PAU PORTUGAL

Matematica B (735) 2021-2024

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 25

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos

Toomates Coolección **Problem Solving** (en español):
Geometría Axiomática , Problemas de Geometría 1 , Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría , Álgebra , Teoría de números , Combinatoria , Probabilidad
Trigonometría , Desigualdades , Números complejos , Funciones

Toomates Coolección **Llibres de Text** (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) , Àlgebra , Proporcionalitat , Mesures geomètriques , Geometria analítica
Combinatòria i Probabilitat , Estadística , Trigonometria , Funcions , Nombres Complexos ,
Àlgebra Lineal , Geometria Lineal , Càlcul Infinitesimal , Programació Lineal , Mates amb Excel

Toomates Coolección **Compendiums**:
PAU España: Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares
PAU Internacional: Portugal A Portugal B Italia UK (A Level) IB Francia (BAC)
Canguro: ESP CAT FR USA UK AUS
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Internacional: IMO OMI IGO SMT INMO CMO REOIM Arquimede HMMT BMO
Pruebas acceso: ACM4 , CFGS , PAP
Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales, para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **Catálogo de libros** completo en http://www.toomates.net/biblioteca.htm
Encontrarás muchos más materiales para el aprendizaje de las matemáticas en **www.toomates.net**
Descarga toda la biblioteca Toomates Coolección en un solo archivo **Aquí** MEGA

Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**

Versión de este documento: **26/06/2024**

Índex.

Fuente.

https://mat.absolutamente.net/joomla/index.php/recursos/exames-e-testes-intermedios/matematica-b#2021

Este documento forma parte de este grupo de recopilatorios:

Portugal 635 1997-2020 http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal635.pdf

Portugal 735 2006-2020 http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal735.pdf

Portugal 635 2021-2024 http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal635b.pdf

Portugal 735 2021-2024 http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal735b.pdf

Portugal 835 2021-2024 http://www.toomates.net/biblioteca/Portuga835.pdf

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 7 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:

  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

- **Desvio padrão** de X:

  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. O consumo energético das famílias portuguesas, proveniente de gás natural, tem aumentado nas últimas décadas.

Admita que, durante duas décadas, o consumo energético anual, G, em gás natural das famílias portuguesas, em terajoule (TJ), por ano, é dado por

$$G(t)=\frac{10\,765{,}05}{1+11{,}81\,e^{-0{,}49t}}$$

em que $t=0$ corresponde a 1997, $t=1$ corresponde a 1998, e assim sucessivamente.

* 1.1. Determine o valor do consumo energético em gás natural das famílias portuguesas no ano de 2017, de acordo com o modelo apresentado.

Apresente o resultado em TJ, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, seis casas decimais.

1.2. De acordo com o modelo apresentado, a partir de que ano o valor do consumo energético em gás natural, em TJ, por ano, passou a ser superior a 9000 ?

Justifique a sua resposta.

2. O António pretende mudar de empresa distribuidora de gás natural. Para esse efeito, está a fazer um estudo e selecionou duas empresas: A e B.

A empresa A apresenta o seguinte tarifário:

- parcela fixa: $0{,}1336$ euros por dia;
- parcela variável em função da energia consumida: $0{,}0479$ euros por kWh.

A empresa B apresenta o seguinte tarifário:

- parcela fixa: isento $(0$ euros por dia$)$;
- parcela variável em função da energia consumida: $0{,}0586$ euros por kWh.

2.1. O António analisou uma fatura de gás referente a 30 dias e verificou que o consumo energético foi $325\ \mathrm{kWh}$.

De acordo com os tarifários apresentados, em qual das empresas, A ou B, teria sido menor o valor a pagar pelo consumo energético em gás natural indicado na fatura?

Justifique a sua resposta.

* 2.2. O António verificou que, a partir de um certo valor de consumo energético em gás natural, em kWh, por mês, lhe seria mais favorável optar pela empresa A.

Determine esse valor.

Apresente o resultado em kWh, arredondado às unidades.

Na sua resposta, considere um mês de 30 dias. Comece por apresentar expressões das funções, f e g, que relacionam o preço a pagar por mês com o consumo energético em gás natural, x, em kWh, nas empresas A e B, respetivamente.

*** 3.** No quintal que tem junto à sua casa, na zona de Leça da Palmeira, o António vai cultivar cogumelos e espargos para vender no mercado municipal de Matosinhos.

O António admite que o lucro que obterá por cada quilograma de cogumelos que cultivar é 3 euros e que o lucro que obterá por cada quilograma de espargos que cultivar é 4 euros.

Dadas as características do terreno, o cultivo destes dois produtos obedece às seguintes condições:

- a quantidade a cultivar de cada um dos produtos não pode exceder o dobro da quantidade a cultivar do outro produto;
- a quantidade total a cultivar destes dois produtos não pode exceder 9 quilogramas.

Determine a quantidade a cultivar de cada um dos produtos, de modo que, de acordo com as condições, o lucro total obtido com o cultivo dos mesmos seja máximo.

Na sua resposta, designe por x a quantidade, em quilogramas, de cogumelos a cultivar e designe por y a quantidade, em quilogramas, de espargos a cultivar, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

4. O António, quando se desloca ao mercado municipal de Matosinhos para vender os seus produtos agrícolas, utiliza a ponte móvel entre Leça da Palmeira e Matosinhos, no porto de Leixões. A Figura 1 é uma fotografia dessa ponte.

A ponte tem dois tabuleiros, geometricamente iguais, com apoios nas margens do rio Leça, que se movem, permitindo a passagem de barcos.

A Figura 2, que não está à escala, esquematiza a situação.

Figura 1

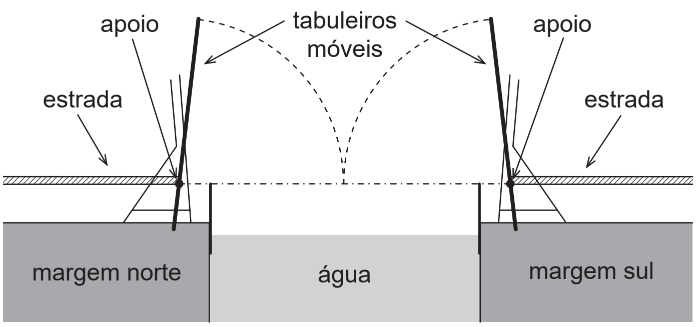


Figura 2

Considere o tabuleiro móvel situado na margem norte, representado por $[RP]$ na Figura 3.

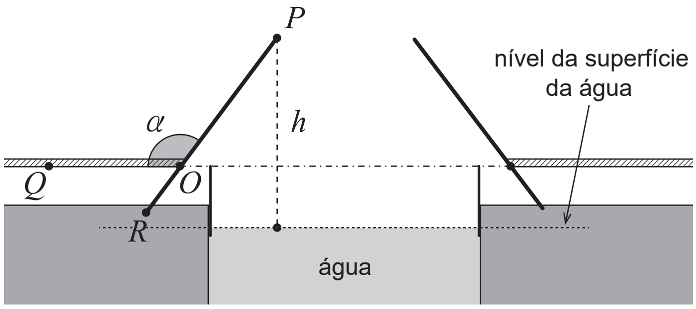


Figura 3

Nesta figura, que não está à escala:

- o ponto Q situa-se na estrada de acesso à ponte, na margem norte;
- o ponto O é o ponto que pertence à estrada e ao tabuleiro móvel, e representa um dos apoios;
- os pontos P e R acompanham o movimento do tabuleiro, enquanto o ponto O se mantém fixo.

Seja α a amplitude, em graus, do ângulo QOP .

Admita que, para cada valor de α , a altura, h , em metros, do ponto P em relação ao nível da superfície da água, considerando o nível médio do mar, é dada por

$$h(\alpha) = 46\ \text{sen}(\alpha) + 10{,}7 \quad , \quad \text{com} \quad 90^{\text{o}} \leq \alpha \leq 180^{\text{o}}$$

O argumento da função seno está em graus.

4.1. Determine o valor de α para o qual a altura do ponto P em relação ao nível da superfície da água é igual a 25 metros.

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

* **4.2.** O vão desta ponte é a distância entre os dois apoios, representada por v no esquema da Figura 4, que não está à escala.

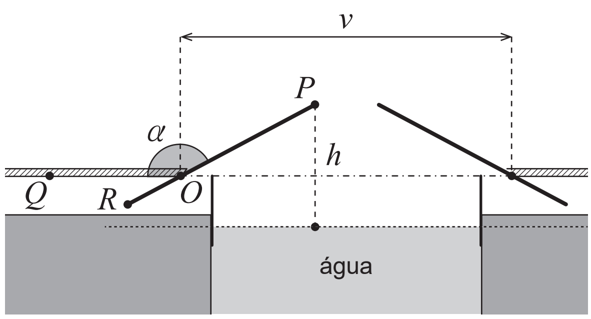


Figura 4

Determine o vão da ponte.

4.3. Seja T a função que dá a taxa de variação instantânea da função h , para cada valor de α .

Determine o valor de $T(135)$, arredondado às centésimas, e interprete-o no contexto da situação.

5. Nas noites quentes de verão, o António gosta de se sentar no pátio da sua casa a escutar o som dos grilos.

O som que os grilos produzem é originado por movimentos das asas, designados pulsos. O número de pulsos tende a aumentar com a subida da temperatura ambiente.

5.1. A Figura 5 é um diagrama de dispersão, no qual se relaciona o número de pulsos por segundo, y, com a temperatura ambiente, x, em graus Celsius (^{o}C). Este diagrama foi elaborado a partir de dados registados numa experiência com um grilo da espécie *Orocharis saltator*. Existe uma correlação linear forte entre as variáveis relacionadas. Nesta figura, está também representada a reta r, reta de regressão linear de y sobre x, e são indicadas as coordenadas dos pontos do diagrama de dispersão.

Estime, a partir da equação da reta r, o número de pulsos por segundo feitos pelo grilo quando a temperatura ambiente é igual a $22\ ^{o}C$.

Na sua resposta:

– apresente os valores dos parâmetros da equação da reta r arredondados às centésimas;

– apresente o valor pedido arredondado às unidades.

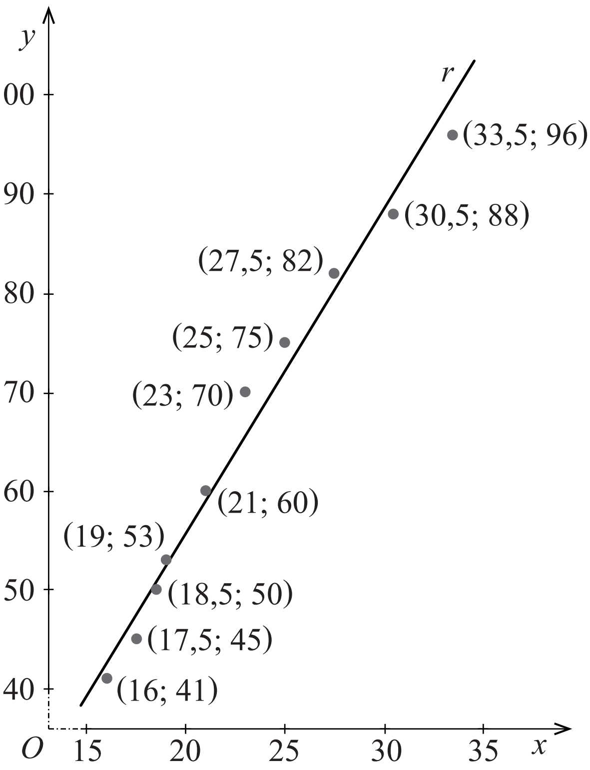


Figura 5

5.2. Admita que, para a espécie de grilos *Nemobius fasciatus*, a sequência que dá, aproximadamente, o número de pulsos por segundo para cada valor da temperatura ambiente, n, em graus Celsius, é definida por

$$u_n = 6n - 48 \quad , \quad \text{com} \quad n \in \{15, 16, ..., 38\}$$

* **5.2.1.** Justifique que os termos da sequência (u_n) são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

5.2.2. No âmbito de uma experiência, fizeram-se, durante alguns dias, duas audições por noite de um grilo da espécie *Nemobius fasciatus*, cada uma com a duração de um segundo. As temperaturas registadas em cada audição apresentam-se na tabela seguinte.

Dia	1.ª audição	2.ª audição
segunda-feira	$21\ ^{o}C$	$20\ ^{o}C$
terça-feira	$23\ ^{o}C$	$22\ ^{o}C$
quarta-feira	$25\ ^{o}C$	$24\ ^{o}C$
quinta-feira	$27\ ^{o}C$	$26\ ^{o}C$
sexta-feira	$29\ ^{o}C$	$28\ ^{o}C$

Determine o número total de pulsos do grilo ocorridos no conjunto das dez audições, de acordo com o modelo apresentado.

6. O António guarda, como recordação, uma bola de vidro, esférica e maciça, dentro de uma caixa cúbica. A bola é tangente à superfície interior de todas as faces da caixa.

A Figura 6 mostra, em referencial ortogonal e monométrico, $Oxyz$, um esquema da bola dentro da caixa. Neste esquema, que não está à escala, a bola está representada por uma esfera e a caixa pelo cubo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- a esfera está inscrita no cubo;
- a origem do referencial coincide com o centro do cubo;
- os eixos Ox, Oy e Oz intersectam as faces do cubo nos centros das mesmas;
- o vértice D tem coordenadas $(-10, -10, 10)$.

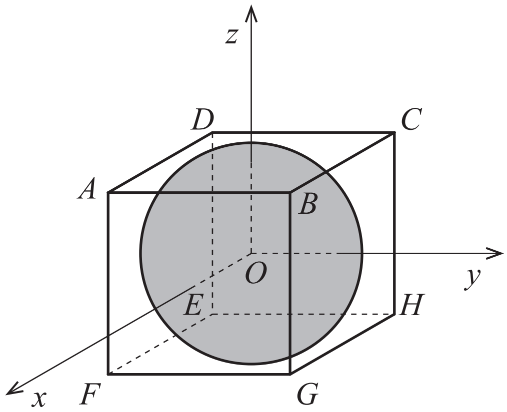


Figura 6

A unidade do referencial é o centímetro.

Devido à fragilidade do vidro, o António preencheu todo o espaço vazio da caixa com um material de amortecimento.

Determine o volume que o material de amortecimento ocupa no interior da caixa cúbica onde o António guarda a bola, considerando desprezável a espessura da caixa.

Apresente o resultado em centímetros cúbicos, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

*** 7.** A fotografia da Figura 7 mostra um vaso, suspenso por cordas, que o António tem no pátio.

O vaso tem 12 cm de altura e a sua forma, considerando desprezável a sua espessura, é de parte de uma superfície esférica de raio $7{,}5 \text{ cm}$.

Na Figura 8, está representado um esquema do vaso e da superfície esférica.

Figura 7

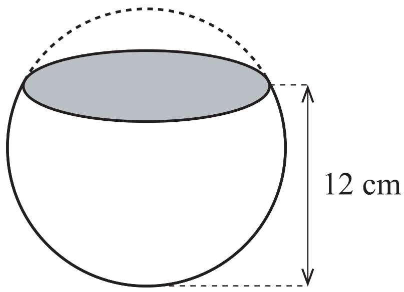


Figura 8

Determine o perímetro da abertura circular do vaso, representada a sombreado na Figura 8.

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às décimas.

*** 8.** O António comprou duas mil batatas-sementes para semear num terreno que tem junto à sua casa.

Seja X a variável aleatória «massa, em gramas, de uma batata-semente tirada ao acaso dessas duas mil batatas-sementes».

Admita que X segue uma distribuição normal de valor médio 65 gramas e que $P(50 < X < 80) = 70\%$.

A tabela seguinte relaciona a massa, em gramas, de uma batata-semente com a massa, em quilogramas, do total das batatas produzidas a partir dessa batata-semente.

Massa da batata-semente (g)	Menor do que 50	Entre 50 e 80	Maior do que 80
Massa das batatas produzidas (kg)	$0{,}8$	m	$1{,}5$

Na tabela, m representa um número real positivo.

Com a sementeira das duas mil batatas-sementes, estima-se uma produção de $2230\ \mathrm{kg}$ de batatas.

Determine o valor de m .

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 7 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.2.**	**5.2.1.**	**7.**	**8.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	16	16	20	20	16	16	16	**120**
Destes 7 itens contribuem para a classificação final da prova os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.2.**	**2.1.**	**4.1.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.2.**	**6.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	5 x 16 pontos							**80**
TOTAL								**200**

Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 13 DE JULHO 2021

1.

1.1. É fácil verificar que $t = 20$ corresponde ao ano 2017 :

t	ano
0	1997
1	1998
…	…
20	2017

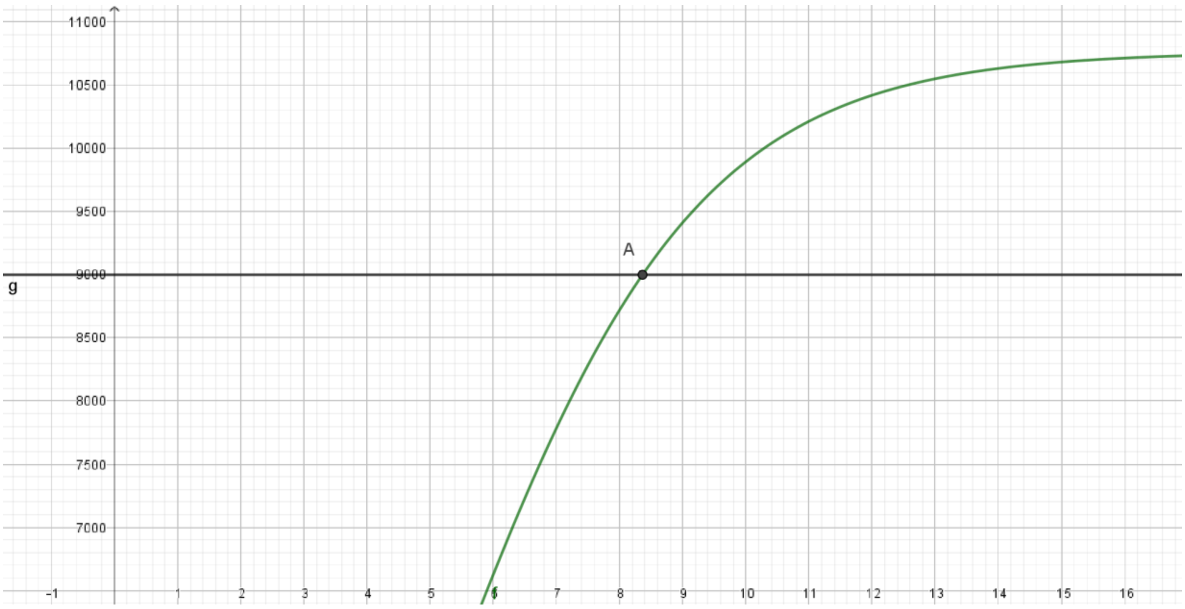
Temos então que:

$$G(20) = \frac{10765.05}{1 + 11.81e^{-0.49\times 20}}$$

$$G(20) \approx 10758$$

Resposta: Em 2017 o consumo energético anual, em gás natural das famílias portuguesas foi de 10 758 TJ.

1.2. Usemos as capacidades da calculadora gráfica para determinar a interseção do gráfico da função que permite definir o consumo energético anual e a reta horizontal, definida por $y = 9000$, por forma a resolver a inequação $G(20) > 9000$:



A interseção dos dois gráficos é o ponto A, cujo valor aproximado da abcissa é 8.36, pelo que o consumo será superior a 9000 TJ a partir de $t = 9$, o que corresponde ao ano 2006.

Resposta: O consumo energético anual, em gás natural, passou a ser superior a 9000 a partir do ano de 2006.

2.

2.1. De acordo com os dados apresentados podemos calcular o valor a pagar em cada uma das empresas.

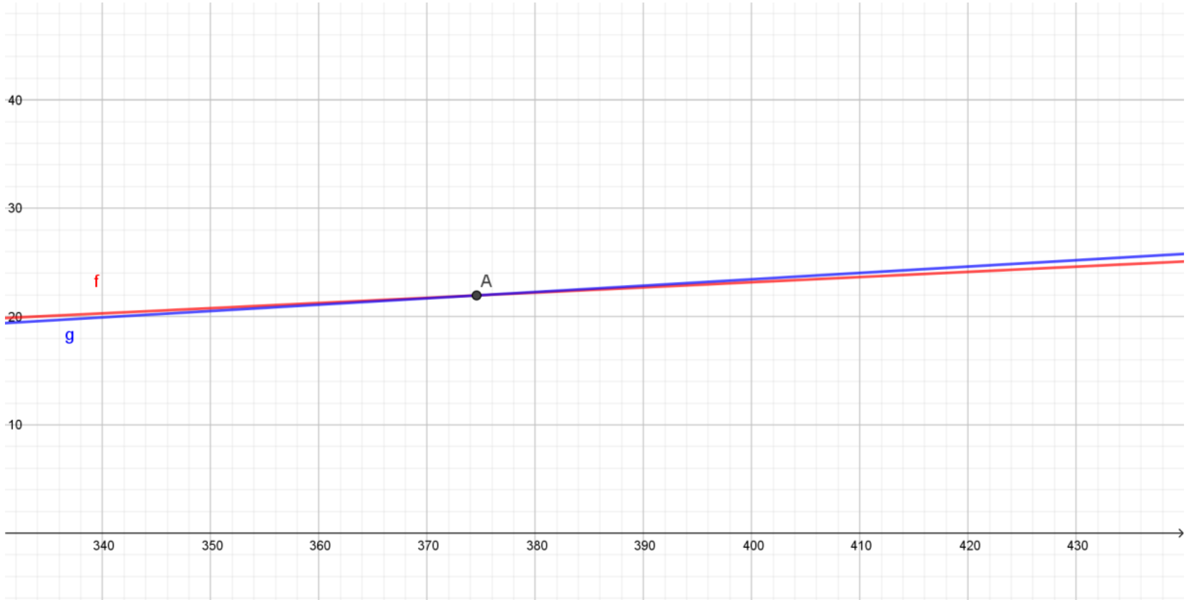
Empresa A	Empresa B
$30 \times 0.1336 + 325 \times 0.0479$ $= 19.5755 = 19{,}58$ €	$30 \times 0 + 325 \times 0.0586$ $= 19.045 = 19{,}05$ €

Resposta: De acordo com os cálculos apresentados, o valor a pagar pelo gás natural teria sido menor na empresa B.

2.2. De acordo com os dados apresentados definimos a função *f*, para a empresa A, e a função *g*, para a empresa B.

$f(x) = 30 \times 0.1336 + 0.0479x$	$g(x) = 30 \times 0 + 0.0586x$
$f(x) = 4.008 + 0.0479x$	$g(x) = 0.0586x$

Usemos a calculadora gráfica para visualizarmos os gráficos das duas funções:



Os dois gráficos intersetam-se no ponto A, de abcissa $x \approx 374{,}58$ o que nos permite concluir que $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x > 375$.

Resposta: A empresa A é mais favorável para consumos a partir dos 375 kWh

<u>Também podíamos ter optado por uma resolução algébrica:</u>

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow 4.008 + 0.0479x < 0.0586x$$

$$\Leftrightarrow 0.0479x - 0.0586x < -4.008 \Leftrightarrow -0.0107x < -4.008$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{-4.008}{-0.0107} \Leftrightarrow x > 374{,}5794$$

3.

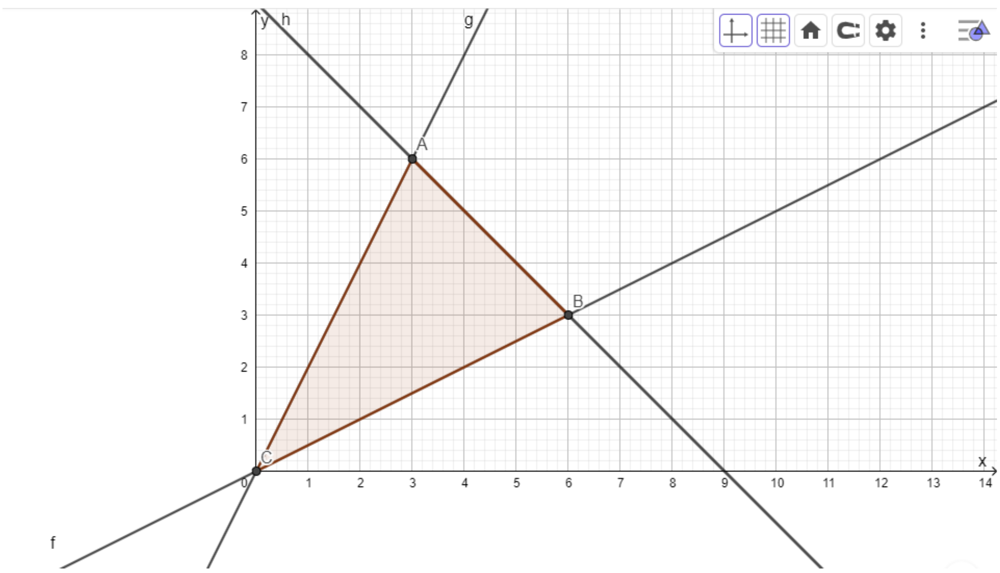
A função objetivo que pretendemos maximizar é :

$L(x) = 3x + 4y$, sendo x a quantidade de cogumelos (kg) e y a quantidade de espargos (kg)

Restrições do problema:

$$\begin{cases} x \leq 2y \\ y \leq 2x \\ x + y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x}{2} \\ y \leq 2x \\ y \leq -x + 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Construindo a região das soluções admissíveis obtemos o seguinte gráfico, sendo as coordenadas dos pontos A e B, (3, 6) e (6, 3), respetivamente.



Determinando as intersecções correspondentes aos vértices da região admissível, averiguamos a solução ótima.

x	y	$L(x) = 3x + 4y$
3	**6**	**33 - solução ótima**
6	3	30

Resposta: O lucro é máximo se forem cultivados 3 quilogramas de cogumelos e 6 quilogramas de espargos.

4.

4.1. Como a altura do ponto P é dada diretamente pela função h , basta resolver a equação

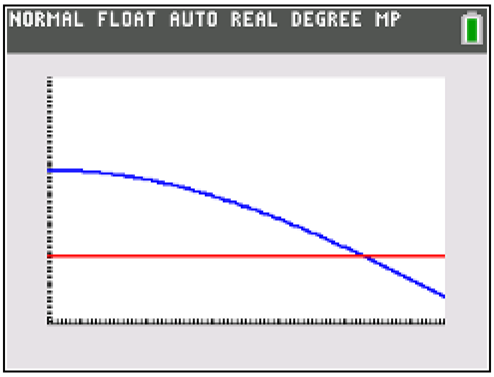
$h(\alpha) = 25$

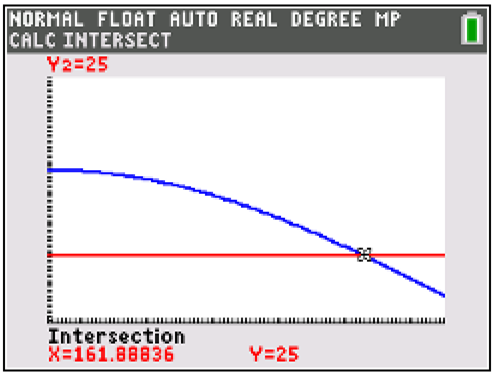
Usemos a calculadora gráfica para a resolver, tendo em conta que α, em graus, é tal que

$90 \leq \alpha \leq 180$

Definimos as funções

$y_1 = 46\sin(x) + 10,7$ e $y_2 = 25$ e determinamos a sua interseção.





Assim, o ângulo pedido é $\alpha \approx 161,89°$

Resposta: $\alpha = 162°$

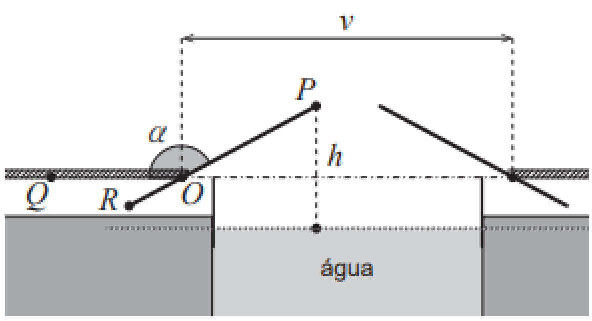
4.2. $h(\alpha) = 46\ sen\ (\alpha) + 10,7$

Considerando $\alpha = 90°$, temos que

$h(90°) = 46\ sen\ (90°) + 10,7 = 56,7\ m$

Considerando $\alpha = 180°$, temos que

$h(180°) = 46\ sen\ (180°) + 10,7 = 10,7\ m$

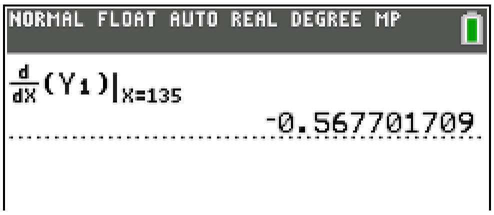


Assim, podemos concluir que metade do comprimento do vão é dado por
$h(90°) - h(180°) = 46\ m$, pelo que o vão da ponte tem um comprimento de $92\ m$.

Resposta: o vão da ponte tem um comprimento de $92\ m$

4.3. A taxa de variação instantânea é dada pela função derivada de h .

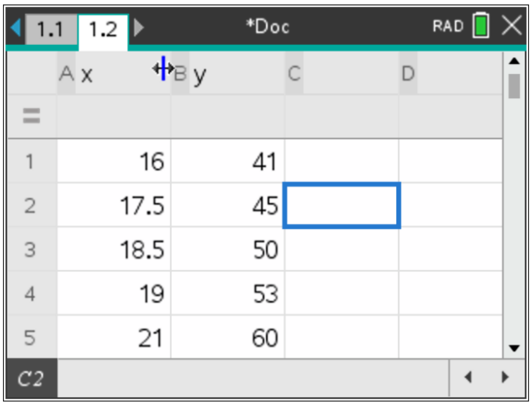
Utilizando a calculadora e fazendo $y_1 = 46\sin(x) + 10,7$, podemos obter o valor de $T(135)$:



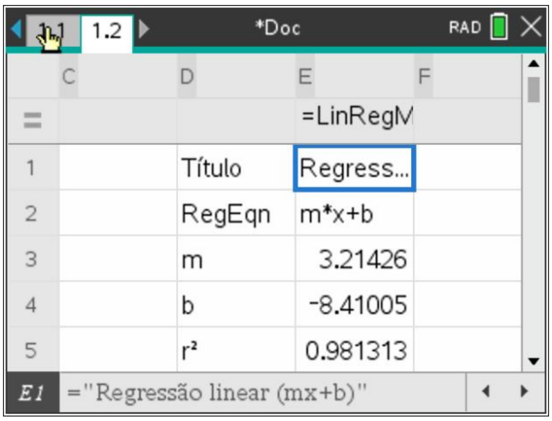
Assim, o valor da taxa de variação instantânea é $T(135) \approx -0,57$ o que significa que a altura em relação ao nível da água, quando $\alpha = 135°$, está a diminuir (a taxa é negativa) à razão aproximada de 57 cm por grau.

5.

5.1. Vamos recorrer à calculadora gráfica para determinarmos os valores dos parâmetros da equação da reta r. Para isso, colocamos numa lista as abcissas dos pontos do diagrama de dispersão, os valores registados da temperatura ambiente, e noutra lista as ordenadas dos pontos, ou seja, os valores registados relativamente ao número de pulsos por segundo.



Recorrendo à regressão linear, obtemos os parâmetros da reta de regressão linear de equação $y = mx + b$, sendo $m \simeq 3,21$ e $b \simeq -8,41$.



Vamos então usar a equação da reta de regressão linear, $y = 3,21x - 8,41$,

para estimar o número de pulsos por segundo feitos pelo grilo (y) quando a temperatura ambiente é igual a 22ºC ($x = 22$):

$$y = 3,21 \times 22 - 8,41 = 62,21 \simeq 62$$

Resposta: Para uma temperatura ambiente de 22ºC, estima-se que o número de pulsos por segundo feitos pelo grilo seja 62.

5.2.

5.2.1. Vejamos que é constante a diferença entre dois termos consecutivos da sequência:

$$u_{n+1} - u_n = 6(n+1) - 48 - (6n - 48) = 6n + 6 - 48 - 6n + 48 = 6$$

Assim, como $u_{n+1} - u_n = 6$, não depende de *n*, concluímos que (u_n) é uma progressão aritmética.

5.2.2. Queremos determinar a soma de 10 termos consecutivos da progressão aritmética, em que o primeiro termo é $u_{20} = 6 \times 20 - 48 = 72$ e o último termo é $u_{29} = 6 \times 29 - 48 = 126$. Assim, o número total de pulsos do grilo ocorridos no conjunto das dez audições é dado por:

$$\frac{72 + 126}{2} \times 10 = 99 \times 10 = 990$$

Resposta: O total de pulsos foi de 990.

6. Para determinarmos o volume que o material de amortecimento ocupa no interior da caixa cúbica, vamos determinar o volume do cubo e subtrair-lhe o volume da esfera.

Sabemos que $D(-10,-10,10)$ pelo que, de acordo com os dados do enunciado, $C(-10,10,10)$ e o cubo tem 20cm de aresta. Como a esfera está inscrita no cubo, de acordo com os dados do enunciado, o raio da esfera é de 10cm.

Assim:

Volume do cubo = $20^3 = 8000\,\text{cm}^3$

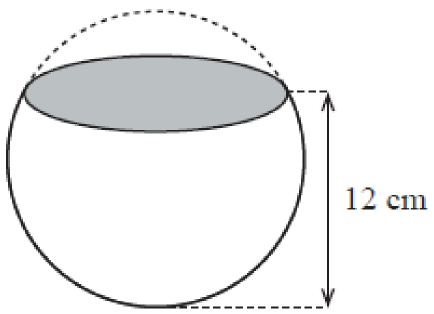
Volume da esfera = $\frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 \simeq 4188,7902\,\text{cm}^3$

pelo que o volume que o material de amortecimento ocupa no interior da caixa cúbica é de $8000 - 4188,7902 \simeq 3811\text{cm}^3$.

Resposta: o volume que o material de amortecimento ocupa é de 3811cm^3

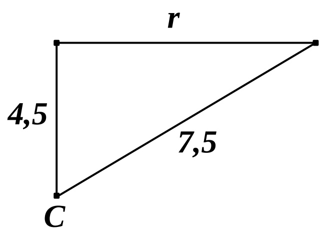
7.

Por ser útil vamos considerar o esquema apresentado na figura 8 do enunciado da prova.



Para determinar o perímetro da abertura circular do vaso precisamos de determinar o seu raio, a que vamos chamar r. Sabemos também que o raio da superfície esférica, de que o vaso é parte, mede $7,5$ cm, o que nos permite concluir que a distância do centro da superfície esférica ao plano da abertura do vaso é $12-7,5=4,5$

Usemos então outro esquema com os dados que já temos, onde o ponto C representa o centro da superfície esférica:



Vamos agora utilizar o Teorema de Pitágoras para determinar o valor de r:

$$r^2+4,5^2=7,5^2 \quad \Leftrightarrow \quad r=\sqrt{7,5^2-4,5^2} \quad (\text{porque } r>0)$$
$$\Leftrightarrow \quad r=\sqrt{36} \quad \Leftrightarrow \quad r=6$$

Ora, sendo assim, temos que **o perímetro da abertura do vaso é dado por**:
$2\pi\times 6=12\pi\approx 37,7$ cm.

8.

Sabemos que **a curva da distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio**. Como o valor médio é 65 e $50=65-15$ e $80=65+15$ temos que $P(X<50)=P(X>80)$.

Por outro lado, como $P(50<X<80)=0.7$, vamos ter que $P(X<50)=P(X>80)=\dfrac{0.3}{2}=0.15$.

Atendendo agora a esta distribuição de probabilidade, podemos deduzir a quantidade expectável de batatas-semente que existem em cada um dos intervalos de massa, no conjunto das 2000:

Massa da batata-semente	Menor do que 50	Entre 50 e 80	Maior do que 80
Número de batatas	$0.15\times 2000=300$	$0.7\times 2000=1400$	$0.15\times 2000=300$

Tendo em conta os dados do problema, designadamente a massa das batatas produzidas por cada batata-semente e a massa total temos que:

$$0.8\times 300 + m\times 1400 + 1.5\times 300 = 2230 \;\Leftrightarrow\; 240 + 1400m + 450 = 2230$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{2230 - 690}{1400} \;\Leftrightarrow\; m = 1.1$$

Resposta: $m = 1{,}1$

FIM

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação 9 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista (ver nota).
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.

13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... **16 pontos**

Identificar 2017 com $t = 20$ .... 5 pontos

Calcular $G(20)$ .... 9 pontos

Apresentar o valor pedido $(10\ 758\ \text{TJ})$ .... 2 pontos

1.2. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Traduzir o problema por uma condição $(G(t) > 9000$, ou equivalente)
(**ver nota 1**) .... 3 pontos

Resolver a condição anterior .... 10 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

Processo A

Representar graficamente a função G (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 9000$
(**ver nota 2**) .... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(8{,}36...)$ .... 2 pontos

Processo B

Isolar $e^{-0{,}49t}$ .... 3 pontos

Isolar $-0{,}49t$ .... 5 pontos

Isolar t .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (2006) (**ver nota 3**) .... 3 pontos

2.º Processo

Obter $G(8)$ .... 3 pontos

Obter $G(9)$ .... 3 pontos

Referir que $G(8) < 9000$ .... 2 pontos

Referir que $G(9) > 9000$ .... 2 pontos

Referir que a função G é crescente (ou equivalente) (**ver nota 4**) .... 3 pontos

Apresentar o valor pedido (2006) (**ver nota 3**) .... 3 pontos

Notas:

1. Se for apresentada $G(t) = 9000$, $G(t) \geq 9000$, $G(t) < 9000$ ou $G(t) \leq 9000$, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

2. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estes passos é desvalorizada em 1 ponto.

3. Se for apresentado 2005 , a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

4. Se for representada graficamente a função G , a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

2.1. .... **16 pontos**

Obter o valor referente à empresa A .... 9 pontos

Calcular o valor da parcela fixa $(4{,}008 \text{ euros})$ .... 4 pontos

Calcular o valor da parcela variável $(15{,}5675 \text{ euros})$ .... 4 pontos

Calcular o valor referente à empresa A $(19{,}58 \text{ euros})$ .... 1 ponto

Obter o valor referente à empresa B $(19{,}05 \text{ euros})$ .... 5 pontos

Concluir que o valor a pagar pelo consumo energético teria sido menor na empresa B .... 2 pontos

2.2. .... **16 pontos**

Escrever $f(x) = 0{,}0479x + 4{,}008$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Escrever $g(x) = 0{,}0586x$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Traduzir o problema por uma condição $(f(x) < g(x)$, ou equivalente$)$ (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Resolver a condição anterior .... 7 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Obter $-0{,}0107x < -4{,}008$ .... 4 pontos

Obter $x > 374{,}5...$ .... 3 pontos

2.º Processo

Representar graficamente a função f (**ver nota 2**) .... 2 pontos

Representar graficamente a função g (**ver nota 2**) .... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(374{,}5...)$ .... 2 pontos

3.º Processo

Obter $f(374)$ .... 1 ponto

Obter $f(375)$ .... 1 ponto

Obter $g(374)$ .... 1 ponto

Obter $g(375)$ .... 1 ponto

Referir que $f(374) > g(374)$ .... 1 ponto

Referir que $f(375) < g(375)$ .... 1 ponto

Referir que as funções f e g são crescentes (ou equivalente) (**ver nota 3**) .... 1 ponto

Apresentar o valor pedido (375 kWh) .... 1 ponto

Notas:

1. Se for apresentada $f(x) = g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) > g(x)$ ou $f(x) \geq g(x)$, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.
2. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estes passos é desvalorizada em 1 ponto.
3. Se forem representadas graficamente as funções f e g, a pontuação a atribuir a este passo não é desvalorizada.

3. .... **20 pontos**

Identificar a função objetivo $(L(x, y) = 3x + 4y)$ .... 2 pontos

Identificar as restrições
$(x \leq 2y$, $y \leq 2x$, $x + y \leq 9$, $x \geq 0$ e $y \geq 0)$ .... (5×1) .... 5 pontos

Representar graficamente a região admissível .... 7 pontos

Representar graficamente as retas de equações $x = 2y$, $y = 2x$ e $x + y = 9$ .... 3 pontos

Assinalar o polígono .... 4 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono, exceto a origem
$((3, 6)$ e $(6, 3))$ .... (2×1) .... 2 pontos

Calcular o lucro correspondente a cada um dos vértices do polígono, exceto a origem
(ou implementar o método da paralela à reta de nível zero) (**ver nota**) .. (2×1) ... 2 pontos

Apresentar os valores pedidos
$(3$ quilogramas de cogumelos e 6 quilogramas de espargos$)$ .... 2 pontos

Nota – No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

4.1. .... **16 pontos**

Equacionar o problema $(h(\alpha) = 25$ ou equivalente) .... 4 pontos

Resolver a equação anterior .... 11 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função h (**ver notas 1 e 2**) .... 5 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 25$ (**ver nota 1**) 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 2 pontos

Obter a abcissa desse ponto .... 2 pontos

Notas:

1. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estes passos é desvalorizada em 1 ponto.
2. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir a este passo é desvalorizada em 1 ponto.

2.º Processo

Isolar $\operatorname{sen}(\alpha)$ .... 3 pontos

Obter a amplitude do ângulo agudo que é solução da equação .... 4 pontos

Obter o valor de α .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido (162°) .... 1 ponto

4.2. .... **20 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar α com 90° .... 4 pontos

Obter $h(90)$ $(56{,}7)$ .... 2 pontos

Identificar α com 180° .... 4 pontos

Obter $h(180)$ $(10{,}7)$ .... 2 pontos

Obter metade do comprimento do vão da ponte (46) .... 5 pontos

Obter o valor pedido (92 m) .... 3 pontos

2.º Processo

Representar graficamente a função h (**ver nota**) .... 6 pontos

Assinalar o ponto do gráfico cuja ordenada é o valor máximo dessa função ...... 1 ponto

Obter a ordenada desse ponto $(56{,}7)$ .... 2 pontos

Assinalar o ponto do gráfico cuja ordenada é o valor mínimo dessa função .... 1 ponto

Obter a ordenada desse ponto $(10{,}7)$ .... 2 pontos

Obter metade do comprimento do vão da ponte (46) .... 5 pontos

Obter o valor pedido (92 m) .... 3 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.
Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 2 pontos.

4.3. .... **16 pontos**

Obter o valor de $T(135)$ $(-0{,}57)$ (**ver nota 1**) .... 6 pontos

Interpretar o valor obtido no contexto da situação (**ver nota 2**) .... 10 pontos

Referir que a altura do ponto P está a diminuir .... 5 pontos

Interpretar $-0{,}57$ como referente a $0{,}57 \text{ m/grau}$ .... 4 pontos

Referir que se trata de um valor aproximado da taxa de variação ... 1 ponto

Notas:

1. Se for obtido o valor $-32{,}53$ ou o valor $-45{,}82$, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 2 pontos.
2. Exemplo de interpretação: «Quando $\alpha = 135^{\circ}$, a altura do ponto P em relação ao nível da superfície da água está a diminuir a uma taxa de, aproximadamente, 57 cm por grau».

5.1. .... **16 pontos**

Apresentar as listas introduzidas na calculadora .... 4 pontos

Apresentar o valor do declive e o valor da ordenada na origem da reta de regressão linear $(3{,}21$ e $-8{,}41$, respetivamente) .... 6 pontos

Obter o valor pedido $(62$ pulsos) .... 6 pontos

5.2.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Escrever a subtração entre u_{n+1} e u_n (ou equivalente) .... 5 pontos

Obter a expressão de u_{n+1} .... 5 pontos

Obter a diferença (6) .... 5 pontos

Referir que a diferença não depende de n (ou equivalente) .... 1 ponto

2.º Processo

Calcular o 1.º termo da sequência dada (42) .... 3 pontos

Calcular o 2.º termo da sequência dada (48) .... 3 pontos

Calcular a diferença desses termos (6) .... 2 pontos

Escrever $a_{15}+(n-15)r$ como termo geral de uma progressão aritmética (a_n) 4 pontos

Substituir a_{15} por 42 .... 1 ponto

Substituir r por 6 .... 1 ponto

Obter $6n-48$ .... 2 pontos

3.º Processo

Referir que $6n-48$ corresponde a uma expressão polinomial do 1.º grau .. 10 pontos

Referir que $\{15, 16, ..., 38\}$ é um conjunto de números naturais consecutivos (ou equivalente) .... 6 pontos

5.2.2. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que os números de pulsos feitos pelo grilo nas audições são termos consecutivos de (u_n) .... 2 pontos

Reconhecer que são 10 termos .... 2 pontos

Obter o primeiro desses termos (72) .... 4 pontos

Obter o último desses termos (126) .... 4 pontos

Apresentar uma expressão da soma dos dez termos $\left(\frac{72+126}{2}\times 10\right)$ .... 3 pontos

Obter o valor pedido $(990$ pulsos) .... 1 ponto

2.º Processo

Calcular u_{20} , u_{21} , ... , u_{28} e u_{29} .... (10×1) .... 10 pontos

Identificar o valor pedido com a soma dos valores anteriores .... 5 pontos

Obter o valor pedido $(990$ pulsos$)$ .... 1 ponto

6. .... **16 pontos**

Obter o comprimento da aresta da caixa (20 cm) .... 4 pontos

Calcular o volume da caixa (8000 cm^3) .... 2 pontos

Reconhecer que a bola tem 10 cm de raio .... 4 pontos

Calcular o volume da bola $(4188{,}79020... \text{ cm}^3)$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido (3811 cm^3) .... 4 pontos

7. .... **16 pontos**

Considerar, relativamente à Figura 8, um triângulo retângulo cuja hipotenusa seja o raio da superfície esférica, e cujos catetos sejam o raio da abertura do vaso e a distância do centro dessa abertura ao centro da superfície esférica .... 4 pontos

Calcular a distância do centro da abertura do vaso ao centro da superfície esférica ... 3 pontos

Aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo .... 2 pontos

Obter o raio da abertura do vaso (6) .... 3 pontos

Escrever uma expressão do perímetro da abertura do vaso .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(37{,}7 \text{ cm})$ .... 2 pontos

8. .... **16 pontos**

Reconhecer que $P(X<50)=P(X>80)$ .... 2 pontos

Indicar o valor de $P(X<50)$ $(0{,}15)$ .... 2 pontos

Indicar o valor de $P(X>80)$ $(0{,}15)$ .... 2 pontos

Obter o número de batatas-sementes com massa menor do que 50 g (300) .... 2 pontos

Obter o número de batatas-sementes com massa maior do que 80 g (300) ..... 2 pontos

Obter o número de batatas-sementes com massa entre 50 g e 80 g (1400) .. 2 pontos

Escrever uma equação que permita obter m .... 3 pontos

Obter m $(1{,}1)$ .... 1 ponto

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 7 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.1.	2.2.	3.	4.2.	5.2.1.	7.	8.	Subtotal
Cotação (em pontos)	16	16	20	20	16	16	16	**120**
Destes 7 itens contribuem para a classificação final da prova os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.2.**	**2.1.**	**4.1.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.2.**	**6.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	5 x 16 pontos							**80**
TOTAL								**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 7 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

*** 1.** Um barco de pesca captura três espécies de peixe: cavala, sardinha e carapau.

Numa pescaria, foram pescados $640\ \mathrm{kg}$ de cavala, $240\ \mathrm{kg}$ de sardinha e $390\ \mathrm{kg}$ de carapau.

O peixe é vendido em lotes de dois tipos: A e B.

Cada lote A é constituído por $40\ \mathrm{kg}$ de cavala, $4\ \mathrm{kg}$ de sardinha e $20\ \mathrm{kg}$ de carapau.

Cada lote B é constituído por $16\ \mathrm{kg}$ de cavala, $12\ \mathrm{kg}$ de sardinha e $15\ \mathrm{kg}$ de carapau.

Cada lote A é vendido a 180 euros e cada lote B é vendido a 160 euros.

Determine o número de lotes A e o número de lotes B que se devem vender, de modo a obter o valor máximo com a venda desses lotes, nas condições referidas.

Na sua resposta, designe por x o número de lotes A e por y o número de lotes B a vender, e apresente:

– a função objetivo;
– as restrições do problema;
– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;
– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. Num estudo sobre uma população de carapaus, concluiu-se que o comprimento, C, em centímetros, de um carapau dessa população é dado, em função de t, aproximadamente, por

$$C(t) = 42\left(1 - e^{-0{,}1056t - 0{,}4222}\right) \quad , \quad \text{com} \quad t \geq 1$$

em que t representa a idade, em anos, do carapau.

2.1. De acordo com o modelo apresentado, quantos centímetros cresce um carapau dessa população durante o segundo ano de vida?

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

*** 2.2.** Admita que a massa, M, em gramas, de um carapau dessa população, com C centímetros de comprimento, é dada, aproximadamente, por

$$M(C) = 0{,}0084 \times C^3 \quad , \quad \text{com} \quad C \geq 18$$

Determine a idade de um carapau dessa população cuja massa é 400 gramas, de acordo com os dois modelos apresentados.

Apresente o resultado em anos e meses, com o número de meses arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Ao largo da costa portuguesa, perto de Viana do Castelo, está em desenvolvimento um dos maiores parques flutuantes do mundo para captação de energia eólica. A central deste parque começou a injetar energia na rede elétrica no final de 2019.

A potência útil de uma torre eólica depende, entre outros fatores, da velocidade do vento. Devido a questões técnicas, a partir de um determinado valor da velocidade do vento, por mais que esta aumente, não se permite que a potência aumente, estabilizando-a num determinado valor, para que seja possível injetar a energia gerada na rede elétrica.

O gráfico representado na Figura 1 relaciona a potência útil, P, em kW, de uma torre eólica com a velocidade, v, em $\mathrm{m/s}$, do vento que faz girar as hélices da torre, para $v > 3$.

De acordo com o gráfico, a potência útil, P, desta torre:

- é crescente até $3000\ \mathrm{kW}$, para valores da velocidade do vento a partir de $3\ \mathrm{m/s}$ até um determinado valor, N, do qual se sabe ser **superior** a $15\ \mathrm{m/s}$;
- é igual a $3000\ \mathrm{kW}$, para valores da velocidade do vento a partir de N.

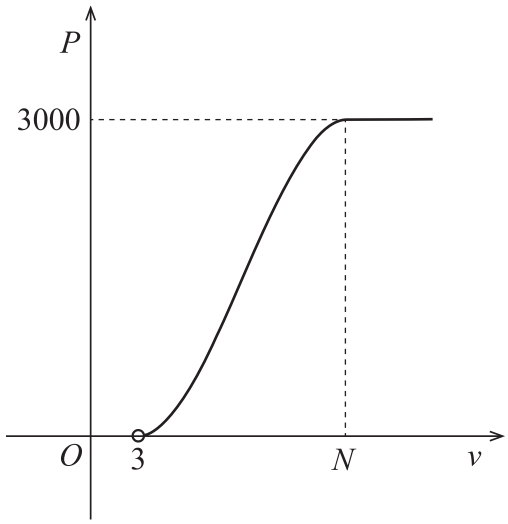


Figura 1

Admita que, para $3 < v \leq N$, a potência útil, P, em kW, é dada por

$$P(v) = -2{,}731\,v^3 + 77{,}834\,v^2 - 393{,}264\,v + 553{,}023$$

3.1. Determine o valor de N.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

* **3.2.** Determine o valor da taxa de variação média da função P no intervalo $[5, 15]$ e interprete-o no contexto descrito.

Apresente o valor da taxa de variação média arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, uma casa decimal.

3.3. Seja T a função que dá a taxa de variação instantânea da função P, para cada valor de v.

Qual é o valor da função T quando $v > N$?

Justifique a sua resposta.

4. Em Portugal, existem empresas que organizam passeios de barco pela costa. Quando estava de férias, a Mariana comprou, a uma dessas empresas, um bilhete para fazer um passeio.

* **4.1.** Admita que a variável aleatória, Y, «duração de uma viagem de autocarro desde o hotel onde a Mariana está alojada até ao ancoradouro onde se apanha o barco» segue, aproximadamente, uma distribuição normal de valor médio 20 minutos e desvio padrão 4 minutos.

O autocarro em que a Mariana viajou saiu do hotel às 8 horas e 32 minutos.

A chegada do autocarro ao ancoradouro está prevista para as 9 horas.

Determine a probabilidade de o autocarro chegar ao ancoradouro antes da hora prevista.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

4.2. A empresa vendeu três tipos de bilhete para o passeio de barco:

- tipo 1 – só a viagem;
- tipo 2 – a viagem com almoço;
- tipo 3 – a viagem com almoço e audioguia.

Seja X a variável aleatória «preço, em euros, de um bilhete vendido para o passeio, tomado ao acaso», cuja tabela de distribuição de probabilidades é

x_i	$14{,}20$	a	$20{,}50$
$P(X = x_i)$	$0{,}55$	$0{,}25$	b

em que a representa o preço, em euros, de um bilhete do tipo 2 e b representa um valor de probabilidade.

Sabe-se que o valor médio da variável aleatória X é $16{,}76$ euros.

Determine o preço, em euros, de um bilhete do tipo 2.

5. Uma ponte, idêntica à da fotografia da Figura 2, tem uma torre central e duas torres laterais, cada uma destas à distância de 1000 metros da torre central. A torre central é mais alta do que as torres laterais, e estas têm a mesma altura.

Do topo da torre central para o topo de cada uma das torres laterais estão fixos, no total, 4 cabos retilíneos iguais.

Entre cada um desses 4 cabos e o tabuleiro da ponte, existem cabos verticais, de 25 em 25 metros, perpendiculares ao tabuleiro, que o sustentam.

A Figura 3, que não está à escala, representa a situação relativa a um dos 4 cabos retilíneos fixos na torre central.

Figura 2

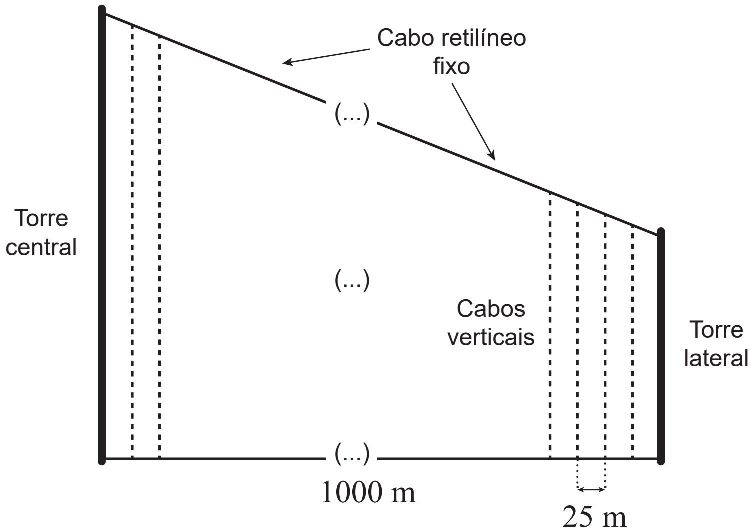


Figura 3

Seja (u_n) a sequência dos comprimentos dos cabos verticais, do menor para o maior, relativa à Figura 3, definida por

$$u_n = 2n + 45$$

em que n é a ordem do termo u_n da sequência.

* **5.1.** Algum dos cabos verticais tem 100 metros de comprimento?

Justifique a sua resposta.

5.2. Determine a soma dos comprimentos de todos os cabos verticais usados para sustentar o tabuleiro da ponte.

6. O penúltimo rei de Portugal, D. Carlos I, era um apaixonado pela oceanografia e por barcos. Com grande talento para a pintura, deixou várias aguarelas ligadas ao mar.

A Figura 4 é uma fotografia de uma dessas aguarelas.

Figura 4

A partir das velas do barco da Figura 4, um desenhador está a estudar um logotipo composto por dois triângulos, que representou a sombreado, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy, tal como mostra a Figura 5.

Nesta figura:

- a circunferência tem centro no ponto O;
- os pontos $A(1,0)$ e $D(-1,0)$ pertencem à circunferência;
- o ponto M é o ponto médio do segmento de reta $[OA]$;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto A;
- os pontos B e C deslocam-se na reta r, de tal forma que $[MB]$ é sempre paralelo a $[OC]$.

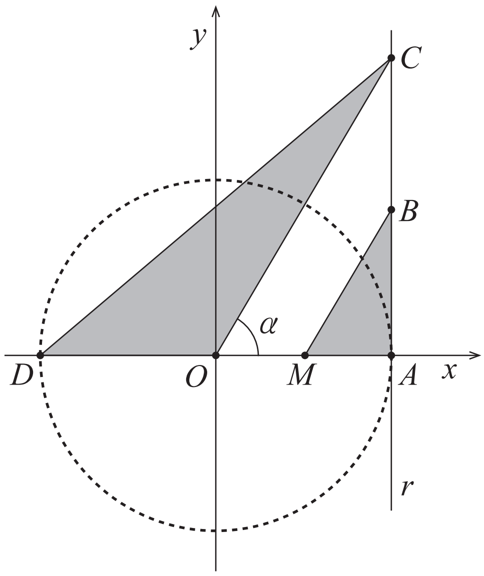


Figura 5

Para cada posição do ponto C, seja α a amplitude, em graus, do ângulo AOC, com

$$40^{\circ} \leq \alpha \leq 70^{\circ}$$

A unidade de medida de comprimento é o metro.

*** 6.1.** Mostre que a soma, T, das áreas dos triângulos $[DOC]$ e $[MAB]$, em metros quadrados, é dada, em função de α, por

$$T(\alpha) = \frac{5\operatorname{tg}(\alpha)}{8}$$

6.2. Determine o menor e o maior dos valores inteiros de α para os quais a soma, T, das áreas dos triângulos $[DOC]$ e $[MAB]$ é superior a 1 m^2.

Note que a soma, T, das áreas dos triângulos $[DOC]$ e $[MAB]$, em metros quadrados, é dada, em função de α, por $T(\alpha) = \dfrac{5\operatorname{tg}(\alpha)}{8}$.

6.3. Considere $\alpha = 45^{\circ}$.

Determine a equação reduzida da reta DC.

Na sua resposta, comece por obter as coordenadas do ponto C.

*** 7.** No início do século XX, um navio aportou numa ilha com o objetivo de comprar cereais. Nessa ilha, era hábito colocar os cereais numa vasilha de forma esférica.

Um comerciante vendia vasilhas que anunciava estarem cheias com $2600\ \text{dm}^3$ de cereal cada uma.

Para verificar a capacidade de uma dessas vasilhas, o comandante do navio dispunha apenas de um bloco de madeira, com a forma de um paralelepípedo, de $2\ \text{dm}$ de altura, graduado na face superior, como sugere a Figura 6.

O comandante encostou o bloco de madeira à esfera, como se ilustra na Figura 7, e mediu a distância representada por d.

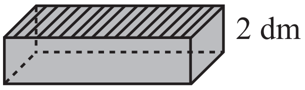


Figura 6

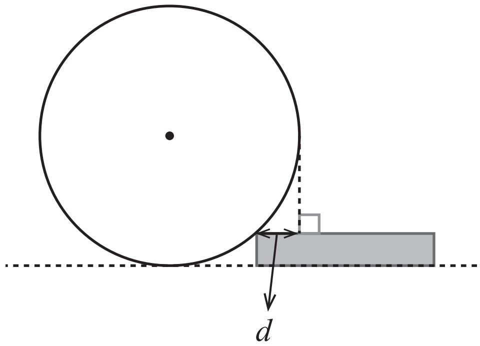


Figura 7

A Figura 8 é um esquema de um corte vertical que passa pelo centro da esfera e pelo ponto da esfera tangente ao solo, e que contém o ponto de contacto do bloco com a esfera.

Neste esquema, que não está à escala:

- O é o centro da esfera;
- $[OD]$ é um raio horizontal da esfera, com $\overline{OD} = r\ \text{dm}$;
- $[DC]$ é perpendicular a $[OD]$;
- $[OF]$ e $[EB]$ são paralelos a $[DC]$;
- $[AB]$ representa a altura do bloco, com $\overline{AB} = 2\ \text{dm}$;
- $\overline{BC} = d = 3\ \text{dm}$.

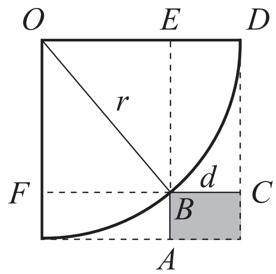


Figura 8

Apenas com estas duas medidas, o comandante calculou a capacidade da esfera e afirmou que a vasilha não podia conter $2600\ \text{dm}^3$ de cereal.

Averigue se a afirmação do comandante estava correta.

Na sua resposta, determine a capacidade da esfera, considerando desprezável a sua espessura.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 7 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.2.	3.2.	4.1.	5.1.	6.1.	7.	Subtotal
Cotação (em pontos)	20	20	16	16	16	16	16	**120**
Destes 7 itens contribuem para a classificação final da prova os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.1.**	**3.1.**	**3.3.**	**4.2.**	**5.2.**	**6.2.**	**6.3.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	5 x 16 pontos							**80**
TOTAL								**200**

Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 6 DE SETEMBRO 2021

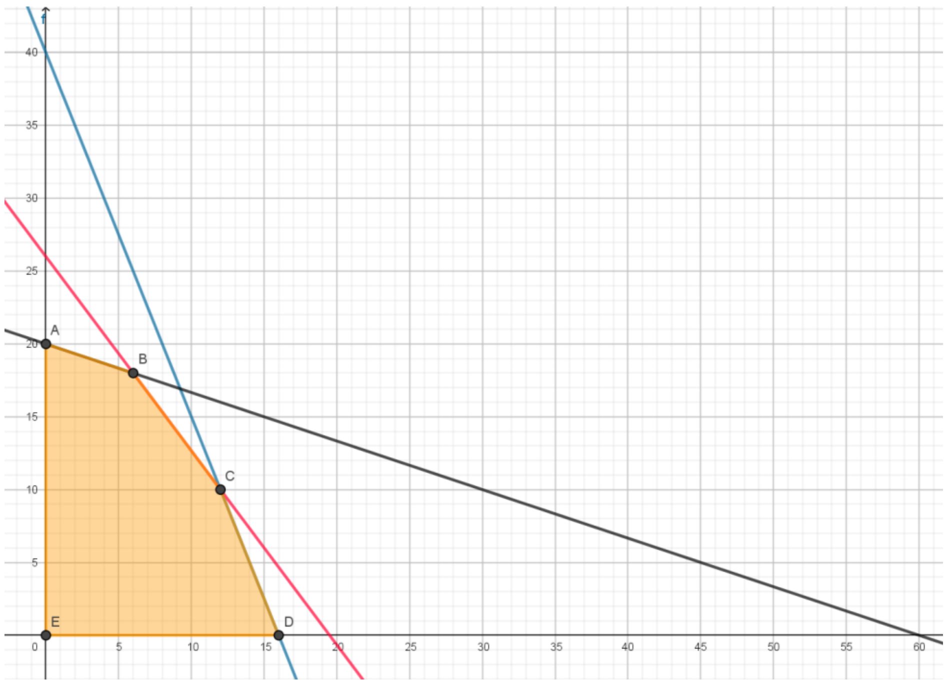
1.

A função objetivo que pretendemos maximizar é : $L(x,y)=180x+160y$, onde x é o número de lotes A e y é o número de lotes B.

De acordo com as condições colocadas temos as seguintes restrições do problema:

$$\begin{cases} 40x+16y\leq 640 \\ 4x+12y\leq 240 \\ 20x+15y\leq 390 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2y\leq 80 \\ x+3y\leq 60 \\ 4x+3y\leq 78 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leq -\frac{5x}{2}+40 \\ y\leq -\frac{x}{3}+20 \\ y\leq -\frac{4x}{3}+26 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Utilizando a tecnologia gráfica construímos a região admissível e identificamos as coordenadas dos pontos que são vértices relevantes para a obtenção da solução:



As coordenadas dos pontos são: $A(0,20)$, $B(6,18)$, $C(12,10)$ e $D(16,0)$

Averiguamos agora qual a solução ótima:

x	y	$L(x,y)=180x+160y$
0	20	$180\times 0+160\times 20=3200$
6	18	$180\times 6+160\times 18=3960$ → **solução ótima**
12	10	$180\times 12+160\times 10=3760$
16	0	$180\times 16+160\times 0=2880$

Resposta: Devem-se vender 6 lotes do tipo A e 18 lotes do tipo B.

2.

2.1. Temos que calcular $C(2)-C(1)$

$$C(2)-C(1)=42\left(1-e^{-0{,}1056\times 2-0{,}4222}\right)-42\left(1-e^{-0{,}1056-0{,}4222}\right)\approx 19{,}707-17{,}224\approx 2{,}483\approx 2{,}5$$

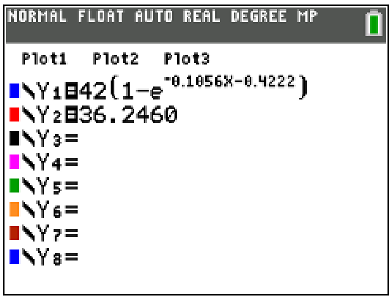
Resposta: Durante o segundo ano de vida, um carapau cresce, aproximadamente, 2,5 cm

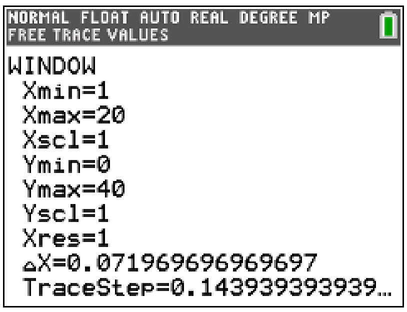
2.2. Com 400 gramas de massa, um carapau terá um comprimento tal que $M(C)=400$

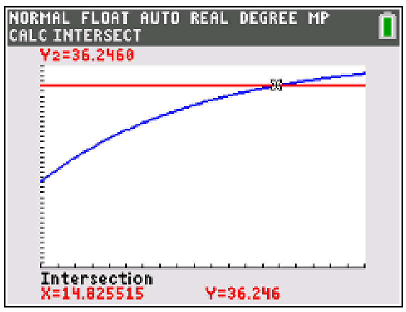
$$M(C)=400 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}0084\times C^3=400 \quad\Leftrightarrow\quad C=\sqrt[3]{\frac{400}{0{,}0084}} \quad\Leftrightarrow\quad C\approx 36{,}2460$$

Para determinar a idade desse carapau temos que resolver a equação $C(t)=36{,}2460$

Usemos a tecnologia gráfica para resolver esta equação:







A idade do carapau é, aproximadamente, $14{,}8255$ anos.

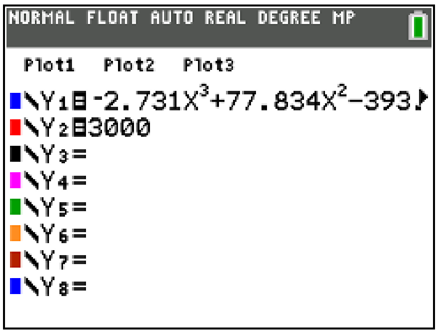
$0{,}8255\times 12=9{,}906\approx 10$

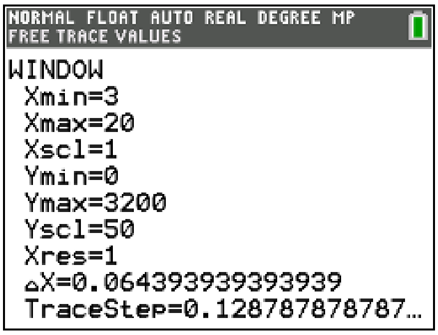
Resposta: A idade de um carapau com 400g é, aproximadamente, 14 anos e 10 meses.

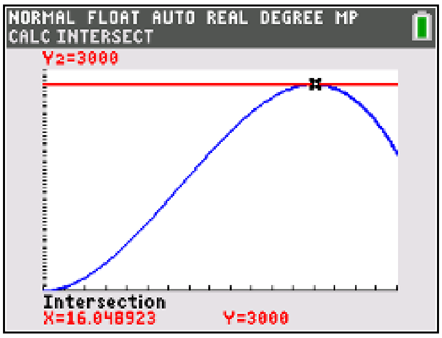
3.

3.1. Para determinarmos o valor de N temos que resolver a equação $P(v)=3000$, com $v>15$

Usemos a tecnologia gráfica para resolver esta equação:







Resposta: O valor de N é, aproximadamente, 16 m/s .

3.2. A taxa pedida é dada por $t.v.m._{[5,15]}=\dfrac{P(15)-P(5)}{15-5}\approx\dfrac{2949,59-191,18}{10}\approx 275,84\approx 276$

Resposta: A taxa de variação média é de 276 kW / m/s . O que significa que quando a velocidade do vento varia de 5 para 15 m/s, a potência útil injetada na rede aumenta, em média, 276 kW por m/s.

3.3. Para $v>N$ temos que, de acordo com os dados, $P(v)=3000$, isto é, a função é constante. Então teremos que $T=0$, para $v>N$.

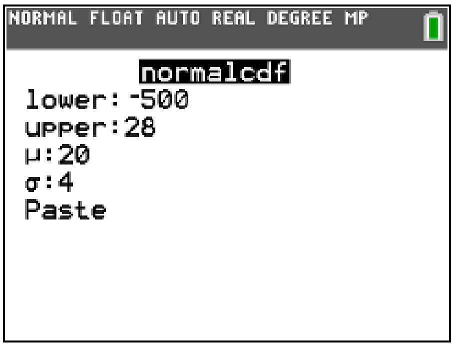
Resposta: $T=0$, para $v>N$, porque a taxa de variação instantânea de uma função constante é sempre nula.

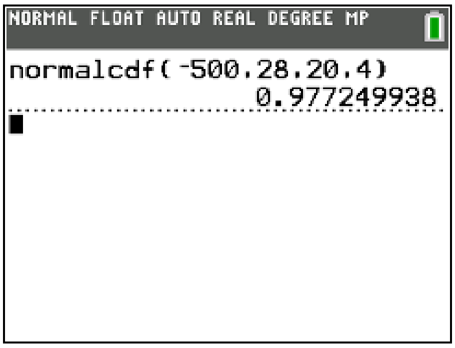
4.

4.1. Atendendo à hora de saída (8h 32m), para que o autocarro chegue às 9 horas, a viagem da Mariana durará 28 minutos.

A duração da viagem segue uma distribuição normal de parâmetros 20 e 4, isto é, a variável Y segue uma distribuição $N(20,4)$.

Para determinar a probabilidade do autocarro chegar antes das 9 horas, podemos usar a calculadora para determinar $P(Y<28)$, utilizando um limite inferior fictício, muito pequeno, no comando normalcdf do menu de distribuições de probabilidades:





Temos assim que $P(Y<28)\approx 0,98$

Resposta: A probabilidade do autocarro chegar antes da hora prevista é, aproximadamente, 98%.

4.2. Para determinarmos o valor de a, temos primeiro que determinar o valor de b.

Ora, sabemos que a soma das probabilidades tem que ser 1, pelo que

$$0,55+0,25+b=1 \quad \Leftrightarrow \quad b=1-0,80 \quad \Leftrightarrow \quad b=0.20$$

Como o valor médio da variável aleatória é 16,76 temos que ter:

$$0,55\times 14,20+0,25a+0,20\times 20,50=16,76$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,25a=16,76-7,81-4,1$$

$$\Leftrightarrow \quad a=\frac{4,85}{0,25} \quad \Leftrightarrow \quad a=19,40$$

Resposta: O preço do bilhete do tipo 2 é 19,40 €

5.

5.1. Existirá algum n de tal modo que $u_n = 100$? Resolvamos então a equação

$2n + 45 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad n = \dfrac{100-45}{2} \quad \Leftrightarrow \quad n = 27,5$ que não é um número natural.

Resposta: Nenhum dos cabos tem 100 metros de comprimento.

5.2. Nos 1000 m de comprimento do tabuleiro podemos estabelecer $1000 \div 25 = 40$ espaços de 25 m. Como as "torres não são cabos", existem então 39 cabos verticais entre o tabuleiro e cada um dos quatro cabos rectilíneos.

Em cada uma das partes temos um comprimento total de cabos que é dado por:

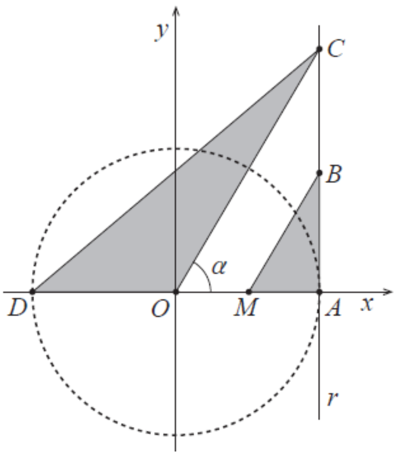
$$S = \frac{u_1 + u_{39}}{2} \times 39 = \frac{2\times 1 + 45 + 2\times 39 + 45}{2} \times 39 = \frac{47 + 123}{2} \times 39 = 3315$$

Nos quatro cabos teremos $4 \times 3315 = 13260$

Resposta: A totalidade dos cabos verticais mede 13260 metros de comprimento.

6.

6.1. Atendendo às coordenadas do ponto $A(1,0)$ e ao centro da circunferência estamos perante uma "circunferência trigonométrica"; a reta r identifica-se com o "eixo das tangentes".



A área do triângulo $[DOC]$ é dada por $A_1 = \dfrac{\overline{OD} \times \overline{AC}}{2}$

Como $\overline{OD} = 1$ e $\overline{AC} = tg(\alpha)$, temos que $A_1 = \dfrac{tg(\alpha)}{2}$

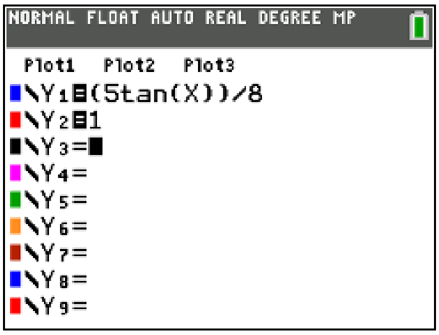
Por outro lado, como $[MB]$ é sempre paralelo a $[OC]$, o ângulo AMB é igual a α e, assim, o triângulo $[AMB]$ é semelhante ao triângulo $[AOC]$ e, por isso, os seus lados são proporcionais. Assim, como $\overline{AM} = \dfrac{\overline{AO}}{2} = 0,5$, então $\overline{AB} = \dfrac{\overline{AC}}{2} = \dfrac{tg(\alpha)}{2}$

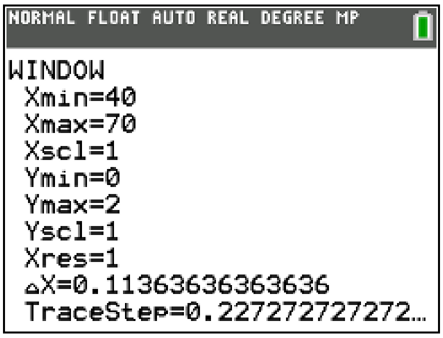
A área do triângulo $[AMB]$ é então dada por $A_2 = \dfrac{\overline{AM} \times \overline{AB}}{2} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{tg(\alpha)}{2}}{2} = \dfrac{\frac{tg(\alpha)}{4}}{2} = \dfrac{tg(\alpha)}{8}$

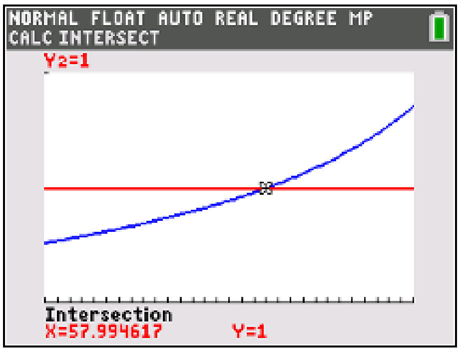
Resposta: A soma T é igual a $A_1 + A_2 = \dfrac{tg(\alpha)}{2} + \dfrac{tg(\alpha)}{8} = \dfrac{4tg(\alpha)}{8} + \dfrac{tg(\alpha)}{8} = \dfrac{5tg(\alpha)}{8}$, como se queria mostrar.

6.2. Para respondermos à questão temos que encontrar as soluções inteiras da inequação $T(\alpha) > 1$ com $40^\circ \leq \alpha \leq 70^\circ$ e $T(\alpha) = \dfrac{5tg(\alpha)}{8}$

Usemos a calculadora gráfica:







A função T é sempre crescente no seu domíno.

Assim, podemos obter a resposta pretendida.

Resposta: o menor valor inteiro de α para o qual a soma das áreas é superior a 1 é 58° e o maior é 70°.

6.3. Se $\alpha = 45^\circ$ temos que $\overline{AC} = tg(45^\circ) = 1$ e, assim, as coordenadas do ponto C são $(1,1)$.

Como $D(-1,0)$ temos que o declive da reta é $m_{DC} = \dfrac{0-1}{-1-1} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

Então a equação da reta é da forma $y = \dfrac{1}{2}x + b$

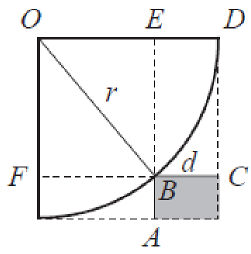
Utilizando o ponto $C(1,1)$ vamos obter o valor de b:

$$1 = \frac{1}{2} \times 1 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

Logo:

Resposta: A equação reduzida da reta DC é $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

7. Vamos utilizar o esquema da figura 8.



Para determinarmos o volume da vasilha (esfera), temos que determinar o valor de r. Para isso podemos usar o triângulo retângulo $[OFB]$ em que r é a medida da hipotenusa.

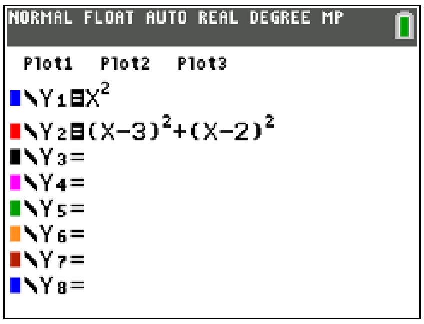
Como $d = \overline{BC} = 3$, então $\overline{FB} = \overline{OD} - \overline{BC} = r - 3$ ([1])

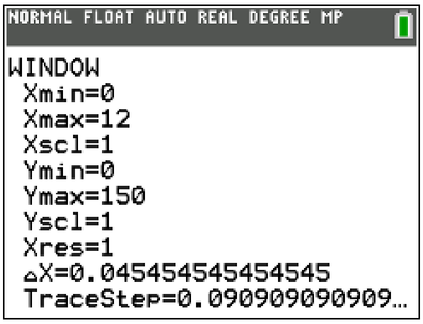
Como $\overline{AB} = 2$, então $\overline{OF} = r - 2$ ([2])

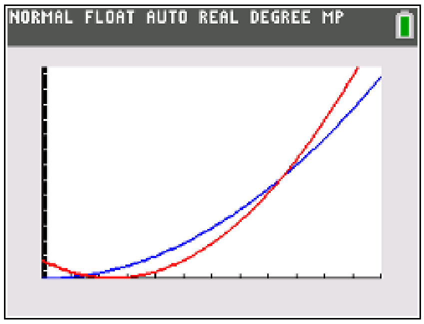
Então podemos afirmar que $r^2 = (r-3)^2 + (r-2)^2$

Podemos resolver esta equação graficamente ou analiticamente.

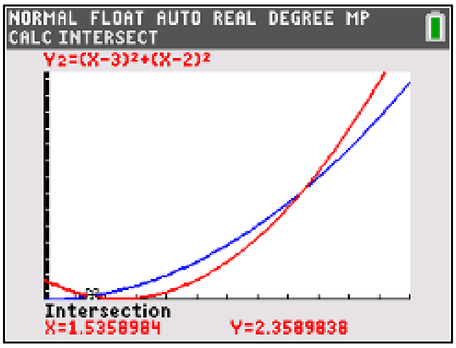
Utilizemos a calculadora gráfica:

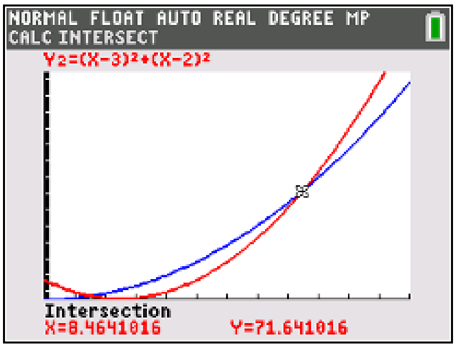






E determinemos, agora, as intersecções dos dois gráficos:





As soluções da equação são assim $r \approx 1,5359 \vee r \approx 8,4641$, mas no contexto do problema, como $r > d$, temos que ter $r \approx 8,4641$.

Desta forma, o volume da esfera é $V \approx \frac{4}{3}\pi \times 8,4641^3 \approx 2539,98$

Assim sendo concluímos que a capacidade da esfera é menor a 2600 dm^3

Resposta: O comandante tinha razão, como se mostrou na resolução.

FIM

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação

8 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista (ver nota).
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.

13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **20 pontos**

Identificar a função objetivo $\left(V(x, y) = 180x + 160y\right)$ .... 1 ponto

Identificar as restrições $x \geq 0$ e $y \geq 0$ .... 1 ponto

Identificar as restrições
$40x + 16y \leq 640$, $4x + 12y \leq 240$ e $20x + 15y \leq 390$ .... (3x1) .... 3 pontos

Representar graficamente a região admissível .... 5 pontos

Representar graficamente as retas de equações
$40x + 16y = 640$, $4x + 12y = 240$ e $20x + 15y = 390$ .... 3 pontos

Assinalar o polígono .... 2 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono, exceto a origem
$((0, 20)$, $(6, 18)$, $(12, 10)$ e $(16, 0))$ .... (4x1) .... 4 pontos

Calcular o valor da venda correspondente a cada um dos vértices do polígono, exceto a origem (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero) (**ver nota**) .... (4x1) .... 4 pontos

Apresentar os valores pedidos (6 lotes A e 18 lotes B) .... 2 pontos

Nota – No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir a esta etapa é 2 pontos.

2.1. .... **16 pontos**

Identificar o valor pedido com $C(2)-C(1)$ (ou equivalente) (**ver nota**) .... 6 pontos

Obter $C(1)$ e $C(2)$ (**ver nota**) .... (4+4) .... 8 pontos

Obter o valor pedido $(2{,}5 \text{ cm})$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Nota – Se o valor pedido for identificado com $C(2)$, a pontuação máxima a atribuir a estas etapas é 2 + 4 + 0.
Se o valor pedido for identificado com $C(3)-C(2)$, a pontuação máxima a atribuir a estas etapas é 3 + 8 + 2.

2.2. .... **20 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função M (**ver nota**) .... 4 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y=400$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(36{,}2460...)$ .... 2 pontos

Representar graficamente a função C (**ver nota**) .... 4 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y=36{,}2460...$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(14{,}8255...)$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(14$ anos e 10 meses$)$ .... 2 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto. Se não forem respeitados os domínios, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto.

2.º Processo

Escrever $0{,}0084 \times C^3 = 400$ (ou equivalente) .... 6 pontos

Obter $C = 36{,}2460...$ .... 3 pontos

Escrever $42\left(1-e^{-0{,}1056t\,-\,0{,}4222}\right)=36{,}2460...$ (ou equivalente) .... 6 pontos

Isolar $e^{-0{,}1056t\,-\,0{,}4222}$ .... 1 ponto

Obter $t = 14{,}8255...$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(14$ anos e 10 meses$)$ .... 2 pontos

3.1. .... **16 pontos**

Representar graficamente a função real de variável real definida por
$y = -2{,}731\,v^3 + 77{,}834\,v^2 - 393{,}264\,v + 553{,}023$ (**ver nota**) .... 5 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 3000$ (**ver nota**) .... 4 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos relevante para a resolução .... 3 pontos

Obter o valor pedido (16) .... 4 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto.

3.2. .... **16 pontos**

Reconhecer que $\text{t.v.m.}_{[5,\,15]} = \dfrac{P(15) - P(5)}{15 - 5}$ .... 2 pontos

Obter $P(15)$ $(2949{,}58...)$ .... 2 pontos

Obter $P(5)$ $(191{,}17...)$ .... 2 pontos

Apresentar o valor da taxa de variação média (276) .... 2 pontos

Interpretar o valor obtido no contexto descrito (**ver nota**) .... 8 pontos

- Reconhecer que a potência aumentou .... 3 pontos
- Reconhecer que $[5, 15]$ é o intervalo de variação da velocidade .. 1 ponto
- Reconhecer que 276 é o valor médio do aumento da potência por m/s .... 2 pontos
- Reconhecer que a unidade de medida da taxa é $\dfrac{\text{kW}}{\text{m/s}}$ .... 2 pontos

Nota – Exemplo de interpretação: «Quando a velocidade do vento varia de $5\ \text{m/s}$ a $15\ \text{m/s}$, a potência útil da torre eólica aumenta, em média, $276\ \text{kW}$ por m/s.»

3.3. .... **16 pontos**

Apresentar o valor pedido (0) .... 8 pontos

Referir que, para $v > N$, a função P é constante (ou equivalente)
(**ver nota**) .... 8 pontos

Nota – Se apenas for referido que a função P é constante, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

4.1. .... **16 pontos**

Obter a duração máxima da viagem, para que o autocarro chegue até às 9 horas (28 minutos) .... 4 pontos

Obter o valor pedido .... 12 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar 28 com $\mu + 2\sigma$ .... 3 pontos

Reconhecer que $P(12 \leq Y \leq 28) \approx 0{,}9545$ .... 2 pontos

Calcular $P(Y < 28)$ $(0{,}97725)$ .... 5 pontos

Apresentar o valor pedido (98%) .... 2 pontos

2.º Processo

Determinar, com o auxílio da calculadora, um valor aproximado de $P(Y < 28)$ $(0{,}977249...)$ .... 10 pontos

Apresentar o valor pedido (98%) .... 2 pontos

4.2. .... **16 pontos**

Obter o valor de b $(0{,}20)$ .... 5 pontos

Escrever uma expressão para o valor médio de X .... 7 pontos

Obter o valor pedido $(19{,}40$ euros$)$ .... 4 pontos

5.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Escrever $2n + 45 = 100$ (ou equivalente) .... 6 pontos

Obter $n = 27{,}5$ .... 4 pontos

Concluir que nenhum cabo vertical tem 100 m de comprimento .... 6 pontos

2.º Processo

Referir que $2n$ representa um número par (ou equivalente) .... 5 pontos

Referir que $2n + 45$ representa um número ímpar (ou equivalente) .... 5 pontos

Concluir que nenhum cabo vertical tem 100 m de comprimento .... 6 pontos

3.º Processo

Obter u_{27} e u_{28} $(99$ e $101)$ .... (4+4) .... 8 pontos

Referir que (u_n) é monótona (ou equivalente) .... 2 pontos

Concluir que nenhum cabo vertical tem 100 m de comprimento .... 6 pontos

5.2. .... **16 pontos**

Calcular u_1 (47) .... 2 pontos

Obter a ordem do último termo de (u_n) (39) (**ver nota**) .... 3 pontos

Calcular u_{39} (123) .... 2 pontos

Escrever $\frac{47+123}{2}\times 39$ (ou equivalente) .... 5 pontos

Calcular o valor da expressão anterior (3315) .... 2 pontos

Obter o valor pedido $(13\,260\text{ m})$ .... 2 pontos

Nota – Se for obtida a ordem 40, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 2 pontos.

6.1. .... **16 pontos**

Escrever uma expressão da área do triângulo $[DOC]$, em função de α .... 7 pontos

Reconhecer que $\mathrm{A}_{[DOC]}=\frac{\overline{DO}\times\overline{AC}}{2}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\overline{DO}=1$ .... 2 pontos

Identificar $\overline{AC}$ com $\operatorname{tg}(\alpha)$ .... 3 pontos

Obter $\frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{2}$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Escrever uma expressão da área do triângulo $[MAB]$, em função de α .... 7 pontos

Reconhecer que $\mathrm{A}_{[MAB]}=\frac{\overline{MA}\times\overline{AB}}{2}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\overline{MA}=0{,}5$ .... 2 pontos

Identificar $\overline{AB}$ com $\frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{2}$ .... 3 pontos

Obter $\frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{8}$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter $\frac{5\operatorname{tg}(\alpha)}{8}$ .... 2 pontos

6.2. .... **16 pontos**

Representar graficamente a função T (**ver notas 1 e 2**) .... 6 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y=1$ (**ver nota 2**) .... 3 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(57{,}9\ldots)$ .... 2 pontos

Apresentar os valores pedidos $(58^{\circ}$ e $70^{\circ})$ .... (2+2) .... 4 pontos

Notas:

1. Se não for respeitado o domínio da função, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.
2. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto.

6.3. .... **16 pontos**

Indicar a abcissa do ponto C (1) .... 2 pontos

Obter a ordenada do ponto C (1) .... 4 pontos

Obter o declive da reta DC $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 4 pontos

Obter a ordenada na origem dessa reta $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 4 pontos

Apresentar a equação pedida $\left(y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$ .... 2 pontos

7. .... **16 pontos**

Considerar um triângulo retângulo cuja hipotenusa seja r .... 2 pontos

Reconhecer que os catetos medem $r-3$ e $r-2$ .... (2+2) .... 4 pontos

Escrever $r^2 = (r-3)^2 + (r-2)^2$ .... 2 pontos

Obter $r = 1{,}53589... \vee r = 8{,}46410...$ .... 2 pontos

Reconhecer que $r = 8{,}46410...$ .... 2 pontos

Obter a capacidade da esfera ou obter o raio de uma esfera
com 2600 dm^3 de capacidade .... 3 pontos

Concluir que a afirmação do comandante estava correta .... 1 ponto

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 7 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.2.**	**3.2.**	**4.1.**	**5.1.**	**6.1.**	**7.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	20	20	16	16	16	16	16	**120**
Destes 7 itens contribuem para a classificação final da prova os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.1.**	**3.1.**	**3.3.**	**4.2.**	**5.2.**	**6.2.**	**6.3.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	5 x 16 pontos							**80**
TOTAL								**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. Uma empresa do sector dos lanifícios produz dois tipos de tecido: TA e TB.

A produção de cada rolo de tecido TA necessita de 1 hora no tanque de lavagem, 1 hora na banca de coloração e 4 horas na máquina de acabamento.

A produção de cada rolo de tecido TB necessita de 2 horas no tanque de lavagem, 1 hora na banca de coloração e 1 hora na máquina de acabamento.

Para a produção dos rolos destes dois tipos de tecido, a empresa dispõe de 160 horas no tanque de lavagem, 100 horas na banca de coloração e 280 horas na máquina de acabamento.

A empresa tem assegurados o lucro de 120 euros por cada rolo de tecido TA produzido e o lucro de 80 euros por cada rolo de tecido TB produzido.

Determine quantos rolos de tecido TA e quantos rolos de tecido TB a empresa deve produzir para obter o lucro total máximo na produção destes tecidos.

Na sua resposta, designe por x o número de rolos de tecido TA e por y o número de rolos de tecido TB a produzir pela empresa, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. No âmbito do desporto escolar, a Leonor completou uma prova de corta-mato em $15{,}3$ minutos, num circuito previamente demarcado no terreno.

Seja d a função que dá a distância em linha reta, em metros, da Leonor ao ponto de partida, t minutos após o início da sua prova, até cruzar a meta.

Admita que d pode ser definida por

$$d(t) = 0{,}02t(0{,}6t-9)^2(0{,}4t-4)^2 e^{0{,}45t} \quad , \text{ com } \quad 0 \le t \le 15{,}3$$

2.1. Determine a distância em linha reta da meta ao ponto de partida.

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

Se proceder a cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.2. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, durante quanto tempo da prova é que a distância em linha reta da Leonor ao ponto de partida foi superior a 154 metros.

Apresente o resultado em minutos e segundos, com os segundos arredondados às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.3. Seja V a função que dá a taxa de variação instantânea da função d, para cada valor de t.

Interprete, no contexto descrito, o significado de $V(11) \approx 58{,}4$.

3. A Leonor decidiu construir um castelo com cartas de jogar, tal como mostra a Figura 1.

Para o fazer, a Leonor procedeu do seguinte modo:

- na primeira fila, colocou 20 cartas inclinadas e 9 cartas horizontais;
- na segunda fila, colocou 18 cartas inclinadas e 8 cartas horizontais;
- na terceira fila, colocou 16 cartas inclinadas e 7 cartas horizontais;
- e assim sucessivamente, até à décima fila, em que colocou apenas 2 cartas inclinadas.

Figura 1

* **3.1.** Considere a sequência em que cada termo é o número de cartas colocadas em cada fila, da primeira à décima.

Justifique que os termos desta sequência são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Na sua resposta, indique a razão dessa progressão.

3.2. A construção completa de qualquer castelo de cartas deste tipo termina sempre com a fila que tem apenas 2 cartas, independentemente do número de filas do castelo.

Se a Leonor conseguisse construir um destes castelos com 100 filas, quantas cartas teria de utilizar?

Justifique a sua resposta.

4. O avô da Leonor vai construir, no seu jardim, um pequeno canteiro retangular.

A área, A, em metros quadrados, do canteiro, em função da medida, x, em metros, de um dos lados, é dada por

$$A(x) = 6x - x^2 \quad , \text{ com } \; 0 < x < 6$$

4.1. Determine o perímetro do canteiro que o avô da Leonor vai construir.

Na sua resposta, comece por obter uma expressão para a medida do outro lado do retângulo, em função de x.

* **4.2.** Determine a área máxima que o canteiro pode ter.

Apresente o resultado em metros quadrados.

5. Numa escola, foi registado o peso*, em quilogramas, das mochilas dos alunos que frequentam o 2.º ano de escolaridade. Os dados foram organizados no histograma representado na Figura 2.

* A palavra «peso» é utilizada na sua aceção corrente, como sinónimo de massa.

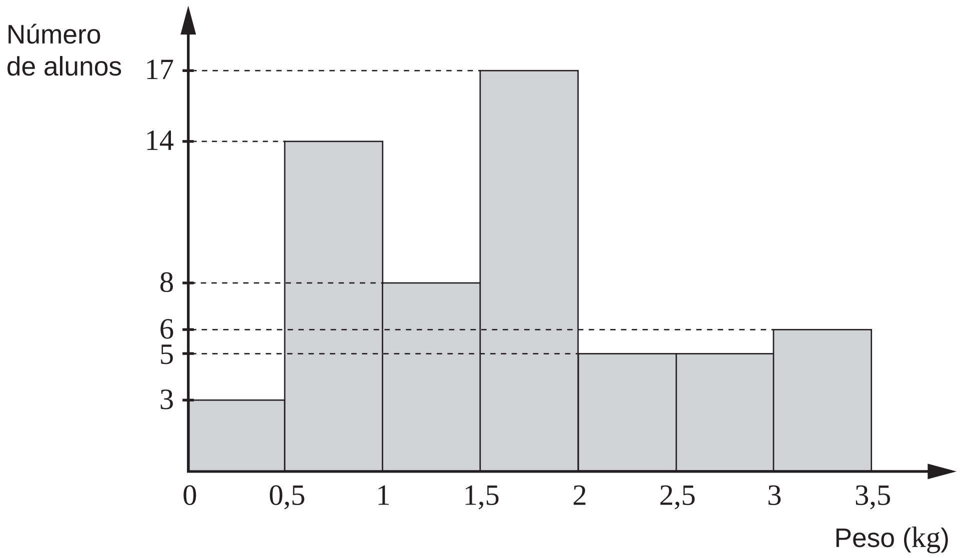


Figura 2

Determine, de acordo com o histograma, a média dos pesos das mochilas dos alunos do 2.º ano de escolaridade dessa escola.

Apresente o resultado em quilogramas, arredondado às centésimas.

6. A Organização Mundial da Saúde (OMS) recomenda que as crianças e os jovens em idade escolar (dos 6 aos 18 anos) não carreguem mochilas cujo peso* exceda 10% do peso do seu corpo.

* A palavra «peso» é utilizada na sua aceção corrente, como sinónimo de massa.

Admita que o peso dos alunos que frequentam o 1.º ano de escolaridade de uma escola segue, aproximadamente, uma distribuição normal de valor médio 22 quilogramas e desvio padrão 1 quilograma.

Num certo dia, foi necessário transportar uma mochila com o peso de $2{,}4$ quilogramas para a biblioteca. Foi indicado, ao acaso, um aluno do 1.º ano para transportar essa mochila.

Determine a probabilidade de não ter sido respeitada a recomendação da OMS nesta situação.

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

7. A calçada portuguesa é uma forma de arte urbana em que os motivos geométricos são muito utilizados.

A fotografia da Figura 3 mostra parte do pavimento de um passeio em calçada portuguesa, cujo desenho é obtido a partir de uma composição de semicircunferências. Estas têm raios iguais e encontram-se dispostas em colunas, como sugere o esquema da Figura 4.

Figura 3

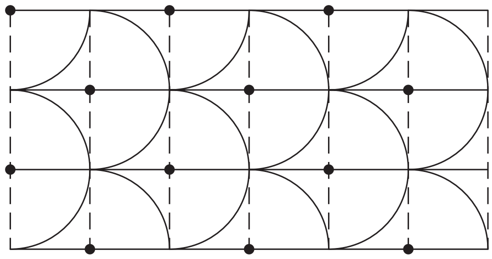


Figura 4

No esquema da Figura 4:

- em cada coluna, estão representadas uma semicircunferência e metade de outra semicircunferência, tangentes entre si, com os centros assinalados e alguns raios representados a traço interrompido;
- a semicircunferência que pertence a uma dada coluna, exceto a primeira, tem um dos seus pontos extremos sobre o ponto médio da semicircunferência da coluna imediatamente à esquerda.

Admita que o raio de cada semicircunferência do pavimento mede $20\ \text{cm}$.

* **7.1.** A Figura 5 representa parte do pavimento daquele passeio.

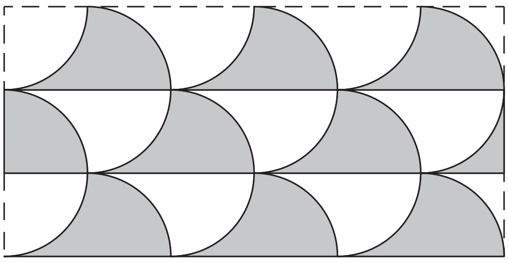


Figura 5

Determine a área da região representada a sombreado na Figura 5.

Apresente o resultado em centímetros quadrados.

7.2. Num dos motivos utilizados no pavimento, esquematizado na Figura 5, fixou-se um referencial ortogonal e monométrico, Oxy , como se representa na Figura 6.

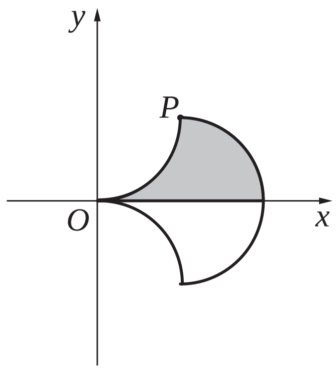


Figura 6

Nesta figura:

- o ponto P é um dos extremos do diâmetro da semicircunferência;
- o centro da semicircunferência pertence ao semieixo positivo Ox ;
- o ponto O é o ponto de tangência de dois arcos contidos nas duas semicircunferências cujos centros pertencem ao eixo Oy .

No referencial, a unidade é o centímetro.

Seja Q o transformado do ponto P pela rotação de centro no ponto O e de amplitude $-585°$.

Determine as coordenadas exatas do ponto Q .

Na sua resposta, comece por indicar as coordenadas do ponto P .

8. No verão passado, o João esteve a observar os pássaros que voavam perto da casa do avô.

Um pássaro descrevia um voo horizontal em linha reta quando, em certo momento, observou um alimento no ramo de uma árvore, à mesma altura do voo que estava a efetuar. Para se aproximar do alimento, o pássaro descreveu, no mesmo plano horizontal, um arco de circunferência.

A situação, vista de cima, está representada no esquema da Figura 7. Nesta figura, que não está à escala:

- o segmento de reta $[AB]$ representa o voo inicial do pássaro, em linha reta;
- o ponto C representa a localização do alimento;
- o ponto O representa o centro da circunferência que contém o arco BC descrito pelo pássaro;
- a circunferência de centro O é tangente à reta AB no ponto B;
- r é o raio da circunferência, em metros;
- α é a amplitude, em graus, do ângulo agudo que a reta AB faz com o segmento de reta $[BC]$;
- d é a distância de B a C, em metros.

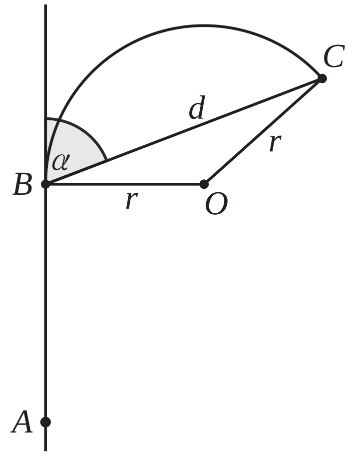


Figura 7

8.1. Mostre que $r = \dfrac{d}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha}$.

Na sua resposta, comece por decompor o triângulo $[BOC]$ pela altura relativa a $[BC]$.

8.2. Na parte do voo em linha reta, o pássaro percorreu 12 metros.

Relativamente à parte do voo em que descreveu o arco de circunferência, sabe-se que $r = 10\text{ m}$ e $d = 18\text{ m}$.

Determine a distância total percorrida pelo pássaro.

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Note que $r = \dfrac{d}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha}$.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**7.1.**	**8.1.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	20	16	20	16	16	16	16	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.3.**	**3.2.**	**4.1.**	**7.2.**	**8.2.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**

Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 30 DE JUNHO 2022

1.

Seja x o número de rolos do tecido TA e y o número de rolos do tecido TB.

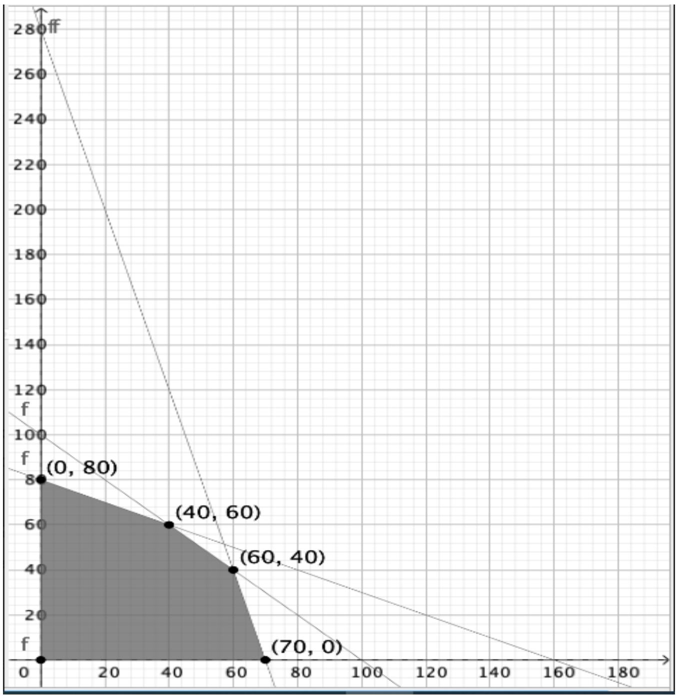
A função objetivo, que se pretende maximizar, é $L(x,y) = 120x + 80y$.

Quanto às restrições, a condição relativa ao tempo de lavagem no tanque é $x + 2y \leq 160$; relativamente ao tempo na banca de coloração é $x + y \leq 100$ e relativamente ao tempo na máquina de acabamento é $4x + y \leq 280$.

Tendo em conta as restrições óbvias $x \geq 0 \; e \; y \geq 0$ e as mencionadas anteriormente, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 160 \\ x + y \leq 100 \\ 4x + y \leq 280 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{1}{2}x + 80 \\ y \leq -x + 100 \\ y \leq -4x + 280 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Desta forma, a representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições é:



Calculando o valor da função objetivo nos vértices da região admissível, $A(0{,}80), B(40{,}60), C(60{,}40)$, e $D(70{,}0)$, averiguamos a solução ótima:

$L(0{,}80) = 120 \times 0 + 80 \times 80 = 6400$ euros

$L(40{,}60) = 120 \times 40 + 80 \times 60 = 4800 + 4800 = 9600$ euros

$L(60{,}40) = 120 \times 60 + 80 \times 40 = 7200 + 3200 = 10400$ euros

$L(70{,}0) = 120 \times 70 + 80 \times 0 = 8400$ euros

Desta forma, concluímos que o lucro máximo é 10400 euros, obtido no ponto C.

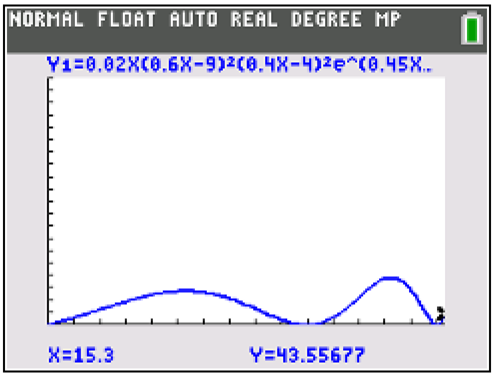
Resposta: Para a empresa obter o lucro total máximo deve produzir 60 rolos do tecido TA e 40 rolos do tecido TB.

2.

2.1.

Atendendo a que a função d nos dá a distância, em linha reta, da Leonor ao ponto de partida, a distância pedida é dada por $d(15,3)$

Calculando, com recurso à calculadora gráfica e fazendo a edição da função tendo em conta o seu domínio obtemos:

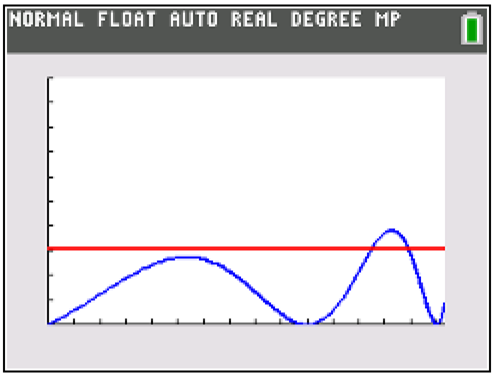


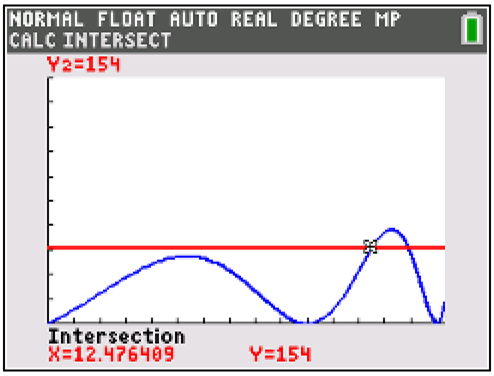
Assim temos $d(15,3) \approx 43,557$

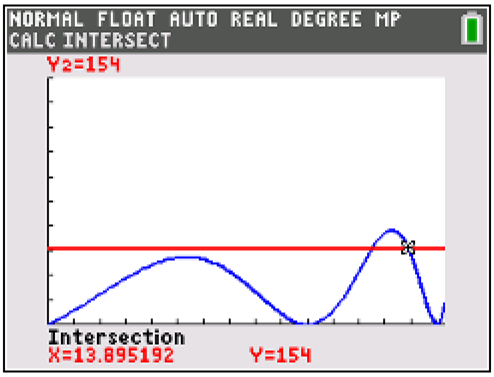
Resposta: A distância pedida é de $43,6$ metros.

2.2.

Fazendo, na calculadora, a edição da função d tendo em conta o seu **domínio** e também da reta de equação $y=154$ obtemos as interseções que nos permitem resolver a inequação $d(t)>154$:







Sendo assim, façamos agora: $13,895-12,476=1,419$ minutos

Convertendo para minutos e segundos obtemos:

$1,419=1+0,419$

$0.419\times 60=25,14$

Resposta: A distância foi superior a 154 metros durante, aproximadamente, 1 minuto e 25 segundos.

2.3.

Como se trata de uma taxa de variação instantânea, $V(11)\approx 58,4$ significa que, aos 11 minutos de corrida, a distância, em linha reta, da Leonor ao ponto de partida estava a aumentar à razão aproximada de 58,4 metros por minuto.

3.

3.1.

O número de cartas inclinadas vai diminuindo de 2 em cada fila e o número de cartas horizontais vai diminuindo de 1 unidade.

Então, o número de cartas em cada fila pode ser dado pela expressão

$c_n = (22-2n)+(10-n) = 32-3n$ com $n \in \{1,2,3,...,10\}$

Verifiquemos agora se a diferença entre cada termo e o anterior é constante:

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= 32-3(n+1)-(32-3n) \\ &= 32-3n-3-32+3n = -3 \end{aligned}$$

Então, a sequência é uma progressão aritmética, porque do cálculo anterior resultou uma constante, e a sua razão é -3 tal como se pretendia justificar.

3.2.

Agora a progressão é do mesmo tipo que a anterior só que a começar de “cima” para “baixo”, pelo que o primeiro termo é 2 e a razão é 3.

Estamos, assim, perante uma progressão aritmética em que o 100º termo (correspondente ao nº de cartas da 100ª fila) é dado por $2+99\times 3 = 299$

O número total de cartas é dado por: $\dfrac{2+299}{2}\times 100 = 301\times 50 = 15050$.

Resposta: Seria necessário utilizar 15050 cartas.

4.

4.1.

A área do terreno é dada por $A(x) = 6x - x^2 = x(6-x)$ com $0 < x < 6$

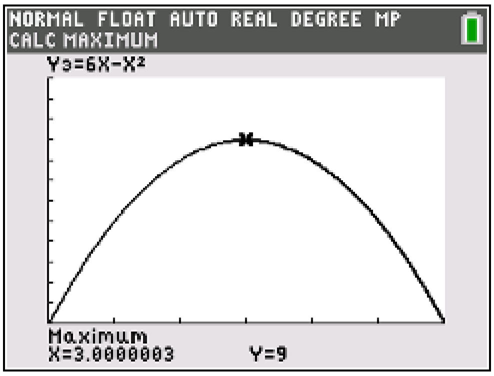
Ora, a área de um retângulo é dada pelo produto das medidas dos seus lados, pelo que, se um lado tem medida x, o outro tem, assim, medida $(6-x)$ e o perímetro é dado por:

$P = 2x + 2(6-x) = 2x + 12 - 2x = 12\,\text{m}$

Resposta: O perímetro é de 12 metros.

4.2.

A função área é representada graficamente por uma parábola com a concavidade voltada para baixo. A área máxima corresponde à ordenada do vértice. Podemos obter esse valor recorrendo às capacidades da calculadora gráfica:



Resposta: A área máxima é 9 m^2.

5.

Podemos optar por dois processos de resolução.

1ª Resolução:

A partir do histograma, organizamos os dados na seguinte tabela:

Pesos (em Kg)	Marca da classe (x'_i)	Frequência absoluta (f_i)	$x'_i \times f_i$
[0; 0,5[	0,25	3	0,75
[0,5; 1[	0,75	14	10,5
[1; 1,5[	1,25	8	10
[1,5; 2[	1,75	17	29,75
[2; 2,5[	2,25	5	11,25
[2,5; 3[	2,75	5	13,75
[3; 3,5[	3,25	6	19,5
		n = 58	$\sum_{i=1}^{7} (x'_i \times f_i) = 95,5$

Concluímos que a média é:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} (x'_i \times f_i)}{n} = \frac{95,5}{58} \approx 1,65\ kg$$

2ª Resolução:

O item também pode ser resolvido recorrendo às capacidades da calculadora: editamos duas listas, uma com a marca de cada classe, a outra com a respetiva frequência absoluta e calculamos a média:

	A l1	B l2
=		
1	0.25	3
2	0.75	14
3	1.25	8
4	1.75	17
5	2.25	5
6	2.75	5
7	3.25	6

Título	Estatísti...
x̄	1.64655
Σx	95.5
Σx²	199.125
sx := sn-...	0.857161
σx := σn...	0.849739
n	58.

Resposta: A média é aproximadamente 1,65 Kg.

6.

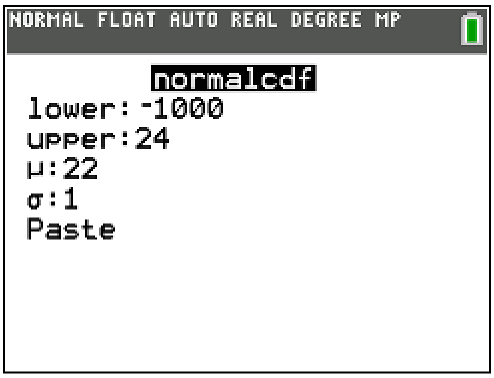
Seja X a variável aleatória «peso de um aluno do 1.º ano tomado ao acaso, em kg" tal que $X \sim N(22,1)$.

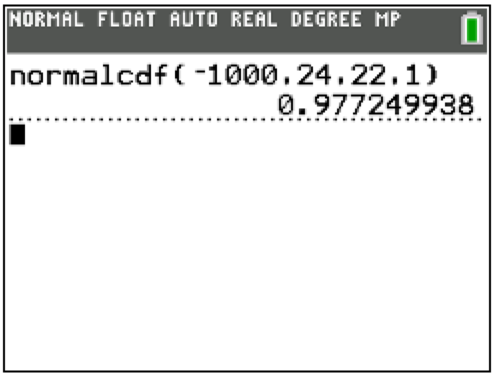
Este pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1ª Resolução:

Como o peso da mochila é de 2,4 kg e não deve exceder 10% do peso do corpo, pretende-se determinar a probabilidade de $P(X \leq 24)$.

Recorrendo à calculadora gráfica:





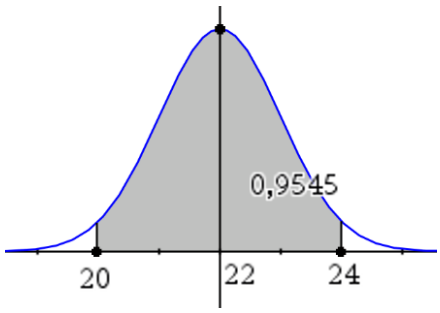
Logo, $P(X \leq 24) \approx 98\%$.

2ª Resolução:

Como o valor médio da distribuição é $\mu = 22$ e o desvio padrão da distribuição é $\sigma = 1$, temos:

$\mu - 2\,\sigma = 18 \quad e \quad \mu + 2\,\sigma = 24$

Sabemos que P $(\,\mu - 2\,\sigma < X < \mu + 2\,\sigma)\ \approx 0{,}9545$, logo P $(\,20 < X < 24)\ \approx 0{,}9545$.



Assim,

a probabilidade pedida é $P(X \leq 24) = P(X < 22) + \frac{\mathrm{P}\,(\,20<X<24)}{2} \approx 0{,}5 + \frac{0{,}9545}{2} = 0{,}97725 \approx 98\%$

Resposta: A probabilidade é, aproximadamente, 98%.

7.

7.1. Este item pode ser resolvido por diferentes processos. Abaixo apresentam-se duas possíveis resoluções:

1ª resolução:

Consideremos a figura 4, dividida por quadrados:

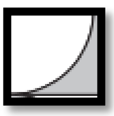


Figura 1

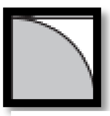
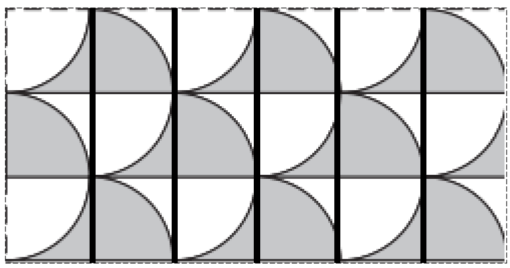


Figura 2



Como o comprimento do raio de cada semicircunferência mede 20 cm, temos que a área de cada um destes quadrados é $A_{quadrado} = l^2 = 20^2 = 400\ cm^2$.

A soma da área a sombreado da figura 1 com a área a sombreado da figura 2 corresponde à área de um destes quadrados.

Observando a figura, na sua totalidade, encontramos nove pares destes quadrados. Logo, a área a sombreado é:

$$A_{sombeado} = 9 \times A_{quadrado} = 9 \times 400 = 3600\ cm^2$$

2ª resolução:

Podemos considerar que a figura 4 está decomposta em dezoito quadrados, com 20 cm de lado.
Cada quadrado é composto por um quarto de círculo e uma região complementar.
Podemos observar que existem tantos quadrados com um quarto de círculo sombreado, como quadrados com um quarto de círculo a branco. Existem, também, tantas regiões complementares sombreadas, como regiões complementares a branco.
Deste modo, a área sombreada é metade da área do retângulo que delimita a Figura 5:

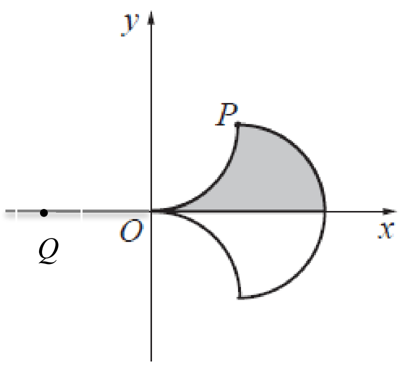
$$\frac{60 \times 120}{2} = 3600$$

Assim, a região sombreada tem 3600 cm^2 de área.

Resposta: A área da região sombreada é 3600 cm^2.

7.2.

Como o raio da semicircunferência é igual a 20 cm, as coordenadas do ponto P são (20,20). Deste modo, o ângulo formado pela reta *OP* e a parte positiva do eixo das abcissas é igual a 45º.
Rodando o ponto *P*, $-585°$ em torno do ponto *O*, no sentido horário, obtemos o seu transformado, digamos *Q*, de coordenadas $\left(-\sqrt{800}, 0\right)$.



Vejamos:

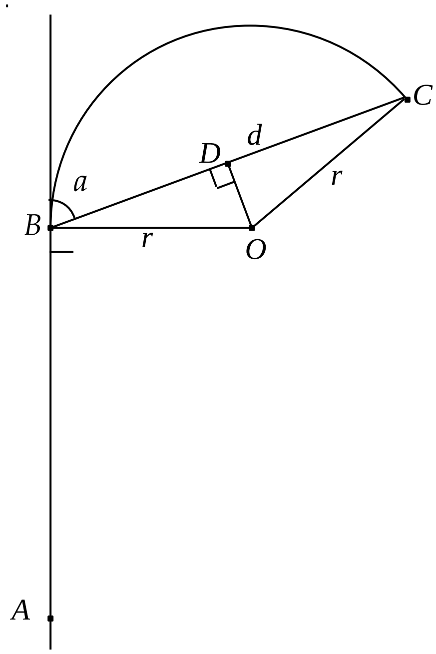
$-585° = -360° - 225°$ (uma volta no sentido horário, mais 225º no sentido horário).
Ao rodar o ponto *P* 360º no sentido horário, este volta à posição inicial, tendo ainda que girar 225º no mesmo sentido.
Ora, $-225° = -180° - 45°$, o que leva o ponto *P* a rodar até ao semieixo negativo de *OX*, fazendo com que *Q* diste de *O* o mesmo comprimento do segmento [*OP*], isto é:

$$\overline{OP}^2 = 20^2 + 20^2 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 = 400 + 400 \Leftrightarrow \overline{OP}^2 = 800 \Leftrightarrow \overline{OP} = \sqrt{800}$$

Resposta: As coordenadas de Q são $\left(-\sqrt{800}, 0\right)$.

8.

8.1.



Seja D o ponto médio de $[BC]$. O segmento $[OD]$ divide o triângulo $[BCO]$ em dois triângulos retângulos geometricamente iguais.

Consideremos o triângulo retângulo $[BDO]$.

Como a circunferência de centro O é tangente à reta AB no ponto B, temos $O\hat{B}A = 90^o$, pelo que $O\hat{B}D = 90^o - \alpha$ e $D\hat{O}B = \alpha$.

Assim, $\sin\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{BO}}$.

Como $\overline{BD} = \frac{d}{2}$ e $\overline{BO} = r$, temos:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{r} \Leftrightarrow r = \frac{\frac{d}{2}}{\sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{d}{2\sin\alpha} \quad \text{c. q. d.}$$

8.2.

A distância total é dada pela soma do comprimento $\overline{AB}$ com o comprimento do arco de circunferência BC.

Comecemos por determinar o valor do ângulo α na situação em que $r = 10$ e $d = 18$:

$$10 = \frac{18}{2\sin\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{18}{2\times 10} \Leftrightarrow \sin\alpha = 0,9$$

Então $\alpha = \sin^{-1}(0,9) \approx 64,158$, pelo que o ângulo $\measuredangle CBO = 90 - 64,158 = 25,842^o$

Assim, temos que $\measuredangle BOC = 180 - 2\times 25,842 = 128,316^o$, uma vez que o triângulo $[BOC]$ é isósceles.

Deste modo, o comprimento do arco de circunferência BC é dado por:

$$\frac{128,316\times\pi\times 10}{180} \approx 22,40$$

Donde, $12 + 22,40 = 34,4$

Resposta: A distância total percorrida foi de 34,4 metros.

FIM

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Critérios de Classificação 9 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista (ver nota).
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.

13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **20 pontos**

Identificar a função objetivo $\left(L(x,y)=120x+80y\right)$ .... 1 ponto

Identificar as restrições $x+2y\leq 160$, $x+y\leq 100$ e $4x+y\leq 280$ .. (3 × 1) . 3 pontos

Identificar as restrições $x\geq 0$ e $y\geq 0$ .... 1 ponto

Representar graficamente a região admissível .... 5 pontos

Representar graficamente as retas de equações $x+2y=160$, $x+y=100$ e $4x+y=280$ .... (3 × 1) .... 3 pontos

Assinalar o polígono .... 2 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono, exceto a origem $\left((0,80),\ (40,60),\ (60,40)\right.$ e $\left.(70,0)\right)$ .... (4 × 1) .... 4 pontos

Calcular o lucro correspondente a cada um dos vértices do polígono, exceto a origem (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero – **ver nota**) .... (4 × 1)... 4 pontos

Apresentar os valores pedidos (60 rolos de tecido TA e 40 rolos de tecido TB) . 2 pontos

Nota – No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

2.1. .... **16 pontos**

Identificar o valor pedido com $d(15,3)$ .... 8 pontos

Calcular $d(15,3)$ .... 8 pontos

Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Substituir t por $15,3$ na expressão analítica de d .... 3 pontos

Obter o valor pedido $(43,6\text{ m})$ (**ver nota 1**) .... 5 pontos

2.º Processo

Representar graficamente a função d (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Obter o valor pedido $(43,6\text{ m})$ .... 3 pontos

Notas:

1. Se for apresentado um valor entre 43 e 44, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

2. Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

2.2. .... **20 pontos**

Reconhecer que o problema se traduz pela condição $d(t)>154$ (ou equivalente) (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Representar graficamente a função d (**ver notas 2 e 3**) .... 5 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y=154$ (**ver nota 2**) .... 2 pontos

Assinalar os pontos de intersecção dos gráficos ....(1 + 1).................. 2 pontos

Obter as abcissas desses pontos $(12,4764\ldots$ e $13,8951\ldots)$ ...... (2 + 2) .... 4 pontos

Calcular a diferença entre essas abcissas .... 3 pontos

Obter o valor pedido $(1\text{ min } 25\text{ s})$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se o problema for traduzido por $d(t)=154$, $d(t)\geq 154$, $d(t)<154$ ou $d(t)\leq 154$, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

2. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto.

3. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

2.3. .... **16 pontos**

Identificar 11 com o instante em que decorreram 11 minutos desde o início da prova .... 4 pontos

Referir que a distância em linha reta da Leonor ao ponto de partida estava a aumentar .... 5 pontos

Referir que $58,4$ corresponde a uma taxa de, aproximadamente, $58,4$ metros por minuto (**ver notas 1 e 2**) .... 7 pontos

Notas:

1. Se for referido que $58{,}4$ corresponde a um valor da velocidade da Leonor, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.
2. Se não for referido que $58{,}4$ corresponde a um valor aproximado, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

Exemplos de resposta:

- «A Leonor, 11 minutos após o início da sua prova, estava a afastar-se cerca de $58{,}4$ metros por minuto do ponto de partida.»
- «11 minutos após o início da sua prova, a distância da Leonor ao ponto de partida estava a aumentar cerca de $58{,}4$ metros por minuto.»

3.1. .... **16 pontos**

Indicar o número de cartas de cada uma das primeiras três filas $(29,\ 26$ e $23)$ .... 3 pontos

Reconhecer que $26-29=23-26$ .... 4 pontos

Referir que cada fila, a partir da primeira, tem menos três cartas do que a fila imediatamente anterior .... 5 pontos

Indicar a razão da progressão (-3) .... 4 pontos

3.2. .... **16 pontos**

Reconhecer que os números de cartas nas filas são termos consecutivos de uma progressão aritmética em que o primeiro termo é 2 (**ver nota**) .... 3 pontos

Indicar a razão dessa progressão (3) (**ver nota**).. 4 pontos

Escrever uma expressão que permita calcular o termo de ordem 100 (**ver nota**).. 3 pontos

Obter o valor desse termo (299) .... 1 ponto

Escrever $\dfrac{2+299}{2}\times 100$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter o valor pedido $(15\,050$ cartas$)$ .... 1 ponto

Nota – Em alternativa, pode ser considerada uma sequência cujo último termo seja 2 e cujos termos sejam termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão -3, e escrita uma expressão que permita calcular o primeiro termo dessa sequência.

4.1. .... **16 pontos**

Obter uma expressão para a medida do outro lado do retângulo, em função de x $(6-x$ ou equivalente$)$ .... 5 pontos

Escrever uma expressão para o perímetro do canteiro, em função de x $\left(2x+2(6-x)\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ .... 6 pontos

Obter o valor pedido (12 m) .... 5 pontos

4.2. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função A (**ver nota**) .... 6 pontos

Respeitar o domínio .... 3 pontos

Respeitar a forma do gráfico .... 3 pontos

Assinalar o ponto do gráfico cuja ordenada é o valor máximo absoluto da função A .... 5 pontos

Obter a ordenada desse ponto (9) .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido $(9\ \mathrm{m}^2)$ .... 1 ponto

Nota – Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

2.º Processo

Escrever $A(x)=0$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter as soluções da equação (0 e 6) ....(2 + 2)......................... 4 pontos

Reconhecer que a concavidade do gráfico de A é voltada para baixo .... 2 pontos

Obter a abcissa do vértice (3) .... 3 pontos

Obter a ordenada do vértice (9) .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido $(9\ \mathrm{m}^2)$ .... 1 ponto

5. .... **16 pontos**

Obter as marcas das classes $(0{,}25;\ 0{,}75;\ 1{,}25;\ 1{,}75;\ 2{,}25;\ 2{,}75;\ 3{,}25)$ .... 7 pontos

Determinar o valor pedido .... 9 pontos

Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Apresentar uma expressão para o valor da média .... 7 pontos

Obter o valor pedido $(1{,}65\ \mathrm{kg})$ .... 2 pontos

2.º Processo

Identificar as listas introduzidas na calculadora .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(1{,}65\ \mathrm{kg})$ .... 7 pontos

6. .... **16 pontos**

Calcular $2{,}4 \div 0{,}10 \quad (24)$ .... 4 pontos

Obter o valor pedido .... 12 pontos

Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar 24 com $\mu + 2\sigma$ .... 3 pontos

Reconhecer que $P(20 \leq X \leq 24) \approx 0{,}9545$ (sendo X a variável aleatória «peso de um aluno do 1.º ano tomado ao acaso») .... 2 pontos

Calcular $P(X \leq 24) \quad (0{,}97725)$ .... 5 pontos

Apresentar o valor pedido (98%) .... 2 pontos

2.º Processo

Determinar, com o auxílio da calculadora, um valor aproximado de $P(X \leq 24) \quad (0{,}977249...)$ .... 10 pontos

Apresentar o valor pedido (98%) .... 2 pontos

7.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Considerar a Figura 5 decomposta em quadrados com $20\ \text{cm}$ de lado .... 3 pontos

Reconhecer que existe um quarto de círculo inscrito em cada quadrado .... 1 ponto

Calcular a área de um desses quartos de círculo .... 3 pontos

Calcular a área da parte restante do quadrado .... 4 pontos

Escrever uma expressão que permita calcular a área da região sombreada ...... 3 pontos

Apresentar o valor pedido $(3600\ \text{cm}^2)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Decompor a Figura 5 em 18 quadrados geometricamente iguais .... 3 pontos

Reconhecer que existe um quarto de círculo inscrito em cada quadrado .... 1 ponto

Referir que o número de quadrados com um quarto de círculo sombreado é igual ao número de quadrados com um quarto de círculo não sombreado .... 3 pontos

Referir que, juntando a parte sombreada de dois quadrados diferentemente sombreados, se obtém um quadrado de lado $20\ \text{cm}$ .... 4 pontos

Concluir que a área da região sombreada é igual à área de 9 quadrados (**ver nota**) .... 3 pontos

Apresentar o valor pedido $(3600\ \text{cm}^2)$ .... 2 pontos

Nota – Em alternativa, pode ser concluído que a área da região sombreada é igual a metade da área total (ou equivalente).

7.2. .... **16 pontos**

Indicar que as coordenadas do ponto P são $(20, 20)$ .... 2 pontos

Reconhecer que $-585^\circ = -360^\circ - 225^\circ$ ou que $-585^\circ = -720^\circ + 135^\circ$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Reconhecer que o transformado de P pela rotação considerada coincide com o transformado de P pela rotação de centro O e amplitude -225° ou 135° .... 1 ponto

Reconhecer que o ângulo formado por $[OP]$ com o semieixo positivo Ox tem amplitude 45° .... 4 pontos

Identificar o sentido da rotação .... 3 pontos

Calcular $\overline{OP}$ $(\sqrt{800})$ .... 3 pontos

Apresentar as coordenadas $(-\sqrt{800}, 0)$ .... 2 pontos

8.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Decompor o triângulo $[BOC]$ pela altura $[OD]$ (sendo D o ponto médio de $[BC]$) .... 2 pontos

Reconhecer que $D\hat{B}O = 90^\circ - \alpha$ .... 3 pontos

Escrever $\cos(90^\circ - \alpha) = \dfrac{\frac{d}{2}}{r}$ (ou equivalente) .... 5 pontos

Substituir $\cos(90^\circ - \alpha)$ por $\operatorname{sen} \alpha$ .... 4 pontos

Obter $r = \dfrac{d}{2 \operatorname{sen} \alpha}$ .... 2 pontos

2.º Processo

Decompor o triângulo $[BOC]$ pela altura $[OD]$ (sendo D o ponto médio de $[BC]$) .... 2 pontos

Reconhecer que $D\hat{B}O = 90^\circ - \alpha$ .... 3 pontos

Reconhecer que $D\hat{O}B = \alpha$ .... 4 pontos

Escrever $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\frac{d}{2}}{r}$ (ou equivalente) .... 5 pontos

Obter $r = \dfrac{d}{2 \operatorname{sen} \alpha}$ .... 2 pontos

8.2. .... **16 pontos**

Reconhecer que a distância total percorrida pelo pássaro é a soma de $\overline{AB}$ com o comprimento do arco BC .... 1 ponto

Escrever $10 = \frac{18}{2\operatorname{sen}\alpha}$ .... 2 pontos

Obter $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}9$ .... 2 pontos

Obter α .... 2 pontos

Obter $B\hat{O}C$ .... 2 pontos

Escrever uma expressão para o comprimento do arco BC .... 3 pontos

Obter o comprimento do arco BC .... 2 pontos

Obter o valor pedido $(34{,}4\text{ m})$ .... 2 pontos

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>2.1.</td><td>2.2.</td><td>3.1.</td><td>4.2.</td><td>5.</td><td>6.</td><td>7.1.</td><td>8.1.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>20</td><td>16</td><td>20</td><td>16</td><td>16</td><td>16</td><td>16</td><td>16</td><td>16</td><td>152</td></tr>
<tr><td>Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td>2.3.</td><td>3.2.</td><td>4.1.</td><td>7.2.</td><td>8.2.</td><td colspan="4"></td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="9">3 × 16 pontos</td><td>48</td></tr>
<tr><td colspan="10">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. A Inês está a fazer um plano de treinos que inclui corrida. Em cada treino de corrida, utilizou uma aplicação para obter a distância percorrida e a energia gasta.

Na tabela ao lado, apresentam-se os valores registados em alguns desses treinos, sendo x a distância percorrida, em km, e y a correspondente energia gasta, em calorias.

Admita como válido o modelo de regressão linear de y sobre x obtido a partir dos dados apresentados nesta tabela.

Num dos treinos de corrida, a aplicação não funcionou corretamente, mas a Inês sabe que, nesse treino, correu $9\ \mathrm{km}$.

Estime, com base nesse modelo de regressão linear, a energia, em calorias, gasta pela Inês nesse treino de corrida.

Na sua resposta, apresente:

– os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x, arredondados às centésimas;

– o valor pedido arredondado às unidades.

Distância percorrida em km (x)	**Energia gasta** em calorias (y)
5	340
6,5	450
7	478
7,7	515
8	550
8,6	580
9,4	630

2. Num ginásio, vão ser indicadas, ao acaso, duas pessoas de uma aula de dança, para exemplificar uma coreografia.

Considere a variável aleatória Y «número de homens indicados para exemplificar a coreografia».

Sabe-se que $P(Y=0)=\frac{9}{65}$ e que $P(Y=1)=\frac{32}{65}$.

Seja X a variável aleatória «número de mulheres indicadas para exemplificar a coreografia».

Determine o valor médio da variável aleatória X.

Na sua resposta, apresente:

– a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X;

– o valor pedido arredondado às centésimas.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

*** 3.** Uma empresa de construção civil dispõe de uma licença da câmara municipal para construção de apartamentos T2 e de apartamentos T3 numa determinada zona urbana desse município.

Cada apartamento T2 vai ser vendido por $150\ 000$ euros, e cada apartamento T3 vai ser vendido por $250\ 000$ euros.

A licença da câmara municipal obriga ao cumprimento das seguintes condições:

- o número de apartamentos T2 construídos não deve exceder o dobro do número de apartamentos T3 construídos;
- o número de apartamentos T3 construídos não deve exceder o triplo do número de apartamentos T2 construídos;
- o número total de apartamentos construídos não deve exceder 60 .

Determine o valor máximo que a empresa poderá receber, em euros, com a venda de todos os apartamentos construídos.

Na sua resposta, designe por x o número de apartamentos T2 e por y o número de apartamentos T3 a construir pela empresa, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor pedido.

4. Um agente imobiliário dispõe de 60 apartamentos para arrendar.

Devido às flutuações do mercado de arrendamento, o agente decidiu fixar o valor das rendas, arrendando todos os apartamentos pelo mesmo valor.

O agente admite que o mercado de arrendamento satisfaz as seguintes condições:

A) se o valor da renda por apartamento for 0 euros, todos os apartamentos serão arrendados;

B) se o valor da renda por apartamento for 3000 euros, não será arrendado qualquer apartamento;

C) para valores da renda por apartamento entre 0 euros e 3000 euros, por cada 50 euros de aumento da renda por apartamento, será arrendado menos um apartamento.

Esta situação foi traduzida para o seguinte modelo linear:

$$N(p) = -\frac{1}{50}p + 60 \quad , \quad \text{com} \quad 0 \leq p \leq 3000$$

em que p é o valor da renda, em euros, e $N(p)$ é o número de apartamentos arrendados por p euros.

4.1. Mostre que o modelo apresentado satisfaz as três condições referidas.

*** 4.2.** O rendimento, R , em euros, que o agente imobiliário obterá é dado por

$$R(p) = p \times N(p)$$

Determine o valor da renda por apartamento a que corresponde o maior rendimento possível, de acordo com os modelos apresentados.

5. Seja f a função que dá a altitude, em metros, de cada ponto de um percurso de 40 km, ao longo de uma prova de BTT, para cada valor da distância percorrida, x, em quilómetros, desde o ponto de partida.

Admita que

$$f(x) = 600 + 0{,}004\,(x^3 - 50x^2 + 400x)e^{0{,}01x-1} \quad , \quad \text{com } 0 \leq x \leq 40$$

* **5.1.** Determine a diferença entre as altitudes do ponto de partida e do ponto de chegada da prova de BTT.

* **5.2.** Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o número total de quilómetros da prova de BTT em que a altitude é superior a 598 metros.

Apresente o resultado em quilómetros, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

6. O Tomé faz treinos de bicicleta, no ginásio, para se preparar para as provas de BTT em que participa.

Seja T a função que dá a taxa de variação instantânea do valor da velocidade registado na bicicleta do Tomé durante um desses treinos, x minutos após o seu início.

Na Figura 1, apresenta-se o gráfico da função T, com $0 \leq x \leq 35$.

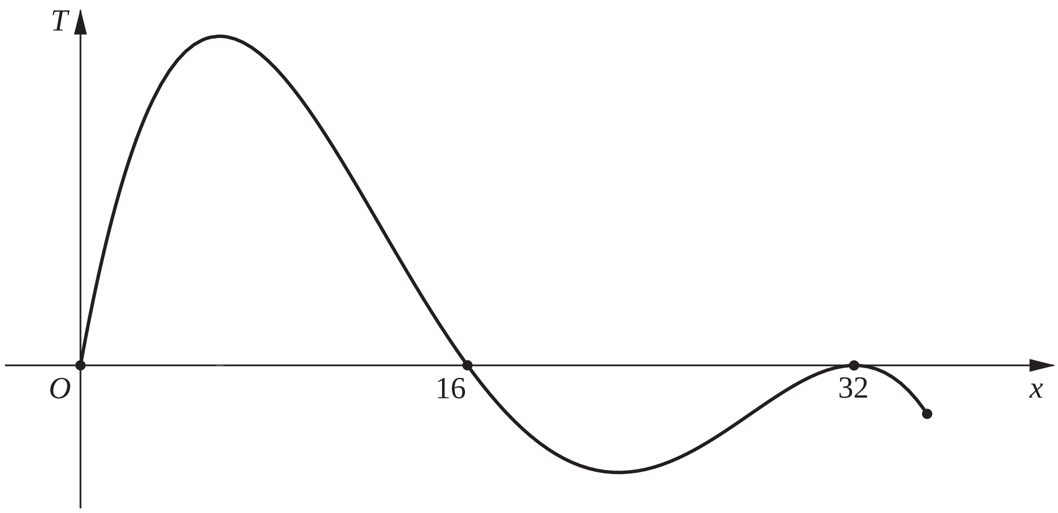


Figura 1

Tal como a figura ilustra, os zeros da função T são 0, 16 e 32.

Em que instante é que a velocidade foi máxima durante esse treino?

Justifique a sua resposta.

7. Na Figura 2, está representado um friso constituído por cinco azulejos retangulares e iguais.

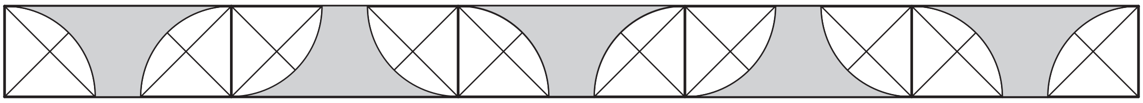


Figura 2

Cada azulejo apresenta dois quartos de círculo de raio igual à largura do azulejo.

Na Figura 3, está representado um azulejo, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy.

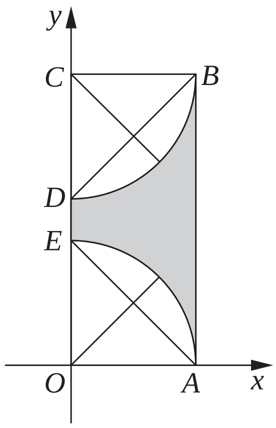


Figura 3

Nesta figura, que não está à escala:

- o retângulo $[OABC]$ representa o azulejo;
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o ponto C tem coordenadas $(0, 12)$;
- os pontos D e E pertencem a $[OC]$;
- o arco de circunferência AE tem centro no ponto O, e o arco de circunferência DB tem centro no ponto C;
- a reta DB é definida pela equação $y = x + 7$.

No referencial, a unidade é o centímetro.

* **7.1.** Determine a área da região sombreada nos cinco azulejos do friso representado na Figura 2.

Na sua resposta, apresente o resultado em centímetros quadrados, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

7.2. Na Figura 4, os retângulos $[UPQT]$ e $[RSTQ]$ representam os dois primeiros azulejos do friso.

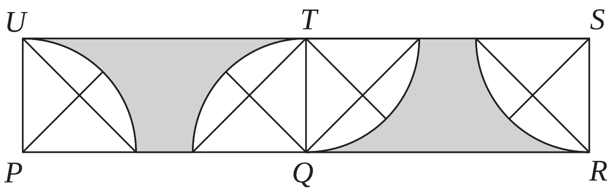


Figura 4

O retângulo $[RSTQ]$ é o transformado do retângulo $[UPQT]$ por meio de uma rotação.

Identifique o centro e a amplitude dessa rotação.

8. Na Figura 5, esquematizam-se as três primeiras etapas da construção de uma sequência de quadrados.

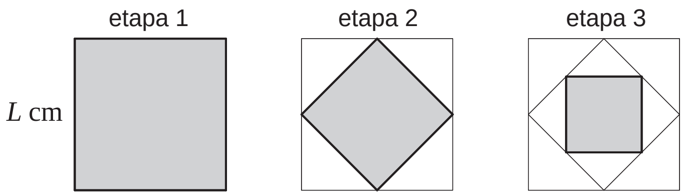


Figura 5

Como a figura ilustra:

- na etapa 1, considera-se um quadrado inicial, de lado L cm , o quadrado de ordem 1;
- na etapa 2, unem-se os pontos médios do quadrado de ordem 1, obtendo-se o quadrado de ordem 2;
- na etapa 3, unem-se os pontos médios do quadrado de ordem 2, obtendo-se o quadrado de ordem 3;
- e assim sucessivamente, obtendo-se uma sequência de quadrados inscritos uns nos outros.

8.1. Mostre que a área do quadrado de ordem n desta sequência pode ser dada, em centímetros quadrados, por

$$A_n = L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

* **8.2.** Sabe-se que o quadrado de ordem 12 da sequência tem $0{,}5\,\text{cm}^2$ de área.

Determine o valor de L .

Note que a área do quadrado de ordem n desta sequência pode ser dada, em centímetros quadrados, por $A_n = L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

9. Nas *Bucólicas*, de Vergílio, pode ler-se o seguinte verso:

«e o Sol **duplica**, declinando, **as sombras** crescentes.»

Vergílio, *Bucólicas*, II, 67, tradução de Frederico Lourenço, Lisboa, Quetzal, 2021.

A observação que inspira o poeta é feita no final do dia e demora um quarto de hora.

O esquema da Figura 6 ilustra a situação.

Neste esquema, que não está à escala:

- $[AB]$ representa uma árvore;
- $[BC]$ representa a sombra da árvore no início da observação;
- $[BD]$ representa a sombra da árvore no fim da observação;
- $\overline{BD} = 2\,\overline{BC}$;
- α é a amplitude, em graus, do ângulo BAC ;
- β é a amplitude, em graus, do ângulo BAD .

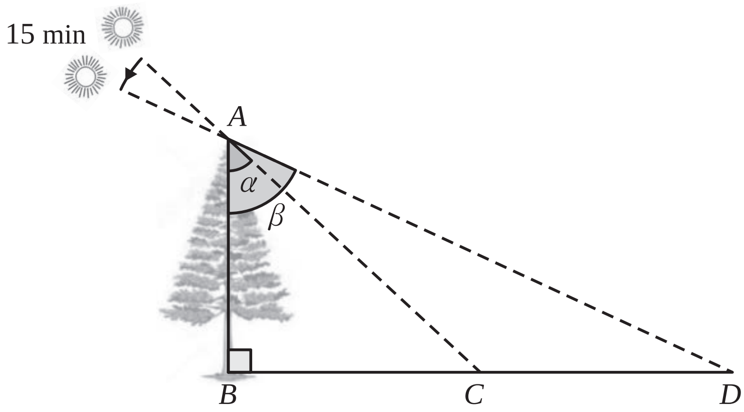


Figura 6

9.1. Mostre que $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$.

* **9.2.** Determine a quantos minutos do pôr do sol tem início a observação da duplicação das sombras, admitindo que $\beta = \alpha + 3{,}75^\circ$.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Na sua resolução, tenha em consideração que $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$ e que o Sol, no seu movimento aparente, percorre um arco de 15° por hora.

FIM

COTAÇÕES

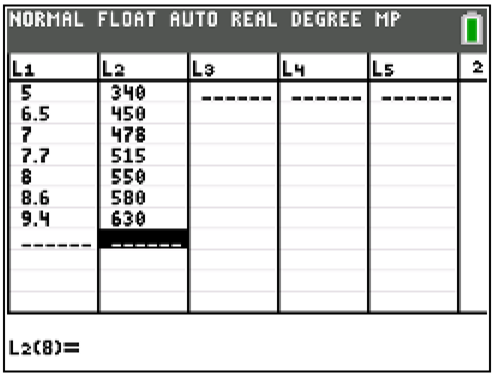
As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**7.1.**	**8.2.**	**9.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	16	16	20	16	16	20	16	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**4.1.**	**6.**	**7.2.**	**8.1.**	**9.1.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**

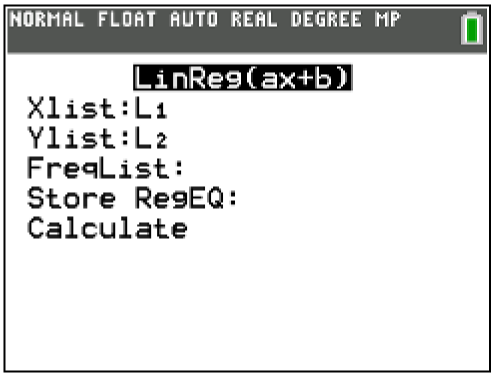
Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

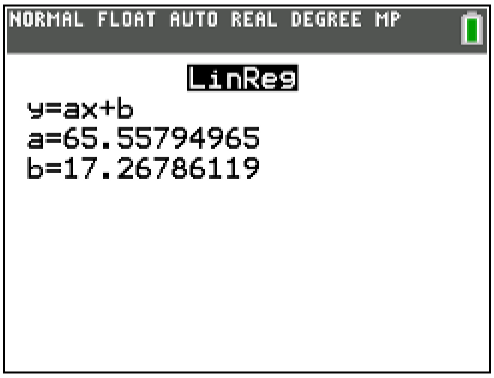
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 25 DE JULHO 2022

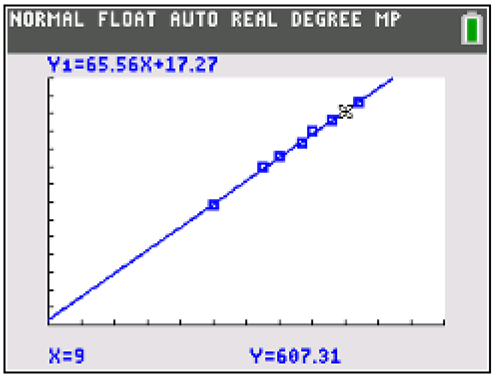
1. Editemos os dados que nos são fornecidos em duas listas da calculadora, em vista à obtenção dos parâmetros necessários à definição da equação da reta de regressão linear entre as duas variáveis.







Obtidos os parâmetros podemos editar a equação da reta em vista à obtenção do seu gráfico e, a partir dele, a imagem de 9.



Resposta: Para um treino com 9 Km de corrida é de estimar que sejam gastas 607 calorias.

2. Sabemos que $P(Y=0)=\frac{9}{65}$, logo temos que $P(X=2)=\frac{9}{65}$

Também sabemos que $P(Y=1)=\frac{32}{65}$, logo $P(X=1)=\frac{32}{65}$

Como a variável X só toma os valores 0, 1 ou 2, podemos concluir que $P(X=0)=1-\left(\frac{32}{65}+\frac{9}{65}\right)=\frac{24}{65}$

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é então:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{24}{65}$	$\frac{32}{65}$	$\frac{9}{65}$

Valor médio: $\mu=\frac{24}{65}\times 0+\frac{32}{65}\times 1+\frac{9}{65}\times 2=\frac{50}{65}\approx 0,7692$

Resposta : O valor médio de X é, aproximadamente, $0,77$

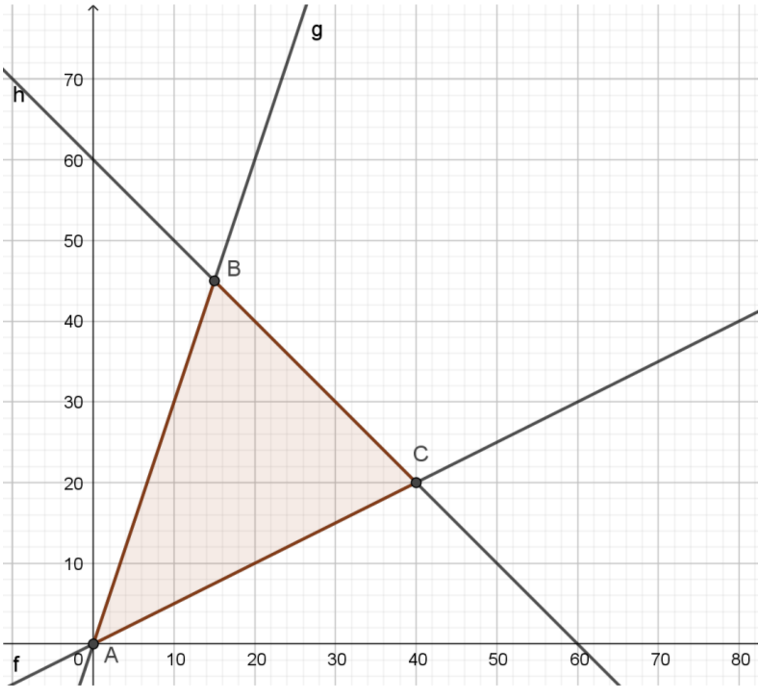
3. A função objetivo, que se pretende maximizar, é $L(x,y)=150\,000\,x+250\,000\,y$

Quanto às restrições, a relação entre o número de apartamentos T2 e T3 obriga a que $x\leq 2y$ e que $y\leq 3x$. Quanto ao total de apartamentos, a restrição é $x+y\leq 60$.

Tendo em conta as restrições óbvias $x\geq 0$ e $y\geq 0$ e as mencionadas anteriormente, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x\leq 2y \\ y\leq 3x \\ x+y\leq 60 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq \frac{x}{2} \\ y\leq 3x \\ y\leq -x+60 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Desta forma, a representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições é:



Os vértices da região admissível, excluindo a origem (que anula, obviamente a função objetivo), obtém-se por interseção das retas que a definem e são $B(15,45)$ e $C(40,20)$

Averiguemos agora qual a solução ótima:

$$L(15,45)=150\,000\times 15+250\,000\times 45=13\,500\,000$$

$$L(40,20)=150\,000\times 40+250\,000\times 20=11\,000\,000$$

Resposta: O valor máximo que a empresa pode obter é 13 500 000 € correspondente à venda de 15 apartamentos T2 e 45 T3.

4.

4.1. Condição A): $p=0$

$N(0)=-\frac{1}{50}\times 0+60=60$ o que corresponde ao arrendamento dos 60 apartamentos.

Condição B): $p=3000$

$N(3000)=-\frac{1}{50}\times 3000+60=-60+60=0$ o que significa se arrendada zero apartamentos.

Condição C): Calculemos o valor de N para $p+50$:

$$N(p+50)=-\frac{1}{50}\times(p+50)+60=$$
$$=-\frac{1}{50}p-\frac{50}{50}+60=-\frac{1}{50}p+60-1$$
$$=N(p)-1$$

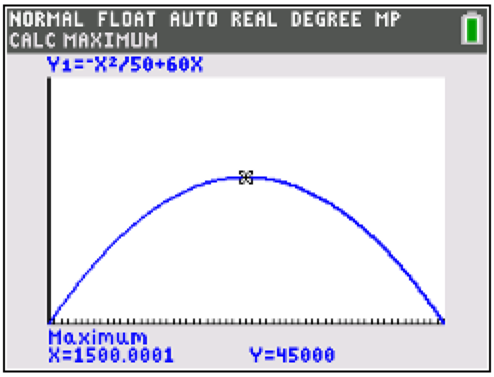
o que significa que se a renda aumentar 50€ arrenda-se menos um apartamento, para qualquer valor de p com $0<p<3000$.

Ficam assim verificadas as três condições.

4.2. Temos que encontrar o máximo da função $R(p)$ com $0\leq p\leq 3000$

$$R(p)=p\times N(p)=p\times\left(-\frac{1}{50}p+60\right)=-\frac{1}{50}p^2+60p$$

Editemos esta função na calculadora gráfica, tendo em conta o seu domínio, e determinemos o máximo:



Resposta: O rendimento será máximo quando $p=1500$, isto é, quando a renda for de 1500€.

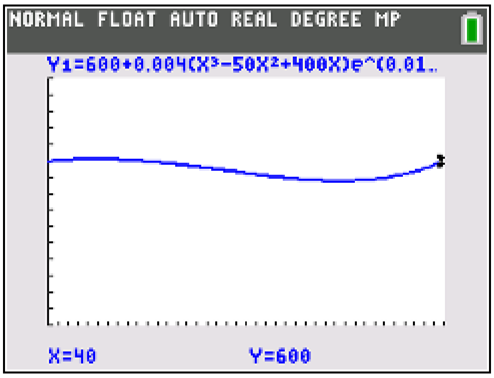
5.

5.1. A diferença pretendia será dada pela diferença entre $f(0)$ e $f(40)$

Podemos editar a função na calculadora e obter $f(40)$, uma vez que é fácil obter

$$f(0)=600+0{,}004(0-0+0)e^{-1}=600$$

Recorrendo à calculadora gráfica:



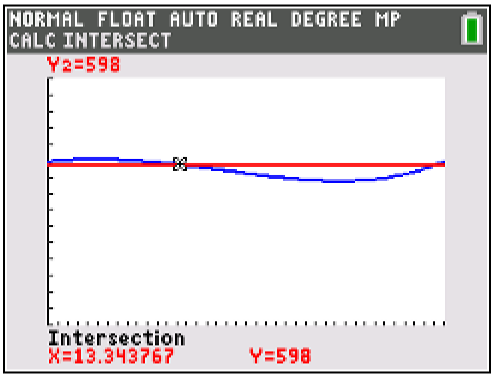
$$f(0)-f(40)=600-600=0$$

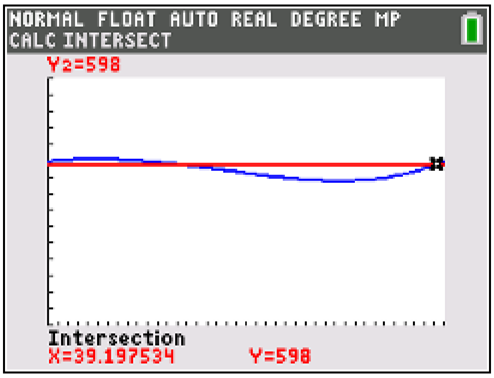
Resposta: a diferença de altitudes é nula.

5.2. Para além da função, editemos também na calculadora a reta de equação $y=598$

Temos que usar uma janela de visualização adequada, por exemplo, fazendo $x\in[0,40]$ e $y\in[500,650]$

Vejamos os gráficos e as interseções necessárias:





Tendo em conta as abcissas dos pontos de interseção, vemos que a altitude é superior a 598, até aos $13,3438$ Km e a partir dos $39,1975$ km

Ora $40-39,1975=0,8025$

$13,3438+0,8025=14,1463\approx 14,1$ Km

Resposta: Durante 14,1 Km a altitude foi superior a 598 metros.

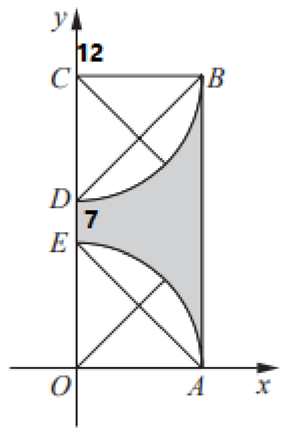
6. A taxa de variação instantânea corresponde à derivada de uma função. Então, temos que relacionar o sinal da função T, com a monotonia da função original, função que nos dá a velocidade da bicicleta. Podemos registar isso numa tabela, utilizando a informação que recolhemos do gráfico de T:

x	0		16		32		35
sinal de T	0	+	0	–	0	–	–
Monotonia da velocidade		↗	máx	↘		↘	

Resposta: O valor da velocidade foi máximo aos 16 minutos de treino.

7.

7.1. A partir dos dados do problema podemos completar a imagem de um azulejo, em referencial ortogonal, da forma representada à direita.



Podemos concluir que o comprimento do retângulo *[0ABC]* é 12 cm, uma vez que a ordenada de C é 12 e, como a ordenada de D é 7, pois corresponde à ordenada na origem da reta de equação $y = x + 7$, a sua largura é igual a $\overline{OA} = \overline{OC} - \overline{OD} = 12 - 7 = 5$ cm.

Desta forma a área do retângulo *[0ABC]* = 5× 12 = 60 cm^2.

Por outro lado, no azulejo visualizamos dois quartos de uma circunferência centrada na origem e de raio $\overline{OA} = \overline{CD} = 5$. Estes dois quartos de circunferência formam uma semicircunferência, cuja área do semicírculo correspondente é:

Área do semicírculo = $\frac{\pi \times 5^2}{2} = \frac{25\,\pi}{2}$

A região a sombreado é dada por:

Área retângulo [0ABC] – Área do semicírculo = $60 - \frac{25\,\pi}{2} \approx 20{,}73\ cm^2$

Como o friso é composto por 5 azulejos, temos que a área da região sombreada correspondente aos cinco azulejos é:

$$5 \times 20{,}73 \approx 104\ cm^2$$

Resposta: A área da região sombreada é 104 cm^2

7.2. Para que o retângulo $[RSTQ]$ seja o transformado do retângulo $[UPQT]$ é necessário que a rotação seja tal que transforme U em R, P em S, Q em T e T em Q.

Ora isso só acontece se a rotação tiver centro no ponto médio de $[TQ]$ e amplitude 180°, seja no sentido horário ou no sentido anti-horário.

Resposta: O centro de rotação é o ponto médio de $[TQ]$ e a amplitude é 180° ou -180°.

8.

8.1. Verifica-se que na etapa 2, a área do quadrado é metade da área do quadrado da etapa 1. Na etapa 3 a área do quadrado é metade da área do quadrado da etapa 2 e assim sucessivamente.

Conclui-se assim que as áreas dos sucessivos quadrados formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Como a área do quadrado da etapa 1 é L^2, a área do quadrado de ordem n é dada, em centímetros quadrados, por:

$$A_n = L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$, tal como se pretendia mostrar.

8.2. Tem-se que $A_{12} = \frac{1}{2}$, logo,

$$L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow L^2 = \frac{1}{2} \div \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \Leftrightarrow L^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-10}$$

$$\Leftrightarrow L^2 = 2^{10} \Leftrightarrow L = 2^5 = 32 \text{ porque } L > 0.$$

Resposta: $L = 32$ cm.

9.

9.1. Tem-se que:

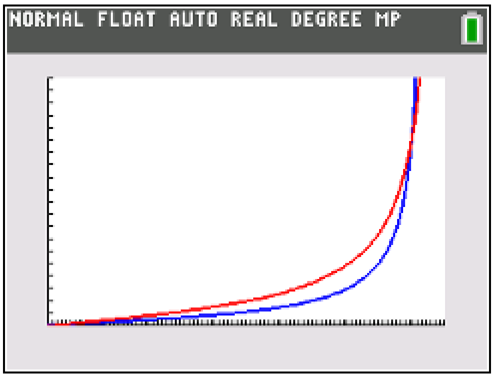
$$tg\ \beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{2.\overline{BC}}{\overline{AB}} = 2 \times \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = 2.tg\ \alpha$$

Conclui-se assim, como queríamos mostrar, que: $tg\ \beta = 2.tg\ \alpha$

9.2. Como $\beta = \alpha + 3{,}75^o$, tem-se que:

$$tg\ (\alpha + 3{,}75^o) = 2.tg\ \alpha$$

Colocando na calculadora gráfica as expressões $y_1 = tg(x + 3.75)$ e $y_2 = 2tg(x)$ obtém-se as seguintes representações gráficas:



Existem dois pontos de interseção.: $A(3{,}783; 0{,}132)$ e $B(82{,}467; 15{,}125)$, logo tem-se que as soluções da equação para $\alpha \in]0^o, 90^o[$ $são\ \alpha \approx 3{,}783$ ou $\alpha \approx 82{,}467$.

Como o enunciado refere que se pretende os minutos do **pôr do sol** para os quais tem início a observação da duplicação das sombras, tal só pode ocorrer quando $\alpha \approx 82{,}467$ e assim sendo as horas pretendidas são dadas por $\frac{90^o - 82{,}467^o}{15^o} \approx 0{,}5022$, o que corresponde a 30 minutos aproximadamente.

Resposta: A observação tem início a, aproximadamente, 30 minutos do pôr do sol.

FIM

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Critérios de Classificação 9 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista (ver nota).
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.

13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **16 pontos**

Identificar as listas introduzidas na calculadora .... 1 ponto

Apresentar os parâmetros da reta de regressão linear $(65{,}56 \text{ e } 17{,}27)$ .... (4 + 4) .... 8 pontos

Identificar x com 9 .... 4 pontos

Obter o valor pedido (607 calorias) .... 3 pontos

2. .... **16 pontos**

Identificar $P(X=2)$ com $P(Y=0)$ .... 2 pontos

Identificar $P(X=1)$ com $P(Y=1)$ .... 2 pontos

Obter $P(X=0)$ .... 5 pontos

Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Calcular $P(Y=2)$ $\left(\frac{24}{65}\right)$ .... 3 pontos

Identificar $P(X=0)$ com $P(Y=2)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $P(X=0)=1-P(X=1)-P(X=2)$ .... 3 pontos

Calcular $P(X=0)$ $\left(\frac{24}{65}\right)$ .... 2 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades da variável X .... 1 ponto

Obter o valor médio .... 6 pontos

Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever uma expressão para o valor médio .... 4 pontos

Calcular o valor pedido $(0{,}77)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Apresentar as listas introduzidas na calculadora .... 1 ponto

Apresentar o valor pedido $(0{,}77)$ .... 5 pontos

3. .... **20 pontos**

Identificar a função objetivo $\left(L(x,y) = 150\,000x + 250\,000\,y\right)$ .... 2 pontos

Identificar as restrições $x \leq 2y$, $y \leq 3x$ e $x + y \leq 60$ .... (3 × 1) .... 3 pontos

Identificar as restrições $x \geq 0$ e $y \geq 0$ .... 1 ponto

Representar graficamente a região admissível .... 5 pontos

Representar graficamente as retas de equações $x = 2y$, $y = 3x$ e $x + y = 60$ .... 3 pontos

Assinalar o polígono .... 2 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono, exceto a origem $\left((15, 45)\right.$ e $\left.(40, 20)\right)$ .... (2 × 2) .... 4 pontos

Calcular o valor obtido com as vendas correspondente a cada um dos vértices do polígono, exceto a origem (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero – **ver nota**) .... (2 × 2) .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido $(13\,500\,000$ euros$)$ .... 1 ponto

Nota – No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

4.1. .... **16 pontos**

Mostrar que o modelo satisfaz a condição A) .... 4 pontos

Substituir p por 0 em $N(p)$ .... 2 pontos

Obter $N(0)$ (60) .... 2 pontos

Mostrar que o modelo satisfaz a condição B) .... 4 pontos

Substituir p por 3000 em $N(p)$ .... 2 pontos

Obter $N(3000)$ (0) .... 2 pontos

Mostrar que o modelo satisfaz a condição C) .... 8 pontos

Substituir p por $p + 50$ em $N(p)$ .... 2 pontos

Obter uma expressão para $N(p + 50)$ .... 2 pontos

Escrever uma expressão para $N(p + 50) - N(p)$ ou para $N(p) - 1$ .... 2 pontos

Concluir que $N(p + 50) - N(p) = -1$ ou que $N(p + 50) = N(p) - 1$ .... 2 pontos

4.2. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função R (**ver nota**) .... 10 pontos

Respeitar o domínio .... 4 pontos

Respeitar a forma do gráfico .... 6 pontos

Assinalar o ponto do gráfico cuja ordenada é o valor máximo absoluto da função R .... 4 pontos

Obter a abcissa desse ponto (1500) .... 2 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

2.º Processo

Substituir $N(p)$ por $-\frac{1}{50}p+60$ na expressão de $R(p)$ .... 2 pontos

Obter $R(p)=-\frac{1}{50}p^2+60p$ .... 5 pontos

Obter as soluções da equação $-\frac{1}{50}p^2+60p=0$ $(0$ e $3000)$ .... 4 pontos

Obter o valor médio das soluções da equação (1500) .... 5 pontos

5.1. .... **16 pontos**

Identificar a altitude do ponto de partida com $f(0)$ .... 4 pontos

Obter $f(0)$ (600) .... 3 pontos

Identificar a altitude do ponto de chegada com $f(40)$ .... 4 pontos

Obter $f(40)$ (600) .... 3 pontos

Obter o valor pedido $(0\ \mathrm{m})$ .... 2 pontos

5.2. .... **20 pontos**

Traduzir o problema por uma condição $(f(x) > 598,$ ou equivalente$)$ (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Representar graficamente a função f (**ver notas 2 e 3**) .... 5 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 598$ (**ver nota 2**) .... 2 pontos

Assinalar os pontos de intersecção dos gráficos .... (1 + 1) .... 2 pontos

Obter as abcissas desses pontos $(13{,}3437\ldots$ e $39{,}1975\ldots)$ ...... (2 + 2) .... 4 pontos

Obter o valor pedido $(14{,}1\ \text{km})$ .... 5 pontos

Notas:

1. Se o problema for traduzido por $f(x) = 598$, $f(x) \geq 598$, $f(x) < 598$ ou $f(x) \leq 598$, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

2. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto.

3. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

6. .... **16 pontos**

Apresentar o quadro de sinal da função T (ou equivalente) .... 4 pontos

Apresentar o quadro de variação do valor da velocidade (ou equivalente) .... 7 pontos

Apresentar o valor pedido $(16\ \text{minutos})$ .... 5 pontos

7.1. .... **16 pontos**

Reconhecer que o comprimento de cada azulejo é $12\ \text{cm}$ .... 1 ponto

Reconhecer que a ordenada do ponto D é 7 .... 3 pontos

Obter a largura de cada azulejo $(5\ \text{cm})$ .... 3 pontos

Obter a área de cada azulejo $(60\ \text{cm}^2)$ .... 1 ponto

Obter a área dos dois quartos de círculo .... 3 pontos

Obter a área da região sombreada de cada azulejo .... 3 pontos

Obter a área pedida $(104\ \text{cm}^2)$ .... 2 pontos

7.2. .... **16 pontos**

Referir que o centro da rotação é o ponto médio de $[TQ]$ (**ver nota**) .... 8 pontos

Referir que a amplitude da rotação é $180°$ ou $-180°$ .... 8 pontos

Nota – Se for indicado o ponto T ou o ponto Q , a pontuação a atribuir a esta etapa é 2 pontos.

8.1. .... **16 pontos**

Referir que a área de cada quadrado da sequência é metade da área do quadrado imediatamente anterior .... 5 pontos

Reconhecer que as áreas dos quadrados da sequência são termos consecutivos de uma progressão geométrica .... 3 pontos

Indicar a razão dessa progressão $\left(\frac{1}{2}\right)$ .... 3 pontos

Identificar o primeiro termo dessa progressão com a área do primeiro quadrado (L^2) .... 2 pontos

Obter $A_n = L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .... 3 pontos

8.2. .... **16 pontos**

Substituir n por 12 na expressão de A_n .... 4 pontos

Igualar a expressão obtida a $0{,}5$ .... 5 pontos

Obter $L^2 = 1024$ .... 5 pontos

Apresentar o valor pedido (32) .... 2 pontos

9.1. .... **16 pontos**

Escrever $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ .... 4 pontos

Escrever $\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$ .... 4 pontos

Reconhecer que $\overline{BD} = 2\overline{BC}$ .... 4 pontos

Obter $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$ .... 4 pontos

9.2. .... **16 pontos**

Escrever $\operatorname{tg}(\alpha + 3{,}75) = 2\operatorname{tg}\alpha$ .... 3 pontos

Representar graficamente a função definida por $y = \operatorname{tg}(x + 3{,}75)$ (**ver nota**) .. 2 pontos

Representar graficamente a função definida por $y = 2\operatorname{tg} x$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos dois gráficos relevante para a resolução do problema .... 2 pontos

Obter a abcissa desse ponto $(82{,}467...)$ .... 2 pontos

Calcular $90 - 82{,}467...$ .... 3 pontos

Obter o valor pedido (30 minutos) .... 2 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto.

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**7.1.**	**8.2.**	**9.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	16	16	20	16	16	20	16	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**4.1.**	**6.**	**7.2.**	**8.1.**	**9.1.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | Época Especial | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. Uma empresa de marcenaria produz e vende aparadores em madeira, feitos à mão, de dois modelos, A e B.

Cada aparador do modelo A necessita de 30 metros de madeira e de 5 horas de mão de obra.

Cada aparador do modelo B necessita de 20 metros de madeira e de 10 horas de mão de obra.

Para a produção destes dois modelos de aparadores, a empresa dispõe, mensalmente, de 300 metros de madeira e de 110 horas de mão de obra.

Por cada aparador do modelo A vendido, a empresa tem o lucro de 700 euros e, por cada aparador do modelo B vendido, a empresa tem o lucro de 900 euros.

Admita que a empresa vende todos os aparadores que produz.

Determine o número de aparadores do modelo A e o número de aparadores do modelo B que a empresa deverá produzir por mês, de modo a maximizar o lucro obtido.

Na sua resposta, designe por x o número de aparadores do modelo A e por y o número de aparadores do modelo B a produzir por mês, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. Numa praça de uma vila, existe um quiosque que vende gelados artesanais.

Na tabela ao lado, apresentam-se os valores da temperatura máxima, em $^{\circ}\mathrm{C}$, registados na vila em alguns dias e o número de gelados vendidos no quiosque em cada um desses dias.

Considere válido o modelo de regressão linear de y sobre x obtido a partir dos dados apresentados na tabela.

Estime, com base nesse modelo, o número de gelados vendidos no quiosque num dia em que o valor da temperatura máxima seja igual a $35\ ^{\circ}\mathrm{C}$.

Na sua resposta, apresente:

– os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x, arredondados às décimas;

– o valor pedido arredondado às unidades.

Temperatura máxima (ºC) (x)	**Número de gelados vendidos** (y)
26	81
31	150
33	160
25	80
28	100
24	86
27	98

3. Seja h a função que dá a altura de maré, em metros, no porto de Viana do Castelo, durante os dois primeiros dias do ano de 2022.

Admita que h pode ser definida por

$$h(t) = 2 + 1{,}5\,\mathrm{sen}\,(0{,}5t + 1)$$

em que t é o tempo, em horas, decorrido desde as 0 horas do dia 1 de janeiro.

O argumento da função seno está em radianos.

* **3.1.** Considere a altura de maré, no porto de Viana do Castelo, às 0 horas do dia 1 de janeiro de 2022.

Quanto tempo decorreu até ao primeiro instante em que se voltou a registar a mesma altura de maré, nesse porto, de acordo com o modelo apresentado?

Apresente o resultado em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

* **3.2.** Determine, de acordo com o modelo apresentado, o valor máximo e o valor mínimo da altura de maré, no porto de Viana do Castelo, nos primeiros dois dias do ano de 2022.

Apresente o resultado em metros.

4. A Luísa vai construir uma tela retangular de 20 decímetros de perímetro.

4.1. Mostre que a área, A, da tela, em decímetros quadrados, em função da medida, x, em decímetros, de um dos lados, com $0 < x < 10$, é dada por

$$A(x) = 10x - x^2$$

Na sua resposta, comece por obter uma expressão para a medida da outra dimensão da tela, em função de x.

* **4.2.** Para a pintura que a Luísa pretende realizar, é necessário que a tela tenha, pelo menos, $16\ \mathrm{dm}^2$ de área.

Determine entre que valores pode variar a medida, x, em decímetros, de um dos lados da tela, para ter a área pretendida.

Apresente a sua resposta na forma de intervalo de números reais.

Note que a área, A, da tela, em decímetros quadrados, em função da medida, x, em decímetros, de um dos lados, com $0 < x < 10$, é dada por $A(x) = 10x - x^2$.

5. O João vai participar numa prova de atletismo.

*** 5.1.** Admita que o tempo, em minutos, que um atleta demora a concluir essa prova é uma variável aleatória que segue a distribuição normal de valor médio $17{,}4$ minutos e desvio padrão $2{,}6$ minutos.

Nessa prova, vão participar 86 atletas.

Quantos atletas se espera que demorem mais do que 20 minutos a concluir o percurso da prova?

Justifique a sua resposta.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

5.2. A prova realizou-se numa pista circular, como se ilustra no esquema da Figura 1.

Sejam:

- g a função que dá a distância em linha reta, em metros, do João ao ponto de partida, x minutos após o início da sua prova, durante toda a primeira volta;
- h a função que dá a taxa de variação instantânea da função g, para cada valor de x.

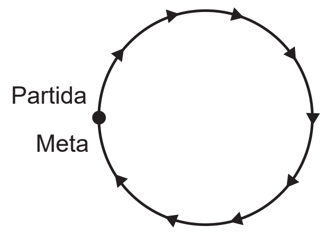


Figura 1

Considere o gráfico representado na Figura 2.

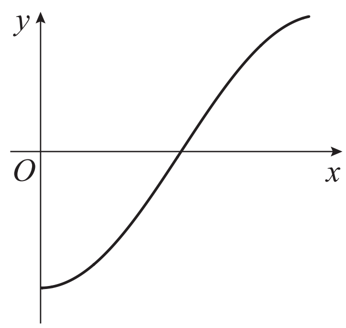


Figura 2

Justifique que este gráfico **não** pode ser o gráfico da função g nem pode ser o gráfico da função h.

6. No cenário de um estúdio de televisão, foi desenhada uma linha poligonal, com segmentos de reta posicionados, alternadamente, na vertical e na horizontal.

No esquema da Figura 3, que não está à escala, representam-se sete dos segmentos de reta que constituem essa linha:

- o primeiro segmento de reta, posicionado na vertical, tem 5 cm de comprimento;
- o segundo segmento de reta, posicionado na horizontal, tem 8 cm de comprimento;
- o terceiro segmento de reta, posicionado na vertical, tem 11 cm de comprimento;
- e cada um dos segmentos de reta seguintes tem sempre mais 3 cm de comprimento do que o segmento de reta imediatamente anterior.

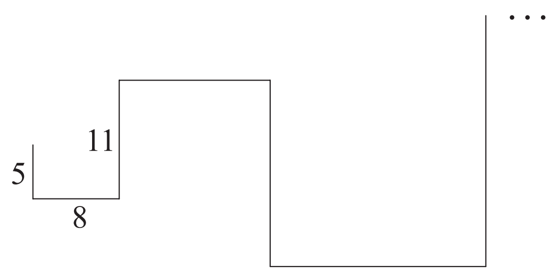


Figura 3

* **6.1.** Determine o comprimento do 13.º segmento de reta posicionado na horizontal.

Apresente o resultado em centímetros.

6.2. Se o comprimento total da linha poligonal for $15{,}5\text{ m}$, quantos serão os segmentos de reta que a constituem?

Justifique a sua resposta.

7. A Figura 5 é uma fotografia da Praça D. Pedro IV, em Lisboa, por volta de 1950, na qual se pode observar uma das suas fontes e o passeio que a circundava.

Figura 5

O esquema da Figura 6 representa a superfície ocupada pela fonte e pelo passeio.

Neste esquema, que não está à escala:

- estão representadas duas circunferências concêntricas;
- a região sombreada representa o passeio;
- os pontos O e P pertencem à circunferência maior;
- o segmento de reta $[OP]$ é tangente à circunferência menor no ponto T.

Admita que $\overline{OP} = 24\ \text{m}$.

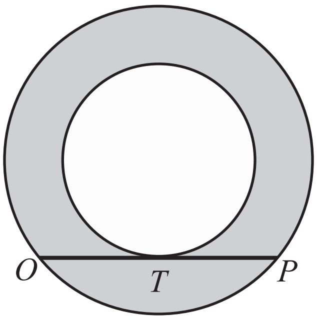


Figura 6

7.1. Determine a área da superfície ocupada pelo passeio.

Apresente o resultado em metros quadrados, arredondado às unidades.

Na sua resposta, designe por R o raio da circunferência maior, designe por r o raio da circunferência menor e comece por escrever uma expressão para a área pedida, em função de R e de r.

7.2. Admita que, na circunferência maior da Figura 6, se fixa um referencial ortogonal e monométrico, Oxy, como se representa na Figura 7.

Relativamente a esta figura, que não está à escala, sabe-se que:

- o segmento de reta $[OP]$ está contido na reta de equação $y = x$;
- o ponto Q pertence à circunferência e tem coordenadas $\left(-\sqrt{50}, \sqrt{50}\right)$.

A unidade no referencial é o metro.

Determine a área do triângulo $[OPQ]$.

Apresente o resultado em metros quadrados.

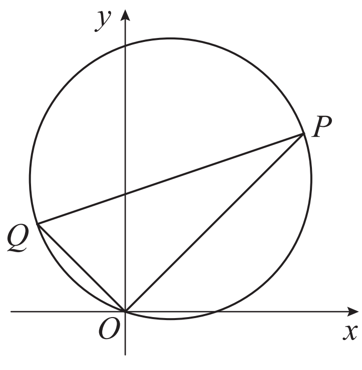


Figura 7

8. Ao largo da costa portuguesa, um petroleiro encalhou e começou a derramar crude.

Admita que a área, S, em quilómetros quadrados, da mancha de crude no oceano, t horas após o instante em que o derrame foi detetado, é dada por

$$S(t) = 10 + 40 \ln(1{,}2t + 1{,}4) \quad , \text{ com } 0 \leq t \leq 24$$

*** 8.1.** Algum tempo depois do instante em que o derrame foi detetado, foi acionada uma equipa especializada, para intervir e minimizar o impacto ambiental do derrame.

Desde o instante em que a equipa foi acionada até ao instante em que esta chegou à zona do derrame, pronta a intervir, decorreram 3 horas e 45 minutos. Durante este intervalo de tempo, a área da mancha de crude duplicou.

Quanto tempo decorreu desde o instante em que o derrame foi detetado até ao instante em que a equipa foi acionada?

Apresente o resultado em minutos, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

8.2. Admita que a mancha de crude é circular, com centro no local onde o petroleiro encalhou, a 7 quilómetros da costa.

Verifique se a mancha de crude atingiu a costa nas vinte e quatro horas decorridas após o instante em que foi detetado o derrame.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.2.**	**5.1.**	**6.1.**	**7.1.**	**8.1.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	20	16	20	16	16	16	16	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**4.1.**	**5.2.**	**6.2.**	**7.2.**	**8.2.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | Época Especial | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Critérios de Classificação 10 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista (ver nota).
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.

13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **20 pontos**

Identificar a função objetivo $\left(L(x, y) = 700x + 900y\right)$ .... 1 ponto

Identificar as restrições $30x + 20y \leq 300$ e $5x + 10y \leq 110$ .... (2 × 2) .... 4 pontos

Identificar as restrições $x \geq 0$ e $y \geq 0$ .... 1 ponto

Representar graficamente a região admissível .... 6 pontos

Representar graficamente as retas de equações $30x + 20y = 300$ e $5x + 10y = 110$ ....(2 × 2)............................ 4 pontos

Assinalar o polígono .... 2 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono, exceto a origem $\left((10, 0),\ (4, 9)\right.$ e $\left.(0, 11)\right)$ ....(3 × 1).................................. 3 pontos

Calcular o lucro correspondente a cada um dos vértices do polígono, exceto a origem (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero – **ver nota**) ....(3 × 1)... 3 pontos

Apresentar os valores pedidos
(4 aparadores do modelo A e 9 aparadores do modelo B) .... 2 pontos

Nota – No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

2. .... **16 pontos**

Identificar as listas introduzidas na calculadora .... 1 ponto

Apresentar os parâmetros da reta de regressão linear
$(9{,}8$ e $-163{,}8)$ .... (4 + 4) .... 8 pontos

Identificar x com 35 .... 4 pontos

Obter o valor pedido $(179$ gelados$)$ .... 3 pontos

3.1. .... **20 pontos**

Reconhecer que o problema se traduz por $h(t) = h(0)$ .... 2 pontos

Obter $h(0)$ $(3{,}262...)$ .... 4 pontos

Representar graficamente a função h num intervalo relevante para a resolução do problema (**ver nota**) .... 6 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = h(0)$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção relevante dos gráficos .... 2 pontos

Obter a abcissa desse ponto .... 2 pontos

Obter o valor pedido $(2\text{ h}\ \ 17\text{ min})$ .... 2 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto.

3.2. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Referir que o argumento da função seno toma valores de um intervalo com amplitude superior a 2π .... 1 ponto

Escrever $-1 \leq \text{sen}\,(0{,}5t+1) \leq 1$ .... 5 pontos

Escrever $-1{,}5 \leq 1{,}5\,\text{sen}\,(0{,}5t+1) \leq 1{,}5$ .... 4 pontos

Escrever $2-1{,}5 \leq 2+1{,}5\,\text{sen}\,(0{,}5t+1) \leq 2+1{,}5$ .... 2 pontos

Escrever $0{,}5 \leq 2+1{,}5\,\text{sen}\,(0{,}5t+1) \leq 3{,}5$ .... 2 pontos

Apresentar os valores pedidos $(0{,}5\text{ m}$ e $3{,}5\text{ m})$ .... (1 + 1) .... 2 pontos

2.º Processo

Representar graficamente a função h (**ver nota**) .... 6 pontos

Considerar um intervalo, contido no domínio, relevante para a resolução do problema .... 3 pontos

Respeitar a forma do gráfico .... 3 pontos

Assinalar um ponto do gráfico cuja ordenada seja o valor máximo absoluto da função h .... 3 pontos

Obter esse valor máximo $(3{,}5 \text{ m})$ .... 2 pontos

Assinalar um ponto do gráfico cuja ordenada seja o valor mínimo absoluto da função h .... 3 pontos

Obter esse valor mínimo $(0{,}5 \text{ m})$ .... 2 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

4.1. .... **16 pontos**

Obter uma expressão para a medida da outra dimensão da tela, em função de x ($10 - x$, ou equivalente) .... 8 pontos

Escrever uma expressão da área da tela, em função de x $((10 - x)x)$ .... 6 pontos

Obter $10x - x^2$ .... 2 pontos

4.2. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que o problema se traduz pela condição $A(x) \geq 16$ (ou equivalente) (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Representar graficamente a função A (**ver nota 2**) .... 4 pontos

Respeitar o domínio .... 2 pontos

Respeitar a forma do gráfico .... 2 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 16$ (**ver nota 2**) .... 2 pontos

Assinalar os pontos de intersecção dos gráficos .... (1 + 1) .... 2 pontos

Obter as abcissas desses pontos $(2$ e $8)$ ....(2 + 2)..................... 4 pontos

Apresentar o intervalo pedido $([2, 8])$ (**ver nota 3**) .... 2 pontos

2.º Processo

Reconhecer que o problema se traduz pela condição $A(x) \geq 16$ (ou equivalente) (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Escrever $-x^2 + 10x - 16 = 0$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter as soluções da equação $(2$ e $8)$ .... (3 + 3) .... 6 pontos

Reconhecer que a concavidade da parábola definida por $y = -x^2 + 10x - 16$ é voltada para baixo .... 2 pontos

Apresentar o intervalo pedido $([2, 8])$ (**ver nota 3**) .... 2 pontos

Notas:

1. Se o problema for traduzido por $A(x) > 16$, $A(x) = 16$, $A(x) \leq 16$ ou $A(x) < 16$, a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.
2. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto.
3. Se for apresentado $2 \leq x \leq 8$, a pontuação a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

5.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar 20 com $\mu + \sigma$ .... 3 pontos

Reconhecer que $P(14{,}8 < X < 20) \approx 0{,}6827$ (sendo X a variável aleatória «tempo, em minutos, que um atleta demora a concluir o percurso da prova» ... 2 pontos

Calcular $P(X > 20)$ $(0{,}15865)$ .... 6 pontos

Obter o valor pedido $(13$ ou $14)$ .... 5 pontos

2.º Processo

Determinar, com o auxílio da calculadora, um valor aproximado de $P(X > 20)$ $(0{,}158655...)$ .... 11 pontos

Obter o valor pedido $(13$ ou $14)$ .... 5 pontos

5.2. .... **16 pontos**

Tópicos de resposta

- Justifica que o gráfico da Figura 2 não pode ser o gráfico da função g

  Exemplos de resposta:

  «O gráfico da Figura 2 não pode ser o gráfico da função g, porque representa uma função que tem imagens negativas, o que significaria que a distância era negativa.»

  «O gráfico da Figura 2 não pode ser o gráfico da função g, porque a imagem de 0 é negativa, o que significaria que a distância do João ao ponto de partida no início da sua prova seria negativa.»

- Justifica que o gráfico da Figura 2 não pode ser o gráfico da função h

  Exemplo de resposta:

  «O gráfico da Figura 2 não pode ser o gráfico da função h, porque representa uma função que muda de sinal negativo para sinal positivo, o que significaria que, na primeira parte da volta, a distância estava a diminuir e, na segunda parte, estava a aumentar.»

Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
4	Apresenta, de forma completa, as duas justificações solicitadas.	16
3	Apresenta, de forma completa, uma das justificações solicitadas e, de forma incompleta, a outra justificação.	12
2	Apresenta, de forma completa, apenas uma das justificações solicitadas. OU Apresenta, de forma incompleta, as duas justificações solicitadas.	8
1	Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das justificações solicitadas.	4

6.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Reconhecer que os comprimentos dos segmentos de reta da linha poligonal posicionados na horizontal são termos consecutivos de uma progressão aritmética .... 2 pontos

Reconhecer que o primeiro termo é 8 e que a razão é 6 ....(2 + 4).......... 6 pontos

Escrever uma expressão do termo geral da progressão
$(8+(n-1)\times 6$, ou equivalente) .... 2 pontos

Substituir n por 13 .... 2 pontos

Obter o valor pedido $(80\ \text{cm})$ .... 4 pontos

2.º Processo

Reconhecer que os comprimentos dos segmentos de reta da linha poligonal são termos consecutivos de uma progressão aritmética .... 2 pontos

Reconhecer que o primeiro termo é 5 e que a razão é 3 ....(1 + 1).......... 2 pontos

Escrever uma expressão do termo geral da progressão
$(5+(n-1)\times 3$, ou equivalente) .... 2 pontos

Substituir n por 26 .... 6 pontos

Obter o valor pedido $(80\ \text{cm})$ .... 4 pontos

3.º Processo

Reconhecer que a diferença entre os comprimentos de dois segmentos de reta consecutivos posicionados na horizontal é 6 .... 6 pontos

Obter os comprimentos dos segmentos de reta posicionados na horizontal, do 2.º ao 13.º .... 9 pontos

Apresentar o valor pedido (80 cm) .... 1 ponto

6.2. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que os comprimentos dos segmentos de reta da linha poligonal são termos consecutivos de uma progressão aritmética .... 2 pontos

Reconhecer que o primeiro termo é 5 e que a razão é 3 ....(1 + 1).......... 2 pontos

Escrever uma expressão do termo geral da progressão $(5+(n-1)\times 3$, ou equivalente) .... 2 pontos

Escrever uma expressão da soma dos n primeiros termos da progressão $\left(\frac{5+5+(n-1)\times 3}{2}\times n\right.$, ou equivalente$\left.\right)$ .... 3 pontos

Igualar a expressão obtida a 1550 .... 2 pontos

Resolver a equação .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido (31) .... 1 ponto

2.º Processo

Obter os comprimentos dos 28 segmentos de reta, do 4.º ao 31.º $(14, \ldots, 95)$ .... 10 pontos

Escrever $5+8+11+14+\ldots+95=1550$ .... 5 pontos

Apresentar o valor pedido (31) .... 1 ponto

7.1. .... **16 pontos**

Escrever uma expressão da área pedida $(\pi R^2 - \pi r^2$, ou equivalente$)$ .... 3 pontos

Obter $\pi(R^2 - r^2)$ .... 2 pontos

Considerar o triângulo $[OTC]$, retângulo em T, sendo C o centro das duas circunferências .... 2 pontos

Aplicar o teorema de Pitágoras a esse triângulo $(R^2 = r^2 + 12^2)$ .... 3 pontos

Obter $R^2 - r^2 = 144$ .... 2 pontos

Concluir que $\pi(R^2 - r^2) = \pi \times 144$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (452 m^2) .... 2 pontos

7.2. .... **16 pontos**

Reconhecer que o triângulo $[OPQ]$ é retângulo em O .... 4 pontos

Calcular $\overline{OQ}$ .... 6 pontos

Escrever $\overline{OQ}^2 = (\sqrt{50})^2 + (\sqrt{50})^2$ .... 4 pontos

Obter $\overline{OQ} = 10$ .... 2 pontos

Escrever uma expressão da área do triângulo $[OPQ]$ $\left(\frac{24 \times 10}{2}\right.$, ou equivalente$\left.\right)$ .... 4 pontos

Obter o valor pedido (120 m^2) .... 2 pontos

8.1. .... **16 pontos**

Converter 3 horas e 45 minutos em horas $(3{,}75)$ .... 1 ponto

Equacionar o problema $\left(S(t+3{,}75) = 2\,S(t)\right.$, ou equivalente$\left.\right)$ .... 5 pontos

Representar graficamente a função definida por $y = S(t+3{,}75)$ (**ver nota**) . 3 pontos

Representar graficamente a função definida por $y = 2\,S(t)$ (**ver nota**) .... 3 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(0{,}75)$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido (45 min) .... 1 ponto

Nota – Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto.

8.2. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Obter o valor máximo da função S $(146{,}313\ldots)$ .... 5 pontos

Escrever $\pi r^2 = 146{,}313...$ .... 5 pontos

Obter o valor de r $(6{,}824...)$ .... 2 pontos

Concluir que a mancha não atingiu a costa .... 4 pontos

2.º Processo

Obter a área de um círculo com 7 km de raio .... 5 pontos

Representar graficamente a função S (**ver notas 1 e 2**) .... 3 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = k$, sendo k a área do círculo (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Reconhecer que os gráficos não se intersectam .... 2 pontos

Concluir que a mancha não atingiu a costa .... 4 pontos

Notas:

1. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto.
2. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

3.º Processo

Referir que a função S é crescente ou representar graficamente a função S .. 3 pontos

Obter $S(24)$ .... 4 pontos

Obter a área de um círculo com 7 km de raio .... 5 pontos

Concluir que a mancha não atingiu a costa .... 4 pontos

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.2.**	**5.1.**	**6.1.**	**7.1.**	**8.1.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	20	16	20	16	16	16	16	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**4.1.**	**5.2.**	**6.2.**	**7.2.**	**8.2.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. Uma empresa do sector da alimentação decidiu produzir dois suplementos alimentares, I e II, ambos feitos à base de maçã, amendoim e chocolate.

Cada embalagem do suplemento I tem o custo de $2{,}00\ €$ e contém $0{,}4\ \mathrm{kg}$ de maçã, $0{,}5\ \mathrm{kg}$ de amendoim e $0{,}6\ \mathrm{kg}$ de chocolate.

Cada embalagem do suplemento II tem o custo de $1{,}50\ €$ e contém $0{,}6\ \mathrm{kg}$ de maçã, $0{,}5\ \mathrm{kg}$ de amendoim e $0{,}4\ \mathrm{kg}$ de chocolate.

Para otimizar a produção, a empresa tem de gastar, diariamente, pelo menos, $140\ \mathrm{kg}$ de maçã, pelo menos, $150\ \mathrm{kg}$ de amendoim e, pelo menos, $140\ \mathrm{kg}$ de chocolate.

A empresa não consegue produzir mais do que 350 embalagens por dia.

Quantas embalagens do suplemento I e quantas embalagens do suplemento II devem ser produzidas, diariamente, pela empresa, para que o custo total diário da produção dos dois suplementos seja mínimo?

Na sua resposta, designe por x o número de embalagens do suplemento I e por y o número de embalagens do suplemento II a produzir, diariamente, pela empresa, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. A tabela seguinte é referente ao número de maçãs e ao peso* médio, em gramas, das maçãs produzidas por algumas das macieiras de um pomar, na colheita do ano de 2022.

Considere adequado o modelo de regressão linear de y sobre x obtido a partir dos dados apresentados na tabela.

Uma outra macieira do pomar produziu 160 maçãs na colheita do ano de 2022.

Estime, com base no modelo proposto, o peso médio dessas maçãs.

Na sua resposta, apresente:

– os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x, arredondados às milésimas;

– o valor pedido em gramas, arredondado às décimas.

Número de maçãs por macieira (x)	**Peso médio, em gramas, das maçãs** (y)
318	163,87
661	94,72
530	106,58
214	166,75
360	148,08
114	212,06
632	134,91
483	115,02
93	226,40
470	139,72

* Na sua aceção corrente, a palavra «peso» é utilizada como sinónimo de massa.

3. Na aldeia do Sr. Silva, para se conservar as maçãs colhidas nos pomares, é costume guardá-las num local escuro, dispostas sobre uma superfície seca e plana.

As maçãs são dispostas em filas, mas sem ficarem em contacto umas com as outras, pois, caso ficassem em contacto, se uma das maçãs apodrecesse, as maçãs sadias em contacto com a maçã apodrecida também começariam a apodrecer.

O neto do Sr. Silva, que não conhecia bem o método usado pelo avô, dispôs as maçãs em filas, mas deixou-as em contacto umas com as outras, como se ilustra na Figura 1.

Figura 1

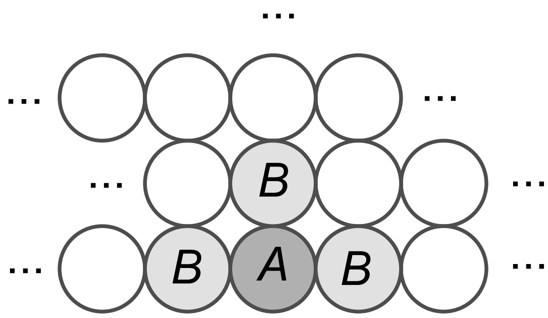


Figura 2

Uma dessas maçãs, identificada por *A* na Figura 2, apodreceu num certo dia.

No dia seguinte, apodreceram as três maçãs identificadas por *B* na Figura 2, que estavam em contacto com essa maçã. Em cada um dos dias seguintes, apodreceram todas as maçãs sadias que estavam em contacto com, pelo menos, uma maçã que tivesse apodrecido no dia anterior.

Admita que não há outro modo de as maçãs colhidas apodrecerem.

Tal como a Figura 2 sugere, as maçãs apodrecidas dispõem-se em forma triangular. Esta expansão triangular manteve-se durante 12 dias consecutivos.

* **3.1.** Justifique que os números de maçãs que apodrecem, por dia, desde o primeiro até ao décimo segundo, são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Na sua resposta, indique a razão dessa progressão.

3.2. Do primeiro ao décimo segundo dia, apodreceram 80% das maçãs colhidas.

Quantas maçãs foram colhidas?

Justifique a sua resposta.

4. Numa unidade industrial de armazenamento de fruta, as maçãs são sujeitas a um banho de arrefecimento antes de serem armazenadas.

Admita que a temperatura, T, em graus Celsius, das maçãs, x minutos após o início do banho de arrefecimento, é dada por

$$T(x) = -3 + (T_0 + 3)e^{-0{,}0432365x} \text{ , com } x \geq 0 \text{ ,}$$

em que T_0 é a temperatura, em graus Celsius, das maçãs no início do banho.

Para serem armazenadas, as maçãs devem estar a uma temperatura inferior a $7\ ^{\circ}\mathrm{C}$.

* **4.1.** Num certo dia, as maçãs estavam à temperatura de $25\ ^{\circ}\mathrm{C}$ quando se iniciou o banho de arrefecimento.

As maçãs estariam nas condições de armazenamento descritas 27 minutos após o início desse banho? Justifique a sua resposta.

4.2. Num outro dia, as maçãs estavam à temperatura de $33\ ^{\circ}\mathrm{C}$ quando se iniciou o banho de arrefecimento.

* **4.2.1.** Determine a duração mínima do banho de arrefecimento, para que as maçãs pudessem ser armazenadas.

Apresente o resultado em minutos, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, sempre que proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4.2.2. Seja V a função que dá a taxa de variação instantânea da função T, para cada valor de x.

Interprete, no contexto descrito, o significado de $V(16) \approx -0{,}78$.

* **5.** O bravo-de-esmolfe é uma variedade portuguesa de maçã, com origem na aldeia de Esmolfe, situada no concelho de Penalva do Castelo.

Numa colheita, foram apanhadas $50\,000$ maçãs bravo-de-esmolfe.

Dessa colheita, serão comercializadas apenas as maçãs com calibre superior a $55\ \mathrm{mm}$.

Admita que o calibre, em milímetros, das maçãs colhidas segue, aproximadamente, uma distribuição normal de valor médio $60\ \mathrm{mm}$ e desvio padrão $5\ \mathrm{mm}$.

Determine quantas maçãs dessa colheita se espera comercializar.

Apresente o resultado em milhares, arredondado às unidades de milhar.

Em cálculos intermédios, sempre que proceder a arredondamentos, conserve quatro casas decimais.

6. Admita que o número de horas de sol, S, em Penalva do Castelo, no dia de ordem x do ano de 2022 é dado por

$$S(x) = 12{,}1237 + 2{,}8720 \operatorname{sen}\left(0{,}0168x - 1{,}3255\right), \quad \text{para } x \in \{1, 2, \ldots, 365\}$$

O argumento da função seno está em radianos.

No dia 1 de janeiro de 2022, em Penalva do Castelo, o sol nasceu às $7\mathrm{h}\ 56\mathrm{min}$. Nesse dia, o Sr. Silva esteve no pomar desde as 15 horas até ao pôr do sol.

Quanto tempo esteve o Sr. Silva no pomar?

Apresente o resultado em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

7. O preço por quilograma de maçãs pode variar em função do seu peso* médio.

Admita que o valor a pagar, P, em euros, por quilograma de uma variedade de maçãs, em função do peso médio das maçãs, x, em gramas, é dado, aproximadamente, por

$$P(x) = 1{,}059 \ln(x) - 3{,}2553 \quad , \quad \text{com} \quad 40 \leq x \leq 270$$

A avó Maria comprou cinco maçãs, com os pesos que se seguem, em **gramas**:

$$181 \text{ g} ; \; 185 \text{ g} ; \; 188 \text{ g} ; \; 190 \text{ g} ; \; 192 \text{ g} .$$

Determine, de acordo com o modelo apresentado, o preço por quilograma das maçãs que a avó Maria comprou.

Apresente o valor pedido em euros, arredondado às centésimas.

Em cálculos intermédios, sempre que proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

* Na sua aceção corrente, a palavra «peso» é utilizada como sinónimo de massa.

* **8.** No pomar do Sr. Silva, existe um depósito cilíndrico com $2{,}5$ m de altura, assente por uma das bases, como se ilustra na Figura 3.

O depósito encontrava-se vazio, e o seu enchimento, que demorou 6 horas, foi feito a partir de uma torneira com caudal constante.

Seja h a função que dá a altura, em metros, de água no depósito, t horas após o início do seu enchimento, até ao instante em que o depósito ficou cheio.

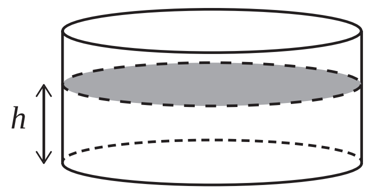


Figura 3

Na Figura 4, estão representados os gráficos A e B de duas funções.

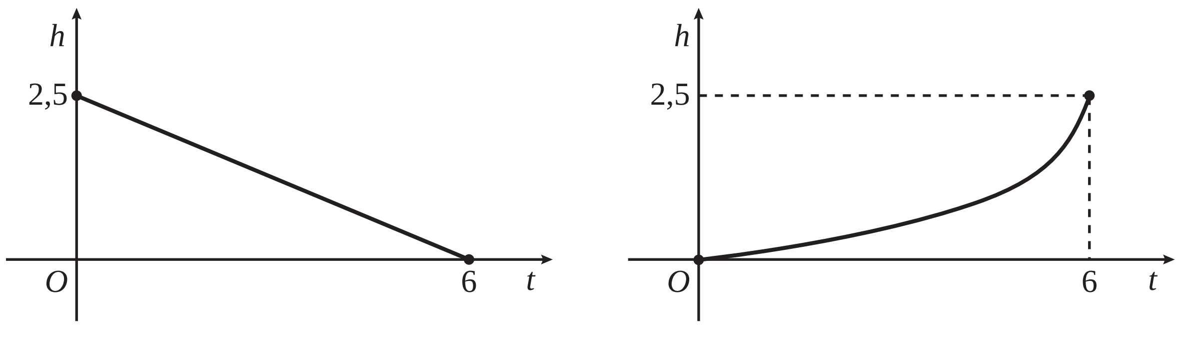


Figura 4

Considere a afirmação:

«Nem o gráfico A nem o gráfico B podem representar a função h.»

Justifique que a afirmação anterior é verdadeira, apresentando uma razão para cada um dos gráficos.

9. A Figura 5 é uma fotografia de uma forma, com formato de tronco de cone, que a avó Maria usa para fazer o seu bolo de maçã.

Figura 5

No esquema da Figura 6, o tronco de cone, representado a sombreado, foi obtido a partir do cone circular reto de vértice V e base de diâmetro $[AB]$, por um corte paralelo a esta base.

Neste esquema, que não está à escala:

- o tronco de cone representa a forma e tem 10 cm de altura;
- $[AB]$ representa um diâmetro da circunferência que delimita o bordo da forma e mede 22 cm;
- $[CD]$ representa um diâmetro da base da forma;
- o cone de vértice V e base de diâmetro $[CD]$ tem 45 cm de altura.

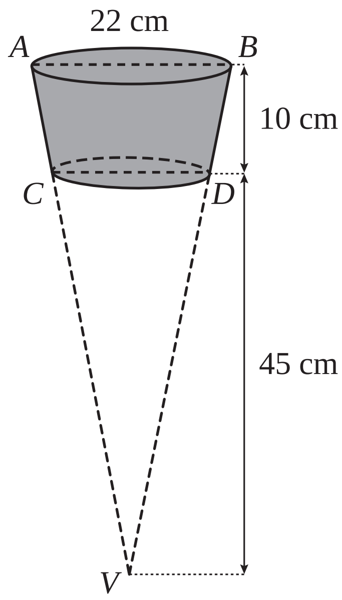


Figura 6

9.1. Determine a capacidade da forma.

Apresente o resultado em litros, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

9.2. No cone de vértice V e base de diâmetro $[AB]$, esquematizado na Figura 6, fixou-se um referencial ortogonal e monométrico, $Oxyz$, como se representa na Figura 7. No referencial, a unidade é o centímetro.

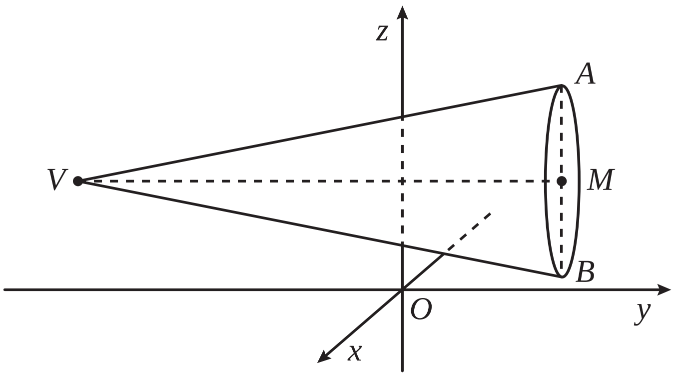


Figura 7

Nesta figura:

- $[MV]$ representa a altura do cone, e as coordenadas dos seus pontos são do tipo $(5, y, 4)$;
- o ponto M tem ordenada igual a 21.

Determine as coordenadas do ponto V.

*** 10.** Há formigas que, tendo saído do seu formigueiro, têm a perceção da distância horizontal a que estão do formigueiro, mesmo que no exterior tenham executado percursos complexos com subidas e descidas.

Uma formiga sobe por uma maçã, a partir do solo. Admita que a maçã é uma esfera, que a formiga é um ponto e que o percurso da formiga na superfície esférica é um arco de um círculo máximo da esfera, contido num plano vertical que passa pela entrada do formigueiro.

A situação está representada na Figura 8, que não está à escala.

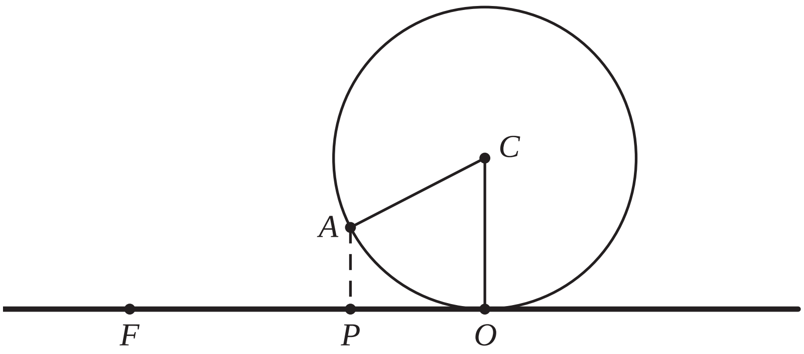


Figura 8

Nesta figura:

- a reta FO representa o solo, horizontal, sendo F a entrada do formigueiro e O o ponto de tangência da maçã com o solo, com $\overline{FO} = 40\text{ cm}$;
- a circunferência, de centro C, que passa em O e tem diâmetro $7{,}2\text{ cm}$, representa o círculo máximo;
- o ponto A, pertencente à circunferência, representa a posição da formiga depois de percorrer a distância de $3{,}77\text{ cm}$, correspondente ao comprimento do arco OA ;
- o ponto P é a projeção ortogonal de A sobre FO.

Determine a distância horizontal, $\overline{FP}$, a que a formiga está do formigueiro.

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, sempre que proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.1.**	**4.1.**	**4.2.1.**	**5.**	**8.**	**9.1.**	**10.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	20	16	16	16	16	16	20	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**3.2.**	**4.2.2.**	**6.**	**7.**	**9.2.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**

Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 28 DE JUNHO 2023

1. Seja x o número de embalagens de suplemento I e y o número de embalagens de suplemento II.

A função objetivo, que se pretende minimizar, é $C(x, y) = 2x + 1{,}5y$.

Quanto às restrições, a condição relativa à quantidade de maçã é $0,4x + 0,6y \geq 140$; relativamente à quantidade de amendoim é $0,5x + 0,5y \geq 150$ e à quantidade de chocolate é $0,6x + 0,4y \geq 140$.

Quanto ao total de caixas temos que $x + y \leq 350$

Tendo em conta as restrições óbvias $x \geq 0 \; e \; y \geq 0$ e as mencionadas anteriormente, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y \geq 140 \\ 0,5x + 0,5y \geq 150 \\ 0,6x + 0,4y \geq 140 \\ x + y \leq 350 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\dfrac{2x}{3} + \dfrac{700}{3} \\ y \geq -x + 300 \\ y \geq -1,5x + 350 \\ y \leq -x + 350 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Desta forma, a representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições é a representada em baixo, em que A, B, C e D são os seus vértices.

Calculando o valor da função objetivo nos vértices da região admissível assinalados pelas suas coordenadas, averiguamos a solução ótima:

$$C(0,350) = 2\times 0 + 1,5\times 350 = 525$$

$$C(100,200) = 2\times 100 + 1,5\times 200 = 500$$

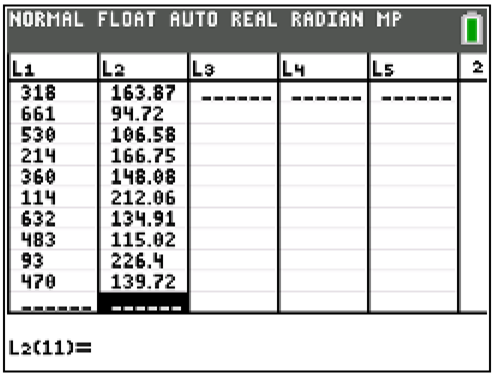
$$C(200,100) = 2\times 200 + 1,5\times 100 = 550$$

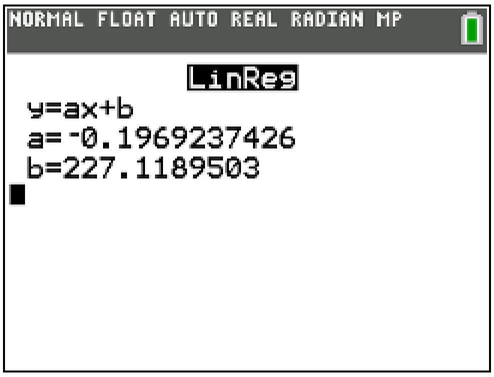
$$C(350,0) = 2\times 350 + 1,5\times 0 = 700$$

Desta forma, concluímos que o custo mínimo é 500 euros, obtido no ponto *B*.

Resposta: para a empresa ter o custo total mínimo deve produzir 100 embalagens de suplemento I e 200 embalagens de suplemento II.

2. Utilizando as capacidades da calculadora editamos duas listas, digamos L1 referente à variável x, número de maçãs, e L2 referente à variável y, peso médio das maçãs, com vista à obtenção dos parâmetros da reta de regressão linear da forma $y = ax + b$.





Temos assim que a reta de regressão linear, que modela os dados apresentados, tem de equação $y = -0{,}197x + 227{,}119$

Fazendo, neste modelo, $x = 160$, obtemos $y = -0{,}197 \times 160 + 227{,}119 = 195{,}599$

Resposta: É de esperar que o peso médio das maçãs seja de 195,6 gramas.

3.

3.1. De acordo com o padrão de apodrecimento das maçãs apresentado, o número de maçãs que apodrecem em cada dia segue a sequência $1, 3, 5, 7, \ldots$ correspondente à sucessão dos números ímpares, até ao 12º termo. Ora, nesta sucessão, a diferença entre cada termo e o anterior é sempre constante e igual a 2, pelo que o número de maçãs que apodrecem está em progressão aritmética de razão 2.

3.2. Pelas razões apresentadas em 3.1. o termo geral da sequência é $2n-1$, pelo que o seu 12º termo é:

$2 \times 12 - 1 = 23$.

O número total de maçãs que apodrecem é dado por: $\frac{1+23}{2} \times 12 = 12 \times 12 = 144$

Se 144 maças correspondem a 80% das maçãs colhidas, então temos que o total (100%) obedece à relação:

$$\frac{144}{80} = \frac{T}{100} \Leftrightarrow T = \frac{144 \times 100}{80} = 180$$

Resposta: Foram colhidas 180 maçãs.

4.

4.1. Estando as maçãs à temperatura de 25ºC , temos que fazer, no modelo apresentado, $T_0 = 25$.

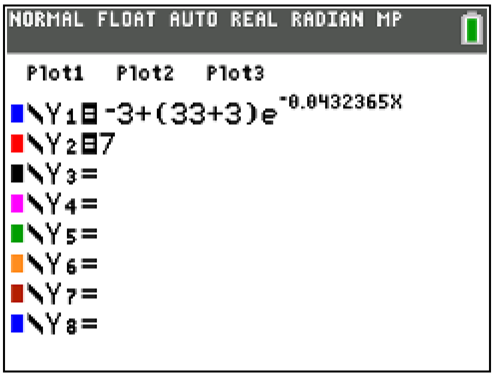
A temperatura após 27 minutos de se iniciar o banho é dada por:

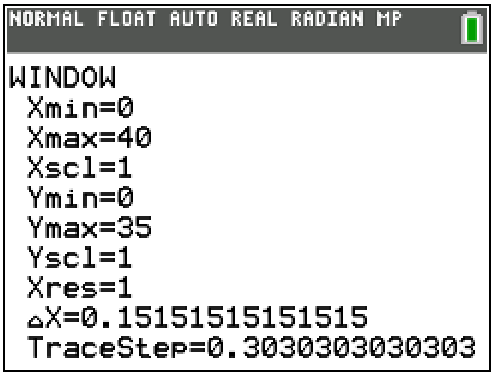
$$T(27) = -3 + (25+3)e^{-0{,}0432365\times 27} = -3 + 28e^{-1{,}1673855} \approx 5{,}713$$

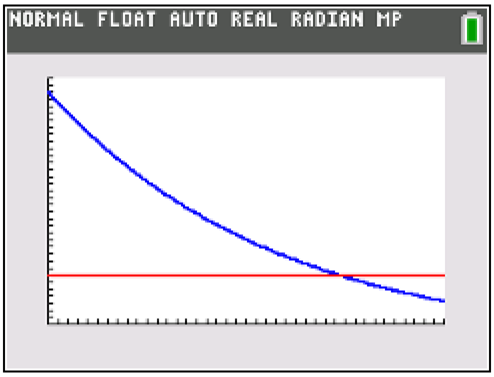
Resposta: Como $5{,}713 < 7$, as maças estão em condições de ser armazenadas.

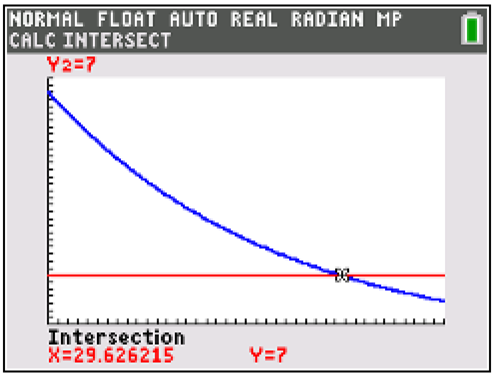
4.2.1. Neste caso temos que $T_0 = 33$ e há que encontrar as soluções da inequação $T(x) < 7$

Podemos encontrar essas soluções recorrendo às capacidades da calculadora gráfica:









A curva correspondente ao gráfico da função T , que é decrescente, interseta a reta de equação $y = 7$ no ponto de abcissa $x \approx 29{,}626$.

Resposta: A duração mínima do banho de arrefecimento, nesta situação, é de 30 minutos.

4.2.2. Como V é a função que dá a taxa de variação instantânea de T, então $V(16) \approx -0,78$, significa que, estando as maçãs a uma temperatura inicial de 33ºC, no 16º minuto de banho de arrefecimento, a temperatura das maçãs está a baixar a uma taxa de, aproximadamente, 0,78ºC por minuto.

5.

Podemos resolver este item, usando a informação que consta no formulário relativamente à distribuição normal.

De $\mu = 60$ e $\sigma = 5$, resulta que $55 = \mu - \sigma$

Como, de acordo com a distribuição normal com estes parâmetros,

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}6827$$

Temos:

$$P(55 < X < 65) = 0{,}6827$$

E também temos que:

$$P(55 < X < 60) = \frac{0{,}6827}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(55 < X < 60) = 0{,}34135$$

Logo,

$$P(X > 55) = P(55 < X < 60) + P(X > 60)$$

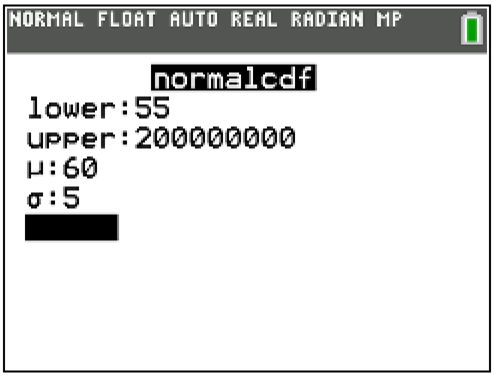
$$\Leftrightarrow P(X > 55) = 0{,}34135 + 0{,}5$$

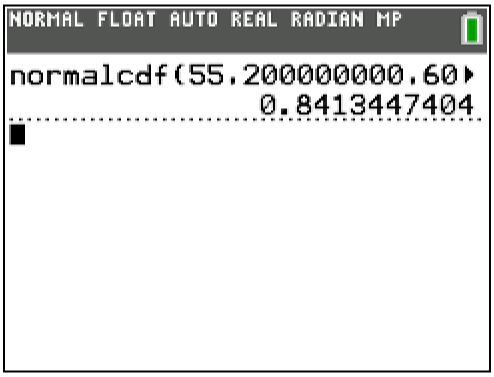
$$\Leftrightarrow P(X > 55) = 0{,}84135$$

Como foram colhidas 50000 maçãs, vem que:

$$0{,}84135 \times 50000 = 42067{,}5$$

Em alternativa, também podíamos recorrer à calculadora para obter o valor de $P(X > 55)$:





Resposta: É esperado serem comercializados 42 milhares de maçã bravo-de-esmolfe.

6.

Este item pode ser resolvido por pelo menos dois processos:

1º processo:

O número de horas sol no dia 1 de janeiro é dado por:

$$S(1) = 12{,}1237 + 2{,}8720 \sin(0{,}0168 \times 1 - 1{,}3255)$$

$$\Leftrightarrow S(1) \approx 9{,}34978$$

Determinemos os minutos de sol para além das 9 horas: $0{,}34978 \times 60 \approx 20{,}9867$

No dia 1 de janeiro houve, então, aproximadamente, 9h 21min de sol.

Como o nascer do sol se deu às 7h 56min temos, assim, $7h\ 56min + 9h\ 21min = 17h\ 17min$,

pelo que, nesse dia o pôr do sol foi às $17h\ 17min$

Ora, $17h\ 17min - 15h = 2h\ 17min$

Como o Sr. Silva esteve no pomar desde as 15 horas até ao pôr do sol, então esteve no pomar, aproximadamente, 2horas e 17 minutos.

2º processo:

O nascer do sol deu-se às 7h 56min.

Ora, $15h - 7h\ 56min = 7h\ 4min$

O Sr. Silva **não esteve** no pomar durante 7 horas e 4 minutos de sol.

Como já vimos, temos que:

$S(1) \approx 9h\ 21min$ e $9h\ 21min - 7h\ 4min = 2h\ 17min$

Resposta: O Sr. Silva esteve no pomar, aproximadamente, 2horas e 17 minutos.

7.

Comecemos por determinar o peso médio das maçãs, em gramas.

$$\bar{x} = \frac{181 + 185 + 188 + 190 + 192}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = 187{,}2$$

Basta agora determinar, no modelo apresentado, o valor de $P(187{,}2)$:

$$P(187{,}2) = 1{,}059 \ln(187{,}2) - 3{,}2553$$

$$\Leftrightarrow P(187{,}2) \approx 2{,}28558$$

Resposta: O preço por quilograma das maçãs que a avó Maria comprou foi de aproximadamente 2,29€.

8.

O gráfico A não pode representar a função h porque, no início da contagem de tempo, não havia água no depósito, pelo que o gráfico devia conter necessariamente a origem do referencial.
Para além disso, notemos que à medida que o depósito vai enchendo a altura da água vai subindo, pelo que a função h será uma função crescente, que não corresponde ao gráfico A.

O gráfico B não pode representar a função h porque a torneira tem um caudal constante e à medida que o depósito vai enchendo, o diâmetro da superfície da água permanece constante, pelo que a função h será uma função de proporcionalidade direta, sendo o seu gráfico parte de uma semirreta com origem na origem do referencial.

9.

9.1. A capacidade da forma do bolo, que é um tronco de cone, será dada pela diferença de volume dos dois cones representados esquematicamente na figura 6. A capacidade é pedida em litros.
Como $1l = 1dm^3$, vamos já utilizar as medidas em dm.

As dimensões do cone de diâmetro $[AB]$ são:

- Raio = $1{,}1dm$
- Altura = $5{,}5dm$

Os dois cones, de diâmetro $[AB]$ e de diâmetro $[CD]$, são semelhantes, pelo que se verifica que:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{4{,}5}{5{,}5} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{2{,}2 \times 4{,}5}{5{,}5} \Leftrightarrow \overline{CD} = 1{,}8$$

As dimensões do cone de diâmetro $[CD]$ são, então:

- Raio $= 0{,}9dm$
- Altura $= 4{,}5dm$

Volume do cone de diâmetro $[AB]$:

$$V_1 = \frac{1{,}1^2 \times \pi}{3} \times 5{,}5 \Leftrightarrow V_1 \approx 6{,}9691$$

Volume do cone de diâmetro $[CD]$:

$$V_2 = \frac{0{,}9^2 \times \pi}{3} \times 4{,}5 \Leftrightarrow V_2 \approx 3{,}81704$$

O volume do tronco de cone corresponde à diferença dos dois volumes que acabamos de determinar:
$V_T = V_1 - V_2 \approx 6{,}9691 - 3{,}81704 \approx 3{,}15206$ dm^3

Resposta: A forma tem uma capacidade de, aproximadamente, 3 litros.

9.2. As coordenadas dos pontos V e M, são do tipo $(5, y, 4)$.

Como $y_M = 21$, as coordenadas do ponto M, são $(5, 21, 4)$.

Notemos que o comprimento $\overline{VM} = 55$ porque corresponde à altura, em cm, do cone de diâmetro $[AB]$.

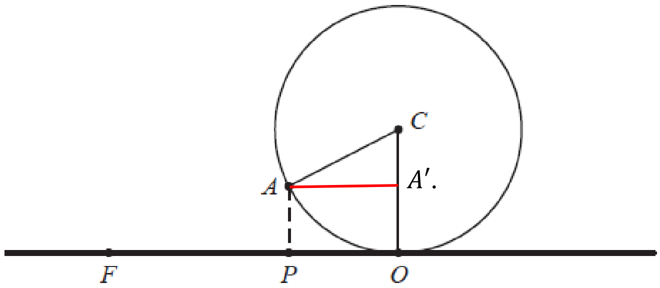
Assim, temos de ter:

$$y_M - y_V = 55$$
$$\Leftrightarrow 21 - 55 = y_V$$
$$\Leftrightarrow -34 = y_V$$

Resposta: As coordenadas do ponto V, são $(5, -34, 4)$.

10.

A distância $\overline{FP}$ é dada pela diferença entre $\overline{FO}$ e $\overline{PO}$. Temos que $\overline{PO} = \overline{AA'}$ sendo que o triângulo $[ACA']$ é retângulo em A'.



Comecemos por determinar o ângulo $\alpha = A\hat{C}O$ que é o ângulo ao centro correspondente ao arco AO que mede 3,77 cm.

O raio da circunferência é $\overline{AC} = \frac{7{,}2}{2} = 3{,}6$

Temos então, em radianos, que:

$$3{,}77 = \alpha \times 3{,}6 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3{,}77}{3{,}6}$$
$$\Leftrightarrow \alpha \approx 1{,}03\, rad$$

Sendo assim, vem: $\sin \alpha = \frac{\overline{AA\prime}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AA'} = \overline{AC} \times \sin \alpha$

$$\overline{AA'} = 3{,}6 \times \sin 1{,}03 \approx 3{,}09$$

Concluímos então que $\overline{OP} \approx 3{,}09$

Logo $\overline{FP} = \overline{FO} - \overline{PO} = 40 - 3{,}09 \approx 37$

Resposta: A formiga encontra-se a 37 cm do formigueiro.

FIM

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Critérios de Classificação

10 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Organização e linguagem científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização, nomeadamente, a representação, em referencial cartesiano, do(s) gráfico(s) visualizado(s).

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista (ver nota).
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.

13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **20 pontos**

Identificar a função objetivo $\left(C(x,\,y)=2x+1{,}5y\right)$ .... 1 ponto

Identificar as restrições $0{,}4x+0{,}6y\geq 140$, $0{,}5x+0{,}5y\geq 150$, $0{,}6x+0{,}4y\geq 140$ e $x+y\leq 350$ ....(4 × 1) .... 4 pontos

Identificar as restrições $x\geq 0$ e $y\geq 0$ .... 1 ponto

Representar graficamente a região admissível .... 5 pontos

- Representar graficamente as retas de equações $0{,}4x+0{,}6y=140$, $0{,}5x+0{,}5y=150$, $0{,}6x+0{,}4y=140$ e $x+y=350$ .... (4 × 1) .... 4 pontos
- Assinalar o polígono .... 1 ponto

Obter as coordenadas dos vértices do polígono $((350,\,0),(200,\,100),(100,\,200)$ e $(0,\,350))$ ....(4 × 1)............................ 4 pontos

Calcular o custo correspondente a cada um dos vértices do polígono (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero – **ver nota**) .... (4 × 1) .... 4 pontos

Apresentar os valores pedidos $(100$ embalagens do suplemento I e 200 embalagens do suplemento $\mathrm{II})$.. 1 ponto

Nota – No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. .... **16 pontos**

Identificar as listas introduzidas na calculadora .... 1 ponto

Apresentar os parâmetros da equação da reta de regressão linear $(-0{,}197$ e $227{,}119)$ ....(4 + 4)... 8 pontos

Identificar x com 160 .... 4 pontos

Obter o valor pedido $(195{,}6\ \mathrm{g})$ .... 3 pontos

3.1. .... **16 pontos**

Indicar a razão da progressão (2) .... 8 pontos

Referir que a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos é constante (ou equivalente) .... 8 pontos

3.2. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Obter os números de maçãs que apodreceram, por dia, do 3.º ao 12.º dia $(5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21$ e $23)$ .... 6 pontos

Obter o número de maçãs que apodreceram durante os 12 dias (144) .... 6 pontos

Obter o valor pedido $(180$ maçãs$)$ .... 4 pontos

2.º Processo

Reconhecer que os números de maçãs que apodreceram, por dia, são termos consecutivos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 1 .... 1 ponto

Reconhecer que a razão dessa progressão é 2 .... 1 ponto

Escrever uma expressão que permita calcular o termo de ordem 12 .... 3 pontos

Obter o termo de ordem 12 (23) .... 1 ponto

Escrever $\frac{1+23}{2} \times 12$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter 144 .... 2 pontos

Obter o valor pedido $(180$ maçãs$)$ .... 4 pontos

4.1. .... **16 pontos**

Substituir T_0 por 25 na expressão analítica de T .... 3 pontos

Calcular $T(27)$ .... 10 pontos

Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Substituir x por 27 na expressão analítica de T .... 5 pontos

Obter $T(27)$ $(5{,}7...)$ .... 5 pontos

2.º Processo

Representar graficamente a função T (**ver nota**) .... 5 pontos

Obter $T(27)$ $(5{,}7...)$ .... 5 pontos

3.º Processo

Apresentar a linha da tabela correspondente a $x = 27$ .... 5 pontos

Obter $T(27)$ $(5{,}7...)$ .... 5 pontos

Concluir que as maçãs estão em condições de serem armazenadas .... 3 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 2 pontos. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

4.2.1. .... **16 pontos**

Traduzir o problema por uma condição $(T(x) < 7$, ou equivalente$)$ (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Substituir T_0 por 33 na expressão analítica de T .... 3 pontos

Resolver a inequação $T(x) < 7$ .... 10 pontos

Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função T (**ver notas 2 e 3**) .... 5 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y = 7$ (**ver nota 2**) .... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(29{,}6262...)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Isolar $e^{-0{,}0432365x}$ .... 3 pontos

Escrever $-0{,}0432365x < \ln\left(\frac{10}{36}\right)$ .... 4 pontos

Obter $x > 29{,}6262...$ .... 3 pontos

Apresentar o valor pedido (30 min) .... 1 ponto

Notas:

1. Se for apresentado $T(x) = 7$, $T(x) \leq 7$, $T(x) > 7$ ou $T(x) \geq 7$, a pontuação a atribuir nesta etapa não é desvalorizada.

2. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir nestes passos é desvalorizada em 2 pontos.

3. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir neste passo é desvalorizada em 1 ponto.

4.2.2. .... **16 pontos**

Identificar 16 com o instante em que decorreram 16 minutos desde o início do banho de arrefecimento das maçãs .... 4 pontos

Referir que a temperatura das maçãs estava a diminuir .... 6 pontos

Referir que $0{,}78$ corresponde a uma taxa de, aproximadamente, $0{,}78\ ^{\circ}\text{C}/\text{min}$ (**ver nota**) .... 6 pontos

Nota – Se não for referido que $0{,}78$ corresponde a um valor aproximado, a pontuação a atribuir nesta etapa não é desvalorizada.

Exemplo de resposta:

«16 minutos após o início do banho de arrefecimento, a temperatura das maçãs estava a diminuir cerca de $0{,}78\ ^{\circ}\text{C}/\text{min}$.»

5. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar 55 com $\mu - \sigma$ .... 3 pontos

Obter $P(X > 55)$ .... 7 pontos

Calcular $P(X > 55) \times 50\,000$ .... 5 pontos

Apresentar o valor pedido (42 milhares de maçãs) .... 1 ponto

2.º Processo

Determinar, com o auxílio da calculadora, um valor aproximado de $P(X > 55)$ .... 10 pontos

Calcular $P(X > 55) \times 50\,000$ .... 5 pontos

Apresentar o valor pedido (42 milhares de maçãs) .... 1 ponto

6. .... **16 pontos**

Identificar o dia 1 de janeiro com $x = 1$ .... 2 pontos

Obter $S(1)$ $(9{,}34978...)$ .... 4 pontos

Converter $7\,\mathrm{h}\ 56\,\mathrm{min}$ em horas ou converter $9{,}34978...\ \mathrm{h}$ em horas e minutos.. 2 pontos

Obter a hora do pôr do sol .... 4 pontos

Obter o valor pedido $(2\,\mathrm{h}\ 17\,\mathrm{min})$ .... 4 pontos

7. .... **16 pontos**

Calcular o peso médio das cinco maçãs $(187{,}2\ \mathrm{g})$ .... 6 pontos

Calcular $P(187{,}2)$ .... 9 pontos

Esta etapa pode ser cumprida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Substituir x por $187{,}2$ na expressão analítica de P .... 5 pontos

Obter $P(187{,}2)$ $(2{,}2855...)$ .... 4 pontos

2.º Processo

Representar graficamente a função P (**ver nota**) .... 5 pontos

Obter $P(187{,}2)$ $(2{,}2855...)$ .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido $(2{,}29\ €)$ .... 1 ponto

Nota – Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir neste passo é desvalorizada em 2 pontos. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir neste passo é desvalorizada em 1 ponto.

8. .... **20 pontos**

Tópicos de resposta

• Justificação de que a função representada no gráfico A não pode ser a função h .

Exemplos de resposta:

– «No instante inicial do enchimento, o depósito estava vazio; logo, a altura era de $0\ \mathrm{m}$. No gráfico A, a altura inicial é $2{,}5\ \mathrm{m}$, pelo que este gráfico não pode representar a função h .»

– «A função representada no gráfico A não pode ser a função h , porque a função representada é decrescente, enquanto a função h é crescente.»

• Justificação de que a função representada no gráfico B não pode ser a função h .

Exemplos de resposta:

– «A função representada no gráfico B não pode ser a função h , porque, como o enchimento é feito a partir de uma torneira com caudal constante, e o depósito é cilíndrico, o gráfico de h é parte de uma reta.»

– «A função representada no gráfico B não pode ser a função h , porque, como o enchimento é feito a partir de uma torneira com caudal constante, e o depósito é cilíndrico, a taxa de variação instantânea da função h é constante, o que não acontece com a função representada.»

<table>
<tr><th>Parâmetros</th><th>Níveis</th><th>Descritores de desempenho</th><th>Pontuação</th></tr>
<tr><td rowspan="4">A
Conteúdos</td><td>4</td><td>Apresenta, de forma completa, as duas justificações solicitadas.</td><td>16</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Apresenta, de forma completa, uma das justificações solicitadas e, de forma incompleta, a outra justificação.</td><td>12</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Apresenta, de forma completa, apenas uma das justificações solicitadas.
OU
Apresenta, de forma incompleta, as duas justificações solicitadas.</td><td>8</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das justificações solicitadas.</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">B
Organização
e linguagem
científica</td><td>2</td><td>Escreve um texto organizado e utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Escreve um texto com falhas na organização ou na utilização do vocabulário específico da Matemática.</td><td>2</td></tr>
</table>

9.1. .... **16 pontos**

Reconhecer que o volume da forma é igual à diferença entre o volume, V_1, do cone de base de diâmetro $[AB]$ e o volume, V_2, do cone de base de diâmetro $[CD]$ .... 2 pontos

Calcular V_1 .... 3 pontos

- Indicar a altura (55) .... 1 ponto
- Obter o raio da base (11) .... 1 ponto
- Obter V_1 .... 1 ponto

Calcular V_2 .... 7 pontos

- Reconhecer que, sendo E o ponto médio de $[AB]$ e F o ponto médio de $[CD]$, os triângulos $[VEB]$ e $[VFD]$ são semelhantes .... 2 pontos
- Escrever $\frac{11}{\overline{FD}} = \frac{55}{45}$ (ou equivalente)
  ou escrever $\frac{22}{\overline{CD}} = \frac{55}{45}$ (ou equivalente) .... 2 pontos
- Obter $\overline{FD}$ (9) .... 2 pontos
- Obter V_2 .... 1 ponto

Obter o volume da forma .... 1 ponto

Apresentar o valor pedido (3 litros) .... 3 pontos

9.2. .... **16 pontos**

Indicar a abcissa do ponto V (5) .... 2 pontos

Indicar a cota do ponto V (4) .... 2 pontos

Calcular a ordenada do ponto V .... 12 pontos

- Reconhecer que a ordenada do ponto M é $\overline{KM}$, sendo K o ponto de intersecção da altura do cone com o plano xOz ...... 3 pontos
- Reconhecer que a altura do cone mede 55 cm .... 1 ponto
- Calcular $55 - 21$ (34) .... 4 pontos
- Concluir que a ordenada do ponto V é -34 .... 4 pontos

10. .... **16 pontos**

Escrever uma expressão para o comprimento do arco OA .... 2 pontos

Obter o raio da circunferência $(3{,}6)$ .... 1 ponto

Igualar a expressão do comprimento do arco OA a $3{,}77$ .... 2 pontos

Obter $A\hat{C}O$ .... 2 pontos

Escrever $\operatorname{sen}(A\hat{C}O) = \dfrac{\overline{AK}}{3{,}6}$

(ou equivalente, em que $K \in [OC]$, com $\overline{AK} = \overline{PO}$) .... 3 pontos

Obter $\overline{PO}$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\overline{FP} = \overline{FO} - \overline{PO}$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido (37 cm) .... 2 pontos

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.1.**	**4.1.**	**4.2.1.**	**5.**	**8.**	**9.1.**	**10.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	20	16	16	16	16	16	20	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**3.2.**	**4.2.2.**	**6.**	**7.**	**9.2.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. Uma empresa decidiu produzir dois tipos de concentrado de frutas, ambos feitos à base de maçã, pera e romã.

Cada quilograma de concentrado do tipo I é vendido a $2{,}50$ € e contém $0{,}45\ \mathrm{kg}$ de maçã, $0{,}40\ \mathrm{kg}$ de pera e $0{,}15\ \mathrm{kg}$ de romã.

Cada quilograma de concentrado do tipo II é vendido a $3{,}00$ € e contém $0{,}40\ \mathrm{kg}$ de maçã, $0{,}25\ \mathrm{kg}$ de pera e $0{,}35\ \mathrm{kg}$ de romã.

A empresa dispõe, diariamente, de $218{,}50\ \mathrm{kg}$ de maçã, de $168{,}15\ \mathrm{kg}$ de pera e de $140{,}00\ \mathrm{kg}$ de romã.

A empresa tem garantida a venda de toda a produção diária dos dois tipos de concentrado.

Quantos quilogramas de concentrado do tipo I e quantos quilogramas de concentrado do tipo II devem ser produzidos, diariamente, pela empresa, para que o valor de vendas do total dos dois concentrados seja máximo?

Na sua resposta, designe por x o número de quilogramas de concentrado do tipo I e por y o número de quilogramas de concentrado do tipo II a produzir, diariamente, pela empresa, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. O número de dias por semana em que se tem de regar o jardim depende essencialmente das condições meteorológicas. Nos meses de verão, o Sr. Ferreira tem de regar o jardim com muita frequência.

Seja X a variável aleatória «Número de dias, numa semana de verão, em que o Sr. Ferreira rega o jardim», com $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Admita que:

$$P(X=1)=0{,}01;\ P(X=2)=0{,}02;\ P(X=3)=0{,}05;\ P(X=4)=0{,}09;$$
$$P(X=5)=0{,}41;\ P(X=6)=0{,}21;\ P(X=7)=0{,}21.$$

Considera-se, ao acaso, uma semana de verão.

Qual é a probabilidade, de acordo com a variável aleatória X, de o Sr. Ferreira não regar o jardim nessa semana?

Justifique a sua resposta.

3. O neto do Sr. Ferreira está a treinar a escrita das letras maiúsculas. Para o ajudar nessa aprendizagem, o Sr. Ferreira desenhou, numa folha, círculos iguais e tangentes, dispostos como a Figura 1 sugere.

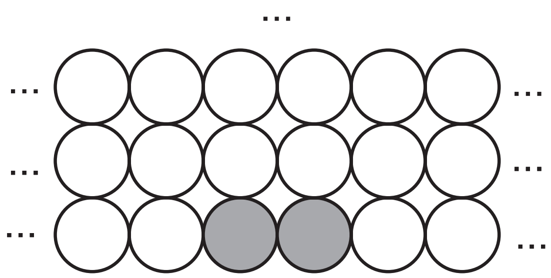


Figura 1

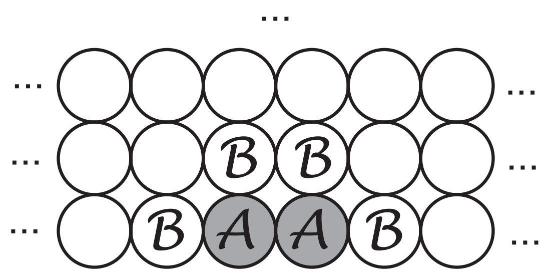


Figura 2

A atividade que o neto do Sr. Ferreira deve executar é a seguinte:

- começar por escrever a letra A nos dois círculos sombreados na Figura 1;
- de seguida, escrever a letra B em todos os círculos tangentes a algum dos dois círculos assinalados com a letra A, como se ilustra na Figura 2;
- e assim sucessivamente, seguindo o alfabeto, assinalando, para cada letra, todos os círculos tangentes a, pelo menos, um círculo que esteja assinalado com a letra anterior.

* **3.1.** Determine quantos círculos serão assinalados com a $15.^{\text{a}}$ letra do alfabeto.

3.2. Num certo momento da execução da atividade, o Sr. Ferreira verificou que o neto já tinha assinalado um total de 72 círculos.

Qual foi a letra escrita no $72.^{\text{o}}$ círculo?

Justifique a sua resposta.

4. Admita que a altura de uma árvore, h, em metros, t anos após ter sido plantada, é dada por

$$h(t) = \frac{13}{1 + 19{,}26e^{-0{,}58t}} \quad , \text{ com } t \geq 0$$

* **4.1.** Determine quantos centímetros cresceu a árvore durante o primeiro ano após ter sido plantada.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4.2. Quanto tempo decorreu entre o instante em que a árvore foi plantada e o instante em que ultrapassou os 7 metros de altura, de acordo com o modelo apresentado?

Apresente o valor pedido em anos e meses, com o número de meses arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4.3. É possível esta árvore atingir $13{,}5$ metros de altura, de acordo com o modelo apresentado?

Justifique a sua resposta.

5. O gráfico da Figura 3 foi construído a partir de dados do Instituto Nacional de Estatística (INE) e diz respeito à produção total acumulada de batata de sequeiro em Portugal continental, de 2017 a 2021, desde o início de 2017.

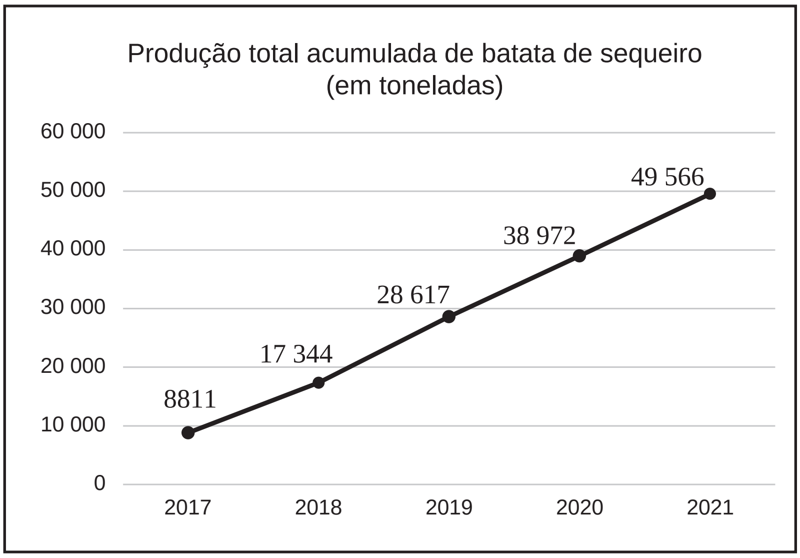


Figura 3

Para 2022, o INE previa uma redução de 15% da produção anual de batata de sequeiro relativamente à produção anual em 2021, em Portugal continental.

Determine o valor da produção anual de batata de sequeiro previsto pelo INE para 2022, em Portugal continental.

Apresente o valor pedido em milhares de toneladas, arredondado às unidades de milhar.

6. Na quinta do Sr. Ferreira, existe um depósito de água para rega. Considere que para se encher o depósito, que estava inicialmente vazio, se usou uma torneira com caudal constante.

Seja f a função que dá a altura, em metros, de água no depósito, t horas desde o instante em que se começou a encher o depósito, até ao instante em que ficou cheio, durante 6 horas.

Quando o depósito está cheio, a altura de água coincide com a altura do depósito.

Na Figura 4, está representado, em referencial ortogonal e monométrico, o gráfico da função f.

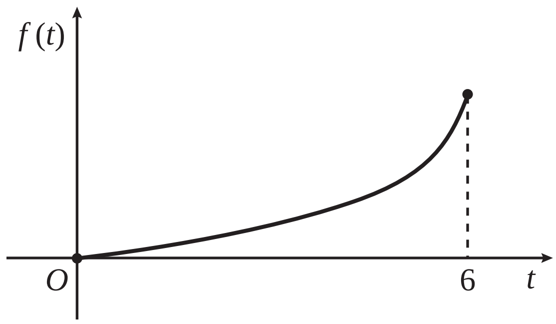


Figura 4

6.1. Em que instante a taxa de variação instantânea da função f tem maior valor:

em $t = 0{,}5$ ou em $t = 5{,}5$?

Justifique a sua resposta.

*** 6.2.** Na Figura 5, estão representados esquemas das formas de dois depósitos, na posição em que são enchidos.

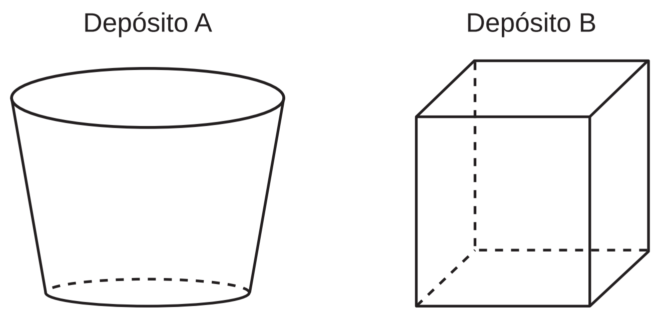


Figura 5

Justifique que nenhum desses depósitos pode ser o existente na quinta do Sr. Ferreira, apresentando uma razão para cada um dos depósitos.

7. Um biombo decorado com motivos geométricos, existente na casa da quinta do Sr. Ferreira, tem desenhadas circunferências no seu painel central, como se ilustra na Figura 6.

Na Figura 7, representa-se uma parte do painel central do biombo, que tem quatro dessas circunferências.

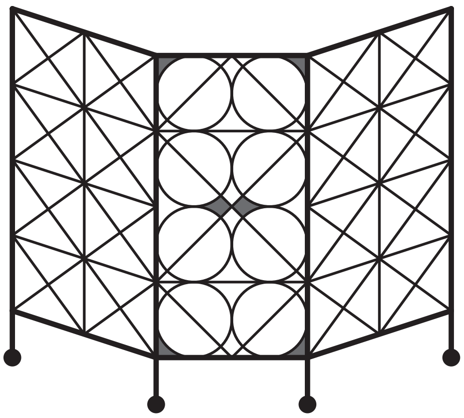


Figura 6

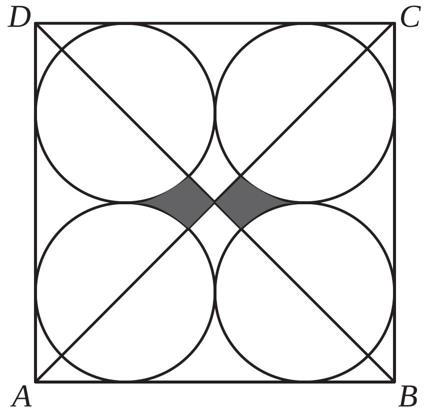


Figura 7

No esquema da Figura 7, que não está à escala, estão representados:

- um quadrado, $[ABCD]$;
- quatro circunferências geometricamente iguais, de raio igual a $10\ \mathrm{cm}$, tangentes entre si e tangentes aos lados do quadrado;
- as duas diagonais do quadrado;
- duas regiões sombreadas, na zona central do quadrado.

7.1. Determine a área total das regiões sombreadas na zona central do quadrado representado na Figura 7.

Apresente o resultado em centímetros quadrados, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

*** 7.2.** Numa circunferência geometricamente igual às da Figura 7, fixou-se um referencial ortogonal e monométrico, Oxy , como se representa na Figura 8. No referencial, a unidade é o centímetro.

Nesta figura:

- o ponto P , centro da circunferência, tem coordenadas $(30, 40)$;
- o ponto Q pertence à circunferência e à reta OP .

Determine as coordenadas do ponto Q .

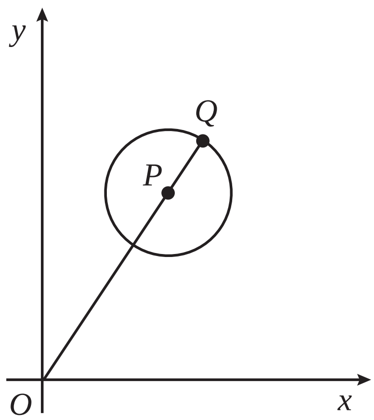


Figura 8

8. Os esquemas I e II, da Figura 9, mostram o modelo de uma das primeiras bicicletas, com as rodas assentes num solo plano e horizontal.

Com a bicicleta imobilizada, foram assinalados os pontos A e B, sendo A o ponto da roda traseira e B o ponto da roda dianteira que estão em contacto com o solo e à distância de 90 cm um do outro, como se sugere no esquema I.

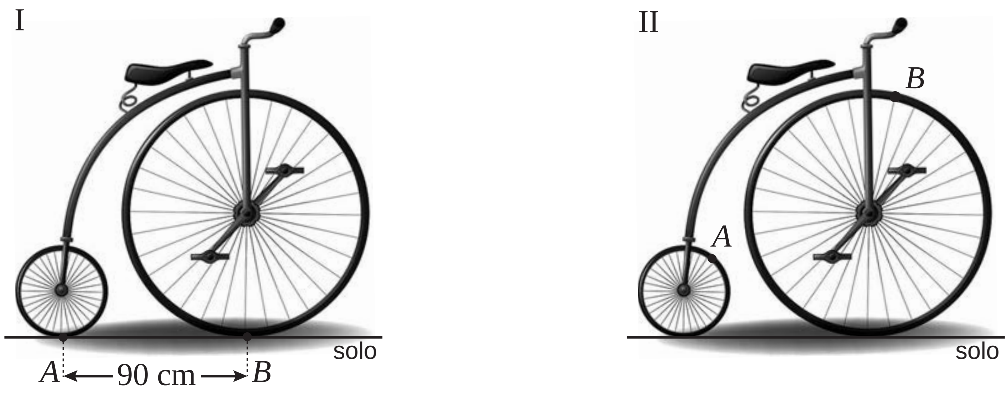


Figura 9

Posteriormente, a bicicleta foi posta em movimento durante 10 segundos. Sabe-se que andou em linha reta a uma velocidade constante, que as duas rodas se mantiveram num mesmo plano vertical, e que nenhuma das rodas derrapou, nem patinou, nem rodou para trás.

No esquema II, ilustra-se uma das posições dos pontos A e B durante esse movimento.

Considerando que a espessura dos pneus é desprezável, admita que, t segundos após a bicicleta ter sido posta em movimento, as distâncias ao solo, em centímetros, dos pontos A e B são dadas, respetivamente, por

$$a(t) = 20 - 20\cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \quad \text{e por} \quad b(t) = 62{,}5 - 62{,}5\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad \text{com } 0 \leq t \leq 10$$

O argumento da função cosseno está em radianos.

8.1. Mostre que o raio da roda traseira mede 20 cm.

* **8.2.** Determine a distância entre os pontos A e B oito segundos após a bicicleta ter sido posta em movimento.

Na sua resposta, apresente o resultado em centímetros, arredondado às unidades.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.1.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.2.**	**7.2.**	**8.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	20	16	16	16	16	16	20	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**3.2.**	**4.3.**	**6.1.**	**7.1.**	**8.1.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**

Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 24 DE JULHO 2023

1. Seja x o número de quilogramas de concentrado do tipo I e y o número de quilogramas de concentrado do tipo II.

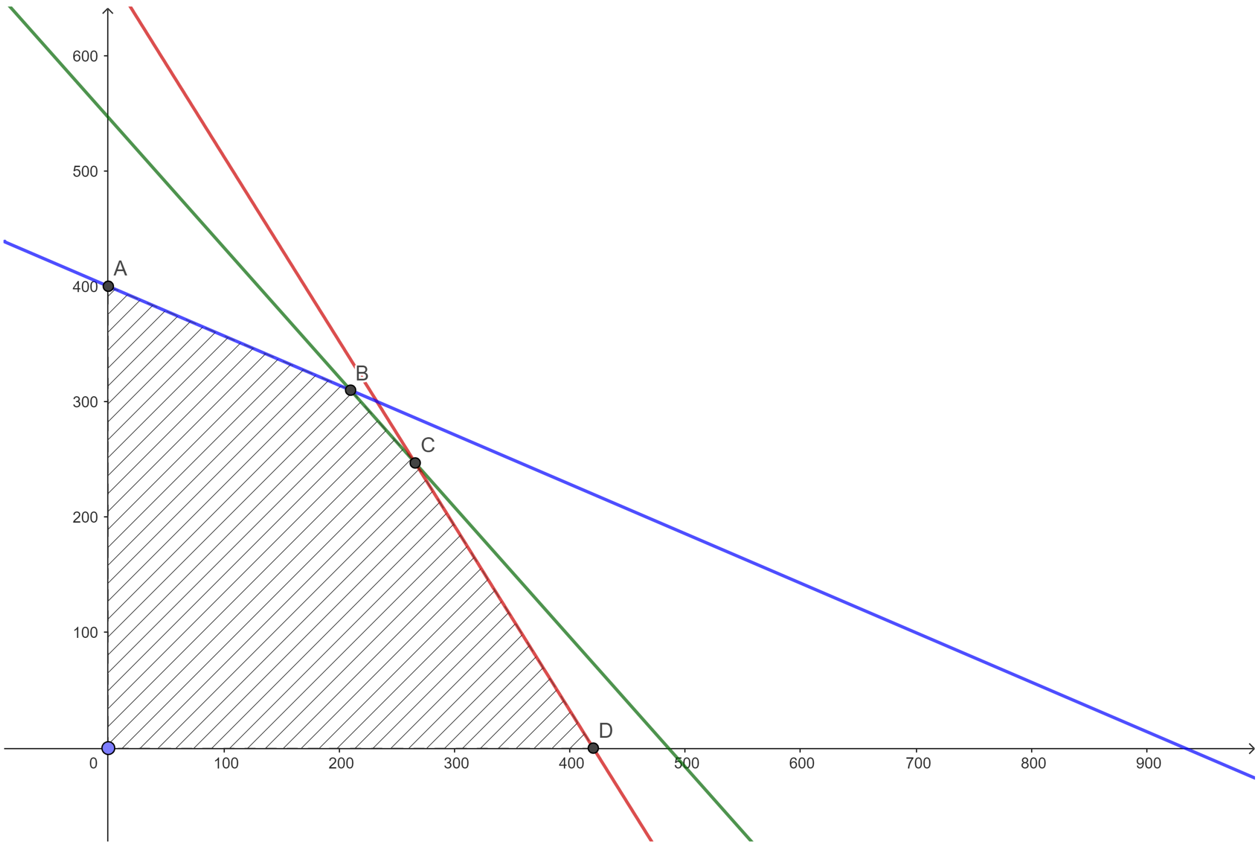
A função objetivo, que se pretende maximizar, é $R(x,y) = 2{,}5x + 3y$.

Quanto às restrições, a condição relativa à quantidade de maçã é $0{,}45x + 0{,}4y \leq 218{,}5$; relativamente à quantidade de pera é $0{,}4x + 0{,}25y \leq 168{,}15$ e à quantidade de romã é $0{,}15x + 0{,}35y \leq 140$.

Tendo ainda em conta as restrições óbvias $x \geq 0$ e $y \geq 0$, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 0{,}45x + 0{,}4y \leq 218{,}5 \\ 0{,}4x + 0{,}25y \leq 168{,}15 \\ 0{,}15x + 0{,}35y \leq 140 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \dfrac{-0{,}45x + 218{,}5}{0{,}4} \\ y \leq \dfrac{-0{,}4x + 168{,}15}{0{,}25} \\ y \leq \dfrac{-0{,}15x + 140}{0{,}35} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Desta forma, a representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições é a representada em baixo, em que A, B, C e D são os seus vértices.



As coordenadas dos vértices obtém-se por interseção das retas que definem a região admissível e, excetuando a origem do referencial: são: $A(0,400)$, $B(210,310)$, $C(266,247)$ e $D(420{,}375;0)$

Calculando o valor da função objetivo nos vértices da região admissível assinalados pelas suas coordenadas, averiguamos a solução ótima:

$$R(0,400) = 2{,}5 \times 0 + 3 \times 400 = 1200$$

$$R(210,310) = 2{,}5 \times 210 + 3 \times 310 = 1455$$

$$R(266,247) = 2{,}5 \times 266 + 3 \times 247 = 1406$$

$$R(420{,}375;0) = 2{,}5 \times 420{,}375 + 3 \times 0 = 1050{,}94$$

Desta forma, concluímos que o valor de vendas máximo é de 1455 euros, obtido no ponto *B*.

Resposta: para a empresa ter o valor de vendas total máximo deve produzir 210 Kg de concentrado do tipo I e 310 Kg de tipo II.

2. A probabilidade do jardim não ser regado é dada por: $P\left(X=0\right)$.

Ora, temos que:

$$
\begin{aligned}
P\left(X=0\right) &= 1-P\left(X\geq 1\right) \\
&= 1-(0,01+0,02+0,05+0,09+0,41+0,21+0,21) \\
&= 1-1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Resposta: A probabilidade do Sr. Ferreira não regar o jardim é zero.

3.

3.1. De acordo com o padrão de escrita das letras, observamos que o número de círculos preenchidos por cada letra segue a sequência $2, 4, 6, 8, \ldots$ correspondente à sucessão dos números pares.

O termo geral desta sucessão é $l(n)=2n$

Então com a 15ª letra do alfabeto serão preenchidos $2\times 15=30$

Resposta: Serão assinalados 30 círculos.

3.2. A sucessão dos números pares é uma progressão aritmética de razão 2.

Sabemos que o total de círculos assinalados é 72. Então, usando a expressão para a soma de n termos de uma progressão aritmética onde desconhecemos o n-ésimo termo, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{2+2n}{2}\times n=72 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(1+n\right)\times n=72 \\
&\Leftrightarrow \quad n+n^2=72 \\
&\Leftrightarrow \quad n^2+n-72=0 \\
&\Leftrightarrow \quad n=-9 \ \vee \ n=8
\end{aligned}
$$

Atendendo a que n é um número natural temos que $n=8$, o que significa que a letra escrita no último círculo foi a 8ª letra do alfabeto.

Resposta: A letra escrita foi a H.

4.

4.1. O crescimento no primeiro ano é dado por $h(1)-h(0)$.

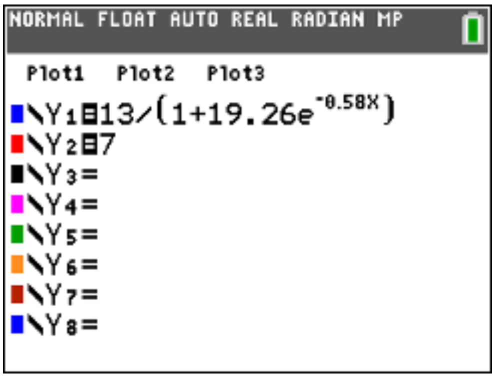
$$h(0)=\frac{13}{1+19,26e^{-0,58\times 0}}=\frac{13}{20,26}\approx 0,642$$

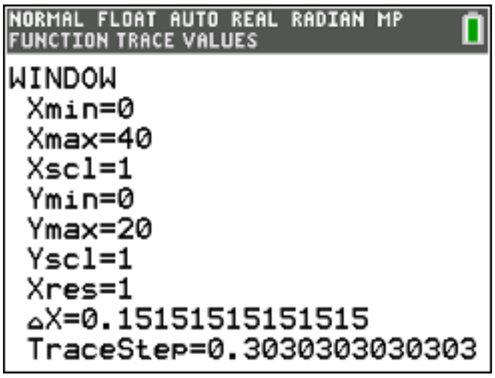
$$h(1)=\frac{13}{1+19,26e^{-0,58\times 1}}=\frac{13}{1+19,26e^{-0,58}}\approx 1,103$$

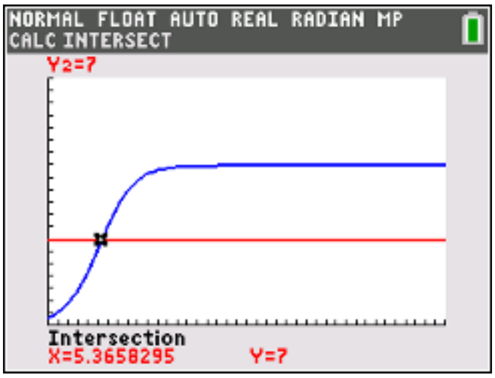
$$h(1)-h(0)\approx 1,103-0,642\approx 0,461 \text{ metros}$$

Resposta: No primeiro ano a árvore cresceu, aproximadamente, 46 cm.

4.2. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, esboçamos o gráfico da função h e da reta $y=7$ com vista à resolução da equação $h(t)=7$







A curva correspondente ao gráfico da função h, que é crescente, interseta a reta de equação $y=7$ no ponto de abcissa $x\approx 5,3658$.

Isso corresponde a $5+0,3658$ anos.

$0,3658\times 12=4,416\approx 4$ meses

Resposta: A árvore ultrapassa os 7 metros de altura no decurso do quinto mês após 5 anos de ter sido plantada.

4.3. A função é um modelo logístico que admite uma assintota horizontal de equação $y=13$. Isso significa que a altura da árvore vai crescendo e aproximando-se de 13 metros sem nunca alcançar essa altura. Desta forma nunca atingirá os 13,5 metros.

5. O gráfico refere-se à produção acumulada de batata. Então, no ano de 2021, foram produzidas um total de $49566-38972=10594$ toneladas.

Como se prevê uma redução de 15% na produção, só serão produzidas 85% das batatas de 2021.

Ora, $0,85\times 10594=9004,9$ toneladas ≈ 9 milhares de toneladas

Resposta: É previsto para 2022 uma produção de, aproximadamente, 9 milhares de toneladas de batata.

6.

6.1. A função f é crescente, mas cresce mais rapidamente à medida que t se aproxima de 6 do que para valores iniciais, mais pertos de zero. Qualquer reta tangente à curva da função tem um declive que vai aumentado à medida que t se aproxima de 6 .

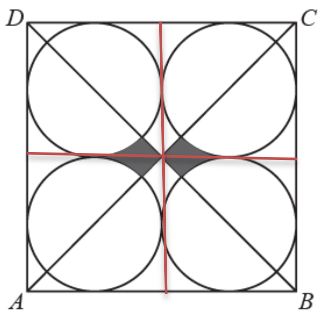
Assim sendo, a taxa de variação instantânea de f é maior em $t=5,5$ do que em $t=0,5$

6.2. O depósito A não pode ser o existente, porque o seu enchimento seria mais lento na parte final e mais rápido no início, que é exatamente o contrário do que se verifica na função f .

O depósito B não pode ser o existente, porque o seu enchimento se daria sempre da mesma forma, o que se traduziria por uma função cujo gráfico fosse retilíneo, o que também não se verifica com a função f

7.

7.1. O lado do quadrado $[ABCD]$ mede $40\ cm$, correspondente a dois diâmetros de uma circunferência.



$A_{[ABCD]}=40^2$

$\Leftrightarrow A_{[ABCD]}=1600$

A área de cada círculo é $100\pi\ cm^2$

A diferença entre a área do quadrado $[ABCD]$ e a área de quatro círculos é $1600-400\pi$.

Observando atentamente a figura, com o esquema introduzido, verifica-se que esta diferença corresponde à área de dezasseis regiões com área igual a cada uma das duas que estão sombreadas.

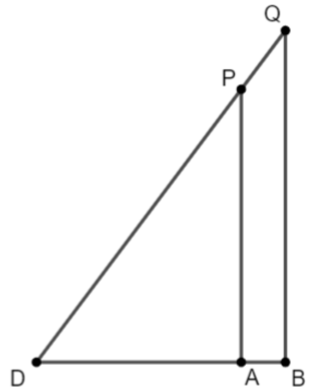
Assim, a área total sombreada é dada por:

$$A_T = \frac{1600 - 400\pi}{16} \times 2$$

$$\Leftrightarrow A_{[ABCD]} \approx 43$$

Resposta: A área sombreada é, aproximadamente, 43 cm^2.

7.2. Analisemos os seguintes triângulos retângulos, semelhantes entre si, onde D é coincidente com a origem do referencial:



Das coordenadas do ponto P resulta

$$\overline{AP} = 40$$

$$\overline{DA} = 30$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $[APD]$, temos

$$\overline{DP} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$$

Como $[PQ]$ corresponde ao raio de uma circunferência da figura 7, temos:

$\overline{PQ} = 10$ e, portanto,

$$\overline{DQ} = 60$$

Por semelhança de triângulos temos

$$\frac{\overline{BD}}{30} = \frac{60}{50}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = 36$$

$$\frac{\overline{BQ}}{40} = \frac{60}{50}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BQ} = 48$$

Resposta: As coordenadas do ponto Q são $(36{,}48)$.

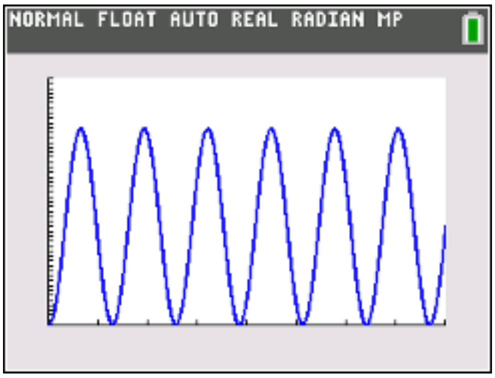
8.

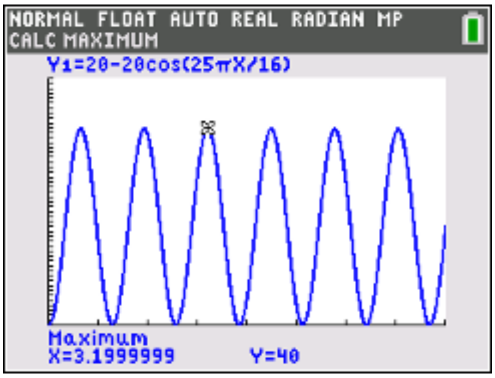
8.1. A diferença entre o máximo e o mínimo da função $a(t)$ dá-nos o diâmetro da roda pequena. Podemos determinar o máximo e o mínimo por dois processos:

1º processo: Utilizando um processo de construção por enquadramento, temos:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 1$$
$$\Leftrightarrow -20 \leq -20\cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 20$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 20 - 20\cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 40$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq \mathrm{a}(t) \leq 40$$

2º processo: Utilizando a calculadora gráfica, determinamos o máximo da função, uma vez que o mínimo é, trivialmente, igual a 0, porque corresponde à altura do ponto A quando este se encontra no solo.
A função é periódica e podemos obter o seu máximo:





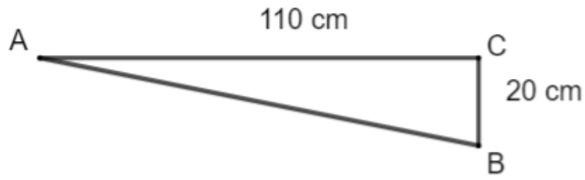
Como a função a varia entre 0 e 40, concluímos que o diâmetro da roda é $40\ cm$, pelo que o raio é $20\ cm$, como se queria demonstrar (c. q. d.).

8.2. Vejamos as posições dos pontos A e B, ao fim de 8 segundos:

$$\mathrm{a}(8) = 20 - 20\cos\left(\frac{25\pi}{16} \times 8\right)$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{a}(8) = 20 - 20\cos\left(\frac{25\pi}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{a}(8) = 20 - 20\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{a}(8) = 20 - 0$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{a}(8) = 20$$

$$b(8) = 62{,}5 - 62{,}5cos\left(\frac{\pi}{2} \times 8\right)$$
$$\Leftrightarrow b(8) = 62{,}5 - 62{,}5cos(4\pi)$$
$$\Leftrightarrow b(8) = 62{,}5 - 62{,}5 \times 1$$
$$\Leftrightarrow b(8) = 0$$

Ao fim de 8 segundos, o ponto A está a 20 cm de altura e à esquerda do centro da roda porque, para a bicicleta avançar, a roda gira no sentido dos ponteiros do relógio. O ponto B volta a estar no solo. Logo, os pontos A e B, são a hipotenusa de um triângulo retângulo com as dimensões, que constam da seguinte imagem, sendo a reta AC uma reta paralela ao chão, que contem o centro da roda menor.



Reparemos que, como o raio da roda é 20 cm e o ponto A está a 20 cm de altura, vamos ter que
$\overline{AC} = 20 + 90 = 110$

Recorrendo ao teorema de Pitágoras, temos sucessivamente

$$\overline{AB}^2 = 110^2 + 20^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 12500$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB} \approx 112$$

Resposta: A distância entre os pontos A e B, ao fim de 8 segundos é, aproximadamente, 112 cm.

FIM

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Critérios de Classificação

10 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Organização e linguagem científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização, nomeadamente, a representação, em referencial cartesiano, do(s) gráfico(s) visualizado(s).

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista (ver nota).
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.

13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **20 pontos**

Identificar a função objetivo $\left(L(x,\, y) = 2{,}5x + 3y\right)$ .... 1 ponto

Identificar as restrições $0{,}45x + 0{,}40y \leq 218{,}50$, $0{,}40x + 0{,}25y \leq 168{,}15$ e $0{,}15x + 0{,}35y \leq 140$ ....(3 × 1)............................ 3 pontos

Identificar as restrições $x \geq 0$ e $y \geq 0$ .... 1 ponto

Representar graficamente a região admissível .... 5 pontos

Representar graficamente as retas de equações $0{,}45x + 0{,}40y = 218{,}50$, $0{,}40x + 0{,}25y = 168{,}15$ e $0{,}15x + 0{,}35y = 140$ ....(3 × 1).......................... 3 pontos

Assinalar a região admissível .... 2 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono, exceto a origem $((420{,}375;\, 0), (266;\, 247), (210;\, 310)$ e $(0;\, 400))$ ....(4 × 1)................ 4 pontos

Calcular o custo correspondente a cada um dos vértices do polígono, exceto a origem (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero – **ver nota**) .... (4 × 1) .... 4 pontos

Apresentar os valores pedidos (210 kg de concentrado do tipo I e 310 kg de concentrado do tipo II).. 2 pontos

Nota – No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. .... **16 pontos**

Identificar o valor pedido com $P(X = 0)$ .... 4 pontos

Reconhecer que $P(X = 0) = 1 - P(X > 0)$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter $0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}05 + 0{,}09 + 0{,}41 + 0{,}21 + 0{,}21 = 1$ .... 4 pontos

Concluir que a probabilidade pedida é 0 .... 4 pontos

3.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que os números de círculos assinalados em cada etapa são termos consecutivos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 2 .... 3 pontos

Indicar a razão dessa progressão (2) .... 4 pontos

Escrever uma expressão que permita calcular o termo de ordem 15 .... 5 pontos

Obter o valor pedido (30 círculos) .... 4 pontos

2.º Processo

Obter o número de círculos que foram assinalados em cada etapa , da 1.ª à 14.ª $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26$ e $28)$ .... 14 pontos

Apresentar o valor pedido (30 círculos) .... 2 pontos

3.2. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever uma expressão para o termo de ordem n
$(2+2(n-1),$ ou equivalente$)$ .... 3 pontos

Escrever uma expressão para a soma de n termos consecutivos
$\left(\frac{2+2+2(n-1)}{2}\times n,\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ .... 3 pontos

Igualar a expressão anterior a 72 .... 2 pontos

Resolver a equação $\frac{2+2+2(n-1)}{2}\times n=72$ (ou equivalente) .... 5 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, três processos.

Processo A

Apresentar uma tabela com os primeiros oito termos da sucessão de termo geral n^2+n .... 3 pontos

Identificar o valor de n (8) .... 2 pontos

Processo B

Obter $n^2+n-72=0$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter $n=8$ .... 2 pontos

Processo C

Representar graficamente a função definida por $y=x^2+x$
(**ver nota**) .... 2 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y=72$
(**ver nota**) .... 1 ponto

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos de
abcissa positiva .... 1 ponto

Obter $n=8$ .... 1 ponto

Concluir que tinha sido escrita a letra H .... 3 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir nestes passos é desvalorizada em 2 pontos.

2.º Processo

Indicar o número de círculos assinalados da 1.ª etapa à 8.ª etapa
$(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$ e $16)$ .... 8 pontos

Obter a soma desses números (72) .... 5 pontos

Concluir que tinha sido escrita a letra H .... 3 pontos

4.1. .... **16 pontos**

Identificar a altura da árvore no instante em que foi plantada com $h(0)$ .... 2 pontos

Identificar a altura da árvore um ano após ter sido plantada com $h(1)$ .... 2 pontos

Obter $h(0)$ $(0{,}641...)$ .... 2 pontos

Obter $h(1)$ $(1{,}103...)$ .... 2 pontos

Identificar o valor pedido com $h(1)-h(0)$ .... 5 pontos

Obter o valor pedido $(46\ \text{cm})$ .... 3 pontos

4.2. .... **16 pontos**

Traduzir o problema por uma condição $\left(h(t)>7,\right.$ ou equivalente$\left.\right)$
(**ver nota 1**) .... 2 pontos

Resolver a inequação $h(t)>7$ .... 11 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Representar graficamente a função h (**ver notas 2 e 3**) .... 6 pontos

Representar graficamente a reta de equação $y=7$
(**ver nota 2**) .... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(5{,}3658...)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Isolar $e^{-0{,}58t}$ .... 4 pontos

Escrever $-0{,}58t<\ln(0{,}0445...)$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter $t>5{,}3658...$ .... 3 pontos

Apresentar o valor pedido (5 anos e 4 meses) (**ver nota 4**) .... 3 pontos

Notas:

1. Se for apresentado $h(t)=7$, $h(t)\geq 7$, $h(t)<7$ ou $h(t)\leq 7$, a pontuação a atribuir nesta etapa não é desvalorizada.
2. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir nestes passos é desvalorizada em 2 pontos.
3. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir neste passo é desvalorizada em 1 ponto.
4. Se for apresentado 5 anos e 5 meses, a pontuação a atribuir nesta etapa não é desvalorizada.

4.3. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Reconhecer que a reta de equação $y = 13$ é assíntota horizontal ao gráfico da função h (**ver notas 1 e 2**) .... 8 pontos

Referir que a função h é crescente (**ver notas 1 e 2**) .... 6 pontos

Concluir que não é possível .... 2 pontos

Notas:

1. Em alternativa, pode apenas ser referido que a função h é uma função logística.

2. Se apenas forem representados o gráfico da função h e a reta de equação $y = 13,$ a soma das pontuações a atribuir nestas etapas não deve ser desvalorizada.

2.º Processo

Escrever $h(t) = 13{,}5$ .... 3 pontos

Isolar $e^{-0{,}58t}$ .... 6 pontos

Concluir que a equação é impossível .... 5 pontos

Concluir que não é possível .... 2 pontos

3.º Processo

Escrever $e^{-0{,}58t} > 0$ .... 4 pontos

Escrever $19{,}26\, e^{-0{,}58t} > 0$ .... 3 pontos

Escrever $1 + 19{,}26\, e^{-0{,}58t} > 1$ .... 3 pontos

Reconhecer que $h(t) < 13$ .... 4 pontos

Concluir que não é possível .... 2 pontos

5. .... **16 pontos**

Identificar a produção anual em 2021 com a diferença $49\,566 - 38\,972$ .... 7 pontos

Obter a produção anual em 2021 $(10\,594)$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido (9 milhares de toneladas) .... 7 pontos

6.1. .... **16 pontos**

Referir que a taxa de variação instantânea da função f tem maior valor no instante $t = 5{,}5$ .... 4 pontos

Referir que a altura da água no depósito estava a aumentar mais rapidamente no instante $t = 5{,}5$ do que no instante $t = 0{,}5$ (ou equivalente) OU Referir que o declive da reta tangente ao gráfico de h em $t = 5{,}5$ é maior do que o declive da reta tangente ao gráfico de h em $t = 0{,}5$ (ou equivalente) .... 12 pontos

6.2. .... **20 pontos**

Tópicos de resposta

• Justificação de que o depósito A não pode ser o existente na quinta do Sr. Ferreira.

Exemplo de resposta:

– «No depósito A, a subida da água seria mais rápida no início e mais lenta no final, ao contrário do que se representa no gráfico de f.»

• Justificação de que o depósito B não pode ser o existente na quinta do Sr. Ferreira.

Exemplos de resposta:

– «No depósito B, a água subiria a uma velocidade constante, diferentemente do que se representa no gráfico de f.»

– «O gráfico da função correspondente ao depósito B seria retilíneo.»

Parâmetros	Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
A Conteúdos	4	Apresenta, de forma completa, as duas justificações solicitadas.	16
	3	Apresenta, de forma completa, uma das justificações solicitadas e, de forma incompleta, a outra justificação.	12
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma das justificações solicitadas. OU Apresenta, de forma incompleta, as duas justificações solicitadas.	8
	1	Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das justificações solicitadas.	4
B Organização e linguagem científica	2	Escreve um texto organizado e utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	4
	1	Escreve um texto com falhas na organização ou na utilização do vocabulário específico da Matemática.	2

7.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Considerar um quadrado de lado 20 cm .... 3 pontos

Obter a área desse quadrado (400) .... 1 ponto

Obter a área de um círculo de raio 10 cm $(314{,}159\ldots)$ .... 3 pontos

Obter a diferença entre as duas áreas $(85{,}840\ldots)$ .... 4 pontos

Obter metade desta diferença $(42{,}920\ldots)$ .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido $(43\ \text{cm}^2)$ .... 1 ponto

2.º Processo

Considerar um quadrado de lado $10\ \text{cm}$ .... 3 pontos

Obter a área desse quadrado (100) .... 1 ponto

Obter a área de um quarto de círculo de raio $10\ \text{cm}$ $(78{,}539\ldots)$ .... 3 pontos

Obter a diferença entre as duas áreas $(21{,}460\ldots)$ .... 4 pontos

Obter o dobro desta diferença $(42{,}920\ldots)$ .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido $(43\ \text{cm}^2)$ .... 1 ponto

7.2. .... **16 pontos**

Escrever $\overline{OP}^2 = 30^2 + 40^2$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $\overline{OP}$ (50) .... 1 ponto

Reconhecer que as coordenadas do ponto Q se obtêm utilizando uma semelhança de triângulos .... 1 ponto

Escrever uma proporção que permita obter a abcissa do ponto Q .... 4 pontos

Obter o valor dessa abcissa (36) .... 2 pontos

Escrever uma proporção que permita obter a ordenada do ponto Q .... 4 pontos

Obter o valor dessa ordenada (48) .... 2 pontos

8.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que a distância mínima do ponto A ao solo é $0\ \text{cm}$ .... 3 pontos

Representar graficamente a função a (**ver nota**) .... 4 pontos

Assinalar um ponto do gráfico cuja ordenada seja o valor máximo da função a .... 4 pontos

Obter a ordenada desse ponto (40) .... 2 pontos

Concluir que o raio da roda é $20\ \text{cm}$ .... 3 pontos

Nota – Se for representada uma restrição da função a num intervalo de extremos 0 e m, com $0 < m \leq 10$, que permita visualizar um ponto relevante para a resolução do problema, a pontuação a atribuir nesta etapa não é desvalorizada. Se for representado um prolongamento da função a, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto. Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 2 pontos.

2.º Processo

Referir que o argumento da função cosseno toma valores de um intervalo com amplitude superior a 2π .... 1 ponto

Escrever $-1 \leq \cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 1$ .... 5 pontos

Escrever $-20 \leq -20\cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 20$ .... 4 pontos

Escrever $0 \leq 20 - 20\cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 40$ .... 3 pontos

Concluir que o raio da roda é 20 cm .... 3 pontos

8.2. .... **16 pontos**

Identificar a distância do ponto A ao solo com $a(8)$ .... 1 ponto

Obter $a(8)$ (20) .... 2 pontos

Reconhecer que, após 8 segundos, o ponto A se situa no extremo esquerdo do diâmetro da roda traseira, paralelo ao solo (**ver nota**) .... 4 pontos

Identificar a distância do ponto B ao solo com $b(8)$ .... 1 ponto

Obter $b(8)$ (0) .... 2 pontos

Considerar o triângulo retângulo $[APB]$, sendo P a projeção ortogonal do ponto A sobre o solo .... 1 ponto

Obter $\overline{PB}$ (110) .... 1 ponto

Escrever $\overline{AB}^2 = 110^2 + 20^2$ .... 2 pontos

Apresentar o valor pedido $(112$ cm$)$ .... 2 pontos

Nota – Se for considerado que o ponto A se situa no extremo direito do diâmetro da roda traseira, paralelo ao solo, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 2 pontos.

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.	3.1.	4.1.	4.2.	5.	6.2.	7.2.	8.2.	Subtotal
Cotação (em pontos)	20	16	16	16	16	16	20	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**3.2.**	**4.3.**	**6.1.**	**7.1.**	**8.1.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 13 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, apenas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados, como:

- os gráficos obtidos, em referencial cartesiano, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

*** 1.** Considere o seguinte problema de programação linear.

«Uma empresa pretende colocar no mercado dois tipos de molho agridoce: A e B.

A produção de uma embalagem do molho A necessita de 2 litros de mel, de 1 litro de vinagre e de 1 litro de molho de soja.

A produção de uma embalagem do molho B necessita de 1 litro de mel, de 2 litros de vinagre e de 1 litro de molho de soja.

Para a produção destes molhos, a empresa dispõe de 24 litros de mel e de 24 litros de vinagre. Devem ser utilizados na produção dos dois tipos de molhos, pelo menos, 14 litros de molho de soja.»

Seja x o número de embalagens do molho A e seja y o número de embalagens do molho B a produzir pela empresa.

Complete o sistema de restrições deste problema de programação linear, selecionando, para cada espaço (**I**, **II** e **III**), o sinal correto $(<,\ \leq,\ =,\ \geq,\ >)$.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II** e **III**, seguido do sinal selecionado.

$$\begin{cases} 2x + y \ \underline{\ \mathbf{I}\ }\ 24 \\ x + 2y \ \underline{\ \mathbf{II}\ }\ 24 \\ x + y \ \underline{\ \mathbf{III}\ }\ 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

✱ 2. A vespa-asiática, nativa do sudeste asiático, é considerada uma espécie invasora no continente europeu e tem sido amplamente referida como uma predadora eficaz da abelha-do-mel e de outros polinizadores.

Considere que, no início do dia 1 de janeiro de 2017, a presença desta espécie foi detetada, pela primeira vez, numa região com $57\,000\ \text{km}^2$ de área.

A percentagem, P, desta área, afetada pela presença da vespa-asiática, x anos após o dia 1 de janeiro de 2017, é bem modelada por

$$P(x)=\frac{86{,}8}{1+9{,}85\,e^{-0{,}5x}}\quad,\quad \text{com } x\geq 0$$

Complete o texto, de acordo com o modelo apresentado, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II** e **III**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada.

«A percentagem daquela área, afetada pela presença da vespa-asiática, no início do dia 1 de janeiro de 2017, era de _____**I**_____ e, com o passar do tempo, a área afetada tende para _____**II**_____.

No dia 1 de janeiro de 2024, a percentagem daquela área, afetada pela presença da vespa-asiática, era _____**III**_____ a 50%.»

I	II	III
a) 8%	**a)** $86{,}8\ \text{km}^2$	**a)** igual
b) $12{,}4\%$	**b)** $46\,170\ \text{km}^2$	**b)** superior
c) $86{,}8\%$	**c)** $49\,476\ \text{km}^2$	**c)** inferior

3. Admita que uma abelha executa um voo perto da sua colmeia.

Seja d a função que dá a distância, em metros, entre a posição da abelha e uma entrada da sua colmeia, t segundos após o início do voo.

Seja V a função que dá a taxa de variação instantânea da função d, para cada instante t.

Interprete, no contexto descrito, o significado de $V(4)=-0{,}5$.

4. A tabela seguinte foi elaborada com base em dados recolhidos no portal do Instituto Nacional de Estatística e apresenta o número de colmeias e cortiços povoados em Portugal, em milhares, e a respetiva produção de mel, em toneladas, para alguns anos, entre 1989 e 2009.

Ano	N.º de colmeias e cortiços povoados (em milhares)	Produção de mel (em toneladas)
1989	366	3280
1993	295	4196
1995	244	3600
1997	239	3690
1999	285	4465
2003	228	7310
2005	188	5686
2007	164	6908
2009	196	6919

Com base nos dados da tabela, obteve-se um modelo de regressão linear, de y sobre x, em que x representa o número de colmeias e cortiços povoados, em milhares, e y representa a produção de mel, em toneladas.

Considere a seguinte afirmação:

> «No ano de 2016, foram contabilizados 179 milhares de colmeias e cortiços povoados, e a produção de mel atingiu 14 246 toneladas, pelo que o valor da produção de mel foi cerca de **2,2 vezes maior** do que o valor estimado pelo modelo de regressão linear.»

Justifique que esta afirmação é verdadeira.

Na sua resposta, apresente os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x, arredondados às centésimas.

5. Na Figura 1, apresenta-se uma fotografia de um alojamento, destinado a acomodar participantes em festivais, cuja forma sugere os favos de uma colmeia.

Figura 1

A estrutura deste alojamento é constituída por seis módulos iguais para dormidas e dois módulos iguais para arrumos.

No esquema da Figura 2, que não está à escala, está representado o sólido geométrico referente à estrutura do alojamento, constituído por seis prismas hexagonais regulares retos e dois prismas quadrangulares retos, justapostos, com a mesma altura, estando as bases sombreadas contidas num mesmo plano vertical. As bases dos prismas quadrangulares retos são trapézios isósceles.

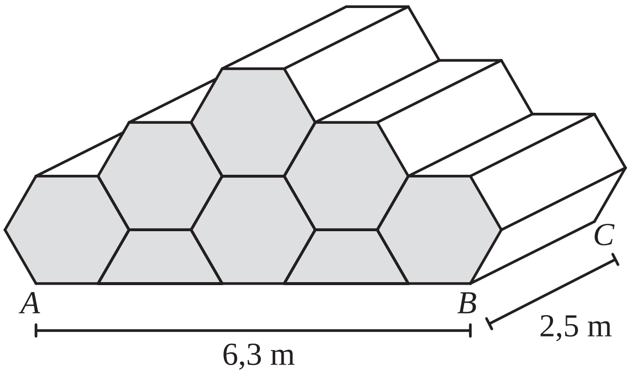


Figura 2

Sabe-se que:

- A , B e C são vértices de prismas da estrutura;
- $\overline{AB} = 6{,}3 \text{ m}$ e $\overline{BC} = 2{,}5 \text{ m}$.

Note que a base maior dos trapézios isósceles é o dobro da sua base menor.

5.1. Determine o volume do sólido representado na Figura 2.

Apresente o resultado em metros cúbicos, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

* **5.2.** Num dos prismas hexagonais representados na Figura 2, fixou-se um referencial ortogonal e monométrico, $Oxyz$, como se representa na Figura 3.

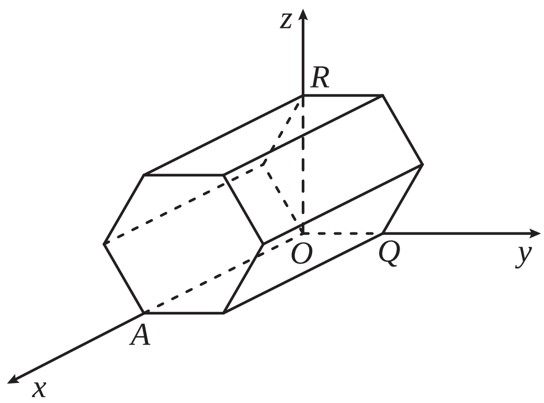


Figura 3

No referencial, a unidade é o metro, e o ponto O é um vértice do prisma.

Os pontos A, Q e R são vértices do prisma e pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz.

Qual das seguintes equações define um plano que decompõe o prisma em dois sólidos geometricamente iguais?

(A) $x = 2{,}5$ **(B)** $y = 2{,}5$ **(C)** $x = 1{,}25$ **(D)** $y = 1{,}25$

6. Uma dada empresa dedica-se à produção e à comercialização de água-mel, sendo esta comercializada em frascos de vidro.

6.1. Considere a variável aleatória «quantidade de água-mel, em ml, de um frasco comercializado». Admita que esta variável aleatória segue, aproximadamente, uma distribuição normal de valor médio $300\ \mathrm{ml}$.

Sabe-se que 90% dos frascos comercializados têm entre $295\ \mathrm{ml}$ e $305\ \mathrm{ml}$ de água-mel.

Tira-se, ao acaso, um dos frascos comercializados.

Qual é a probabilidade de esse frasco ter menos do que $295\ \mathrm{ml}$ de água-mel?

(A) $0{,}05$ **(B)** $0{,}10$ **(C)** $0{,}30$ **(D)** $0{,}45$

6.2. Os frascos em que a empresa comercializa a água-mel têm a forma de um prisma hexagonal regular reto. A Figura 4 é uma fotografia de um desses frascos.

No processo de enchimento dos frascos, estes são assentes, numa das suas faces retangulares, em cima de uma superfície plana horizontal.

Num certo instante inicial, um desses frascos contém alguma quantidade de água-mel, como se ilustra na Figura 5.


Figura 4

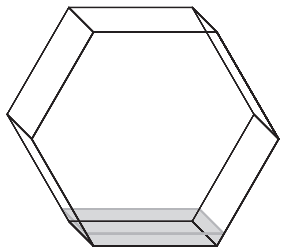


Figura 5

À medida que se enche o frasco, a superfície de água-mel tem sempre a forma de um retângulo, mas a sua área vai variando, como se representa na Figura 6.

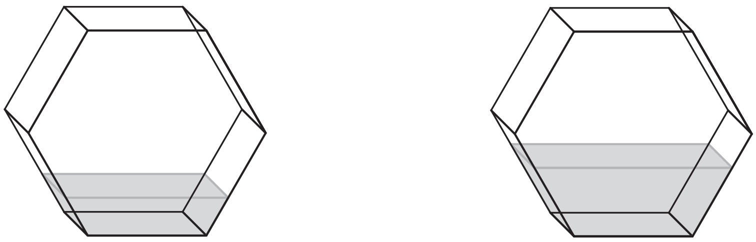


Figura 6

Admita que a quantidade, por segundo, de água-mel colocada no frasco é constante.

Relativamente ao intervalo de tempo em que decorreu o enchimento do frasco, seja f a função que faz corresponder o tempo, t, em segundos, decorrido desde o instante inicial, à área da superfície de água-mel no frasco.

Na Figura 7, estão representados dois gráficos, A e B, em referencial cartesiano ortogonal.

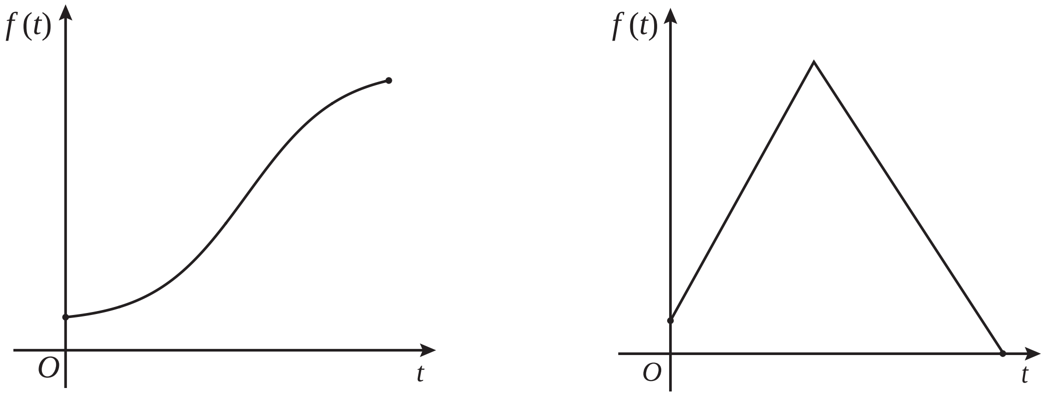


Gráfico A Gráfico B

Figura 7

Justifique que nem o gráfico A nem o gráfico B podem representar a função f.

Apresente uma razão para cada um dos gráficos.

7. Duas transportadoras de mercadorias, A e B, operam com os tarifários seguintes:

	Transportadora A	**Transportadora B**
Valor fixo	$9{,}50$ € / serviço	5 € / serviço
Valor variável	$0{,}60$ € / km	$0{,}85$ € / km

O preço a pagar pelo serviço de transporte engloba um valor fixo, por cada serviço, e um valor variável, em função da extensão do percurso entre o ponto de recolha e o ponto de entrega.

* **7.1.** Em qual das transportadoras é menor o preço a pagar se a extensão do percurso for de $10\ \mathrm{km}$?

Mostre como chegou à sua resposta.

7.2. A empresa produtora de mel pretende contratar uma destas transportadoras para levar o seu produto, do armazém a uma feira.

De acordo com os tarifários apresentados para o mesmo percurso, a empresa verificou, corretamente, que o preço a pagar pelo serviço em ambas as transportadoras é igual.

Qual é a extensão, em km , do percurso entre o armazém da empresa e a feira?

Mostre como chegou à sua resposta.

8. Considere uma espiral constituída por 100 semicircunferências de diâmetros 1, 2, 3, 4, 5, e assim sucessivamente, tendo cada semicircunferência, a partir da segunda, mais 1 unidade de diâmetro do que a semicircunferência anterior, como se representa na Figura 8.

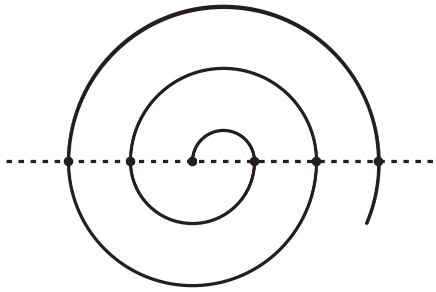


Figura 8

Considere a sequência crescente dos comprimentos das semicircunferências.

Os termos desta sequência são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Note que o comprimento de uma semicircunferência é igual a metade do perímetro de um círculo com o mesmo raio.

* **8.1.** Mostre que a razão dessa progressão aritmética é $\frac{\pi}{2}$.

8.2. Mostre que o comprimento total da espiral constituída pelas 100 semicircunferências é 2525π .

9. A Figura 9 é uma fotografia de um toldo que tem um dispositivo de suporte constituído por dois braços articulados que sustêm a lona, à medida que esta é enrolada ou desenrolada por meio de uma manivela.

Na Figura 10, está representado o dispositivo de suporte do toldo, em que a reta CD representa a parte fixa da estrutura numa parede.

Figura 9

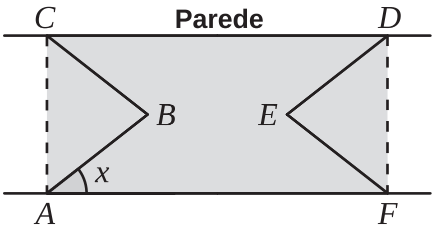


Figura 10

Sabe-se que:

- $[AFDC]$ é um retângulo;
- $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{EF} = 1{,}5 \text{ m}$;
- $F\hat{A}B = x$, em graus, com $x \in [0, 90]$.

9.1. Mostre que $\overline{AC}$, em metros, é dado por $3 \operatorname{sen} x$.

* **9.2.** Admita que, a cada 5 voltas completas da manivela no mesmo sentido, a amplitude x aumenta 6^{o} .

Num determinado instante, o toldo encontrava-se parcialmente aberto e, após 25 voltas completas da manivela, no mesmo sentido, $\overline{AC}$ aumentou 1 m .

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a medida $\overline{AC}$, em metros, antes de se rodar a manivela.

Apresente o valor pedido, arredondado às centésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Note que $\overline{AC} = 3 \operatorname{sen} x$, em metros.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**4.**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**8.1.**	**9.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	14	14	18	14	14	18	18	18	18	**146**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**3.**	**5.1.**	**7.2.**	**8.2.**	**9.1.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 18 pontos									**54**
TOTAL										**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 735

1.ª Fase

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Critérios de Classificação 8 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

As respostas aos itens de seleção podem ser classificadas de forma dicotómica ou por níveis de desempenho, de acordo com os critérios específicos. No primeiro caso, a pontuação só é atribuída às respostas corretas, sendo todas as outras respostas classificadas com zero pontos. No caso da classificação por níveis de desempenho, a cada nível corresponde uma dada pontuação, de acordo com os critérios específicos.

Nas respostas aos itens de seleção, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra ou do número correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Linguagem Científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de classificação definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização, nomeadamente, a representação, em referencial cartesiano, do(s) gráfico(s) visualizado(s).

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).

8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista (ver nota).
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa, quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **14 pontos**

I) $\leq$ **II)** $\leq$ **III)** $\geq$

Este item deve ser classificado de acordo com os níveis de desempenho seguintes.

Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
3	Completa o sistema de restrições com os três sinais corretos.	14
2	Completa o sistema de restrições apenas com dois sinais corretos.	10
1	Completa o sistema de restrições apenas com um sinal correto.	5

2. .... **14 pontos**

I → a) **II → c)** **III → b)**

Este item deve ser classificado de acordo com os níveis de desempenho seguintes.

Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
3	Completa o texto com as três opções corretas.	14
2	Completa o texto apenas com duas opções corretas.	10
1	Completa o texto apenas com uma opção correta.	5

3. .... **18 pontos**

Associar 4 ao instante em que decorreram 4 segundos desde o início do voo da abelha .... 6 pontos

Referir que a distância da posição da abelha àquela entrada da colmeia estava a diminuir .... 6 pontos

Referir que $0{,}5$ corresponde a uma taxa de variação instantânea de $0{,}5\ \mathrm{m/s}$ (ou equivalente) .... 6 pontos

Exemplos de resposta:

– «4 segundos após o início do voo, a distância da abelha à entrada da colmeia estava a diminuir à taxa de $0{,}5\ \mathrm{m/s}$.»

– «4 segundos após o início do voo, a abelha está a aproximar-se da entrada da colmeia à velocidade de $0{,}5\ \mathrm{m/s}$.»

4. .... **18 pontos**

Identificar as listas introduzidas na calculadora (por exemplo, “lista 1: colmeias e cortiços; lista 2: produção de mel”) .... 1 ponto

Apresentar os parâmetros da equação da reta de regressão $(-18{,}78$ e $9718{,}29)$ .... (3 + 3) .... 6 pontos

Identificar x com 179 .... 4 pontos

Obter o valor estimado pelo modelo de regressão linear .... 3 pontos

Concluir que a afirmação é verdadeira .... 4 pontos

5.1. .... **18 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Reconhecer que o volume do sólido é $7 \times V$, sendo V o volume de um prisma hexagonal regular .... 6 pontos

Obter o lado do hexágono regular $(0{,}9)$ .... 3 pontos

Determinar o apótema do hexágono regular $(0{,}7794...)$ .... 3 pontos

Determinar a área do hexágono regular .... 3 pontos

Obter V .... 2 pontos

Obter o valor pedido $(37\ \mathrm{m}^3)$ .... 1 ponto

2.º Processo

Reconhecer que o volume do sólido é $14 \times V$, sendo V o volume de um prisma quadrangular .... 6 pontos

Obter o lado do hexágono regular $(0{,}9)$ .... 3 pontos

Determinar a altura do trapézio $(0{,}7794...)$ .... 3 pontos

Determinar a área do trapézio .... 3 pontos

Obter V .... 2 pontos

Obter o valor pedido $(37\ \mathrm{m}^3)$ .... 1 ponto

3.º Processo

Reconhecer que o volume do sólido é $6 \times V_1 + 2 \times V_2$, sendo V_1 o volume de um prisma hexagonal regular e V_2 o volume de um prisma quadrangular .... 4 pontos

Obter o lado do hexágono regular $(0{,}9)$ .... 3 pontos

Determinar o apótema do hexágono regular ou a altura do trapézio $(0{,}7794...)$ .... 3 pontos

Determinar a área do hexágono regular .... 2 pontos

Obter V_1 .... 1 ponto

Determinar a área do trapézio .... 2 pontos

Obter V_2 .... 1 ponto

Obter o valor pedido $(37\ \mathrm{m}^3)$ .... 2 pontos

5.2. .... **14 pontos**

Opção (C)

6.1. .... **14 pontos**

Opção (A)

6.2. .... **18 pontos**

Tópicos de resposta

- Justificação de que a função representada no Gráfico A não pode ser a função f.

Exemplos de resposta:

– «A função representada no gráfico A não pode ser a função f, pois a área da superfície de água-mel no frasco é máxima no instante em que a água-mel ocupa metade do frasco e não no final do enchimento, como acontece na função representada.»

– «A função representada no gráfico A não pode ser a função f, porque a função representada é crescente, enquanto a função f é crescente desde o instante 0 até ao instante em que a água-mel ocupa metade do frasco e decrescente a partir deste instante.»

- Justificação de que a função representada no Gráfico B não pode ser a função f.

Exemplo de resposta:

– «A função representada no gráfico B não pode ser a função f, porque a área da superfície de água-mel no final do enchimento não é igual a 0, como acontece na função representada.»

Este item deve ser classificado de acordo com os parâmetros seguintes.

Parâmetro	Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
A Conteúdos	**4**	Apresenta, de forma completa, as duas justificações solicitadas.	16
	3	Apresenta, de forma completa, uma das justificações solicitadas e, de forma incompleta, a outra justificação.	12
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma das justificações solicitadas. OU Apresenta, de forma incompleta, as duas justificações solicitadas.	8
	1	Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das justificações solicitadas.	4
B Linguagem Científica	**2**	Utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	2
	1	Utiliza, embora com uma ou mais falhas, o vocabulário específico da Matemática.	1

7.1. .... **18 pontos**

Determinar o preço a pagar à transportadora A $(15{,}50\ €)$ .... 8 pontos

Determinar o preço a pagar à transportadora B $(13{,}50\ €)$ .... 8 pontos

Apresentar a resposta (Transportadora B) .... 2 pontos

7.2. .... **18 pontos**

Escrever uma expressão para o preço a pagar, em euros, na transportadora A, em função da extensão, em km $(9{,}5 + 0{,}6x)$, ou equivalente .... 4 pontos

Escrever uma expressão para o preço a pagar, em euros, na transportadora B, em função da extensão, em km $(5 + 0{,}85x)$, ou equivalente .... 4 pontos

Equacionar o problema $(9{,}5 + 0{,}6x = 5 + 0{,}85x)$, ou equivalente .... 5 pontos

Obter a resposta $(18\ \mathrm{km})$ .... 5 pontos

8.1. .... **18 pontos**

Reconhecer que, numa progressão aritmética, a diferença entre cada dois termos consecutivos é constante .... 4 pontos

Obter dois termos consecutivos da sucessão (por exemplo, $\frac{\pi}{2}$ e π) .... (4 + 4) .... 8 pontos

Obter a diferença entre esses termos $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .... 6 pontos

8.2. .... **18 pontos**

Obter o 1.º termo $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .... 2 pontos

Escrever uma expressão que permita calcular o termo de ordem 100 .... 5 pontos

Obter o termo de ordem 100 (50π) .... 2 pontos

Escrever $\dfrac{\frac{\pi}{2}+50\pi}{2}\times 100$ (ou equivalente) .... 6 pontos

Obter 2525π .... 3 pontos

9.1. .... **18 pontos**

Reconhecer que $[ABM]$ é retângulo em M, sendo M o ponto médio de $[AC]$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Escrever $\operatorname{sen} x = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ (ou equivalente) .... 7 pontos

Obter $\overline{AM} = 1{,}5 \times \operatorname{sen} x$ .... 3 pontos

Reconhecer que $\overline{AM} = \overline{MC}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $\overline{AC} = 3\operatorname{sen} x$ .... 2 pontos

9.2. .... **18 pontos**

Reconhecer que, por cada 25 voltas completas na manivela, x aumenta 30^{o}.. 2 pontos

Equacionar o problema ($3\operatorname{sen} x + 1 = 3\operatorname{sen}(x+30)$, ou equivalente) .... 6 pontos

Representar graficamente a função definida por $y = 3\operatorname{sen} x + 1$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Representar graficamente a função definida por $y = 3\operatorname{sen}(x+30)$ (**ver nota**) .... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 2 pontos

Obter a abcissa ou a ordenada desse ponto $(34{,}9129...$ ou $2{,}7169...)$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido $(1{,}72\text{ m})$ .... 2 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 2 pontos. Se não for respeitado o domínio, a soma das pontuações a atribuir a estas etapas é desvalorizada em 1 ponto.

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**4.**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**8.1.**	**9.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	14	14	18	14	14	18	18	18	18	**146**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**3.**	**5.1.**	**7.2.**	**8.2.**	**9.1.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 18 pontos									**54**
TOTAL										**200**