto de tangência). Então, $f'(a)=m$.

Como $f'(x)=\left(2x^2+bx+5\right)'=4x+b$, vem que $f'(a)=m\Leftrightarrow 4a+b=m$.

Portanto, a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a é $y=(4a+b)x+1$.

Mas, o ponto de coordenadas $(a,f(a))$ pertence à recta, pelo que:

$$f(a)=(4a+b)a+1\Leftrightarrow 2a^2+\cancel{ab}+5=4a^2+\cancel{ab}+1\Leftrightarrow -2a^2=-4\Leftrightarrow a^2=2\underset{a>0}{\Leftrightarrow}a=\sqrt{2}$$

$\therefore$ A abcissa do ponto de tangência é $\sqrt{2}$.

FIM

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Critérios de Classificação 12 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

As respostas aos itens de seleção podem ser classificadas de forma dicotómica ou por níveis de desempenho, de acordo com os critérios específicos. No primeiro caso, a pontuação só é atribuída às respostas corretas, sendo todas as outras respostas classificadas com zero pontos. No caso da classificação por níveis de desempenho, a cada nível corresponde uma dada pontuação, de acordo com os critérios específicos.

Nas respostas aos itens de seleção, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra ou do número correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Linguagem Científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de classificação definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	**Classificação**
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **12 pontos**

(C)

2.1. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Designemos por A o acontecimento «o candidato é violinista» e por B o acontecimento «o candidato é português».

1.º Processo

Apresentar uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam:
A e $\overline{A}$; B e $\overline{B}$ .... 1 ponto

Identificar o valor pedido com $P(B|A)$ .... 1 ponto

Reconhecer que $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(A)$ $\left(\dfrac{3}{5}\right)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(B)$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{B})$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Reconhecer que $P(\overline{A}|\overline{B})=\dfrac{3}{10}$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ $\left(\dfrac{3}{20}\right)$ .... 2 pontos

Preencher a célula da tabela relativa a $P(A\cap B)$ $\left(\dfrac{1}{4}\right)$ .... 3 pontos

Obter o valor pedido $\left(\dfrac{5}{12}\right)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $P(A)=\dfrac{3}{5}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $P(\overline{B})=P(B)$ .... 1 ponto

Escrever $P(\overline{B})=\dfrac{1}{2}$ .... 1 ponto

Escrever $P(\overline{A}|\overline{B})=\dfrac{3}{10}$ .... 1 ponto

Identificar o valor pedido com $P(B|A)$ .... 1 ponto

Reconhecer que $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ .... 1 ponto

Obter $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{3}{20}$ .... 2 pontos

Reconhecer que $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$ .... 1 ponto

Obter $P(A\cup B)=\dfrac{17}{20}$ .... 1 ponto

Obter $P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido $\left(\dfrac{5}{12}\right)$ .... 2 pontos

2.2. .... **12 pontos**

(B)

2.3. .... **14 pontos**

Reconhecer que os tempos de prática, em minutos, da Constança, em cada um dos dias, são termos consecutivos de uma progressão aritmética, (u_n), de razão 10 .... 2 pontos

Reconhecer que $u_4 = u_1 + 30$ .... 2 pontos

Obter $u_1 = 30$ .... 1 ponto

Escrever $u_m = 20 + 10m$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Reconhecer que 2970 é a soma de m termos consecutivos de (u_n) .... 2 pontos

Escrever $2970 = \frac{10m + 50}{2} \times m$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter o valor pedido (22) .... 2 pontos

3.1. .... **12 pontos**

(A)

3.2. .... **14 pontos**

Reconhecer que as coordenadas do ponto B são da forma $(a, 2a, b)$ .... 1 ponto

Determinar as coordenadas do ponto B $((1, 2, -5))$ .... 2 pontos

Escrever as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$ .... 1 ponto

Escrever as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OB}$ .... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ (11) .... 2 pontos

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{OA}$ $(\sqrt{41})$ .... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{OB}$ $(\sqrt{30})$ .... 1 ponto

Escrever $11 = \sqrt{41} \times \sqrt{30} \times \cos(A\hat{O}B)$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter o valor pedido (72^{o}) .... 2 pontos

3.3. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar o número de casos possíveis $\left({}^4C_2 \times {}^4C_2\right)$ .... 6 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis $\left(4 \times \left({}^4C_2 - 1\right) + 2 \times {}^4C_2\right)$ ...(3 + 3)... 6 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{8}{9}\right)$ (**ver nota**) .... 2 pontos

2.º Processo

Reconhecer que a probabilidade pedida é a probabilidade do acontecimento contrário ao acontecimento «os quatro vértices selecionados pertencem a uma mesma face lateral do prisma» .... 2 pontos

Calcular a probabilidade de os quatro vértices pertencerem a uma mesma face lateral do prisma .... 10 pontos

Apresentar o número de casos possíveis $\left({}^4C_2 \times {}^4C_2\right)$ .... 4 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis (4) .... 4 pontos

Obter a probabilidade $\left(\frac{1}{9}\right)$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Obter o valor pedido $\left(\frac{8}{9}\right)$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Nota – Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação de 0 pontos deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0, 1]$.

4. .... **14 pontos**

Reconhecer que o domínio de resolução da condição é $]0, +\infty[$ .... 1 ponto

Obter $\ln x > -1 \;\wedge\; \ln x < 2$ .... 9 pontos

Escrever $\ln^2 x - \ln x - 2 = 0$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $\ln x = -1 \;\vee\; \ln x = 2$ .... 3 pontos

Concluir que $\ln x \in]-1, 2[$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter $x > e^{-1} \;\wedge\; x < e^2$ .... 2 pontos

Apresentar o conjunto pedido $\left(\left]\frac{1}{e}, e^2\right[\text{, ou equivalente}\right)$ .... 2 pontos

5.1. .... **14 pontos**

Determinar $g'(x)$ em $]1, +\infty[$ (**ver nota 1**) .... 3 pontos

Escrever $g'(x) = 0$ .... 1 ponto

Determinar o zero de g' em $]1, +\infty[$ .... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g' e de monotonia de g no intervalo $]1, +\infty[$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Apresentar os intervalos de monotonia de g em $]1, +\infty[$ (**ver nota 2**) .... 2 pontos

Reconhecer que $g(2)$ é um extremo relativo .... 1 ponto

Determinar $g(2)$ $(-2 - 2\ln 2,$ ou equivalente$)$ .... 1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que a função g é decrescente em $]1, 2[$, em vez de $]1, 2]$, e crescente em $]2, +\infty[$, em vez de $[2, +\infty[$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

5.2. .... **14 pontos**

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ $\left(\text{ou } \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = g(1)\right)$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ $\left(\text{ou } g(1)\right)$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 3x - 2\ln x)$
(ou substituir x por 1 na expressão $x^2 - 3x - 2\ln x$) .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -2$ $\left(\text{ou } g(1) = -2\right)$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ .... 9 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\dfrac{1-x}{e^{x-1}-1} - e^{x-k}\right)$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\dfrac{1-x}{e^{x-1}-1} - e^{x-k}\right) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1-x}{e^{x-1}-1} - \lim\limits_{x \to 1^-} e^{x-k}$ .. 1 ponto

Escrever
$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1-x}{e^{x-1}-1} - \lim\limits_{x \to 1^-} e^{x-k} \underset{y = x-1}{=} \lim\limits_{y \to 0^-} \dfrac{-y}{e^{y}-1} - e^{1-k}$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{y \to 0^-} \dfrac{-y}{e^{y}-1} - e^{1-k} = -\dfrac{1}{\lim\limits_{y \to 0^-} \dfrac{e^{y}-1}{y}} - e^{1-k}$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -1 - e^{1-k}$ .... 2 pontos

Escrever $-1 - e^{1-k} = -2$ .... 1 ponto

Obter o valor de k (1) .... 1 ponto

6. .... **12 pontos**

I → b) **II → c)** **III → b)** **IV → a)**

Este item deve ser classificado de acordo com os níveis de desempenho seguintes.

Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
3	Completa o texto com as 4 opções corretas.	12
2	Completa o texto com 3 opções corretas.	8
1	Completa o texto com 2 opções corretas.	4

7. .... **14 pontos**

Justificar que apenas a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical ao gráfico da função f .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ .... 11 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^4}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^4 (1 + \cos x)}$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^4 (1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^4 (1 + \cos x)}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^4 (1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^4 (1 + \cos x)}$ .... 1 ponto

Escrever

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^4 (1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \times \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2 (1 + \cos x)}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = 1$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2 (1 + \cos x)} = +\infty$ .... 1 ponto

Concluir que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ .... 1 ponto

Concluir que a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f .... 2 pontos

8. .... **14 pontos**

Tópicos de resposta

- Justificação da falsidade da proposição **I**.
  Exemplo: A função f não é contínua no intervalo $[1, 3]$, pois $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ não existe (ou a função f não é contínua em $x = 2$). Portanto, não é possível concluir que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]1, 3[$ por aplicação do teorema de Bolzano-Cauchy.

- Justificação da falsidade da proposição **II**.
  Exemplo: Como $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{f(2)}$ e $\dfrac{1}{f(2)}$ é um número real, e como $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, a reta de equação $x = 2$ não é assíntota ao gráfico da função $\dfrac{1}{f}$.

Parâmetro	Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
A Conteúdos	**4**	Apresenta, de forma completa, as duas justificações solicitadas.	12
	3	Apresenta, de forma completa, uma das justificações solicitadas e, de forma incompleta, a outra justificação.	9
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma das justificações solicitadas. OU Apresenta, de forma incompleta, as duas justificações solicitadas.	6
	1	Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das justificações solicitadas.	3
B Linguagem Científica	**2**	Utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	2
	1	Utiliza, embora com uma ou mais falhas, o vocabulário específico da Matemática.	1

9. .... **14 pontos**

Reconhecer que a área do trapézio $[OBCD]$ é dada por $\dfrac{\overline{BC} + \overline{DO}}{2} \times \overline{CD}$ ... 1 ponto

Reconhecer que a abcissa do ponto B é $2\cos\alpha$ .... 1 ponto

Reconhecer que a ordenada do ponto B é $2\,\text{sen}\,\alpha$ .... 1 ponto

Reconhecer que a abcissa do ponto C é $-2\cos\alpha$ .... 1 ponto

Reconhecer que a abcissa do ponto D é $-2\cos\alpha$ .... 1 ponto

Obter $\overline{BC}$ em função de α .... 2 pontos

Escrever $\overline{DO}$ em função de α .... 1 ponto

Reconhecer que a altura do trapézio é igual a $2\,\text{sen}\,\alpha$ .... 1 ponto

Escrever uma expressão para a área do trapézio em função de α .... 1 ponto

Escrever uma expressão para a área do sector circular em função de α .... 1 ponto

Obter a expressão pretendida .... 3 pontos

10. .... **14 pontos**

Reconhecer que $2\theta_1$ é a amplitude do maior dos dois valores distintos de θ ... 2 pontos

Apresentar a equação $F(\theta) = F(2\theta)$ (ou uma equação equivalente) (**ver nota 1**) .... 3 pontos

Representar o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Assinalar o ponto relevante .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(0{,}26 \text{ rad})$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que correspondem à resolução de uma equação que traduz corretamente o problema.
2. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

11. .... **12 pontos**

(C)

12. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar i^7 com $-i$ .... 1 ponto

Obter $z = 2 - 4i$ .... 3 pontos

Escrever $z \times w = 5\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$ .... 3 pontos

Obter $z \times w = -5 - 5i$ .... 3 pontos

Escrever $w = \dfrac{-5-5i}{2-4i}$ .... 1 ponto

Obter $w = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$ .... 3 pontos

2.º Processo

Seja $w = a + bi$.

Identificar i^7 com $-i$ .... 1 ponto

Obter $z = 2 - 4i$ .... 3 pontos

Obter $z \times w = 2a + 4b + i(2b - 4a)$ .... 1 ponto

Escrever $2a + 4b = 2b - 4a$ .... 1 ponto

Obter $b = -3a$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter $z \times w$, com a parte real e com a parte imaginária em função de a (ou em função de b) .... 2 pontos

Obter $|z \times w|$ em função de a (ou em função de b) .... 2 pontos

Obter o valor de a e o valor de b .... 2 pontos

Escrever o número complexo w $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)$ .... 1 ponto

13. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Seja a a abcissa do ponto de tangência.

Obter $f'(x)$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Reconhecer que $m = f'(a)$ .... 2 pontos

Obter $f'(a) = 4a + b$ .... 1 ponto

Escrever $2a^2 + ba + 5 = (4a + b)a + 1$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Resolver a equação anterior .... 3 pontos

Apresentar o valor pedido $(\sqrt{2})$ .... 2 pontos

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

2.º Processo

Reconhecer que a reta é tangente ao gráfico de f se a equação $2x^2 + bx + 5 = mx + 1$ tiver apenas uma solução .... 3 pontos

Obter $2x^2 + (b - m)x + 4 = 0$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Escrever $(b - m)^2 - 32 = 0$ .... 3 pontos

Obter $b - m = -\sqrt{32} \ \vee \ b - m = \sqrt{32}$ .... 2 pontos

Obter $x = -\sqrt{2} \ \vee \ x = \sqrt{2}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(\sqrt{2}$, ou equivalente$)$ .... 2 pontos

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**8.**	**10.**	**11.**	**13.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	14	14	12	14	14	12	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.3.**		**3.3.**		**4.**		**7.**		**9.**		**12.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												**42**
TOTAL													**200**