PAU PORTUGAL

Matematica MACS (835) 2021-2024

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 25

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos

Toomates Coolección **Problem Solving** (en español):
Geometría Axiomática , Problemas de Geometría 1 , Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría , Álgebra , Teoría de números , Combinatoria , Probabilidad
Trigonometría , Desigualdades , Números complejos , Funciones

Toomates Coolección **Llibres de Text** (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) , Àlgebra , Proporcionalitat , Mesures geomètriques , Geometria analítica
Combinatòria i Probabilitat , Estadística , Trigonometria , Funcions , Nombres Complexos ,
Àlgebra Lineal , Geometria Lineal , Càlcul Infinitesimal , Programació Lineal , Mates amb Excel

Toomates Coolección **Compendiums**:
PAU España: Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares
PAU Internacional: Portugal A Portugal B Italia UK (A Level) IB Francia (BAC)
Canguro: ESP CAT FR USA UK AUS
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Internacional: IMO OMI IGO SMT INMO CMO REOIM Arquimede HMMT BMO
Pruebas acceso: ACM4 , CFGS , PAP
Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales, para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **Catálogo de libros** completo en http://www.toomates.net/biblioteca.htm
Encontrarás muchos más materiales para el aprendizaje de las matemáticas en **www.toomates.net**
Descarga toda la biblioteca Toomates Coolección en un solo archivo **Aquí** MEGA

Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**

Versión de este documento: **26/06/2024**

Índex.

	Fase 1			Fase 2			Especial		
	Enun	Sol	Crit	Enun	Sol	Crit	Enun	Sol	Crit
2021	4	20	26	34	50	57	64	75	81
2022	88	103	110	117	133	139	146	158	164
2023	172	188	196	204	219	229			
2024	237		252						

Fuente.

Este documento forma parte de este grupo de recopilatorios:

Portugal 635 1997-2020 http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal635.pdf

Portugal 735 2006-2020 http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal735.pdf

Portugal 635 2021-2024 http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal635b.pdf

Portugal 735 2021-2024 http://www.toomates.net/biblioteca/Portugal735b.pdf

Portugal 835 2021-2024 http://www.toomates.net/biblioteca/Portuga835.pdf

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 13 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

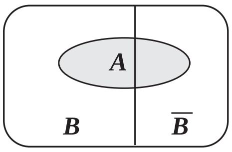
Modelos de grafos

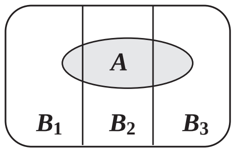
Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes





$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\quad \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	$1{,}645$	$1{,}960$	$2{,}576$

1. A ParaPagarApp é uma aplicação para telemóveis detida pela empresa ParaPagar. Depois de instalada, esta aplicação permite efetuar pagamentos em estabelecimentos aderentes recorrendo à Internet móvel.

Em 2020, foi necessário eleger uma nova equipa diretiva da ParaPagar. Nessa eleição, cada acionista da empresa teve de votar numa de quatro listas que se apresentaram a votação: listas A, B, C e D.

Apurados os resultados, verificou-se que o número de votos validamente expressos foi 7200.

* **1.1.** Os votos validamente expressos representaram 96% dos votos apurados e a abstenção foi de 20%.

Qual é o número de acionistas da empresa que poderiam ter votado no momento deste ato eleitoral?

(A) 7500 **(B)** 9000 **(C)** 9375 **(D)** 37 500

1.2. Na Tabela 1, apresenta-se o número de votos validamente expressos em cada uma das listas.

Tabela 1

Lista	**A**	**B**	**C**	**D**
Votos	1505	2295	1750	1650

A nova equipa diretiva, constituída por 24 elementos, resultou da aplicação do método seguinte.

1.º passo: Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total de votos validamente expressos pelo número de elementos da equipa diretiva.

2.º passo: Calcula-se a quota inferior de cada lista, arredondando, por defeito, às unidades o resultado da divisão entre o número de votos de cada lista e o divisor padrão.

3.º passo: Se a soma das quotas inferiores das quatro listas for igual ao número de elementos da equipa diretiva, o método dá-se por finalizado e assume-se que o número de elementos de cada lista é igual ao valor da quota inferior. Caso contrário, é necessário encontrar um divisor modificado.

- Se a soma das quotas inferiores for inferior ao número de elementos da equipa diretiva, subtrai-se um múltiplo de 10 ao divisor padrão.
- Se a soma das quotas inferiores for superior ao número de elementos da equipa diretiva, soma-se um múltiplo de 10 ao divisor padrão.

O divisor modificado irá substituir o divisor padrão, de modo a calcular a quota inferior modificada de cada lista.

4.º passo: Repetem-se os 2.º e 3.º passos até se obter uma soma das quotas inferiores modificadas que seja igual ao número de elementos da equipa diretiva, atribuindo-se a cada lista o número de elementos igual à respetiva quota inferior modificada.

Determine o número de elementos que cada lista conseguiu eleger para a nova equipa diretiva da ParaPagar, recorrendo ao método descrito.

*** 2.** Para distinguir os três trabalhadores com melhores resultados operacionais, a administração da ParaPagar atribuiu como prémio de produtividade três telemóveis de modelos diferentes.

Como os três trabalhadores não chegaram a acordo quanto à distribuição dos telemóveis, decidiram que iriam distribuí-los entre si utilizando o método seguinte.

- Cada trabalhador atribui, secretamente, um valor monetário a cada um dos três telemóveis e introduz o registo dessas licitações num envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído aos telemóveis por cada trabalhador e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada trabalhador considera justo receber é igual a um terço do valor global que ele atribuiu ao conjunto dos três telemóveis.
- Cada telemóvel é entregue ao trabalhador que mais o valoriza, considerando-se que o trabalhador recebe o valor monetário que lhe atribuiu.
- Caso, por aplicação do procedimento anterior, um trabalhador não receba qualquer telemóvel, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o valor monetário recebido por esse trabalhador é zero euros.
- Caso o valor dos telemóveis recebidos por um trabalhador ultrapasse o valor que tinha considerado justo receber, o trabalhador disponibiliza, em dinheiro, o respetivo excedente. Caso contrário, o trabalhador recebe, em dinheiro, do montante à disposição, o valor em falta.
- Após os procedimentos anteriores, caso ainda reste dinheiro, este é distribuído em partes iguais pelos três trabalhadores.

Na Tabela 2, estão registados os valores, em euros, atribuídos por cada trabalhador nas licitações secretas.

Tabela 2

Telemóveis / Trabalhadores	A	B	C
Mariana	370	480	230
Pedro	330	500	205
Tiago	290	480	190

Determine, de acordo com o método acima descrito, como serão distribuídos os telemóveis pelos trabalhadores e o valor monetário a pagar ou a receber após a inclusão do dinheiro que possa ter sido distribuído, para que nenhum deles tenha razão para reclamar.

3. A ParaPagar pretende renovar a rede de cabo de fibra ótica em algumas das ligações existentes entre seis postos de comunicação, $P1$, $P2$, $P3$, $P4$, $P5$ e $P6$.

Na Figura 1, apresenta-se um esquema simplificado dessas ligações, no qual se indica, junto de cada segmento de reta, o comprimento, em quilómetros, de cada ligação.

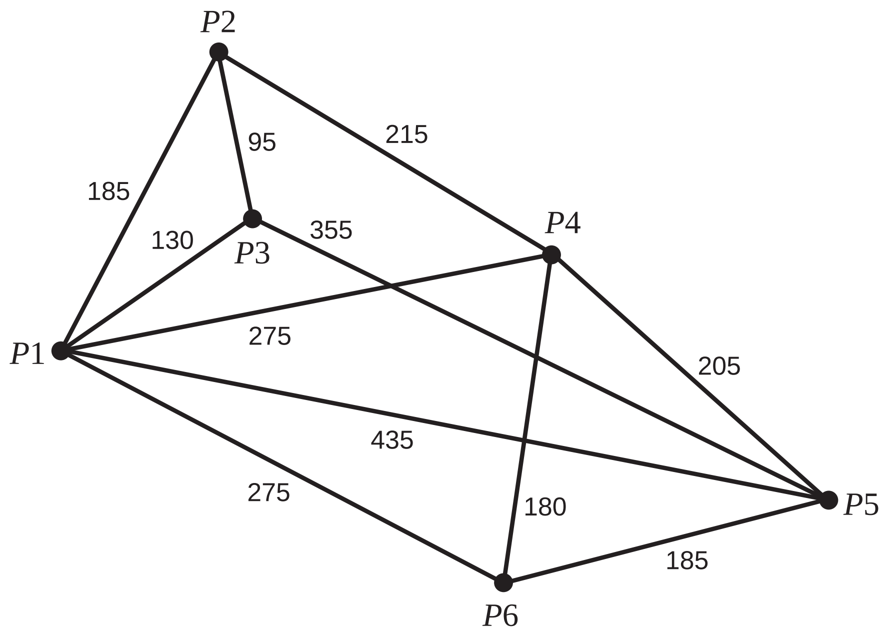


Figura 1

Com vista à minimização de custos, optou-se por começar a renovação no posto de comunicação $P4$ e aplicar o método que a seguir se descreve.

- Seleciona-se o posto seguinte, tendo em conta que:
  - deverá corresponder ao posto mais próximo;
  - se houver dois postos à mesma distância, a seleção é aleatória.
- Procede-se como foi indicado no ponto anterior, partindo do último posto selecionado, não se repetindo nenhum e terminando depois de todos os postos serem incluídos.

Determine a quantidade mínima, em quilómetros, de cabo de fibra ótica a renovar.

Na sua resposta, apresente um grafo que resulte do método descrito e que permita identificar as ligações a renovar.

4. A ParaPagar tem 150 funcionários na região de Lisboa e Vale do Tejo cujas idades se apresentam no histograma de frequências absolutas acumuladas, representado na Figura 2, organizadas nas classes $[18, 28[$, $[28, 38[$, ... , $[58, 68[$.

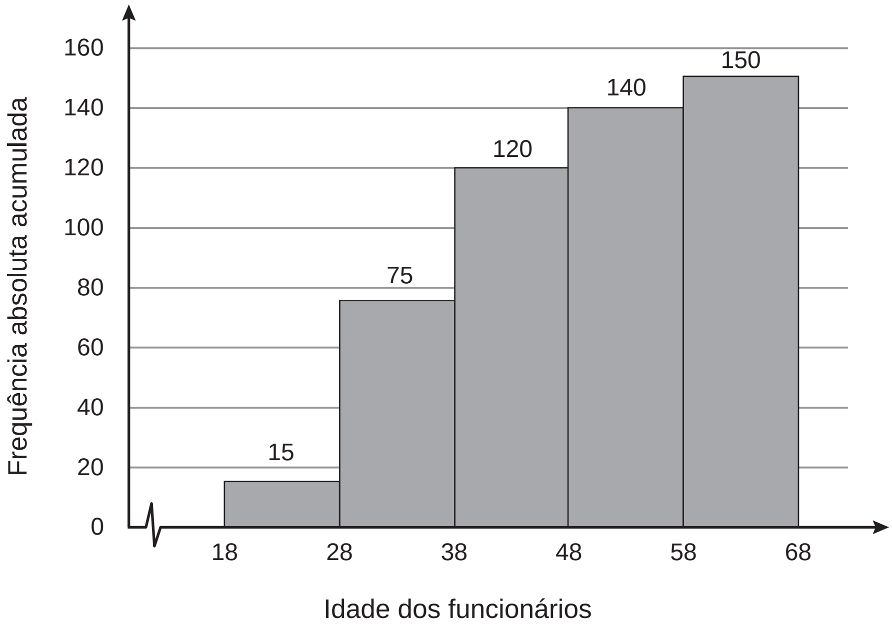


Figura 2

4.1. Determine, recorrendo ao histograma da Figura 2, a média das idades dos 150 funcionários.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

* **4.2.** Considere que, com os dados apresentados no histograma da Figura 2, será construído um gráfico circular, em que a cada sector corresponde o número de funcionários da região de Lisboa e Vale do Tejo, de acordo com as suas idades.

A amplitude do ângulo ao centro, em graus, correspondente ao sector circular relativo ao número de funcionários cuja idade pertence à classe $[18, 28[$ será

(A) 15° **(B)** 18° **(C)** 33° **(D)** 36°

4.3. Na Tabela 3, apresentam-se, organizadas por classes, as idades dos 100 funcionários da ParaPagar da região do Algarve.

Tabela 3

Idade	$[18, 28[$	$[28, 38[$	$[38, 48[$	$[48, 58[$	$[58, 68[$
N.º de funcionários	30	25	30	10	5

Apresente uma tabela de frequências relativas acumuladas para as idades dos 250 funcionários da ParaPagar, 150 da região de Lisboa e Vale do Tejo e 100 da região do Algarve.

Na sua resposta, mantenha as classes utilizadas.

5. Ao fazer pagamentos recorrendo à ParaPagarApp, o utilizador pode optar por fracionar o pagamento de 2 até 12 prestações mensais.

O valor da prestação mensal P, em euros, é dado pelo arredondamento às unidades do valor obtido pela expressão

$$P = \frac{VF \times i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

em que

VF é o valor financiado, em euros;

i é a taxa de juro mensal, na forma de dízima;

n é o número de prestações mensais.

Para comprar um telemóvel, o Tiago solicitou um financiamento de 500 euros e decidiu pagá-lo de forma fracionada, recorrendo à ParaPagarApp.

Admita que a taxa de juro mensal é 3% e que o Tiago pode pagar, no máximo, 75 euros em cada prestação mensal.

Uma vez que, quanto maior for o número de prestações mensais, maior é o valor total final a pagar, o Tiago fez cálculos para decidir em quantas prestações mensais faria o pagamento, de modo a ser mais vantajoso.

Determine o valor total pago pelo Tiago, depois de pagar todas as prestações.

Na sua resposta, apresente:

– a expressão de P no contexto da situação descrita;

– uma tabela que permita obter o solicitado;

– o número de prestações mensais pagas pelo Tiago.

6. Admita que, no início do ano de 2016, a ParaPagarApp tinha, em Portugal continental, 50 000 utilizadores.

O número de utilizadores, em milhares, que, t anos após o início do ano de 2016, na região do Alentejo, utiliza a ParaPagarApp é bem aproximado pelo modelo

$$A(t) = \frac{20}{1 + e^{-0,2t}}$$

* **6.1.** Determine a percentagem de utilizadores da aplicação ParaPagarApp em Portugal continental que não pertenciam à região do Alentejo no início do ano de 2016.

6.2. Numa perspetiva de longo prazo, estima-se que, com o passar dos anos, o número de utilizadores da ParaPagarApp, em Portugal continental, seja 200 000.

Na Figura 3, apresenta-se um mapa de Portugal continental e, parcialmente, a estimativa da percentagem de utilizadores da ParaPagarApp, por regiões, numa perspetiva de longo prazo.

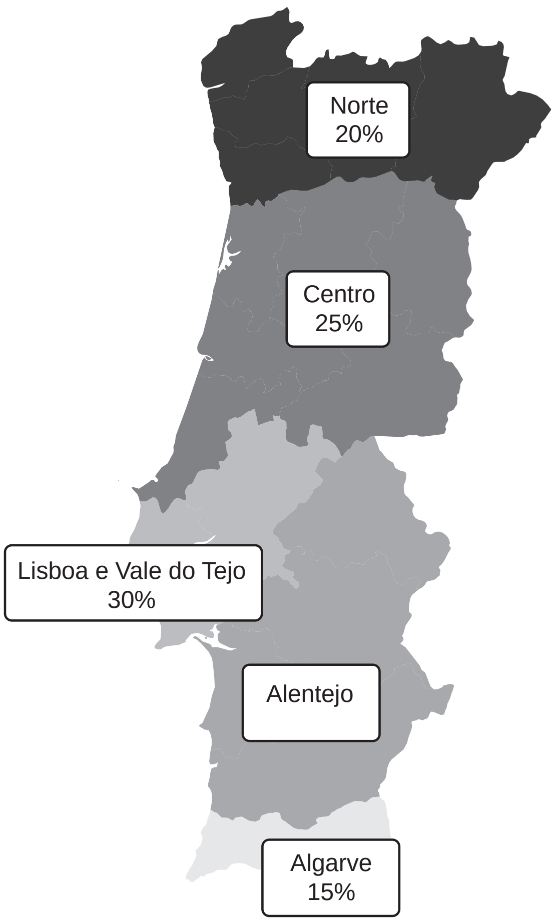


Figura 3

Atendendo aos dados apresentados na Figura 3, averigue se o modelo apresentado para o Alentejo poderá estar correto para uma estimativa a longo prazo de utilizadores da aplicação em Portugal continental. Justifique a sua resposta.

7. A ParaPagarApp foi lançada no início do ano de 2015.

Num relatório técnico, verifica-se que a percentagem, D, de novos utilizadores que tiveram dificuldades na instalação da aplicação, t anos após o seu lançamento, é bem aproximada pelo modelo cujo gráfico se apresenta na Figura 4.

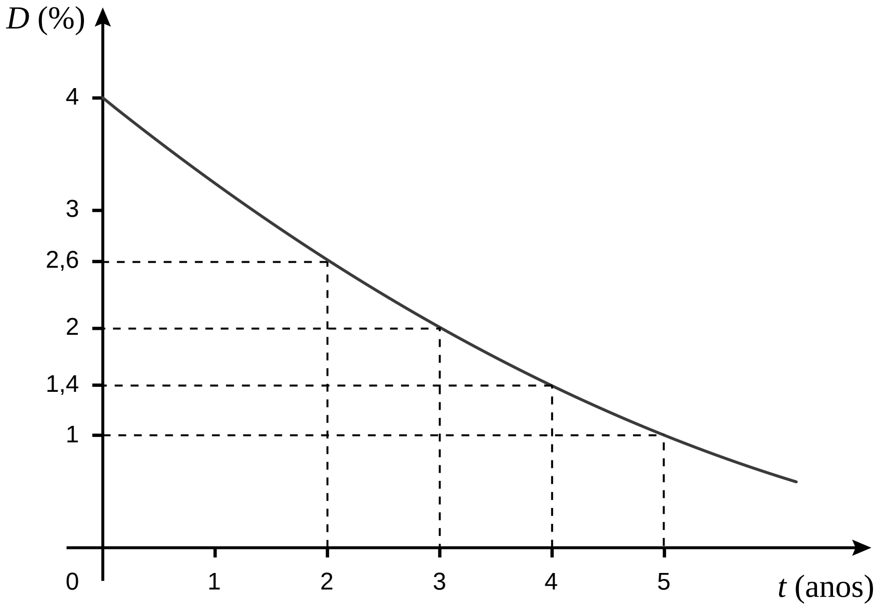


Figura 4

Realizou-se um estudo sobre os novos utilizadores da ParaPagarApp no início do ano de 2018 e concluiu-se que:

- 40% dos novos utilizadores que tiveram dificuldades na instalação da aplicação consideram a aplicação de fácil manuseamento;
- 90% dos novos utilizadores que não tiveram dificuldades na instalação da aplicação consideram a aplicação de fácil manuseamento.

Escolheu-se ao acaso um novo utilizador da ParaPagarApp que instalou a aplicação no início do ano de 2018.

Com base no estudo realizado e de acordo com o modelo apresentado na Figura 4, determine a probabilidade de o novo utilizador não considerar a aplicação de fácil manuseamento.

Apresente o resultado na forma de dízima.

*** 8.** Por razões de segurança, sempre que se pretende efetuar um pagamento com a ParaPagarApp, é necessário escrever uma palavra-passe anteriormente escolhida pelo utilizador.

O Tiago é um utilizador da ParaPagarApp. Tendo nascido no dia 8 de maio (mês 5) de 2001, escolheu as letras T e G e os algarismos 8, 5 e 1 para a construção da sua palavra-passe.

Certo dia, o Tiago não se recordava exatamente de qual seria a palavra-passe que escolhera, embora soubesse que:

- os algarismos estavam dispostos consecutivamente, formando o número 851;
- as letras utilizadas eram T e G, escritas por uma qualquer ordem.

Atendendo ao que sabia, o Tiago escreveu uma possível palavra-passe.

A probabilidade de o Tiago acertar na palavra-passe correta à primeira tentativa é igual a

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

*** 9.** Por vezes, por esquecimento da palavra-passe ou por erros ocasionais na sua escrita, um utilizador escreve a palavra-passe incorretamente.

Admita que, em 10% das situações, os utilizadores cometem erros na escrita da palavra-passe.

Determine a probabilidade de, selecionando três utilizadores ao acaso, apenas um deles não cometer erros na escrita da palavra-passe.

Apresente o resultado na forma de dízima.

10. Inquiriram-se 625 utilizadores da ParaPagarApp relativamente ao valor pago na última compra em que usaram a aplicação.

Na Tabela 4, apresentam-se os dados recolhidos.

Tabela 4

Valor pago, em euros	$]0, 20]$	$]20, 40]$	$]40, 60]$	$]60, 80]$	$]80, 100]$
N.º de utilizadores	308	81	44	128	64

Recorrendo aos dados da tabela anterior, construa um intervalo de confiança a 90% para a proporção de utilizadores da ParaPagarApp que, na última compra, usaram a aplicação, pagaram mais de 20 euros e, no máximo, pagaram 60 euros.

Apresente os valores dos extremos do intervalo arredondados às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve seis casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.1.</td><td>2.</td><td>4.2.</td><td>5.</td><td>6.1.</td><td>7.</td><td>8.</td><td>9.</td><td>10.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>20</td><td>12</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>12</td><td>18</td><td>18</td><td>146</td></tr>
<tr><td>Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">1.2.</td><td colspan="2">3.</td><td colspan="2">4.1.</td><td colspan="2">4.3.</td><td>6.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="9">3 x 18 pontos</td><td>54</td></tr>
<tr><td colspan="10">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 835

1.ª Fase

1.

1.1. Temos que:

- O número total de votos validamente expressos foi 7200, correspondentes a 96% dos votos apurados, pelo que o número de votos apurados (VA), é:

$$\frac{VA}{7200} = \frac{100}{96} \Leftrightarrow VA = \frac{7200 \times 100}{96} \Leftrightarrow VA = 7500$$

- Como a abstenção foi de 20%, o número de votos apurados (VA), corresponde a $100 - 20 = 80\%$ do número de acionistas da empresa que poderiam ter votado (NA), ou seja:

$$\frac{NA}{7500} = \frac{100}{80} \Leftrightarrow NA = \frac{7500 \times 100}{80} \Leftrightarrow VA = 9375$$

Resposta: **Opção C**

1.2. Aplicando o método descrito, temos:

Lista	**A**	**B**	**C**	**D**
Votos	1505	2295	1750	1650
N.º total de votos	$1505 + 2295 + 1750 + 1650 = 7200$			
Divisor padrão	$\frac{7200}{24} = 300$			
Quota inferior	$\frac{1505}{300} \approx 5$	$\frac{2295}{300} \approx 7$	$\frac{1750}{300} \approx 5$	$\frac{1650}{300} \approx 5$
Soma das quotas inferiores	$5 + 7 + 5 + 5 = 22$ (inferior a 24)			
Divisor modificado	$300 - 10 = 290$			
Quota inferior modificada	$\frac{1505}{290} \approx 5$	$\frac{2295}{290} \approx 7$	$\frac{1750}{290} \approx 6$	$\frac{1650}{290} \approx 5$
Soma das quotas inferiores modificadas	$5 + 7 + 6 + 5 = 23$ (inferior a 24)			
Divisor modificado	$300 - 2 \times 10 = 280$			
Quota inferior modificada	$\frac{1505}{280} \approx 5$	$\frac{2295}{280} \approx 8$	$\frac{1750}{280} \approx 6$	$\frac{1650}{280} \approx 5$
Soma das quotas inferiores modificadas	$5 + 8 + 6 + 5 = 24$			

Assim, o número de elementos que cada lista conseguiu eleger para a nova equipa diretiva da Para-Pagar, recorrendo ao método descrito, é:

- 5 elementos da lista A,
- 8 elementos da lista B,
- 6 elementos da lista C,
- 5 elementos da lista D.

2. Aplicando o método descrito, vem:

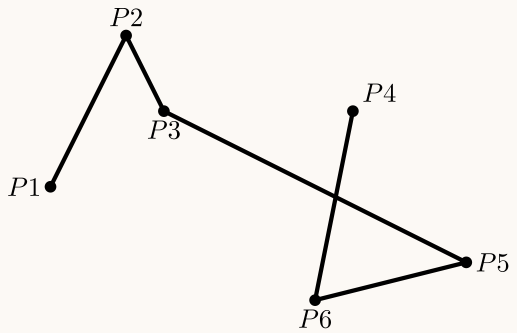
Telemóveis \ Trabalhadores	Mariana	Pedro	Tiago
A	370	330	290
B	480	500	480
C	230	205	190
Valor global atribuído	1080	1035	960
Valor considerado justo	$\frac{1080}{3} = 360$	$\frac{1035}{3} = 345$	$\frac{960}{3} = 320$
Atribuição dos telemóveis	A+C	B	—
Valor monetário recebido	$370 + 230 = 600$	500	0
Excedente disponibilizado	$600 - 360 = 240$	$500 - 345 = 155$	—
Valor em falta recebido	—	—	320
Montante restante	$240 + 155 - 320 = 75$		
Divisão final	$\frac{75}{3} = 25$		

Assim, de acordo com o método descrito, a parte que cada trabalhador deve receber é:

- Mariana: Recebe os telemóveis A e C e paga e $240 - 25 = 215$ euros
- Pedro: Recebe o telemóvel B e paga e $155 - 25 = 130$ euros
- Tiago: Recebe $320 + 25 = 345$ euros

3. Pela observação do grafo e de acordo com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação dos postos e grafo da figura:

I - Posto $P4$ - Posto inicial
II - Posto $P6$ - distância 180
III - Posto $P5$ - distância 185
IV - Posto $P3$ - distância 355
IV - Posto $P2$ - distância 95
V - Posto $P1$ - distância 185



Desta forma, a quantidade mínima, em quilómetros, de cabo de fibra ótica a renovar, é:

$$180 + 185 + 355 + 95 + 185 = 1000 \text{ km}$$

4.

4.1. Começamos por identificar a marca de classe relativa a cada barra do histograma e calcular a frequência absoluta simples (a partir da frequência absoluta acumulada, por subtrações sucessivas), como se apresenta na tabela seguinte:

Classes	Marca de classe	Frequência absoluta acumulada	Frequência absoluta simples
[18,28[	$\frac{18+28}{2} = 23$	15	15
[28,38[	$\frac{28+38}{2} = 33$	75	$75 - 15 = 60$
[38,48[	$\frac{38+48}{2} = 43$	120	$120 - 75 = 45$
[48,58[	$\frac{48+58}{2} = 53$	140	$140 - 120 = 20$
[58,68[	$\frac{58+68}{2} = 63$	150	$150 - 140 = 10$

Assim, introduzindo na calculadora gráficas listas correspondentes às marca de classe e às frequências absolutas simples e calculando as medidas estatísticas referentes a estas duas listas obtemos o valor da média das idades dos 150 funcionários, com arredondamento às unidades:

$$\overline{x} \approx 40$$

4.2. A amplitude do ângulo ao centro de cada setor do gráfico circular é diretamente proporcional à frequência absoluta da classe que representa. Assim, como a soma das amplitudes é 360° e a soma das fequências absolutas é 150, temos que a amplitude α do sector circular relativo ao número de funcionários cuja idade pertence à classe $[18, 28[$, cuja frequência absoluta é 15, temos que:

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{15}{150} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{360} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \alpha = \frac{360}{10} \Leftrightarrow \alpha = 36^\circ$$

Resposta: **Opção D**

4.3. Considerando as frequências absolutas relativas aos 150 funionários de Lisboa e Vale do Tejo (identificados no item 4.2.) e as relativas 100 funcionários do Algarve, podemos determinar a frequência absoluta simples dos 250 funcionários, depois a frequência relativa simples e finalmente a frequência relativa acumulada, de acordo com a tabela seguinte.

Classes	Lisboa VT	Algarve	Frequência absoluta simples (total)	Frequência relativa simples (total)	Frequência relativa acumulada (total)
[18,28[	15	30	$15 + 30 = 45$	$\frac{45}{250} = 0{,}18$	0,18
[28,38[	60	25	$60 + 25 = 85$	$\frac{85}{250} = 0{,}34$	$0{,}18 + 0{,}34 = 0{,}52$
[38,48[	45	30	$45 + 30 = 75$	$\frac{75}{250} = 0{,}3$	$0{,}52 + 0{,}3 = 0{,}82$
[48,58[	20	10	$20 + 10 = 30$	$\frac{30}{250} = 0{,}12$	$0{,}82 + 0{,}12 = 0{,}94$
[58,68[	10	5	$10 + 5 = 15$	$\frac{15}{250} = 0{,}06$	$0{,}94 + 0{,}06 = 1$
Total	150	100	$150 + 100 = 250$	—	—

5. Identificando os valores de que depende o cálculo de P, temos:
   - $VF = 500$
   - $i = 0{,}03$
   - n entre 2 e 12

   Assim, temos que o valor de P, para cada valor de n, é dado por $P = \dfrac{500 \times 0{,}03 \times (1+0{,}03)^n}{(1+0{,}03)^n - 1}$

   Desta forma, determinando os valores de P, ou seja, da prestação mensal para cada valor de n, e verificando qual é o menor valor de n a que corresponde um valor de P inferior a 75, temos:

n	2	...	7	8
P	$\frac{500 \times 0{,}03 \times (1+0{,}03)^2}{(1+0{,}03)^2 - 1} \approx 261$	...	$\frac{500 \times 0{,}03 \times (1+0{,}03)^7}{(1+0{,}03)^8 - 1} \approx 80$	$\frac{500 \times 0{,}03 \times (1+0{,}03)^8}{(1+0{,}03)^8 - 1} \approx 71$

   Assim concluímos que $n = 8$, ou seja, o Tiago deve optar por fracionar o pagamento em 8 prestações mensais de 71 euros, e assim o valor total a pagar pelo telemóvel, é:

$$8 \times 71 = 568 \text{ euros}$$

6.

   6.1. Como o número de utilizadores, em milhares, que, t anos após o início do ano de 2016, na região do Alentejo, utiliza a ParaPagarApp é bem aproximado pelo modelo, no início de 2016 ($t = 0$), o número de utilizadores era:

$$A(0) = \frac{20}{1 + e^{-0{,}2 \times 0}} = 10 \text{ milhares}$$

   Como o número de utilizadores, em Portugal continental, era 50 000, ou seja, 50 milhares, e o número de utilizadores que não pertenciam à região do Alentejo, correspondente a $50 - 10 = 40$ milhares, então calculando a percentagem, p, correspondente aos utilizadores que não não pertenciam à região do Alentejo, temos:

$$\frac{p}{40} = \frac{100}{50} \Leftrightarrow p = \frac{40 \times 100}{50} \Leftrightarrow p = \frac{40 \times 100}{50} \Leftrightarrow p = 80$$

   Ou seja, no início de 2016 a percentagem de utilizadores da aplicação que não pertenciam à região do Alentejo era 80%.

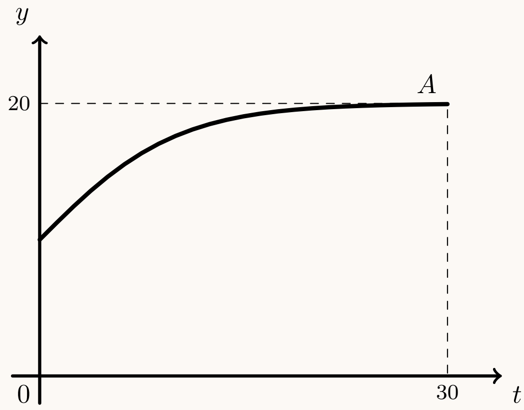
   6.2. Atendendo aos valores indicados no mapa, a percentagem de utilizadores da aplicação no Alentejo, numa perspetiva de longo prazo, é:

$$100 - 20 - 25 - 30 - 15 = 10$$

   Como o número de utilizadores da aplicação em Portugal continental, se estima em 200 000, o número de utilizadores estimado na região do Alentejo, ou seja 10% deste valor, corresponde a:

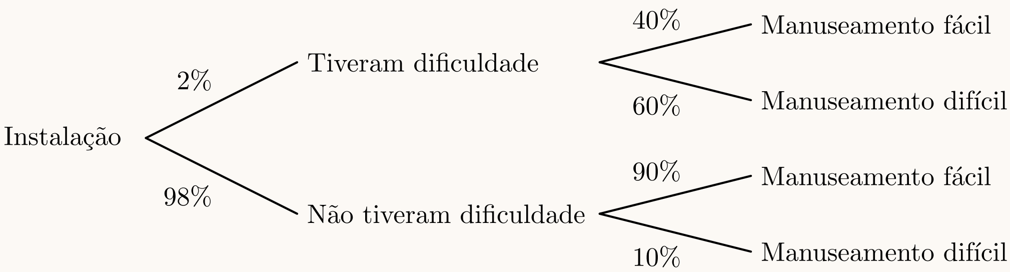
$$200\,000 \times 0{,}1 = 20\,000$$

   Representando o modelo apresentado para a região Alentejo, num horizonte temporal alargado, por exemplo de 30 anos, ou seja até 2046 ou seja, $0 \leq x \leq 30$, obtemos o gráfico que se encontra reproduzido na figura ao lado.



   Determinando o valor aproximado de utilizadores esperados no ano 2046, ou seja, numa perspetiva de longo prazo, podemos verificar que o número de utilizadores no Alentejo tende a estabilizar em 20 milhares, ou seja, um valor aproximadamente igual ao valor calculado a partir dos dados do mapa, pelo que se pode considerar o modelo adequado.

7. Como a ParaPagarApp foi lançada no início do ano de 2015, no início de 2108 tinham tinham decorrido 3 anos do seu lançamento ($t = 3$), pelo que, de acordo com o modelo, podemos verificar que neste período (início de 2018) 2% dos novos utilizadores tiveram dificuldades na instalação da aplicação. Assim, esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso um novo utilizador da ParaPagarApp que instalou a aplicação no início do ano de 2018, e os acontecimentos:
D: "O utilizador teve dificuldade na instalação"
F: "O utilizador considerou o aplicação de fácil manuseamento"

Temos, que o valor da probabilidade, na forma de dízima, de o novo utilizador não considerar a aplicação de fácil manuseamento, é:

$$P\left(\overline{F}\right) = P\left(D \cap \overline{F}\right) + P\left(\overline{D} \cap \overline{F}\right) = 0{,}02 \times 0{,}6 + 0{,}98 \times 0{,}1 = 0{,}11$$

8. De acordo com as condições de que o Tiago se recordava, existem 6 palavras-passe distintas:

851 T G — T 851 G — T G 851

851 G T — G 851 T — G T 851

Logo a probabilidade de o Tiago acertar na palavra-passe correta à primeira tentativa é $\frac{1}{6}$

Resposta: **Opção A**

9. Considerando que a probabilidade de um utilizador cometer um erro na escrita da palavra passe é de 10%, ou seja $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, a probabilidade de não cometer erros é de $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

Assim, selecionando três utilizadores ao acaso, a probabilidade, na forma de dízima, de apenas um deles não cometer erros na escrita da palavra-passe, é:

$$\overbrace{\frac{9}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}}^{\text{apenas o 1.º não erra}} + \overbrace{\frac{1}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10}}^{\text{apenas o 2.º não erra}} + \overbrace{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10}}^{\text{apenas o 3.º não era}} = 3 \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{27}{1000} = 0{,}027$$

10. Observando a tabela podemos verificar que dos 625 utilizadores da ParaPagarApp, o número dos que na última compra, usaram a aplicação, pagaram mais de 20 euros e, no máximo, pagaram 60 euros, é:

$$81 + 44 = 125$$

Assim, como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 625$
- A proporção amostral dos clientes que consideram as obras necessárias: $\hat{p} = \dfrac{125}{625} = 0{,}2$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\, , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left]0{,}2 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}2(1-0{,}2)}{625}}\ ;\ 0{,}2 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}2(1-0{,}2)}{625}}\right[\approx \left]0{,}17; 0{,}23\right[$$

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação 8 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).

8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... **12 pontos**

(C)

1.2. .... **18 pontos**

Calcular o divisor padrão (300) .... 2 pontos

Calcular as quotas inferiores de cada lista $(5; 7; 5; 5)$ .... (1 + 1 + 1 + 1)............... 4 pontos

Mostrar que, utilizando o divisor padrão, o número de elementos é inferior ao solicitado (22) .... 2 pontos

Indicar o divisor modificado (280) .... 4 pontos

Calcular as quotas inferiores modificadas de cada lista $(5; 8; 6; 5)$ .... (1 + 1 + 1 + 1)............... 4 pontos

Indicar a distribuição dos elementos .... 2 pontos
[Lista A – 5 elementos; Lista B – 8 elementos; Lista C – 6 elementos; Lista D – 5 elementos]

2. .... **20 pontos**

Determinar o valor global atribuído aos telemóveis por cada trabalhador $(1080\ €; 1035\ €; 960\ €)$ .... (1 + 1 + 1)..................... 3 pontos

Determinar o valor justo a receber por cada trabalhador $(360\ €; 345\ €; 320\ €)$ .... (1 + 1 + 1)..................... 3 pontos

Indicar a distribuição dos telemóveis pelos trabalhadores (Mariana – Telemóveis A e C; Pedro – Telemóvel B) .... 2 pontos

Determinar o valor a pagar ou a receber por cada trabalhador (Mariana – paga 240 €; Pedro – paga 155 €; Tiago recebe 320 €) .... 4 pontos

Determinar o valor monetário a distribuir pelos trabalhadores $(25\ €)$ .... 4 pontos

Indicar a distribuição final dos telemóveis pelos trabalhadores e o valor a pagar ou a receber .... 4 pontos
[Mariana – recebe os telemóveis A e C e paga 215 euros; Pedro – recebe o telemóvel B e paga 130 euros; Tiago – recebe 345 euros]

3. .... **18 pontos**

Apresentar um grafo que resulta do método descrito .... 12 pontos

- Associar os vértices aos postos de comunicação .... 2 pontos
- Associar as arestas às ligações entre postos .... 10 pontos

Apresentar a quantidade mínima de cabo de fibra ótica a renovar $(1000\ \text{km})$ ... 6 pontos

4.1. .... **18 pontos**

Identificar a marca de cada classe $(23, 33, 43, 53, 63)$ .... 3 pontos

Determinar a frequência absoluta simples de cada classe
$(15, 60, 45, 20, 10)$ .... 10 pontos

Obter o valor solicitado (40) .... 5 pontos

4.2. .... **12 pontos**

(D)

4.3. .... **18 pontos**

Determinar a frequência absoluta acumulada
para a região do Algarve $(30, 55, 85, 95, 100)$ .... 5 pontos

Determinar a frequência acumulada dos 250 funcionários
$(45, 130, 205, 235, 250)$ .... 5 pontos

Determinar as frequências relativas acumuladas dos 250 funcionários
$(0{,}18;\ 0{,}52;\ 0{,}82;\ 0{,}94;\ 1)$ (ou equivalente) .... 5 pontos

Apresentar a tabela de frequências relativas acumuladas .... 3 pontos

5. .... **18 pontos**

Identificar os valores de VF e i $(500;\ 0{,}03)$ ....(1 + 2).............. 3 pontos

Escrever $P = \dfrac{500 \times 0{,}03 \times (1{,}03)^n}{(1{,}03)^n - 1}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Apresentar as linhas relevantes da tabela utilizada .... 6 pontos

Obter o valor de n (8) .... 3 pontos

Determinar o valor total a pagar pelo telemóvel $(568$ euros$)$ .... 4 pontos

6.1. .... **18 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Identificar $t = 0$ .... 2 pontos

Calcular $A(0)$ (10) .... 3 pontos

Reconhecer o número de utilizadores da ParaPagarApp em
Portugal Continental que pertenciam à região do Alentejo
no início do ano 2016 $(10\,000)$ .... 3 pontos

Determinar o número de utilizadores da ParaPagarApp em
Portugal Continental que não pertenciam à região do Alentejo
no início do ano 2016 $(40\,000)$ .... 3 pontos

Determinar o valor solicitado (80%) .... 7 pontos

2.º Processo

Identificar $t = 0$ .... 2 pontos

Calcular $A(0)$ (10) .... 3 pontos

Reconhecer o número de utilizadores da ParaPagarApp em Portugal Continental que pertenciam à região do Alentejo no início do ano 2016 $(10\ 000)$ .... 3 pontos

Determinar a percentagem do número de utilizadores da ParaPagarApp em Portugal Continental que pertenciam à região do Alentejo no início do ano 2016 (20%) .... 7 pontos

Determinar o valor solicitado (80%) .... 3 pontos

6.2. .... **18 pontos**

Determinar a percentagem de utilizadores da região do Alentejo que se prevê que a ParaPagarApp atingirá, atendendo à informação apresentada na Figura 3 (10%) .... 4 pontos

Determinar o número de utilizadores da ParaPagarApp estimado para a região do Alentejo a longo prazo $(20\ 000)$ .... 6 pontos

Identificar o valor máximo de utilizadores da ParaPagarApp que se estima para a região do Alentejo, a partir do modelo $(20\ 000)$ .... 6 pontos

Concluir .... 2 pontos

[O modelo que se ajusta ao Alentejo poderá estar correto para uma estimativa a longo prazo de utilizadores da aplicação em Portugal continental.]

7. .... **18 pontos**

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

D: «Novo utilizador que teve dificuldade na instalação da ParaPagarApp»

F: «Novo utilizador que considera a aplicação de fácil manuseamento»

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Calcular $P(D)$ .... 4 pontos

- Identificar $t = 3$ .... 2 pontos
- Obter $P(D)$ $(0{,}02)$ .... 2 pontos

Calcular $P(D \cap \overline{F})$ .... 5 pontos

- Escrever $P(F \mid D) = 0{,}4$ .... 1 ponto
- Obter $P(\overline{F} \mid D)$ $(0{,}6)$ .... 2 pontos
- Obter $P(D \cap \overline{F})$ $(0{,}012)$ .... 2 pontos

Calcular $P(\overline{D} \cap \overline{F})$ .... 7 pontos

- Calcular $P(\overline{D})$ $(0{,}98)$ .... 2 pontos
- Escrever $P(F \mid \overline{D}) = 0{,}9$ .... 1 ponto
- Obter $P(\overline{F} \mid \overline{D})$ $(0{,}1)$ .... 2 pontos
- Obter $P(\overline{D} \cap \overline{F})$ $(0{,}098)$ .... 2 pontos

Determinar $P(\overline{F})$ $(0{,}11)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Calcular $P(D)$ .... 4 pontos

Identificar $t=3$ .... 2 pontos

Obter $P(D)$ $(0{,}02)$ .... 2 pontos

Calcular $P(D \cap F)$ .... 3 pontos

Escrever $P(F \mid D)=0{,}4$ .... 1 ponto

Obter $P(D \cap F)$ $(0{,}008)$ .... 2 pontos

Calcular $P(\overline{D} \cap F)$ .... 5 pontos

Calcular $P(\overline{D})$ $(0{,}98)$ .... 2 pontos

Escrever $P(F \mid \overline{D})=0{,}9$ .... 1 ponto

Obter $P(\overline{D} \cap F)$ $(0{,}882)$ .... 2 pontos

Calcular $P(F)$ $(0{,}89)$ .... 2 pontos

Determinar $P(\overline{F})$ $(0{,}11)$ .... 4 pontos

8. .... **12 pontos**

(A)

9. .... **18 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Considere-se o seguinte acontecimento:

E: «Escrever palavra-passe errada»

Escrever $P(E)=0{,}1$ .... 1 ponto

Calcular $P(\overline{E})$ $(0{,}9)$ .... 3 pontos

Escrever $0{,}1^2 \times 0{,}9 \times 3$ (ou equivalente) .... (4 + 3 + 5)...................... 12 pontos

Obter o valor solicitado $(0{,}027)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Resposta obtida com recurso às potencialidades da calculadora, utilizando o modelo binomial.

Identificar o número de provas (3) .... 5 pontos

Identificar o número de sucessos (2) .... 7 pontos

Identificar a probabilidade de sucesso $(0{,}1)$ .... 4 pontos

Obter o valor solicitado $(0{,}027)$ .... 2 pontos

10. .... **18 pontos**

Identificar os valores de n e z para um intervalo de confiança a 90% .... 2 pontos

$n = 625$ .... 1 ponto

$z = 1{,}645$ .... 1 ponto

Determinar o valor de $\hat{p}$ .... 6 pontos

Determinar o número de utilizadores da ParaPagarApp que, na última compra, pagaram mais de 20 euros e, no máximo, pagaram 60 euros (125) .... 3 pontos

Obter o valor de $\hat{p}$ $(0{,}2)$ .... 3 pontos

Obter o intervalo solicitado $]0{,}17;\ 0{,}23[$ .... 10 pontos

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.1.</td><td>2.</td><td>4.2.</td><td>5.</td><td>6.1.</td><td>7.</td><td>8.</td><td>9.</td><td>10.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>20</td><td>12</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>12</td><td>18</td><td>18</td><td>146</td></tr>
<tr><td>Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">1.2.</td><td colspan="2">3.</td><td colspan="2">4.1.</td><td colspan="2">4.3.</td><td>6.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="9">3 x 18 pontos</td><td>54</td></tr>
<tr><td colspan="10">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 13 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

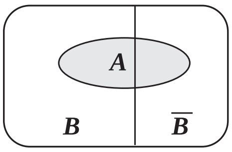
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

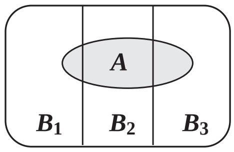
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

$\bar{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

$\bar{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	$1{,}645$	$1{,}960$	$2{,}576$

1. O Erasmus+ é o programa europeu que apoia a educação, a formação, a juventude e o desporto e que facilita a mobilidade académica de estudantes europeus através do mundo inteiro.

Numa universidade, realizou-se um estudo com o objetivo de aferir qual seria a cidade preferida, de entre Barcelona (B), Cracóvia (C), Praga (P) e Roma (R), para fazer Erasmus+.

Foram selecionados alguns estudantes que preencheram um boletim, no qual ordenaram as quatro cidades, de acordo com as suas preferências. Cada boletim preenchido, com uma determinada ordenação, correspondia a 1 voto.

Na Tabela 1, encontram-se parcialmente organizados os resultados da votação, em que X representa o número de votos na lista de preferências que apresentava Cracóvia como primeira preferência, Barcelona como segunda, Roma como terceira e Praga como quarta.

Tabela 1

N.º de votos / **Preferências**	**36**	**58**	***X***	**29**
1.ª	B	P	C	C
2.ª	P	R	B	P
3.ª	C	B	R	B
4.ª	R	C	P	R

Concluída a votação, o apuramento da cidade vencedora resultou do método a seguir descrito.

- Seleciona-se um par de cidades e atribui-se o número de votos registados em cada coluna à cidade mais bem posicionada, de entre as duas selecionadas.
- Comparam-se os votos obtidos por essas duas cidades. A cidade com o maior número de votos é a vencedora do par escolhido.
- Repetem-se os procedimentos anteriores até uma das cidades ter vencido em todas as comparações com as restantes. Essa cidade é a vencedora.

Verificou-se que Barcelona (B), tendo vencido em todas as comparações, foi a cidade vencedora depois de aplicado o método descrito aos votos apresentados na Tabela 1.

Indique o valor mínimo e o valor máximo que X pode representar.

Na sua resposta, apresente todos os cálculos que efetuar.

✱ 2. Na universidade, realiza-se anualmente um congresso para o qual são convidados 10 alunos que divulgam o programa Erasmus+.

Em 2019, os convites foram distribuídos entre os quatro grupos de alunos que fizeram Erasmus+ nas cidades de Barcelona (grupo B), Cracóvia (grupo C), Praga (grupo P) e Roma (grupo R).

Para definir o número de convites a atribuir a cada grupo de alunos, foi considerado o número de alunos de cada grupo e foi aplicado o método que a seguir se descreve.

- Divide-se o número de alunos de cada grupo sucessivamente por 1, 2, 3, 4, 5, etc.
- Ordenam-se todos os quocientes obtidos, arredondados às décimas, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os convites a atribuir. Caso existam quocientes iguais, o quociente do grupo com menor número de alunos deverá ficar primeiro do que o outro.
- Atribuem-se os convites ao grupo a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada um dos grupos tantos convites quantos os seus termos na série.

Na Tabela 2, indica-se a distribuição, por cada grupo, dos 2500 alunos que fizeram Erasmus+, em 2019, nas cidades indicadas.

Tabela 2

Grupo	**B**	**C**	**P**	**R**
Número de alunos	430	1020	850	200

Depois de conhecidos os resultados, um dos organizadores do congresso afirmou que a distribuição do número de convites seria diferente se estes tivessem sido atribuídos na proporção direta do número de alunos de cada grupo, com arredondamento às unidades.

Aplicando este método, ao grupo B, por exemplo, seriam atribuídos dois convites, uma vez que $\frac{430}{2500} \times 10 = 1{,}72$.

Mostre que a adoção do segundo método proposto seria vantajosa unicamente para o grupo R.

Na sua resposta, apresente o número de convites a atribuir a cada grupo, utilizando cada um dos dois métodos apresentados.

*** 3.** Na Figura 1, apresenta-se um esquema de um anfiteatro, de forma aproximadamente circular, cujo palco, também circular, está inserido no centro da plateia. O anfiteatro está dividido em duas partes iguais, a metade Oeste, representada a cinzento, e a metade Este, representada a branco.

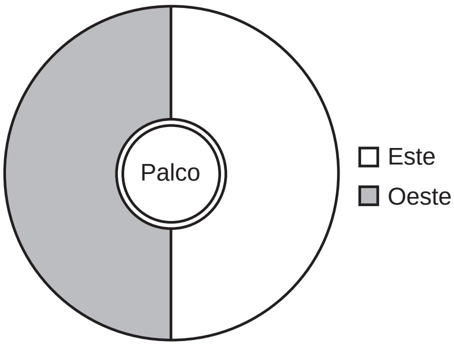


Figura 1

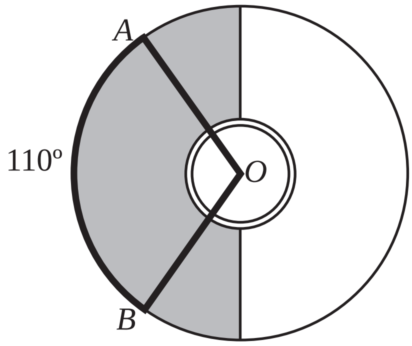
Neste anfiteatro, decorreu um espetáculo com a lotação esgotada.

Admita que os bilhetes dos lugares da metade Oeste do anfiteatro foram vendidos a um quarto do valor dos bilhetes da metade Este.

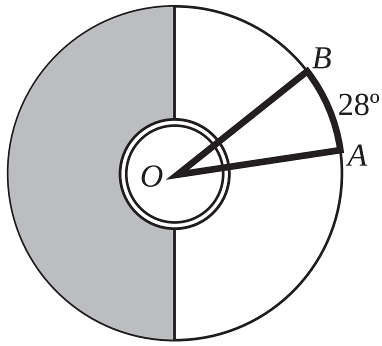
Em cada uma das opções seguintes, está realçado um sector circular AOB, que corresponde a uma parte do anfiteatro.

Em qual das opções está representado o sector circular AOB que permite obter maior receita de bilheteira?

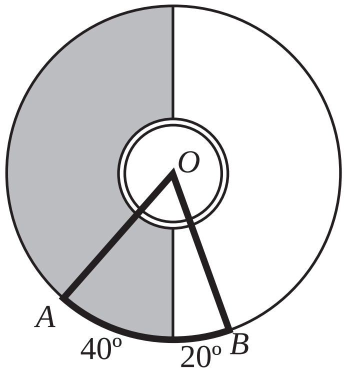
(A)



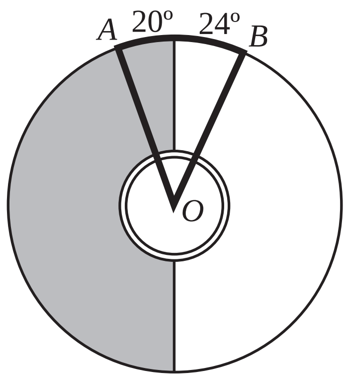
(B)



(C)



(D)



4. Num *campus* universitário, pretende-se instalar uma iluminação decorativa, constituída por um fio de luzes suspenso entre seis edifícios, E1, E2, E3, E4, E5 e E6.

A Tabela 3 apresenta o comprimento previsto, em metros, do fio de luzes que seria necessário instalar entre cada par de edifícios.

Tabela 3

	E1	E2	E3	E4	E5	E6
E1		1550	850	1420	1260	560
E2	1550		1000	320	340	1250
E3	850	1000		810	820	300
E4	1420	320	810		350	1050
E5	1260	340	820	350		1050
E6	560	1250	300	1050	1050	

De modo a minimizar o custo da instalação da iluminação decorativa, construiu-se um grafo que resulta do método que a seguir se descreve.

- Escolhe-se, ao acaso, um dos seis edifícios e, de seguida, de entre os restantes, seleciona-se aquele que, por se encontrar a uma menor distância do primeiro, implique um menor comprimento do fio de luzes previsto.
- Seleciona-se outro edifício que ainda não tenha sido escolhido e que, por se encontrar a uma menor distância dos edifícios anteriormente escolhidos, implique um menor comprimento do fio de luzes previsto.
- Repete-se o ponto anterior até todos os edifícios terem sido selecionados.

Admita que a instalação da iluminação decorativa terá um custo de 3,5 euros por cada metro de fio de luzes previsto.

Determine o custo total desta instalação.

Na sua resposta, apresente:

– um grafo ponderado que resulte da aplicação do método descrito;

– o comprimento mínimo previsto, em metros, do fio de luzes a instalar.

5. O número aproximado de alunos estrangeiros inscritos na faculdade $F1$, t anos após o início do ano de 2000, é dado, arredondando às unidades o valor obtido, pela expressão

$$E(t) = \frac{2500}{1 + 15e^{-0,27t}} \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots, 15)$$

Assim, por exemplo, o número aproximado de alunos estrangeiros inscritos nesta faculdade, dois anos após o início do ano de 2000, é 257, pois $E(2) = 256,64126\ldots$

* **5.1.** Comparando o número de alunos estrangeiros inscritos na faculdade $F1$ no início de 2004 com o número de alunos estrangeiros inscritos na faculdade $F1$ no início de 2007, concluiu-se que este triplicou.

Indique, justificando, se a afirmação é verdadeira.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

5.2. Na faculdade $F2$, o número aproximado de alunos estrangeiros inscritos, t anos após o início do ano de 2000, é dado, arredondando às unidades o valor obtido, pela expressão

$$N(t) = 200e^{0,16t} \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots, 15)$$

Durante quantos anos o número de alunos estrangeiros inscritos, no início de cada ano, na faculdade $F1$ foi superior ao número de alunos estrangeiros inscritos, no início de cada ano, na faculdade $F2$?

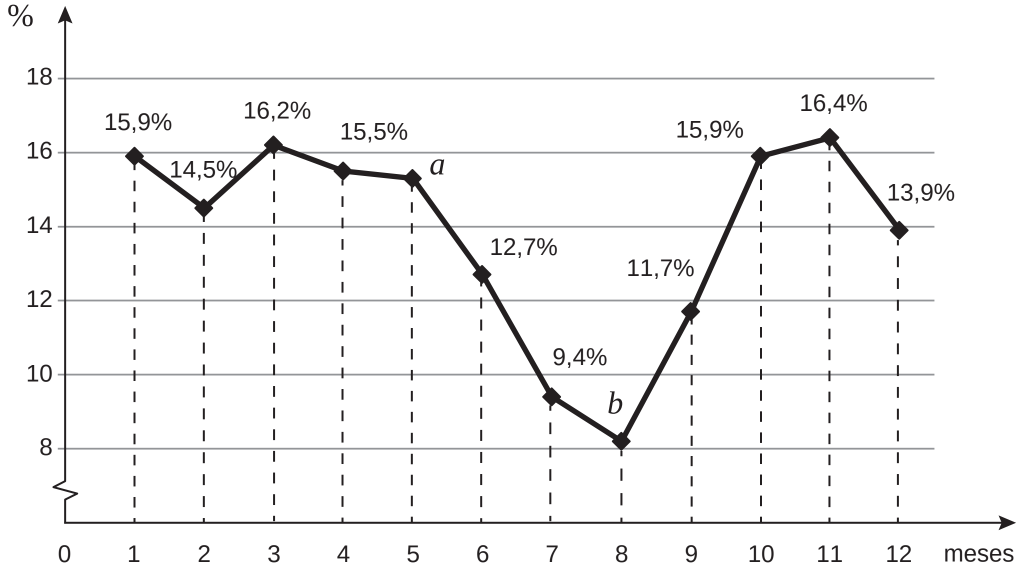
Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

6. No Gráfico 1, está parcialmente apresentada, em percentagem, a taxa de utilização da cantina pelos alunos inscritos numa universidade, em cada um dos meses do ano de 2019, em que a e b representam a taxa correspondente ao mês 5 e ao mês 8, respetivamente.

Gráfico 1



*** 6.1.** No mês 6, frequentaram a cantina 1016 alunos.

No mês 7, o número de alunos que frequentaram a cantina diminuiu, aproximadamente, x % relativamente ao número de alunos que a frequentaram no mês anterior.

Qual é o valor de x, com arredondamento às unidades?

(A) 26 **(B)** 3 **(C)** 35 **(D)** 2

6.2. Admita que a mediana dos dados recolhidos, relativos à taxa de utilização da cantina ao longo dos meses do ano de 2019, é $14{,}9\%$.

Determine o valor de a.

✱ 7. O Francisco recorreu a um crédito no valor de 10 500 euros para adquirir um automóvel.

As condições oferecidas pela instituição bancária foram as seguintes:

- prazo contratado de 60 meses;
- prestação mensal, constante, no valor de 280 euros.

Uma parte do valor de cada uma das 60 prestações é utilizada no pagamento dos juros. Essa parte varia em função do número da prestação.

Admita que, nas primeiras 24 prestações, 60% do valor da prestação corresponde a juros e que, nas 24 prestações seguintes, 25% do valor da prestação corresponde a juros.

Depois de pagar 48 prestações, qual é o valor total de juros que o Francisco ainda tem de pagar até ao final do empréstimo?

✱ 8. Dos alunos de uma universidade que participaram no programa Erasmus+, sabe-se que:

- 40% dos que ficaram alojados numa residência universitária não ficaram colocados na primeira cidade que selecionaram;
- 18% ficaram colocados na primeira cidade que selecionaram e ficaram alojados numa residência universitária.

Escolheu-se, ao acaso, um destes alunos.

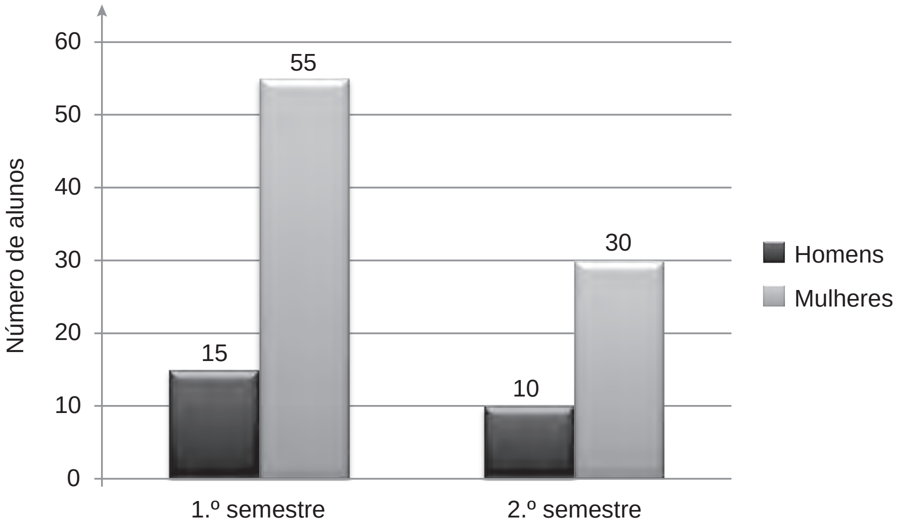
Determine a probabilidade de este aluno ter ficado alojado numa residência universitária.

Apresente o resultado na forma de dízima.

9. Foram escolhidos, ao acaso, 110 alunos universitários que participaram no programa Erasmus+ num único semestre.

No Gráfico 2, estão representados os dados referentes ao sexo e ao semestre de participação desses alunos.

Gráfico 2



* **9.1.** Escolhendo, ao acaso, um destes alunos, qual é a probabilidade de o aluno ter participado no programa Erasmus+ no segundo semestre, sabendo-se que é do sexo masculino?

(A) $0,25$ **(B)** $0,4$ **(C)** $0,09$ **(D)** $0,625$

* **9.2.** Escolhem-se, ao acaso, três alunos, sempre um a seguir ao outro.

Determine a probabilidade de apenas um deles ter participado no segundo semestre e ser do sexo feminino.

Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às centésimas.

9.3. Admita que a média da nota de candidatura dos alunos que participaram no programa Erasmus+ no primeiro semestre foi 15,65 valores e que a média da nota de candidatura dos alunos que participaram no programa Erasmus+ no segundo semestre foi 14,22 valores.

Determine a média da nota de candidatura destes 110 alunos universitários.

Apresente o resultado na forma de dízima.

*** 10.** Dos alunos que participaram no programa Erasmus+ em 2019, foram selecionados aleatoriamente 324, tendo-se apurado que a média das suas idades era 20,16 anos, com um desvio padrão de 21 meses.

Construa um intervalo de confiança a 99% para a idade média, em anos, dos alunos que participaram no programa Erasmus+ em 2019.

Apresente os extremos do intervalo de confiança, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**2.**	**3.**	**5.1.**	**6.1.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	20	12	18	12	18	18	12	18	18	**146**

Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.**	**4.**	**5.2.**	**6.2.**	**9.3.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos					**54**
TOTAL						**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 835

2.ª Fase

1. Como Barcelona foi a cidade vencedora, começamos por aplicar o método, escolhendo todos os pares que envolvem esta cidade:

Pares \ **N.º de votos**	36	58	X	29	Totais
Barcelona e Cracóvia	B	B	C	C	Barcelona: $36 + 58 = 94$ Cracóvia: $X + 29$
Barcelona e Praga	B	P	B	P	Barcelona: $36 + X$ Praga: $58 + 29 = 87$
Barcelona e Roma	B	R	B	B	Barcelona: $36 + X + 29 = X + 65$ Roma: 58

Assim, como sabemos que Barcelona teve mais votos que qualquer uma das restantes cidades, podemos verificar que:

- $X + 29 < 94 \Leftrightarrow X < 94 - 29 \Leftrightarrow X < 65$
- $36 + X + > 87 \Leftrightarrow X > 87 - 36 \Leftrightarrow X > 51$
- $X + 65 > 58 \Leftrightarrow X > 58 - 65 \Leftrightarrow X > -7$

Como X é um número natural, Barcelona tem mais votos que Roma independentemente do valor de X, para que Barcelona tenha mais votos que Praga, X deve ser superior a 51, ou seja deve ser no mínimo 52, e para que Barcelona tenha mais votos que Cracóvia, X deve ser inferior a 65, ou seja, deve ser 64 no máximo, pelo que, X representa no mínimo 52 e no máximo 64.

2. Aplicando o método descrito em primeiro lugar, temos:

Grupo	**B**	**C**	**P**	**R**
N.º de alunos	430	1020	850	200
Divisão por 1	430	1020	850	200
Divisão por 2	$\frac{430}{2} = 215$	$\frac{1020}{2} = 510$	$\frac{850}{2} = 425$	
Divisão por 3	$\frac{430}{3} \approx 143{,}3$	$\frac{1020}{3} = 340$	$\frac{850}{3} \approx 283{,}3$	
Divisão por 4		$\frac{1020}{4} = 255$	$\frac{850}{4} = 212{,}5$	
Divisão por 5		$\frac{1020}{5} = 204$	$\frac{850}{5} = 170$	

Ordenando os quocientes e atribuindo os convites ao grupo a que correspondem os quocientes ordenados, temos:

- Grupo B: 2 convites
- Grupo C: 4 convites
- Grupo P: 4 convites
- Grupo R: 0 convites

Fazendo a distribuição na proporção direta e comparando com a distribuição anterior, temos:

Grupo	**B**	**C**	**P**	**R**
Proporção direta	$\frac{430}{2500} \times 10 = 1{,}72$	$\frac{1020}{2500} \times 10 = 4{,}08$	$\frac{850}{2500} \times 10 = 3{,}4$	$\frac{200}{2500} \times 10 = 0{,}8$
Convites (proporção direta)	2	4	3	1
Convites (primeiro método)	2	4	4	0

Assim, podemos verificar que a adoção do segundo método proposto não implicaria alterações para os grupos B e C, seria desvantajoso para o grupo P e seria vantajoso para o grupo R, sendo este último o único com vantagem na aplicação do segundo método.

3. Como os bilhetes dos lugares da metade Oeste do anfiteatro foram vendidos a um quarto do valor dos bilhetes da metade Este, podemos dividir a receita de Bilheteira em 5 partes iguais, correspondendo uma dessas partes à metade Oeste do anfiteatro que representa um sector circular com 180° de amplitude.

   Assim a receita correspondente a cada um dos sectores circulares de cada opção é:

   - Opção A: Como neste sector 180° corresponde $\frac{1}{5}$ do total da receita, então a parte x da receita total, correspondente a 110°, é:

   $$\frac{180}{110} = \frac{\frac{1}{5}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{110 \times 1}{5}}{180} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{110}{5}}{180} \Leftrightarrow x = \frac{110}{900} \Rightarrow x \approx 0{,}122$$

   - Opção B: Como neste sector 180° corresponde $\frac{4}{5}$ do total da receita, então a parte x da receita total, correspondente a 28°, é:

   $$\frac{180}{28} = \frac{\frac{4}{5}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{28 \times 4}{5}}{180} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{112}{5}}{180} \Leftrightarrow x = \frac{112}{900} \Rightarrow x \approx 0{,}124$$

   - Opção C: Somando as receitas de cada uma das partes, a e b, deste sector circular, a parte x da receita total, correspondente é:

   $$\frac{180}{40} = \frac{\frac{1}{5}}{a} \Leftrightarrow a = \frac{\frac{40 \times 1}{5}}{180} \Leftrightarrow a = \frac{\frac{40}{5}}{180} \Leftrightarrow a = \frac{40}{900}$$
   $$\frac{180}{20} = \frac{\frac{4}{5}}{b} \Leftrightarrow b = \frac{\frac{20 \times 4}{5}}{180} \Leftrightarrow b = \frac{\frac{80}{5}}{180} \Leftrightarrow b = \frac{80}{900}$$
   $$x = a + b = \frac{40}{900} + \frac{80}{900} = \frac{120}{900} \approx 0{,}133$$

   - Opção D: Somando as receitas de cada uma das partes, a e b, deste sector circular, a parte x da receita total, correspondente é:

   $$\frac{180}{20} = \frac{\frac{1}{5}}{a} \Leftrightarrow a = \frac{\frac{20 \times 1}{5}}{180} \Leftrightarrow a = \frac{\frac{20}{5}}{180} \Leftrightarrow a = \frac{20}{900}$$
   $$\frac{180}{24} = \frac{\frac{4}{5}}{b} \Leftrightarrow b = \frac{\frac{24 \times 4}{5}}{180} \Leftrightarrow b = \frac{\frac{96}{5}}{180} \Leftrightarrow b = \frac{96}{900}$$
   $$x = a + b = \frac{20}{900} + \frac{96}{900} = \frac{116}{900} \approx 0{,}129$$

   Assim, podemos observar que o sector circular a que corresponde a maior receita é o que está representado na opção (C).

   Resposta: **Opção C**

4. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, escolhendo inicialmente o edifício E1 e aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo ponderado da figura:

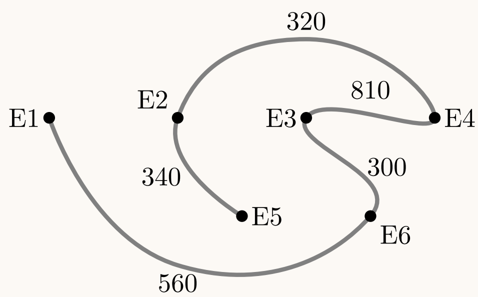
I - Aresta E1-E6 - comprimento 560

II - Aresta E6-E3 - comprimento 300

III - Aresta E3-E4 - comprimento 810
(não se considera a aresta E3-E6, porque o edifício E6 já foi escolhido)

IV - Aresta E4-E2 - comprimento 320

IV - Aresta E2-E5 - comprimento 340
(não se considera a aresta E2-E4, porque o edifício E4 já foi escolhido)



Assim, o comprimento mínimo previsto, em metros, do fio de luzes a instalar, é:

$$560 + 300 + 810 + 320 + 340 = 2330 \text{ m}$$

Como a instalação da iluminação decorativa terá um custo de 3,5 euros por cada metro, o custo total desta instalação é:

$$2330 \times 3{,}5 = 8155 \text{ euros}$$

5.

5.1. Calculando o número de alunos estrangeiros inscritos nesta faculdade no início de 2004, ou seja 4 anos após o inicio de 2000 e o número de alunos estrangeiros inscritos no início de 2007, temos:

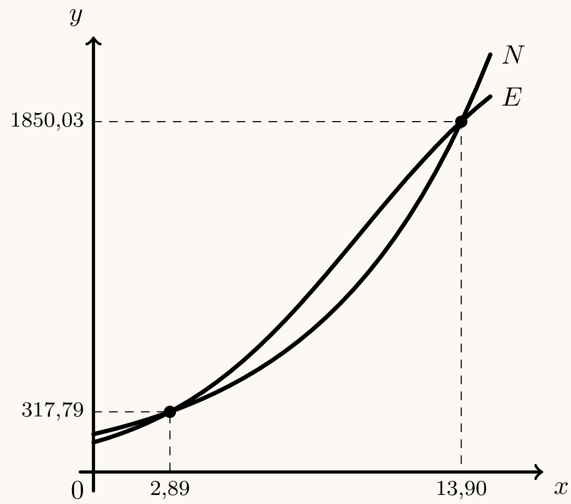
$$E(4) = \frac{2500}{1 + 15e^{-0{,}27\times 4}} \approx 410{,}24 \approx 410$$

$$E(7) = \frac{2500}{1 + 15e^{-0{,}27\times 7}} \approx 765{,}44 \approx 765$$

Assim podemos concluir que a afirmação é falsa porque o triplo do número de alunos estrangeiros inscritos na faculdade F1 no início de 2004 é $410 \times 3 = 1230$, que é um valor que não é bem aproximado pelo valor de $E(7)$.

5.2. Representando na calculadora gráfica os modelos da variação do número de alunos estrangeiros inscritos nas duas faculdades ($y = \dfrac{2500}{1+15e^{-0,27x}}$ e $y = 200e^{0,16x}$), numa janela compatível com o limite temporal dos modelos, ou seja, $0 \leq x \leq 15$, obtemos os gráficos que se encontram reproduzidos na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção dos dois modelos, obtemos os valores aproximados (às centésimas) das coordenadas, ou seja, os valores correspondente aos tempos em que o número de alunos estrangeiros inscritos nas duas faculdades era igual, ou seja, os pontos de coordenadas $(2{,}89\,;\,319{,}79)$ e $(13{,}90\,;\,1850{,}03)$



Assim, observando os valores arredondados às unidades dos pontos de interseção $t_1 \approx 2{,}89 \approx 3$ e $t_2 \approx 13{,}90 \approx 13$ podemos concluir que, o número de alunos estrangeiros inscritos, no início de cada ano, na faculdade F1 foi superior ao número de alunos estrangeiros inscritos, no início de cada ano, na faculdade F2 entre 2003 e 2014, ou seja, durante $2014 - 2003 = 11$ anos.

6.

6.1. Pela observação do gráfico podemos verificar que no mês 6 a taxa de utilização da cantina foi de 12,7% e no mês 7 foi de 9,4%.

Como no mês 6, frequentaram a cantina 1016 alunos, podemos estabelecer a proporção para determinar o número de alunos a que frequentaram a cantina no mês 7:

$$\frac{12{,}7}{9{,}4} = \frac{1016}{a} \Leftrightarrow a = \frac{1016 \times 9{,}4}{12{,}7} \Leftrightarrow a = 752$$

Logo a redução do número de alunos é:

$$1016 - 752 = 264$$

Assim, a percentagem x da redução do mês 7 relativamente ao mês 6, corresponde à proporção de 264 relativamente a 1016:

$$\frac{1016}{264} = \frac{100}{x} \Leftrightarrow x = \frac{100 \times 264}{1016} \Rightarrow x \approx 26$$

Resposta: **Opção A**

6.2. Ordenando os dados de acordo com o gráfico ($b < 9{,}4$), podemos identificar a posição dos dados centrais, necessários para o cálculo da mediana:

$$\underbrace{b\,;\ 9{,}4\,;\ 11{,}7\,;\ 12{,}7\,;\ 13{,}9\,;\ 14{,}5}_{50\%}\ ;\ \underbrace{a\,;\ 15{,}5\,;\ 15{,}9\,;\ 15{,}9\,;\ 16{,}2\,;\ 16{,}5}_{50\%}$$

Admitindo que a mediana dos dados recolhidos é 14,9%, e observando que é a média aritmética entre 14,5 e a, temos que:

$$\frac{14{,}5 + a}{2} = 14{,}9 \Leftrightarrow a = 14{,}9 \times 2 - 14{,}5 \Leftrightarrow a = 16 - 7 \Leftrightarrow a = 15{,}3\%$$

7. Podemos verificar que em cada período de 24 meses, o valor a pagar será de $280 \times 24 = 6720$ euros e analisando cada um dos períodos, relativamente à percentagem e valor dos juros, temos:

Período	Montante a pagar	Percentagem de juros	Valor dos juros
Primeiros 24 meses	6720	60%	$6720 \times 0{,}6 = 4032$
Segundos 24 meses	6720	25%	$6720 \times 0{,}25 = 1680$

Assim, temos que:

- Valor total a pagar: $280 \times 60 = 16\,800$ euros.
(Correspondente ao pagamento de 280 euros por mês durante 60 meses)
- Valor total dos juros: $16\,800 - 10\,500 = 6300$ euros.
(Correspondente à diferença entre o montante total pago e o valor do empréstimo)
- Valor dos juros a pagar após 48 prestações: $6300 - (4032 + 1680) = 588$ euros.
(Correspondente à diferença entre o valor dos juros e o valor dos juros correspondentes aos primeiros e segundos 24 meses)

8. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos alunos desta universidade que participaram no programa Erasmus+, e os acontecimentos:
R:≪O aluno ficou alojado numa residência universitária≫
C:≪O aluno ficou colocado na primeira cidade que selecionou≫

Temos, de acordo com o enunciado, que: $P\left(\overline{C}|R\right) = 0{,}4$ e $P\left(C \cap R\right) = 0{,}18$

Assim, temos que: $P\left(C|R\right) = 1 - P\left(\overline{C}\right) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

E como $P\left(C|R\right) = \dfrac{P\left(C \cap R\right)}{P\left(R\right)} \Leftrightarrow P\left(R\right) = \dfrac{P\left(C \cap R\right)}{P\left(C|R\right)}$, vem que a probabilidade, na forma de dízima, do aluno escolhido ter ficado alojado numa residência universitária, é:

$$P\left(R\right) = \frac{0{,}18}{0{,}6} = 0{,}3$$

9.

9.1. Pela observação do gráfico podemos verificar que que dos 110 participantes no programa, $15+10 = 25$ eram homens, e que destes foram 10 os que participaram no programa no segundo semestre, pelo que a probabilidade do aluno escolhido ter participado no programa no segundo semestre, sabendo-se que é do sexo masculino, é:

$$\frac{10}{25} = 0{,}4$$

Resposta: **Opção B**

9.2. Observando que existem 30 alunos com o perfil indicado (ter participado no segundo semestre e ser do sexo feminino), verificamos que existem $110 - 30 = 80$ que não correspondem a este perfil.

Assim, selecionando três alunos ao acaso, a probabilidade, na forma de dízima, com arredondamento às centésimas, de apenas um deles ter participado no segundo semestre e ser do sexo feminino, é:

$$\overbrace{\frac{30}{110} \times \frac{80}{109} \times \frac{79}{108}}^{\text{apenas o 1.º tem o perfil}} + \overbrace{\frac{80}{110} \times \frac{30}{109} \times \frac{79}{108}}^{\text{apenas o 2.º tem o perfil}} + \overbrace{\frac{80}{110} \times \frac{79}{109} \times \frac{30}{108}}^{\text{apenas o 3.º tem o perfil}} = 3 \times \frac{30 \times 80 \times 79}{110 \times 109 \times 108} \approx 0{,}44$$

9.3. Pela observação do gráfico podemos verificar que a média dos alunos que participaram no primeiro semestre é relativa a $15 + 55 = 70$ alunos, e que a média dos alunos que participaram no segundo semestre é relativa a $10 + 30 = 40$ alunos.

Assim a nota média dos 110 alunos é:

$$\bar{x} = \frac{15{,}65 \times 70 + 14{,}22 \times 40}{100} = 15{,}13 \text{ valores}$$

10. Observando que 21 meses corresponde a 1 ano e 9 meses e que 9 meses representa $\frac{9}{12} = 0{,}75$ anos, temos que o desvio padrão da amostra, em anos é 1,75.

Como a amostra dos alunos que participaram no programa Erasmus+ em 2019 tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 324$
- A média amostral: $\overline{x} = 20{,}16$ anos
- O desvio padrão amostral: $s = 1{,}75$ horas
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para o atraso médio $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left]20{,}16 - 2{,}576 \times \frac{1{,}75}{\sqrt{324}} \; ; \; 20{,}16 + 2{,}576 \times \frac{1{,}75}{\sqrt{324}}\right[\approx \left]19{,}91; 20{,}41\right[$$

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação 7 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).

8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **18 pontos**

Comparar B com P .... 4 pontos

Apresentar o número de votos em B $(36 + X)$ .... 2 pontos

Apresentar o número de votos em P (87) .... 2 pontos

Comparar B com C .... 4 pontos

Apresentar o número de votos em B (94) .... 2 pontos

Apresentar o número de votos em C $(29 + X)$ .... 2 pontos

Comparar B com R .... 4 pontos

Apresentar o número de votos em B $(65 + X)$ .... 2 pontos

Apresentar o número de votos em R (58) .... 2 pontos

Indicar que o valor de X deve ser simultaneamente inferior a 65
e superior a 51 .... 4 pontos

Indicar os valores solicitados $(52$ e $64)$ .... 2 pontos

2. .... **20 pontos**

Apresentar a distribuição dos 10 convites pelos grupos,
utilizando o método de Hondt .... 12 pontos

Determinar os quocientes que originam a atribuição dos convites ...... 8 pontos

Indicar o número de convites para cada um dos grupos .... 4 pontos
[Grupo B (2); Grupo C (4); Grupo P (4); Grupo R (0)]

Apresentar a distribuição dos 10 convites pelos grupos,
utilizando o segundo método .... 8 pontos

Apuramento dos mandatos: $\left(\dfrac{N.^o \textit{ de votos na lista}}{N.^o \textit{ total de votos}} \times 10\right)$
ou equivalente .... 4 pontos

Indicar o número de convites para cada um dos grupos .... 4 pontos
[Grupo B (2); Grupo C (4); Grupo P (3); Grupo R (1)]

3. .... **12 pontos**

(C)

4. .... **18 pontos**

Apresentar um grafo que modele a situação .... 12 pontos

Associar os vértices aos diferentes edifícios .... 2 pontos

Selecionar as arestas .... 10 pontos

Apresentar o comprimento mínimo previsto, em metros,
do fio de luzes $(2\ 330\ \text{m})$.. 3 pontos

Obter o valor solicitado $(8155\ €)$ .... 3 pontos

5.1. .... **18 pontos**

Identificar $t = 4$ .... 4 pontos

Determinar $E(4)$ (410) .... 3 pontos

Identificar $t = 7$ .... 4 pontos

Determinar $E(7)$ (765) .... 3 pontos

Determinar $3 \times E(4)$ (1230) .... 3 pontos

Concluir .... 1 ponto
[A afirmação é falsa, pois o triplo de $E\,(4)$ é diferente de $E\,(7)$.]

5.2. .... **18 pontos**

Apresentar o(s) gráfico(s) .... 4 pontos

Apresentar as coordenadas dos pontos
relevantes $[(2{,}89;\,317{,}74)$ e $(13{,}90;\,1850{,}03)]$ ....(4 + 4).............. 8 pontos

Determinar o valor solicitado (11) .... 6 pontos

6.1. .... **12 pontos**

(A)

6.2. .... **18 pontos**

Apresentar os valores centrais $(14{,}5;\,a)$ .... 6 pontos

Escrever $\dfrac{14{,}5 + a}{2} = 14{,}9$ (ou equivalente) .... 8 pontos

Determinar o valor de a $(15{,}3\%)$ .... 4 pontos

7. .... **18 pontos**

Determinar o valor a pagar em 24 prestações $(6720\ €)$ .... 2 pontos

Determinar o valor dos juros pagos nas primeiras 24 prestações $(4032\ €)$ .... 5 pontos

Determinar o valor dos juros pagos nas 24 prestações seguintes $(1680\ €)$ .... 5 pontos

Determinar o valor a pagar nas 60 prestações $(16\ 800\ €)$ .... 2 pontos

Obter o valor total dos juros $(6300\ €)$ .... 2 pontos

Concluir $(588\ €)$ .... 2 pontos

8. .... **18 pontos**

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

C: «Foi colocado na primeira cidade que selecionou»

R: «Ficou alojado numa residência universitária»

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $P(C \cap R) = 0{,}18$ .... 2 pontos

Escrever $P(\overline{C} \mid R) = 0{,}4$ .... 2 pontos

Obter $P(C \mid R)$ $(0{,}6)$ .... 8 pontos

Obter $P(R)$ $(0{,}3)$ .... 6 pontos

2.º Processo

Escrever $P(C \cap R) = 0{,}18$ .... 2 pontos

Escrever $P(\overline{C} \mid R) = 0{,}4$ .... 2 pontos

Evidenciar que $P(\overline{C} \cap R) = 0{,}4P(R)$ .... 4 pontos

Evidenciar que $P(R) = P(C \cap R) + P(\overline{C} \cap R)$ .... 8 pontos

Obter $P(R)$ $(0{,}3)$ .... 2 pontos

9.1. .... **12 pontos**

(B)

9.2. .... **18 pontos**

Determinar o número de
casos possíveis $(110 \times 109 \times 108)$ .... (1 + 2 + 2) .... 5 pontos

Determinar o número de
casos favoráveis $(30 \times 80 \times 79 \times 3)$ .... (2 + 3 + 2 + 3) .... 10 pontos

Apresentar a expressão que permite calcular o valor da probabilidade
$\left(\dfrac{30 \times 80 \times 79 \times 3}{110 \times 109 \times 108}\right)$ .... 2 pontos

Obter o valor da probabilidade $(0{,}44)$ .... 1 ponto

9.3. .... **18 pontos**

Evidenciar que 15,65 valores é a média da nota de candidatura de 70 alunos .. 3 pontos

Evidenciar que 14,22 valores é a média da nota de candidatura de 40 alunos .. 3 pontos

Escrever $\dfrac{70 \times 15{,}65 + 40 \times 14{,}22}{110}$ (ou equivalente) .... 9 pontos

Calcular o valor solicitado $(15{,}13)$ .... 3 pontos

10. .... **18 pontos**

Identificar os valores de n, $\overline{x}$, s e z para um intervalo de confiança a 99% .. 8 pontos

$n = 324$ .... 1 ponto

$\overline{x} = 20{,}16$ .... 1 ponto

$s = 1{,}75$ .... 5 pontos

$z = 2{,}576$ .... 1 ponto

Calcular os extremos do intervalo de confiança $(\,]19{,}91;\, 20{,}41[\,)$ .... 10 pontos

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**2.**	**3.**	**5.1.**	**6.1.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	20	12	18	12	18	18	12	18	18	**146**

Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.**	**4.**	**5.2.**	**6.2.**	**9.3.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos					**54**
TOTAL						**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | Época Especial | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 11 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

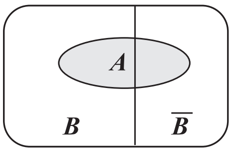
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

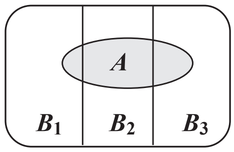
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x}-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x}+z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x}-z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x}+z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p}-z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p}+z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

A rádio OnOfff é uma rádio local que transmite através da Internet, com recurso a tecnologia de transmissão de áudio e de vídeo em tempo real.

1. Para a eleição da atual direção da rádio OnOfff, composta hierarquicamente por um diretor, um vice-diretor e um adjunto da direção, apresentaram-se três candidatos: António, de 27 anos de idade, Bernardo, de 32 anos, e Carla, de 29 anos.

Nesse ato eleitoral, foram apurados 375 votos validamente expressos. No boletim de voto, cada votante escreveu, por ordem decrescente de preferência, o nome dos três candidatos.

A Tabela 1 apresenta as três listas ordenadas de preferências estabelecidas pelos eleitores e o número de votos obtido por cada uma das listas.

Tabela 1

N.º de votos / **Preferências**	**125**	**160**	**90**
1.ª	António	Bernardo	Carla
2.ª	Bernardo	Carla	António
3.ª	Carla	António	Bernardo

Concluída a votação, foi aplicado o método a seguir descrito para obter a composição da atual direção.

- São atribuídos pontos a cada um dos candidatos em função do seu lugar na ordem da lista de preferências. Cada candidato recebe:
  - cinco pontos por cada voto na primeira preferência;
  - três pontos por cada voto na segunda preferência;
  - um ponto por cada voto na terceira preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos candidatos. O mais pontuado é eleito para diretor, o segundo mais pontuado é eleito para vice-diretor, e o terceiro mais pontuado é eleito para adjunto da direção.

  No caso de existirem candidatos empatados, os seus lugares na direção são decididos utilizando a idade como critério de desempate. Dos candidatos empatados, o mais velho assumirá o cargo de maior importância.

Indique os nomes dos atuais diretor, vice-diretor e adjunto da direção, aplicando o método acima descrito.

* **2.** Num outro ato eleitoral realizado na rádio OnOfff, apenas uma parte dos 480 eleitores inscritos votou. Finalizada a votação, apenas 75% dos votos foram considerados validamente expressos, por se ter considerado que 96 dos votos recolhidos não eram válidos.

Qual foi a taxa de abstenção registada nesse ato eleitoral?

(A) 28% **(B)** 12,5% **(C)** 10% **(D)** 20%

*** 3.** No dia em que a rádio OnOfff comemorou o seu quinto aniversário, foi organizado um concurso cujo prémio era um conjunto promocional da Banda YY. O conjunto promocional era constituído por um bilhete para um concerto, uma camisola autografada pelos elementos da banda e um CD.

O vencedor do concurso, dono de uma pequena empresa, ofereceu o prémio aos seus três funcionários, a Dora, a Elsa e o Fernando, e, atendendo à antiguidade dos mesmos na empresa, decidiu que o prémio seria repartido entre eles da seguinte forma: a Dora ficaria com 50% do prémio, a Elsa com 30% e o Fernando com 20%.

Como não chegavam a acordo quanto à forma de distribuir os bens do prémio, os três funcionários decidiram partilhá-los utilizando o método seguinte.

- 1.ª etapa: Cada funcionário atribui um valor monetário a cada um dos bens do prémio, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. No final, são abertos os envelopes e são registados, numa tabela, os valores das licitações dos três funcionários.
- 2.ª etapa: Determina-se a soma das licitações atribuídas ao prémio por cada funcionário, designada valor global, e o valor que cada funcionário considera justo receber, designado porção justa. A porção justa obtém-se, para cada funcionário, através de uma proporção direta entre a percentagem que lhe coube na repartição do prémio e o valor global.
- 3.ª etapa: Cada bem é atribuído ao funcionário que mais o valoriza, e considera-se que ele recebe o valor que atribui a esse bem. Se um funcionário não receber qualquer bem, considera-se, para efeitos de cálculo, que o valor dos bens recebidos por esse funcionário é zero.
- 4.ª etapa: Se o valor dos bens recebidos por um funcionário for superior à porção justa por si determinada, apura-se o excedente. Caso contrário, apura-se o défice.
- 5.ª etapa: (Só é aplicada quando existe dinheiro em excesso.) O excesso irá corresponder à diferença entre o valor total do excedente e o valor total do défice. Este excesso é distribuído a cada funcionário na proporção direta que lhe coube na repartição do prémio.

Na Tabela 2, estão registados os valores monetários atribuídos, nas licitações secretas, por cada um dos funcionários a cada um dos bens.

Tabela 2

	Dora	**Elsa**	**Fernando**
Bilhete	40 €	34 €	36 €
Camisola	20 €	22 €	26 €
CD	26 €	34 €	28 €

Determine a partilha final do prémio pelos funcionários, aplicando o método descrito, de modo que nenhum dos funcionários tenha razão para reclamar.

Na sua resposta, apresente:

– o valor global atribuído ao prémio por cada funcionário;

– a porção justa para cada funcionário;

– a atribuição dos bens aos funcionários;

– o valor a pagar ou a receber por cada funcionário;

– o valor que cada funcionário receberá do excesso, caso exista valor em excesso;

– a partilha final do prémio.

4. De modo a garantir o isolamento acústico entre os diferentes espaços onde funciona a rádio OnOfff, cada uma das portas de ligação irá ser calafetada.

Na Figura 1, apresenta-se uma planta em que estão representados os diferentes espaços onde funciona a rádio OnOfff: um pátio, uma receção e seis salas (S1, S2, S3, S4, S5 e S6).

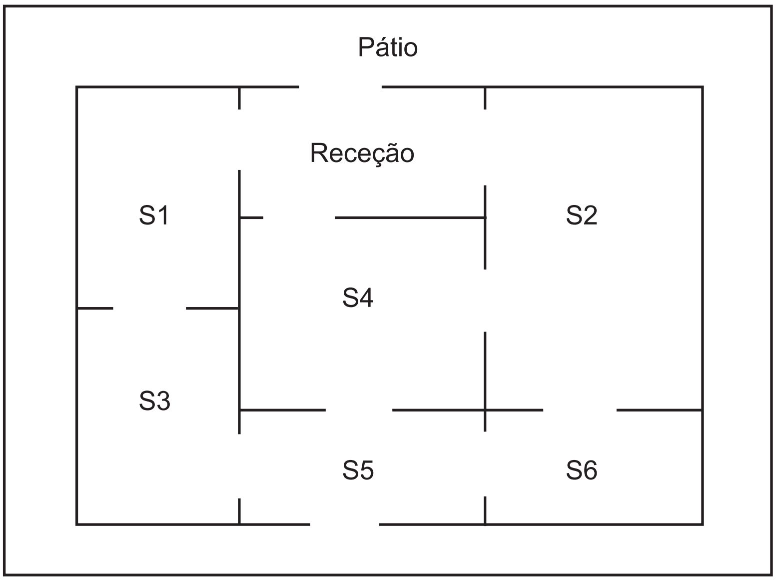


Figura 1

O responsável pela calafetagem das portas pretende definir um percurso com início e fim no pátio, cruzando todas as portas e entrando em todos os espaços, sem cruzar nenhuma porta mais de uma vez.

Justifique se é possível definir um percurso nas condições indicadas.

Na sua resposta, apresente um grafo que modele a situação descrita.

*** 5.** O departamento de compras da rádio OnOfff vai adquirir novos equipamentos.

Para garantir o menor custo, o chefe do departamento analisou cada uma das duas alternativas seguintes.

Alternativa 1

Compra *online* a empresa nacional Valor do equipamento – 4500 euros Preço dos portes de acordo com a massa da encomenda • 5 euros até 10 kg; • 3 euros por cada 10 kg, após os primeiros 10 kg. Por exemplo, se a encomenda tiver 14 kg, o preço a pagar pelos portes será 8 euros (5 euros pelos primeiros 10 kg, mais 3 euros pela massa acima dos 10 kg e não acima dos 20 kg).

Alternativa 2

Compra *online* a empresa estrangeira Valor do equipamento – 4000 euros Preço dos portes – $20 \times 1{,}03^n$, em que n é a massa da encomenda em quilogramas

Admita que a massa prevista da encomenda é 73 kg.

Indique qual das alternativas será, monetariamente, mais vantajosa.

Apresente todos os cálculos que efetuar.

Na sua resposta:

– apresente o custo da aquisição do equipamento para cada uma das alternativas, com arredondamento às centésimas;

– caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

6. No Dia Internacional da Saúde, a rádio OnOfff lançou aos ouvintes o desafio seguinte: calcularem o seu índice de massa corporal (IMC) e de o enviarem para a rádio.

* **6.1.** O diagrama de caule e folhas da Figura 2 apresenta o IMC dos primeiros 20 ouvintes que responderam ao desafio. No caule, consta o algarismo das dezenas e, nas folhas, o algarismo das unidades de cada registo.

Na Figura 3, apresenta-se a tabela dos valores de referência do IMC e sua classificação.

1	5 5 6 7 8 9 9
2	0 0 0 3 5 6 8 9
3	0 1 1 2 3

Figura 2

IMC (kg/m^2)	Classificação
<18,5	Baixo peso
de 18,5 a 24,9	Variação normal
de 25,0 a 29,9	Pré-obesidade
≥ 30,0	Obesidade

Figura 3

DGS, Programa Nacional de Combate à Obesidade, 17 de março de 2005, *in* www.dgs.pt (consultado em abril de 2021). (Adaptado)

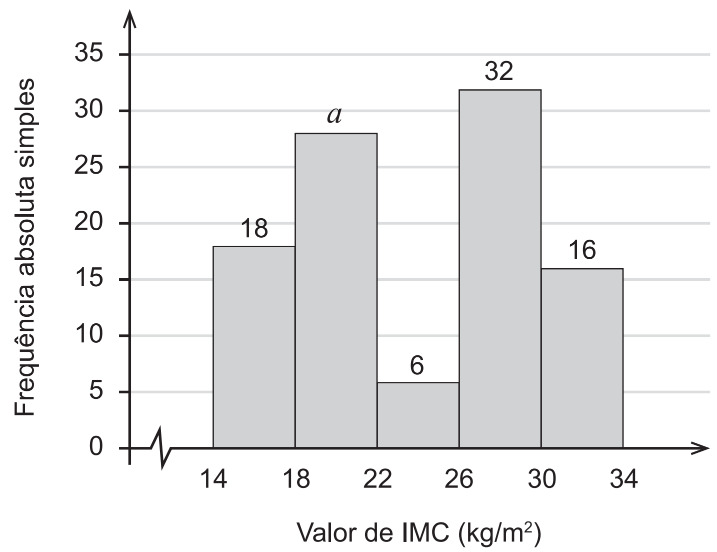
Qual é a percentagem dos 20 ouvintes considerados cujo IMC não pode ser classificado como variação normal?

(A) 70% **(B)** 45% **(C)** 25% **(D)** 20%

6.2. Os programas da rádio com maior participação dos ouvintes foram «A sua tarde na OnOfff» e «OnOfff night».

As respostas recebidas durante a emissão do programa «A sua tarde na OnOfff» apresentam-se no histograma de frequências absolutas simples, representado no Gráfico 1, organizadas nas classes $[14, 18[$, $[18, 22[$, ... , $[30, 34[$.

Gráfico 1

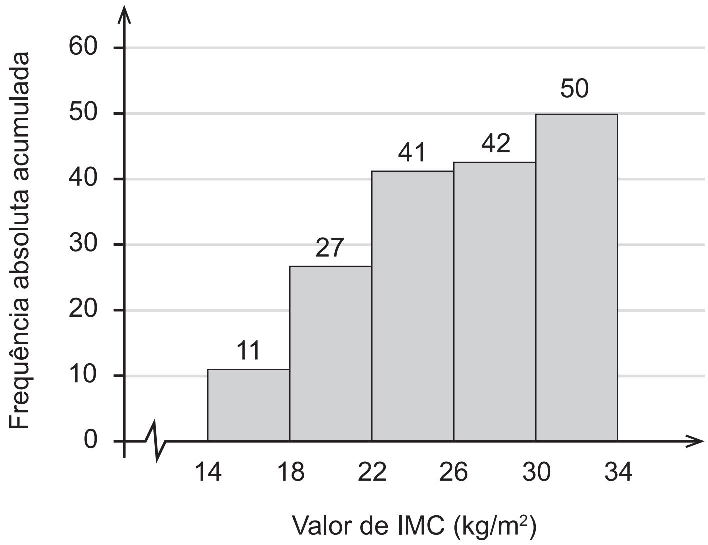


6.2.1. Admita que a média dos dados agrupados de IMC apresentados no Gráfico 1 é igual a 24.

Determine o valor de a.

6.2.2. As respostas recebidas durante a emissão do programa «OnOfff night» apresentam-se no histograma de frequências absolutas acumuladas, representado no Gráfico 2, organizadas nas classes $[14, 18[, [18, 22[, ... , [30, 34[$.

Gráfico 2



Considere $a = 26$

Apresente uma tabela de frequências absolutas simples para o total das respostas recebidas durante a emissão dos programas «A sua tarde na OnOfff» e «OnOfff night».

Na sua resposta, mantenha as classes utilizadas em ambos os histogramas.

7. Desde que foi inaugurada, no início do ano 2000, a rádio OnOfff tem cada vez mais ouvintes. Admita que, t anos após a sua inauguração, o número de ouvintes da OnOfff é bem aproximado, com arredondamento às unidades, pelo modelo seguinte.

$$R(t) = 7700 + 1471 \ln(t+1) \qquad (t \geqslant 0)$$

* **7.1.** Prove que o número de ouvintes da rádio OnOfff sofreu um aumento superior a 2500, decorridos cinco anos após a inauguração.

7.2. O número de ouvintes ultrapassou pela primeira vez a marca dos 12 000 num determinado ano. No início do ano seguinte, procedeu-se à atualização dos equipamentos.

Determine em que ano se procedeu à atualização dos equipamentos.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às décimas.

* **8.** Realizado um estudo junto dos funcionários da rádio OnOfff, concluiu-se que:

- 80% dos funcionários trabalham a partir de casa;
- de entre os funcionários que trabalham a partir de casa, metade colabora em programas emitidos diariamente;
- 5% dos funcionários não trabalha a partir de casa e não colabora em programas emitidos diariamente.

Escolhe-se ao acaso um dos funcionários da rádio OnOfff.

Determine a probabilidade de o funcionário selecionado colaborar em programas emitidos diariamente.

Apresente o resultado na forma de dízima.

* **9.** O tempo diário, em minutos, durante o qual os ouvintes acompanham a emissão da rádio OnOfff segue uma distribuição aproximadamente normal de valor médio 40 minutos e desvio padrão 10 minutos.

Escolhe-se ao acaso um dos ouvintes da rádio OnOfff.

Determine a probabilidade de esse ouvinte, num dia, acompanhar a emissão da rádio OnOfff entre 50 minutos e uma hora.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve quatro casas decimais.

10. A rádio OnOfff emite *podcasts* sobre temáticas variadas.

Para determinar intervalos de confiança para o número médio de *podcasts* emitidos por semana pela rádio OnOfff, constituiu-se uma amostra com dados relativos a mais de 30 semanas.

* **10.1.** Admita que o intervalo de confiança a 95% para o número médio de *podcasts* emitidos por semana é $]13,86; 14,5[$.

A margem de erro associada a este intervalo de confiança é igual a

(A) $14,82$ **(B)** $14,18$ **(C)** $0,64$ **(D)** $0,32$

* **10.2.** Admita que os dados da amostra correspondem a 100 semanas e que o número médio de *podcasts* emitidos por semana é igual a 12 e o desvio padrão é igual a 2,1.

Determine o intervalo de confiança a 90% para o número médio de *podcasts* emitidos por semana pela rádio OnOfff.

Apresente os extremos do intervalo de confiança, com arredondamento às décimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**2.**	**3.**	**5.**	**6.1.**	**7.1.**	**8.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	20	18	12	18	18	18	12	18	**146**

Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.**	**4.**	**6.2.1.**	**6.2.2.**	**7.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos					**54**
TOTAL						**200**

1. Aplicando o método descrito para obter a composição da atual direção, temos:

   - Pontuação do António (124 votos na 1.ª preferência, 90 votos na 1.ª preferência e 160 votos na 3.ª preferência):
   $$125 \times 5 + 90 \times 3 + 160 \times 1 = 1055$$
   - Pontuação do Bernardo (160 votos na 1.ª preferência, 125 votos na 1.ª preferência e 90 votos na 3.ª preferência):
   $$160 \times 5 + 125 \times 3 + 90 \times 1 = 1265$$
   - Pontuação da Carla (90 votos na 1.ª preferência, 160 votos na 2.ª preferência e 125 votos na 3.ª preferência):
   $$90 \times 5 + 160 \times 3 + 125 \times 1 = 1055$$

   Como não existem candidatos empatados, os seus lugares na direção são decididos utilizando a idade como critério de desempate, e como a Carla é mais velha que o António, será ela a assumir o cargo de maior importância.

   Assim, a composição da direção da rádio OnOfff, é:

   - Diretor: Bernardo (1265 votos)
   - Vice-diretor: Carla (1055 votos - 29 anos)
   - Adjunto da direção: António (1055 votos - 27 anos)

2. Temos que:

   - O número total de votos que não eram válidos foi 96, correspondentes a 25% dos eleitores que votaram (porque 75% foram considerados válidos), pelo que o número votantes (NV), é:
   $$\frac{NV}{96} = \frac{100}{25} \Leftrightarrow NV = \frac{96 \times 100}{25} \Leftrightarrow NV = 384$$
   - Como existiam 480 e votaram 384, o número de eleitores inscritos que não votou foi $480 - 384 = 96$, pelo que a taxa de abstenção (TA) corresponde à percentagem a que corresponde 96 eleitores que não votaram no total 480 eleitores inscritos, ou seja:
   $$\frac{TA}{100} = \frac{96}{480} \Leftrightarrow TA = \frac{100 \times 96}{480} \Leftrightarrow TA = 20$$

   Resposta: **Opção D**

3. Aplicando o método descrito, nas condições descritas, vem:

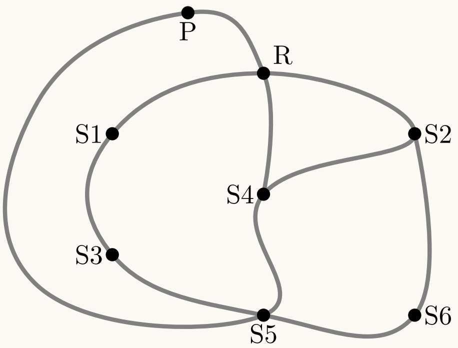
Funcionários / **Bens**	**Dora**	**Elsa**	**Fernando**
Bilhete	40 €	34 €	36 €
Camisola	20 €	22 €	26 €
CD	26 €	34 €	28 €
Percentagem do prémio	50%	30%	20%
Valor global	86	90	90
Porção justa	$86 \times \frac{50}{100} = 43$	$90 \times \frac{30}{100} = 27$	$90 \times \frac{20}{100} = 18$
Atribuição dos bens	Bilhete	CD	Camisola
Valor recebido	40	34	26
Excedente apurado	—	$34 - 27 = 7$	$26 - 18 = 8$
Défice apurado	$43 - 40 = 3$	—	—
Dinheiro em excesso	$7 + 8 - 3 = 12$		
Distribuição do excesso	$12 \times \frac{50}{100} = 6$	$12 \times \frac{30}{100} = 3{,}6$	$12 \times \frac{20}{100} = 2{,}4$

Assim, de acordo com as condições indicadas, a parte que cada funcionário deve receber, é:

- Dora: Recebe o bilhete e $3 + 6 = 9$ euros
- Elsa: Recebe o CD e paga $7 - 3{,}6 = 3{,}4$ euros
- Fernando: Recebe a camisola e paga $8 - 2{,}4 = 5{,}6$ euros

4. De acordo com a planta da rádio, considerando o pátio (P), a receção (R) e as seis salas como vértices e as portas como arestas, obtemos o grafo da figura seguinte, e o grau de cada de cada vértice:

- Pátio - Grau 2
- Receção - Grau 4
- Sala 1 - Grau 2
- Sala 2 - Grau 3
- Sala 3 - Grau 2
- Sala 4 - Grau 3
- Sala 5 - Grau 4
- Sala 6 - Grau 2



Para definir um percurso com início e fim no pátio, cruzando todas as portas e entrando em todos os espaços, sem cruzar nenhuma porta mais de uma vez, seria necessário definir um circuito de Euler, o que apenas seria possível se todos os vértices tivessem grau par.

Assim, como existem vértices de grau ímpar (os vértices correspondentes às salas 2 e 4) não é possível definir um percurso nas condições indicadas.

5. Calculado o custo de aquisição para cada uma das alternativas, temos:

Alternativa 1	**Alternativa 2**
Valor do equipamento: 4500 € Preço dos portes: (73 kg $= 10 + 6 \times 10 + 3$) $5 + 6 \times 3 + 3 = 26$ €	Valor do equipamento: 4000 € Preço dos portes: $20 \times 1{,}03^{73} \approx 173{,}040$ €
Custo total: $4500 + 26 = 4525$ €	Custo total: $4000 + 173{,}040 = 4173{,}04$ €

Assim, de acordo com os cálculos anteriores, podemos verificar que a alternativa monetariamente mais vantajosa,ou seja com um custo total inferior, é a alternativa 2.

6.

6.1. Como existem 6 ouvintes com variação de peso normal (correspondentes aos IMC 19, 19, 20, 20, 20 e 23), então os restantes $20-6 = 14$ ouvintes tem um IMC que não pode ser classificado como variação normal.

Assim, a percentagem (p) correspondente é:

$$\frac{p}{100} = \frac{14}{20} \Leftrightarrow p = \frac{14 \times 100}{20} \Leftrightarrow p = 70$$

Resposta: **Opção A**

6.2.

6.2.1. De acordo com os dados do histograma temos que o número de elementos da amostra, n, é:

$$n = 18 + a + 6 + 32 + 16 = a + 72$$

Como os dados estão agrupados em classes, a média é calculada com recurso à identificação da marca de cada classe. Assim, como as marcas de classe são 16, 20, 24, 28 e 32, a média é:

$$\bar{x} = \frac{18 \times 16 + a \times 20 + 6 \times 24 + 32 \times 28 + 16 \times 32}{a + 72} = \frac{20a + 1840}{a + 72}$$

Admitindo que a média é igual a 24, temos que o valor é:

$$24 = \frac{20a + 1840}{a + 72} \Leftrightarrow 24(a + 72) = 20a + 1840 \Leftrightarrow 24a + 1728 = 20a + 1840 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24a - 20a = 1840 - 1728 \Leftrightarrow 4a = 112 \Leftrightarrow a = \frac{112}{4} \Leftrightarrow a = 28$$

6.2.2. Podemos determinar as frequências absolutas simples relativas às chamadas recebidas durante a emissão do programa ≪OnOfff night≫, a partir das frequências absolutas acumuladas - obtidas a partir do histograma - e depois somar as frequências absolutas simples relativas às chamadas recebidas durante a emissão do programa ≪A sua tarde na OnOfff≫ (considerando $a = 26$, de acordo com a tabela seguinte.

Classes	**F. absol. acumulada (≪OnOfff night≫)**	**F. absol. simples (≪OnOfff night≫)**	**F. absol. simples (≪... tarde OnOfff≫)**	**F. absol. simples (Total)**
[14,18[	11	11	18	$11 + 18 = 29$
[18,22[	27	$27 - 11 = 16$	26	$16 + 26 = 42$
[22,26[	41	$41 - 27 = 14$	6	$14 + 6 = 20$
[26,30[	42	$42 - 41 = 1$	32	$1 + 32 = 33$
[30,34[	50	$50 - 42 = 8$	16	$8 + 16 = 24$
Total	—	50	98	$50 + 98 = 148$

7.

7.1. Quando foi inaugurada a rádio OnOfff, ou seja, zero anos após a sua inauguração ($t = 0$), o número aproximado de ouvintes era:

$$R(0) = 7700 + 1471 \ln(0 + 1) = 7700 + 1471 \times 0 = 7700$$

Cinco anos após a inauguração ($t = 5$), o número aproximado de ouvintes era:

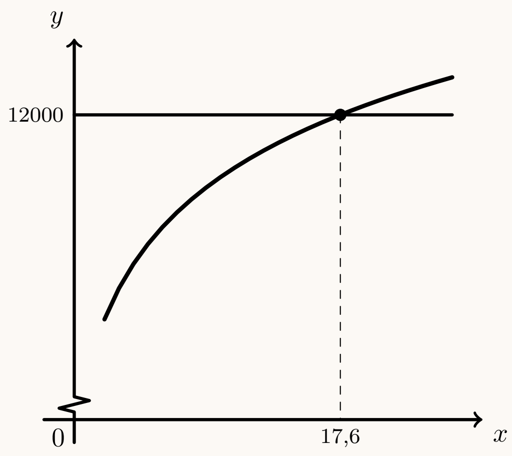
$$R(5) = 7700 + 1471 \ln(5 + 1) \approx 10\,336$$

Assim, o valor aproximado do aumento de ouvintes, decorridos cinco anos após a inauguração, é:

$$R(5) - R(0) \approx 10\,336 - 7700 \approx 2636$$

Ou seja, nos primeiros cinco anos o aumento do número de ouvintes foi superior a 2500.

7.2. Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y = 7700 + 1471 \ln(x + 1)$ e a reta $y = 12000$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com arredondamento às centésimas) das coordenadas do ponto de interseção: (17,6 ; 12000)



Assim, temos que o número de ouvintes ultrapassou pela primeira vez a marca dos 12 000, 17 anos após a inauguração da rádio, ou seja durante o ano de 2017.

Como a atualização dos equipamentos ocorreu no início do ano seguinte, esta ocorreu em 2018.

8. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos funcionários da rádio OnOff, e os acontecimentos:
C:≪O funcionário trabalha a partir de casa≫
D:≪O funcionário colabora em programas emitidos diariamente≫

Temos, de acordo com o enunciado, que: $P\left(C\right) = 0{,}8$, $P\left(D|C\right) = 0{,}5$ e $P\left(\overline{C} \cap \overline{D}\right) = 0{,}05$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{C}\right) = 1 - P\left(C\right) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$
- $P\left(\overline{C} \cap D\right) = P\left(\overline{C}\right) - P\left(\overline{C} \cap \overline{D}\right) = 0{,}2 - 0{,}05 = 0{,}15$
- $P\left(C \cap D\right) = P\left(D|C\right) \times P\left(C\right) = 0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}4$

	C	$\overline{C}$	
D	0,4	0,15	0,55
$\overline{D}$		0,05	
	0,8	0,2	1

Desta forma a probabilidade, na forma de dízima, de o funcionário selecionado colaborar em programas emitidos diariamente, é:

$$P\left(D\right) = P\left(C \cap D\right) + P\left(\overline{C} \cap D\right) = 0{,}4 + 0{,}15 = 0{,}55$$

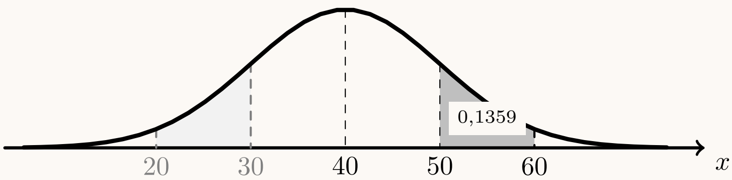
9. Considerando a variável aleatória X que define o tempo diário, em minutos, durante o qual um ouvinte escolhido ao acaso, acompanha a emissão da rádio OnOfff, e que esta segue uma distribuição normal, com $\mu = 40$ minutos e $\sigma = 10$ minutos, temos que a probabilidade de num dia o ouvinte escolhido ao acaso, acompanhar a emissão da rádio OnOfff entre 50 minutos $(\mu + \sigma)$ e uma hora (60 minutos - $\mu + 2\sigma$), é $P(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma)$.

Assim, temos que:

- $P\left(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\right) = P\left(30 < X < 50\right) \approx 0{,}6827$
- $P\left(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\right) = P\left(20 < X < 60\right) \approx 0{,}9545$
- $P\left(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\right) - P\left(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\right) = P\left(20 < X < 30\right) + P\left(50 < X < 60\right) \approx$

$$\approx 0{,}9545 - 0{,}6827 \approx 0{,}2718$$

- $P\left(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma\right) = P\left(50 < X < 60\right) \approx \dfrac{0{,}2718}{2} \approx 0{,}1359$



(Alternativamente podemos usar o comando da calculadora gráfica para avaliar as probabilidades associadas à função de distribuição cumulativa da normal (NormalCdf ou NormCD), com um valor mínimo de 50 e valor máximo de 60, $\mu = 40$ e $\sigma = 10$ para obter o valor seguinte).

Logo, a probabilidade solicitada, na forma de dízima, arredondado às milésimas, é:

$$P\left(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma\right) = P\left(40 + 10 < X < 40 + 2 \times 10\right) \approx 0{,}136$$

10.

10.1. A margem de erro do intervalo do intervalo de confiança é metade da amplitude do intervalo, ou seja:

$$\frac{14{,}56 - 13{,}86}{2} = \frac{0{,}64}{2} = 0{,}32$$

Resposta: **Opção D**

10.2. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 100$
- A média amostral: $\overline{x} = 12$
- O desvio padrão amostral: $s = 2{,}1$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às décimas, temos:

$$\left] 12 - 1{,}645 \times \frac{2{,}1}{\sqrt{100}}\, ;\, 12 + 1{,}645 \times \frac{2{,}1}{\sqrt{100}} \right[\approx \left] 11{,}7; 12{,}3 \right[$$

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | Época Especial | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação

7 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	**Classificação**
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).

9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **18 pontos**

Apresentar a pontuação obtida pelo António (1055) .... 5 pontos

Apresentar a pontuação obtida pelo Bernardo (1265) .... 5 pontos

Apresentar a pontuação obtida pela Carla (1055) .... 5 pontos

Apresentar a constituição da direção da rádio OnOfff .... 3 pontos
[diretor – Bernardo; vice-diretora – Carla; adjunto da direção – António]

2. .... **12 pontos**

(D)

3. .... **20 pontos**

Calcular o valor global atribuído ao prémio por cada funcionário .... 3 pontos
[Dora – 86 €; Elsa – 90 €; Fernando – 90 €]

Determinar a porção justa para cada funcionário .... 3 pontos
[Dora – 43 €; Elsa – 27 €; Fernando – 18 €]

Indicar a partilha temporária dos bens .... 2 pontos
[Dora – Bilhete; Elsa – CD; Fernando – Camisola]

Apurar os valores de excedente ou défice, por funcionário .... 3 pontos
[Dora – défice de 3 €; Elsa – excedente de 7 €; Fernando – excedente de 8 €]

Apurar o excesso $(12\ €)$ .... 3 pontos

Apurar o valor que cada funcionário receberia do excesso .... 3 pontos
[Dora – 6 €; Elsa – 3,6 €; Fernando – 2,4 €]

Apresentar a partilha final do prémio .... 3 pontos
[Dora – fica com o bilhete e tem a receber 9 €; Elsa – fica com o CD e tem a pagar 3,4 €; Fernando – fica com a camisola e tem a pagar 5,6 €]

4. .... **18 pontos**

Apresentar um grafo que modele a situação descrita .... 10 pontos

- Identificar os vértices .... 2 pontos
- Desenhar as arestas .... 8 pontos

Justificar, recorrendo à condição necessária e suficiente, o facto de o grafo não admitir circuitos de Euler .... 8 pontos

- Referir a existência de, pelo menos, um vértice de grau ímpar (S2 ou S4) .... 5 pontos
- Referir, recorrendo à condição necessária e suficiente, o facto de o grafo não admitir circuitos de Euler .... 3 pontos

5. .... **18 pontos**

Determinar o custo do equipamento se fosse escolhida a Alternativa 1 .... 9 pontos

Determinar o valor em portes $(26\ €)$ .... 7 pontos

Obter o custo total $(4526\ €)$ .... 2 pontos

Determinar o custo do equipamento se fosse escolhida a Alternativa 2 .... 7 pontos

Identificar o valor de $n\ (73)$ .... 1 ponto

Determinar o valor em portes $(173{,}04\ €)$ .... 4 pontos

Obter o custo total $(4173{,}04\ €)$ .... 2 pontos

Concluir .... 2 pontos
[A Alternativa 2 será a mais vantajosa.]

6.1. .... **12 pontos**

(A)

6.2.1. .... **18 pontos**

Escrever $1840 + 20a$ (ou equivalente) .... 5 pontos

Escrever $72 + a$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Escrever $\dfrac{1840 + 20a}{72 + a} = 24$ (ou equivalente) .... 5 pontos

Determinar o valor de $a\ (28)$ .... 5 pontos

6.2.2. .... **18 pontos**

Obter a frequência absoluta simples de cada classe utilizada no
Gráfico 2 $(11, 16, 14, 1, 8)$ .... (2 + 2 + 2 + 2 + 2)............... 10 pontos

Determinar a frequência absoluta simples de cada classe, considerando
a totalidade das respostas $(29, 42, 20, 33, 24)$ ....(1 + 1 + 1 + 1+ 1) ...... 5 pontos

Apresentar a tabela de frequências absolutas simples .... 3 pontos

7.1. .... **18 pontos**

Identificar $t = 0$ .... 3 pontos

Calcular $R(0)\ (7700)$ .... 3 pontos

Identificar $t = 5$ .... 4 pontos

Determinar $R(5)\ (10\,336)$ .... 3 pontos

Determinar $R(5) - R(0)\ (2636)$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Concluir .... 1 ponto

7.2. .... **18 pontos**

Apresentar o(s) gráfico(s) .... 4 pontos

Apresentar as coordenadas do ponto relevante $[(17{,}6;\, 12\,000)]$ .... 6 pontos

Determinar o valor solicitado (2018) .... 8 pontos

8. .... **18 pontos**

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

C: «O funcionário da rádio OnOfff trabalha a partir de casa»

D: «O funcionário colabora em programas emitidos diariamente»

Determinar $P(C \cap D)$ .... 7 pontos

Escrever $P(C) = 0{,}8$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Escrever $P(D\,|\,C) = 0{,}5$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $P(C \cap D)$ $(0{,}4)$ .... 3 pontos

Determinar $P(\overline{C} \cap D)$ .... 8 pontos

Escrever $P(\overline{C} \cap \overline{D}) = 0{,}05$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $P(\overline{C})$ $(0{,}2)$ .... 2 pontos

Obter $P(\overline{C} \cap D)$ $(0{,}15)$ .... 4 pontos

Calcular $P(D)$ $(0{,}55)$ .... 3 pontos

9. .... **18 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Evidenciar que 50 minutos correspondem ao valor de $\mu + \sigma$ .... 2 pontos

Evidenciar que uma hora corresponde ao valor de $\mu + 2\sigma$ .... 2 pontos

Determinar $P(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma)$ .... 14 pontos

Escrever $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$ .... 2 pontos

Obter $P(\mu < X < \mu + \sigma)$ $(0{,}34135)$ .... 4 pontos

Escrever $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$ .... 2 pontos

Obter $P(\mu < X < \mu + 2\sigma)$ $(0{,}47725)$ .... 4 pontos

Obter $P(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma)$ $(0{,}136)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Apresentar os elementos recolhidos na utilização da calculadora quando
a resposta for obtida recorrendo a uma distribuição .... 18 pontos

Caracterizar a distribuição normal $(N(40;\, 10))$ (ou equivalente) ..... 4 pontos

Determinar $P(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma)$ $(0{,}136)$ .... 14 pontos

10.1. .... **12 pontos**

(D)

10.2. .... **18 pontos**

Identificar os valores de n, $\overline{x}$, s e z para um intervalo de confiança a 90% . 4 pontos

$n = 100$ .... 1 ponto

$\overline{x} = 12$ .... 1 ponto

$s = 2{,}1$ .... 1 ponto

$z = 1{,}645$ .... 1 ponto

Calcular os extremos do intervalo de confiança $(]11{,}7; 12{,}3[)$ .... 14 pontos

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**2.**	**3.**	**5.**	**6.1.**	**7.1.**	**8.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	20	18	12	18	18	18	12	18	**146**

Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.**	**4.**	**6.2.1.**	**6.2.2.**	**7.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos					**54**
TOTAL						**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 13 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

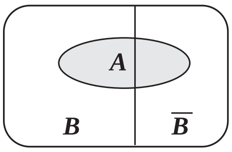
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

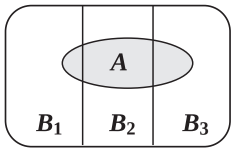
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. No recrutamento de funcionários para a agência de viagens Ir&Voltar, são valorizadas as competências seguintes: capacidade de comunicação (C), capacidade de negociação (N), domínio da tecnologia (T), domínio da língua inglesa (I) e persistência (P).

Cada candidato é avaliado, em cada competência, numa escala que varia desde o nível 1, menos competente, até ao nível 5, mais competente.

Depois de o candidato ser avaliado, constrói-se o polígono de competências.

Para tal:

- são desenhadas cinco circunferências, com o mesmo centro e diferentes raios; cada circunferência representa um nível, correspondendo a de menor raio ao nível 1, a seguinte ao nível 2, e assim sucessivamente, até à de maior raio, que corresponde ao nível 5;
- são marcados cinco raios da circunferência maior, cada um representando o eixo relativo ao nível de cada uma das cinco competências.

Se um candidato é avaliado com o nível 5 na capacidade de comunicação, é marcado o ponto de intersecção entre o raio correspondente a esta competência e a circunferência correspondente ao nível 5. Procede-se de modo semelhante para as restantes competências. Depois de marcados os cinco pontos, estes são ligados, definindo o polígono de competências do candidato.

Na Figura 1, apresentam-se os polígonos de competências dos quatro candidatos que se apresentaram a concurso, a Alice, o Bruno, a Carlota e o Delfim.

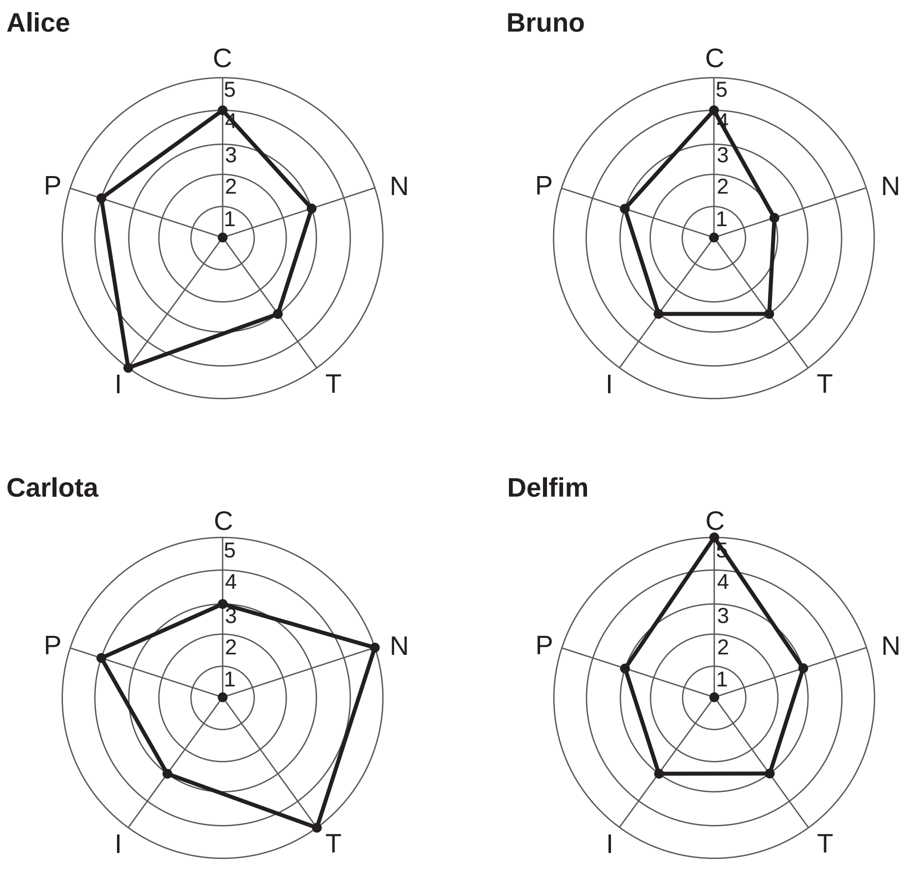


Figura 1

Observando o polígono de competências da Alice, podemos, por exemplo, concluir que foi avaliada com o nível 4 na capacidade de comunicação e com o nível 5 no domínio da língua inglesa.

1.1. Dos quatro candidatos que se apresentaram a concurso, dois deles foram admitidos pela Ir&Voltar.

Na seleção dos candidatos, foi aplicado o método a seguir descrito.

- Os níveis de competência de cada candidato são convertidos em pontos do modo seguinte:
  - o nível de competência C é multiplicado por cinco pontos;
  - o nível de competência N é multiplicado por quatro pontos;
  - o nível de competência T é multiplicado por três pontos;
  - o nível de competência I é multiplicado por dois pontos;
  - o nível de competência P é multiplicado por um ponto.
- Calcula-se a pontuação de cada um dos candidatos, somando os pontos obtidos.
- Ordenam-se os candidatos por ordem decrescente de pontuação, e será essa a ordem de seleção, ou seja, são selecionados os candidatos com maior pontuação.
- Em caso de empate, a seleção entre os candidatos empatados será feita por entrevistas.

Justifique se foram necessárias entrevistas para selecionar os dois candidatos.

Na sua resposta, apresente a pontuação final de cada um dos quatro candidatos.

* **1.2.** Considere os polígonos de competências apresentados na Figura 1.

Escolhe-se, ao acaso, um destes quatro polígonos.

Considere os acontecimentos seguintes, associados a esta experiência aleatória:

A: «O polígono escolhido tem assinalado o nível 4 na capacidade de comunicação (C)»

B: «O polígono escolhido tem assinalado, pelo menos, o nível 3 na capacidade de negociação (N)»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 1

*** 2.** A Célia e o Guilherme são os dois funcionários da agência de viagens Ir&Voltar que apresentaram melhores resultados no ano de 2021. Pelo seu desempenho, ganharam três viagens, X, Y e Z.

Para a distribuição das três viagens, a Célia e o Guilherme acordaram utilizar o método seguinte.

- Cada funcionário atribui, secretamente, um valor monetário a cada uma das três viagens e coloca o registo dessas licitações dentro de um envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído às viagens por cada funcionário e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada funcionário considera justo receber é igual a metade do valor global que ele atribuiu ao conjunto das três viagens.
- Cada viagem é destinada ao funcionário que mais a valoriza, considerando-se que o funcionário recebe o equivalente ao valor monetário que atribuiu à respetiva viagem.
- Caso, por aplicação do procedimento anterior, um funcionário não receba qualquer viagem, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o valor monetário recebido por esse funcionário é zero euros.
- Caso o valor das viagens recebidas por um funcionário ultrapasse o valor que tinha considerado justo receber, esse funcionário disponibiliza, em dinheiro, o respetivo excedente. Caso contrário, esse funcionário deverá receber, em dinheiro, do montante à disposição, o valor em falta.
- Após os procedimentos anteriores, caso ainda reste dinheiro, este é distribuído em partes iguais pelos dois funcionários.

Na Tabela 1, estão parcialmente registados os valores, em euros, atribuídos por cada funcionário nas licitações secretas, em que a representa o valor atribuído pela Célia à viagem Z.

Tabela 1

Viagem	**X**	**Y**	**Z**
Célia	1000	1500	a
Guilherme	1400	1000	550

Por aplicação do método acima descrito, a Célia considerava justo receber 1550 euros.

Determine, de acordo com o método acima descrito, a(s) viagem(ns) atribuída(s) ao Guilherme e o valor monetário que pagou ou recebeu após a inclusão do dinheiro que possa ter restado, de modo que nenhum deles tenha razão para reclamar.

3. Na agência de viagens Ir&Voltar, realizam-se, ao longo da primeira segunda-feira de cada trimestre, seis reuniões de trabalho, $R1$, $R2$, $R3$, $R4$, $R5$ e $R6$. Cada reunião tem um tema diferente e dura 90 minutos. De modo a planificar o dia das reuniões, é solicitada a cada funcionário a inscrição em uma ou mais reuniões, de acordo com os seus interesses. Para que todos os funcionários possam assistir às reuniões em que se inscrevem, é criado um horário com blocos de reuniões que possam ocorrer em simultâneo.

Na Tabela 2, apresentam-se as inscrições dos funcionários em cada uma das reuniões a realizar na primeira segunda-feira do terceiro trimestre de 2022.

Tabela 2

$R1$	$R2$	$R3$	$R4$	$R5$	$R6$
António	António	Bernardo	Diamantino	Ana	Célia
Bernardo	Diamantino	Fausto	Elsa	Guilherme	Elsa
Célia	Elsa	Guilherme	Fausto	Ilda	Guilherme
Zulmira	Xavier	Paulo	Paulo	Xavier	Tomás

Com o propósito de determinar o tempo mínimo necessário para que as seis reuniões decorram nas condições definidas, a diretora de planeamento da Ir&Voltar começou por construir um grafo que modelava a situação.

Indique, em horas, o tempo mínimo necessário para que as seis reuniões se realizem nas condições definidas.

Na sua resposta:

– apresente um grafo que a diretora de planeamento pudesse ter construído;

– identifique a constituição de cada bloco de reuniões.

* **4.** O Manuel pediu um empréstimo de 1530 euros para comprar uma viagem na agência de viagens Ir&Voltar.

Para pagar o empréstimo, ficou estabelecido que o valor pedido seria dividido em 18 parcelas iguais. Durante 18 meses, o Manuel teria de pagar uma prestação igual ao valor da parcela acrescido de uma taxa de 7%.

Depois de ter pago as 12 primeiras prestações, o Manuel teve umas despesas imprevistas e propôs não pagar as 13.ª, 14.ª e 15.ª prestações no mês previsto, comprometendo-se, no entanto, a terminar o pagamento do empréstimo no 18.º mês.

Foi aceite a proposta, mas com novas condições.

O valor a pagar nos 16.º, 17.º e 18.º meses seria igual a um terço do valor total das parcelas em dívida, acrescido de uma nova taxa.

Determine a nova taxa, sabendo que, no fim, pelo empréstimo de 1530 euros, o Manuel pagou um total de 1644,75 euros.

Apresente o resultado em percentagem.

5. A ilha de Dujal é um dos destinos de férias mais procurados pelos clientes da agência de viagens Ir&Voltar, devido à diversidade da sua flora.

Para preservar duas espécies de plantas, A e B, que, em dado momento, se encontravam em vias de extinção, foi criado, num viveiro, um projeto de reflorestação, com a duração de dois anos.

O número aproximado de plantas da espécie A e de plantas da espécie B, em centenas, existentes no viveiro, t meses após o início do projeto de reflorestação, é dado, respetivamente, pelas expressões

$$A(t) = 30 + 10\ln\left(t^3 + 1\right) \quad \text{e} \quad B(t) = 10 + 1{,}26^t \quad \text{com} \quad t \in [0, 24]$$

Assim, por exemplo, como $A(7) \approx 88{,}406$ centenas, o número aproximado de plantas da espécie A existentes no viveiro, sete meses após o início do projeto, é 8841.

5.1. Determine o valor da percentagem de aumento do número de plantas da espécie A existentes em viveiro durante os primeiros dois meses do projeto de reflorestação.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

* **5.2.** Ao fim de doze meses, o número de plantas da espécie A era, aproximadamente, o __________ do número de plantas da espécie B.

Selecione a opção que completa corretamente a frase.

(A) triplo **(B)** quádruplo **(C)** quíntuplo **(D)** sêxtuplo

* **5.3.** Determine ao fim de quantos dias, após o início do projeto, o número de plantas da espécie A era igual ao número de plantas da espécie B.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Admita que cada mês tem 30 dias.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

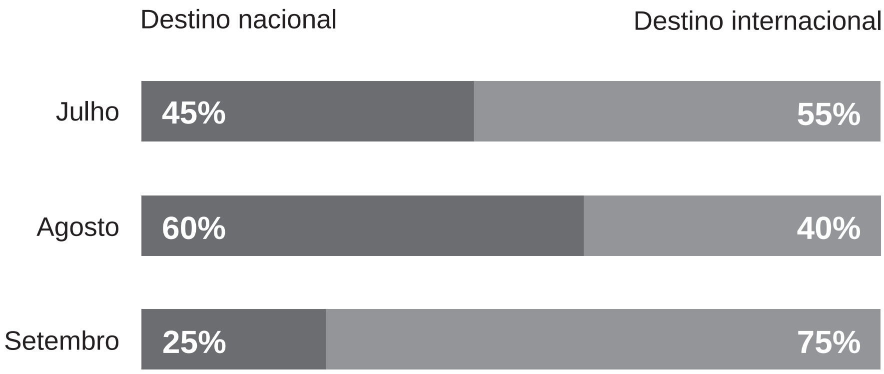
– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

6. No terceiro trimestre do ano de 2021, a agência de viagens Ir&Voltar vendeu, para destinos nacionais e para destinos internacionais, um total de 500 viagens.

No Gráfico 1, está representada, para cada mês do terceiro trimestre de 2021, a distribuição, em percentagem, das viagens vendidas na agência em função do destino.

Gráfico 1



Admita que:

- 48% das viagens vendidas no terceiro trimestre de 2021 são viagens vendidas no mês de agosto;
- o número de viagens vendidas no mês de julho é metade do número de viagens vendidas no mês de agosto.

Determine o número de viagens vendidas no mês de setembro para um destino internacional.

✱ 7. O diagrama de dispersão representado na Figura 2 mostra uma forte associação linear positiva entre o preço das viagens de avião vendidas na agência de viagens Ir&Voltar, num determinado período de tempo, e as horas de voo despendidas na viagem de ida e volta.

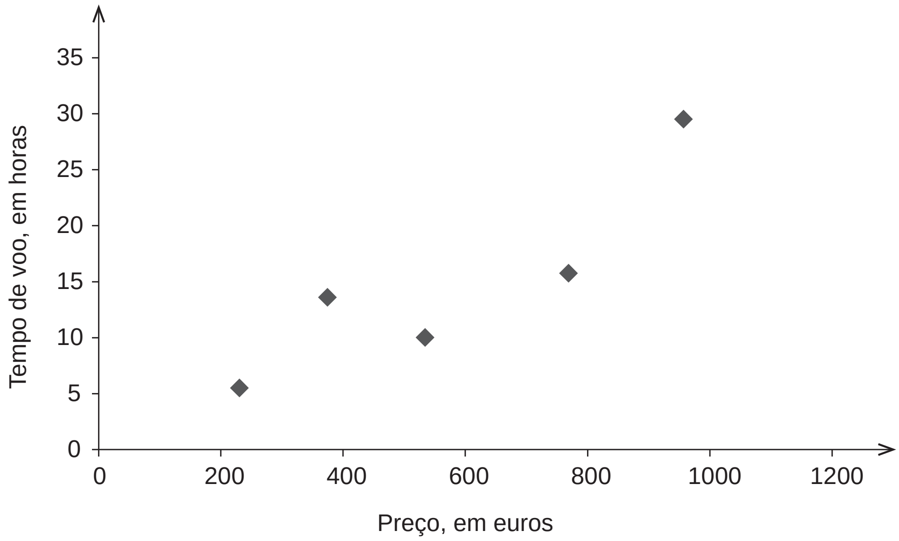


Figura 2

Em cada uma das opções seguintes, são dados um valor de r, coeficiente de correlação linear, e a equação de uma reta.

Em qual das opções poderão estar representados o valor de r e uma equação da reta de regressão linear da distribuição representada na Figura 2?

(A) $r = -0{,}92$
$y = 0{,}03x - 0{,}86$

(B) $r = -0{,}2$
$y = -0{,}03x - 0{,}86$

(C) $r = 0{,}92$
$y = -0{,}03x - 0{,}86$

(D) $r = 0{,}89$
$y = 0{,}03x - 0{,}86$

*** 8.** A agência de viagens Ir&Voltar foi inaugurada a 3 de janeiro de 2015. Desde essa data até ao dia 3 de janeiro de 2018, houve um grupo de funcionários que se manteve na empresa.

Na Tabela 3, estão representadas as idades desses funcionários no dia da inauguração da Ir&Voltar, em que b representa o número de funcionários com 31 anos.

Tabela 3

Idade no dia da inauguração (em anos)	**Número de funcionários**
20	1
22	3
26	2
31	b
40	2

No dia 3 de janeiro de 2018, a média das idades desses funcionários era 31,5 anos.

Determine quantos desses funcionários tinham 31 anos quando a agência foi inaugurada.

9. Na localidade onde se situa a agência de viagens Ir&Voltar, existe também a agência de viagens Vá&Volte.

Das 200 pessoas que responderam a um questionário, 140 referiram que já tinham comprado viagens na Ir&Voltar.

*** 9.1.** Foi, ainda, possível apurar que, das 200 pessoas que responderam ao questionário:

- 75 pessoas já tinham comprado viagens na agência Vá&Volte;
- 40 pessoas não compraram viagens nem na agência Ir&Voltar nem na agência Vá&Volte.

Escolhe-se, ao acaso, uma das 200 pessoas questionadas.

Determine a probabilidade de essa pessoa já ter comprado viagens em ambas as agências.

Apresente o resultado na forma de dízima.

9.2. Quando questionadas as 200 pessoas sobre se já tinham feito um cruzeiro, verificou-se o seguinte:

- 35% das pessoas nunca fizeram um cruzeiro;
- das pessoas que não compraram viagens na agência Ir&Voltar, 70% nunca fizeram um cruzeiro.

Qual é a probabilidade de uma das pessoas questionadas, escolhida ao acaso, ter comprado viagens na Ir&Voltar, sabendo-se que não fez um cruzeiro?

Apresente o resultado na forma de dízima.

*** 10.** Com o intuito de saber qual dos três destinos turísticos, Caraíbas, Dubai ou Maldivas, seria o mais pretendido pelos seus clientes, a responsável pelo *marketing* da agência de viagens Ir&Voltar selecionou, ao acaso, alguns dos clientes da agência, e estes indicaram o seu destino favorito de entre os destinos referidos.

Na Tabela 4, estão registadas as preferências indicadas pelos clientes selecionados.

Tabela 4

Destino	Caraíbas	Dubai	Maldivas
N.º de clientes	125	400	100

A amplitude de um intervalo de confiança para a proporção de clientes da Ir&Voltar que indicam o Dubai como destino favorito, em vez das Caraíbas ou das Maldivas, considerando a amostra de clientes constituída pela responsável do *marketing*, é $0{,}075264$.

Determine o nível de confiança desse intervalo.

Na sua resposta, apresente o valor da proporção amostral.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.2.**	**2.**	**4.**	**5.2.**	**5.3.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**10.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	20	18	12	18	12	18	18	18	**146**

Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.1.**	**3.**	**5.1.**	**6.**	**9.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos					**54**
TOTAL						**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 835

1.ª Fase

1.

1.1. Aplicando o método descrito para obter a composição da atual direção, temos:

- Pontuação da Alice (4 pontos na competência C, 3 pontos na competência N, 3 pontos na competência T, 5 pontos na competência I e 4 pontos na competência P):

$$4 \times 5 + 3 \times 4 + 3 \times 3 + 5 \times 2 + 4 \times 1 = 55$$

- Pontuação do Bruno (4 pontos na competência C, 2 pontos na competência N, 3 pontos na competência T, 2 pontos na competência I e 2 pontos na competência P):

$$4 \times 5 + 2 \times 4 + 3 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times 1 = 46$$

- Pontuação da Carlota (3 pontos na competência C, 5 pontos na competência N, 5 pontos na competência T, 3 pontos na competência I e 4 pontos na competência P):

$$3 \times 5 + 5 \times 4 + 5 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 1 = 60$$

- Pontuação do Delfim (5 pontos na competência C, 3 pontos na competência N, 3 pontos na competência T, 3 pontos na competência I e 3 pontos na competência P):

$$5 \times 5 + 3 \times 4 + 3 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times 1 = 55$$

Assim, na ordenação dos candidatos por ordem decrescente de pontuação, temos que a candidata com maior pontuação é a Carlota, pelo que será a primeira candidata admitida, mas como foram selecionados dois candidatos, e a Alice e o Delfim ficaram empatados com a segunda maior pontuação, foi necessário recorrer a uma entrevista a estes dois candidatos para selecionar o segundo candidato admitido.

1.2. A probabilidade condicionada $P(A|B)$ significa a probabilidade de escolher, ao acaso, um dos polígonos, e ele ter assinalado o nível 4 na capacidade de comunicação (C), sabendo que tem assinalado, pelo menos, o nível 3 na capacidade de negociação (N).

Assim, como sabemos que o polígono tem assinalado, pelo menos, o nível 3 na capacidade de negociação (N), só existem 3 polígonos possíveis (o da Alice, da Carlota e do Delfim).

Considerando estes 3 polígonos possíveis, só 1 (o da Alice) tem o nível 4 na capacidade de comunicação (C), pelo que só existe um caso possível, e assim temos que $P(A|B) = \dfrac{1}{3}$

Resposta: **Opção B**

2. Como o valor global atribuído pela Célia às três viagens foi $1000+1500+a = 2500+a$, o valor considerado justo é $\frac{2500+a}{2}$ e como este valor é 1550 euros, temos que o valor atribuído pela Célia à viagem Z, ou seja, o valor de a, é:

$$\frac{2500+a}{2} = 1550 \Leftrightarrow 2500+a = 2\times 1550 \Leftrightarrow a = 3100-2500 \Leftrightarrow a = 600$$

Assim, de acordo com o método descrito, e com os dados do enunciado, temos que:

Funcionários	**Célia**	**Guilherme**
Valor Global atribuído	$1000+1500+a = 2500+a$	$1400+1000+550 = 2950$
Valor considerado justo	1550	$\frac{2950}{2} = 1475$
Atribuição das viagens	Y + Z	X
Valor recebido	1500+600=2100	1400
Excedente (E)	$2100-1550 = 550$	–
Valor em falta (F)	–	$1475-1400 = 75$
Dinheiro restante (E - F)	$550-75 = 475$	
Distribuição do dinheiro restante	$\frac{475}{2} = 237{,}5$	

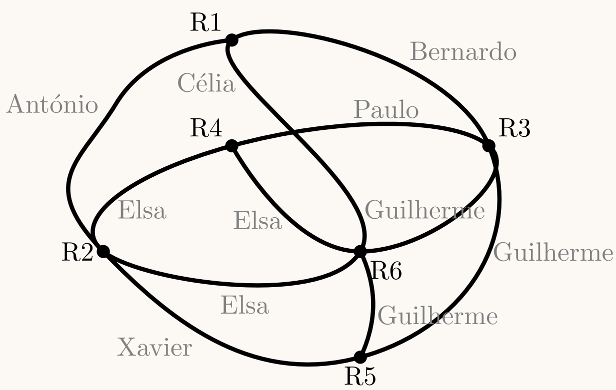
Assim, após a divisão pelo método descrito, o Guilherme recebe a viagem X e $75+237{,}5 = 312{,}5$ euros.

3. De acordo com as informações da tabela podemos desenhar o grafo da figura seguinte, em que cada vértice representa uma reunião e cada aresta representa a impossibilidade de decorrer em simultâneo pela presença de pelo menos uma pessoa em ambas as reuniões.

Assim, podemos verificar que a reunião R6 não pode ocorrer sem simultâneo com qualquer outra, as reuniões R1, R4 e R5 podem decorrer em paralelo, porque não existem arestas entre os respetivos vértices, e, pela mesma razão, as restantes (R2 e R3) também podem ocorrer ao mesmo tempo.

Assim podemos definir os seguintes blocos de reuniões:

- R6
- R1, R4 e R5
- R2 e R3



Assim, como cada reunião tem a duração de 90 minutos, e são necessários três conjuntos de reuniões, o tempo mínimo necessário para que as seis reuniões se realizem nas condições definidas é de $3\times 90 = 270$ minutos, a que correspondem $\frac{270}{60} = 4{,}5$ horas.

4. Como o Manuel pediu emprestados 1530 euros e acordou que o pagamento seria feito em 18 parcelas iguais, cada uma dessas parcelas tem o valor de $\frac{1530}{18} = 85$ €

O montante total pago pelo Manuel (1644,75 €) pode ser entendido como a soma de três parcelas:

$$\text{Valor total pago} \;=\; \text{Empréstimo} \;+\; \text{Juros dos primeiros 12 meses} \;+\; \text{Juros dos últimos 6 meses}$$

Ou seja:

$$\text{Juros dos últimos 6 meses} = \text{Valor total pago} \;-\; \text{Empréstimo} \;-\; \text{Juros dos primeiros 12 meses}$$

E assim vem que:

$$\text{Juros dos últimos 6 meses} = 1644{,}75 - 1530 - 85 \times 0{,}07 \times 12 = 43{,}35 \text{ €}$$

Como este montante foi pago em seis prestações, o juro correspondente a cada uma das prestações foi $\frac{43{,}35}{6} = 7{,}225$ €

Como cada parcela tem o valor de 85 €, a taxa de juro (t), em percentagem, correspondente a cada uma das seis últimas prestações, é:

$$\frac{85}{7{,}225} = \frac{100}{t} \Leftrightarrow t = \frac{100 \times 7{,}225}{85} \Leftrightarrow t = 8{,}5\%$$

5.

5.1. De acordo com o modelo apresentado, podemos calcular o número de plantas da espécie A:

- No início do projeto de reflorestação, ou seja 0 meses após o inicio do projeto:

$$A(0) = 30 + 10\ln(0^3 + 1) = 30 \text{ centenas} = 3000$$

- 2 meses após o inicio do projeto:

$$A(2) = 30 + 10\ln(2^3 + 1) \approx 51{,}972 \text{ centenas} \approx 5197$$

Ou seja, nos primeiros dois meses do projeto o aumento do número de plantas desta espécie foi $5197 - 3000 = 2197$, a que corresponde uma percentagem de aumento a, relativamente ao valor inicial, arredondada às unidades:

$$\frac{3000}{2197} = \frac{100}{a} \Leftrightarrow a = \frac{100 \times 2197}{3000} \Rightarrow a \approx 73\%$$

5.2. Calculando o número de plantas da espécie A e da espécie B ao fim de 12 meses, temos:

- $A(12) = 30 + 10\ln(12^3 + 1) \approx 104{,}553 \text{ centenas} \approx 10\,455$
- $B(12) = 10 + 1{,}26^{12} = 26{,}012 \text{ centenas} \approx 2601$

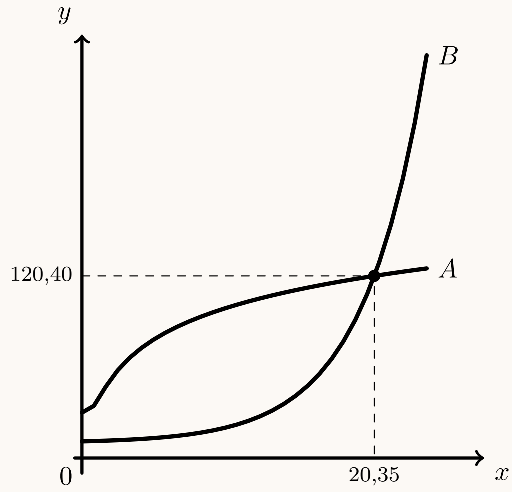
Calculando a razão entre estes valores, temos:

$$\frac{A(12)}{B(12)} \approx \frac{10\,455}{2601} \approx 4$$

Pelo que podemos afirma que $A(12) \approx 4 \times B(12)$

Resposta: **Opção B**

5.3. Representando na calculadora gráfica os modelos da variação dos números de plantas das espécies A e B ($y = 30 + \ln(x^3 + 1)$ e $y = 10 + 1{,}26^x$), para os valores do tempo indicados, ou seja, $0 \leq x \leq 24$, obtemos os gráficos que se encontram reproduzidos na figura ao lado.



Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção das representações gráficas dos dois modelos, obtemos os valores aproximados (às centésimas) das coordenadas, ou seja, os valores correspondente ao tempo em que o número de plantas das duas espécies era igual, ou seja, o ponto de coordenadas $(20{,}35\,;\,120{,}40)$

Assim, temos que o número de plantas das duas espécies era igual ao fim de 20,35 meses, a que corresponde um número aproximado (às unidades) de $20{,}35 \times 30 \approx 611$ dias.

6. Considerando o total de 500 viagens vendidas no terceiro trimestre pela IR&Voltar, temos:

- Viagens vendidas no mês de agosto (48% do total do trimestre): $500 \times 0{,}48 = 240$
- Viagens vendidas no mês de julho (metade das vendidas no mês de agosto): $\dfrac{240}{2} = 120$
- Viagens vendidas no mês de setembro: $500 - 240 - 120 = 140$

Como em setembro foram vendidas 140 viagens, e destas 75% foram para um destino internacional, esta percentagem corresponde a:

$$140 \times 0{,}75 = 105$$

7. Da observação do diagrama de dispersão e como a associação linear é positiva, podemos verificar que:

- o coeficiente de correlação também é positivo, ou seja, $r > 0$, pelo que apenas as opções (C) e (D) podem corresponder à distribuição apresentada;
- o declive da reta de regressão também é positiva, pelo que apenas as opções (A) e (D) podem corresponder à distribuição apresentada.

Resposta: **Opção D**

8. Como no dia 3 de janeiro de 2018, a média das idades dos funcionários que se manteve na empresa, era 31,5 anos, então no dia 3 de janeiro de 2014, a média das idades dos mesmos funcionários era $31{,}5 - 3 = 28{,}5$.

Assim a média das idades destes funcionários, no dia 3 de janeiro de 2014, é:

$$\bar{x} = \frac{20 \times 1 + 22 \times 3 + 26 \times 2 + 31 \times b + 40 \times 2}{1 + 3 + 2 + b + 2} = \frac{31b + 218}{b + 8}$$

Assim, calculando o número de funcionários tinham 31 anos quando a agência foi inaugurada, ou seja, o valor de b, temos:

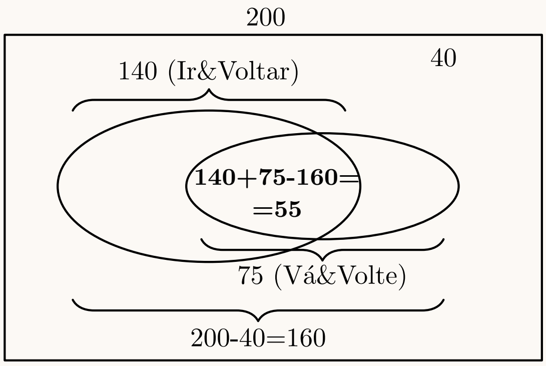
$$\frac{31b + 218}{b + 8} = 28{,}5 \;\Leftrightarrow\; 31b + 218 = 28{,}5(b + 8) \;\Leftrightarrow\; 31b + 218 = 28{,}5b + 228 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 31b - 28{,}5b = 228 - 218 \;\Leftrightarrow\; 2{,}5b = 10 \;\Leftrightarrow\; b = \frac{10}{2{,}5} \;\Leftrightarrow\; b = 4$$

9.

9.1. Como responderam ao questionário 200 pessoas das reservas, e dessas, 40 não compraram viagens em nenhuma das duas agências, $200 - 40 = 160$ pessoas compraram viagens em pelo menos uma das agências.

Como 140 pessoas compraram na agÊncia Ir&Voltar e 75 compraram na agência Vá&Volte, então o número de pessoas que compraram viagens em ambas as agências é $140 + 75 - 160 = 55$



Assim, a probabilidade de uma pessoa que respondeu ao inquérito já ter comprado viagens em ambas as agências, na forma de dízima, é:

$$\frac{55}{200} = 0{,}275$$

9.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma das pessoas que responderam ao questionário, e os acontecimentos:
C:≪A pessoa já fez um cruzeiro≫
I:≪A pessoa já comprou viagens na agência Ir&Voltar≫

Temos, de acordo com o enunciado, que: $P\left(I\right) = \frac{140}{200} = 0{,}7$, $P\left(\overline{C}\right) = 0{,}35$ e $P\left(\overline{C}|\overline{I}\right) = 0{,}7$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{I}\right) = 1 - P\left(I\right) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$
- $P\left(\overline{C} \cap \overline{I}\right) = P\left(\overline{C}|\overline{I}\right) \times P\left(\overline{I}\right) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$
- $P\left(I \cap \overline{C}\right) = P\left(\overline{C}\right) - P\left(\overline{C} \cap \overline{I}\right) = 0{,}35 - 0{,}21 = 0{,}14$

	C	$\overline{C}$	
I		0,14	0,7
$\overline{I}$		0,21	0,3
		0,35	1

Desta forma a probabilidade, na forma de dízima, de uma das pessoas questionadas, escolhida ao acaso, ter comprado viagens na Ir&Voltar, sabendo-se que não fez um cruzeiro, é:

$$P\left(I|\overline{C}\right) = \frac{P\left(I \cap \overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)} = \frac{0{,}14}{0{,}35} = 0{,}4$$

10. Calculando a proporção de clientes da Ir&Voltar que indicam o Dubai como destino favorito relativa a esta amostra, temos:

$$\hat{p} = \frac{400}{125+400+100} = \frac{400}{625} = 0{,}64$$

E o número de inquiridos, ou seja, a dimensão da amostra é:

$$n = 125+400+100 = 625$$

Considerando o intervalo de confiança para a proporção $\left(\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[\right)$, temos que a amplitude é:

$$\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Assim, igualando a expressão da amplitude ao valor dado, substituindo os valores da proporção ($\hat{p}$) e de n, e resolvendo a equação, temos:

$$2z\sqrt{\frac{0{,}64(1-0{,}64)}{625}} = 0{,}075264 \Leftrightarrow z = \frac{0{,}075264}{2 \times \sqrt{\frac{0{,}64(1-0{,}64)}{625}}} \Rightarrow z \approx 1{,}96$$

Assim, temos que o nível de confiança associado ao valor $z \approx 1{,}06$, ou seja o nível de confiança do intervalo, é 95% .

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Critérios de Classificação

7 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de seleção, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de seleção, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).

8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... **18 pontos**

Determinar a pontuação de cada candidato .... (4 + 4 + 4 + 4) .... 16 pontos
[Alice – 55; Bruno – 46; Carlota – 60; Delfim – 55]

Concluir .... 2 pontos
[A Alice e o Delfim ficaram empatados no segundo lugar e, por isso, a seleção de um deles depende do resultado das entrevistas realizadas.]

1.2. .... **12 pontos**

(B)

2. .... **20 pontos**

Determinar o valor atribuído pela Célia à viagem Z $(600\ €)$ .... 4 pontos

Determinar o valor justo a receber pelo Guilherme $(1475\ €)$ .... 4 pontos

Indicar a distribuição das viagens pelos funcionários
(Célia – Viagens Y e Z; Guilherme – Viagem X) .... 3 pontos

Determinar o valor a pagar ou a receber por cada funcionário
(Célia – tem a pagar $550\ €$; Guilherme – tem a receber $75\ €$) .... 4 pontos

Determinar o valor monetário a distribuir pelos funcionários $(237{,}5\ €)$ .... 2 pontos

Concluir .... 3 pontos
[O Guilherme recebe a viagem X e $312{,}5\ €$]

3. .... **18 pontos**

Apresentar um grafo que modele a situação .... 8 pontos

Associar os vértices às diferentes reuniões .... 2 pontos

Associar as arestas à possibilidade de ocorrência de reuniões em simultâneo (**ver nota**) .... 6 pontos

Apresentar os blocos de reuniões .... 7 pontos
[$R1$, $R4$ e $R5$; $R2$ e $R3$; $R6$]

Indicar o tempo solicitado, em horas $(4{,}5)$ .... 3 pontos

Nota – Alternativamente, as arestas podem ser associadas à impossibilidade de ocorrência de reuniões em simultâneo.

4. .... **18 pontos**

Determinar o valor de cada parcela $(85\ €)$ .... 2 pontos

Determinar o valor de cada uma das 12 primeiras prestações $(90{,}95\ €)$ .... 4 pontos

Determinar o valor pago nas 12 primeiras prestações $(1091{,}4\ €)$ .... 2 pontos

Determinar o valor a pagar nas 3 últimas prestações $(553{,}35\ €)$ .... 4 pontos

Determinar o valor das parcelas referente aos 6 meses em falta $(510\ €)$ .... 2 pontos

Obter o valor solicitado $(8{,}5\%)$ .... 4 pontos

5.1. .... **18 pontos**

Identificar $t = 0$ .... 2 pontos

Determinar $A(0)$ (30) .... 3 pontos

Identificar $t = 2$ .... 2 pontos

Determinar $A(2)$ $(\approx 51{,}972)$ .... 3 pontos

Obter o valor solicitado (73%) .... 8 pontos

5.2. .... **12 pontos**

(B)

5.3. .... **18 pontos**

Apresentar o(s) gráfico(s) .... 6 pontos

Apresentar a abcissa do ponto relevante $(20{,}35)$ .... 6 pontos

Obter o valor solicitado (611) .... 6 pontos

6. .... **18 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar o número de viagens vendidas no mês de agosto (240) .... 6 pontos

Determinar o número de viagens vendidas no mês de julho (120) .... 3 pontos

Determinar o número de viagens vendidas no mês de setembro (140) .... 3 pontos

Obter o valor solicitado (105) .... 6 pontos

2.º Processo

Determinar a percentagem de viagens vendidas no mês de julho (24%) .... 3 pontos

Determinar a percentagem de viagens vendidas no mês de setembro (28%) .... 3 pontos

Determinar o número de viagens vendidas no mês de setembro (140) .... 6 pontos

Obter o valor solicitado (105) .... 6 pontos

7. .... **12 pontos**

(D)

8. .... **18 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar a média das idades em 2015 $(28{,}5)$ .... 5 pontos

Escrever $\dfrac{20+22\times 3+26\times 2+31\times b+40\times 2}{8+b}=28{,}5$ (ou equivalente) ..... 5 pontos

Escrever $218+31b=228+28{,}5b$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter o valor de b (4) .... 4 pontos

2.º Processo

Determinar as idades dos funcionários em 2018 $(23;\ 25;\ 29;\ 34;\ 43)$ .... 5 pontos

Escrever $\dfrac{23+25\times 3+29\times 2+34\times b+43\times 2}{8+b}=31{,}5$ (ou equivalente) ..... 5 pontos

Escrever $242+34b=252+31{,}5b$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter o valor de b (4) .... 4 pontos

9.1. .... **18 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar o número de pessoas que compraram viagens em, pelo menos, uma das agências (160) .... 6 pontos

Determinar o número de pessoas que compraram viagens em ambas as agências (55) .... 6 pontos

Obter o valor solicitado $(0{,}275)$ .... 6 pontos

2.º Processo

Determinar o número de pessoas que compraram viagens apenas na agência Vá&Volte (20) .... 6 pontos

Determinar o número de pessoas que compraram viagens em ambas as agências (55) .... 6 pontos

Obter o valor solicitado $(0{,}275)$ .... 6 pontos

9.2. .... **18 pontos**

Considerem-se os acontecimentos seguintes:

I: «Comprou viagens na Ir&Voltar»

C: «Fez um cruzeiro»

Calcular $P(I \cap \overline{C})$ .... 14 pontos

Determinar $P(I)$ $(0,7)$ .... 4 pontos

Determinar $P(\overline{I})$ $(0,3)$ .... 2 pontos

Escrever $P(\overline{C} \mid \overline{I}) = 0,7$ .... 1 ponto

Determinar $P(\overline{I} \cap \overline{C})$ $(0,21)$ .... 3 pontos

Obter $P(I \cap \overline{C})$ $(0,14)$ .... 4 pontos

Calcular $P(I|\overline{C})$ .... 4 pontos

Escrever $P(\overline{C}) = 0,35$ .... 1 ponto

Obter $P(I|\overline{C})$ $(0,4)$ .... 3 pontos

10. .... **18 pontos**

Determinar o valor de n (625) .... 3 pontos

Determinar o valor de $\hat{p}$ $(0,64)$ .... 3 pontos

Escrever $2 \times z \times \sqrt{\dfrac{0,64(1-0,64)}{625}} = 0,075264$ (ou equivalente) .... 6 pontos

Determinar o valor de z $(1,96)$ .... 5 pontos

Indicar o nível de confiança (95%) .... 1 ponto

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.2.	2.	4.	5.2.	5.3.	7.	8.	9.1.	10.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	20	18	12	18	12	18	18	18	**146**

Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	1.1.	3.	5.1.	6.	9.2.	Subtotal
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos					**54**
TOTAL						**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 15 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

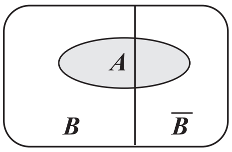
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

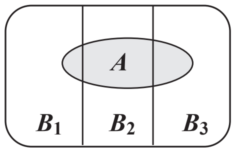
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. Na ilha de Dujal, existe um parque de campismo que é muito procurado por campistas.

Para eleger o novo diretor do parque, os 30 principais acionistas da empresa que o detém votaram, cada um deles, numa lista de preferências constituída pelos três candidatos elegíveis para o cargo: a Ana (A), o Bruno (B) e o Carlos (C).

A Figura 1 apresenta os resultados dos 30 votos validamente expressos.

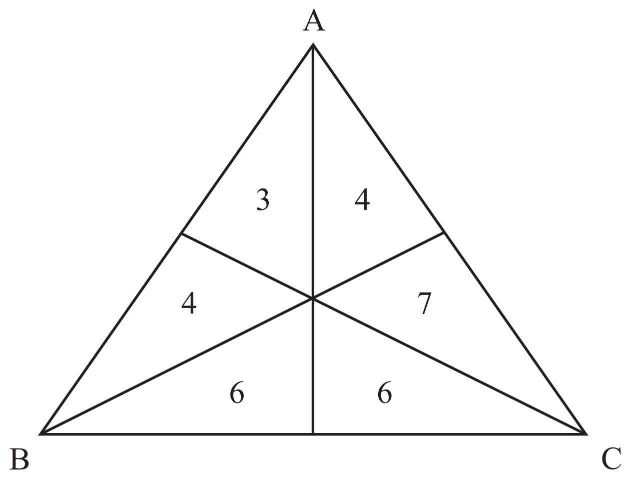


Figura 1

De acordo com a Figura 1, três dos acionistas votaram na lista de preferência ABC, pois o número 3 está numa região do triângulo cujo vértice mais próximo é o A, seguindo-se o B e, finalmente, o C.

1.1. Concluída a votação, os resultados foram registados numa tabela semelhante à Tabela 1, que se apresenta parcialmente preenchida, para posterior eleição do novo diretor do parque de campismo.

Tabela 1

Votos / Preferência	3	4	4	6	6	7
1.ª	A					C
2.ª	B					A
3.ª	C					B

A eleição do novo diretor do parque de campismo resultou da aplicação do método a seguir descrito.

- Seleciona-se um par de candidatos e atribui-se o número de votos registados em cada coluna ao candidato mais bem posicionado, de entre os dois selecionados.
- Comparam-se os votos obtidos por esses dois candidatos. O candidato com o maior número de votos é o vencedor do par escolhido.
- Repetem-se os procedimentos anteriores até um dos candidatos ter vencido todas as comparações com os restantes. Esse candidato será o vencedor da eleição e, portanto, o novo diretor do parque de campismo.

Determine qual dos candidatos foi eleito como novo diretor do parque de campismo por aplicação do método descrito, começando por comparar as votações dos candidatos A e C.

Na sua resposta, apresente:

– uma tabela semelhante à Tabela 1, devidamente preenchida;

– todos os cálculos que efetuar.

* **1.2.** Escolhe-se, ao acaso, um dos 30 votos apresentados na Figura 1.

Considere os acontecimentos seguintes, associados a esta experiência aleatória:

R: «O voto selecionado tem como primeira preferência o candidato B»

S: «O voto selecionado tem como segunda preferência o candidato A»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(R|S)$?

(A) $\frac{4}{11}$

(B) $\frac{7}{11}$

(C) $\frac{4}{9}$

(D) $\frac{7}{9}$

*** 2.** A Lara, o Manuel, a Paula, o Vasco e o Tomás são os responsáveis pela inspeção diária do recinto do parque de campismo. Para rentabilizar o seu trabalho, decidem dividir o recinto em cinco parcelas, ficando cada um responsável pela inspeção de uma parcela. De modo a realizar uma divisão do trabalho que cada um considerasse justa, aplicaram o algoritmo a seguir descrito.

1.º passo: Atribui-se, aleatoriamente, uma ordem aos responsáveis. Considere-se que a ordem atribuída foi A, B, C, D e E.

2.º passo: O responsável A delimita uma parcela do mapa do recinto que considera corresponder a $\frac{1}{5}$ do total, visto serem cinco os intervenientes iniciais, e entrega a parcela em causa ao responsável B.

3.º passo: O responsável B pronuncia-se, concordando com a divisão efetuada ou dela discordando:

- se considera que a parcela que lhe foi entregue é $\frac{1}{5}$ do mapa (ou menos), passa a vez ao responsável seguinte, entregando-lhe a parcela em causa;
- se considera que a parcela que lhe foi entregue é mais do que $\frac{1}{5}$ do mapa, retifica-a (retirando-lhe uma parte) e passa a vez ao responsável seguinte, entregando-lhe a parcela em causa.

4.º passo: O responsável C repete o procedimento do 3.º passo e entrega a parcela em causa ao responsável D.

5.º passo: O responsável D repete o procedimento do 3.º passo e entrega a parcela em causa ao responsável E.

6.º passo: O responsável E pronuncia-se:

- se concorda com a divisão efetuada, atribui a parcela resultante de todo este processo ao último responsável que tenha retificado a parcela ou, caso ninguém a tenha retificado, entrega-a ao responsável A;
- se discorda da divisão efetuada, retifica a parcela, e esta é-lhe entregue; termina assim a primeira volta, saindo o responsável que acabou de receber a parcela.

7.º passo: A segunda volta faz-se com o que resta do mapa e inicia-se no responsável a seguir ao que acabou de receber a parcela na volta anterior, mantendo-se a ordem entre os restantes responsáveis.

8.º passo: Realizam-se as voltas necessárias, sempre com um responsável a menos do que na volta anterior, até que restem apenas dois responsáveis. Quando isso acontecer, um divide e o outro escolhe. Termina, assim, a divisão do mapa do recinto pelos cinco responsáveis.

Para a divisão do mapa, a ordem atribuída aleatoriamente foi: Manuel, Tomás, Lara, Vasco e Paula.

Admita que:

– a segunda volta se iniciou com a Lara;

– na segunda volta, a parcela foi atribuída ao Vasco;

– na terceira volta, houve retificações por parte de dois responsáveis.

Associe a cada um dos nomes apresentados na Coluna **I** as afirmações da Coluna **II** que lhe correspondem por aplicação do algoritmo.

Cada uma das afirmações, de 1 a 7, deve ser associada apenas a um dos nomes e todas as afirmações devem ser utilizadas.

Escreva na folha de respostas cada nome da Coluna **I** seguido do(s) número(s) correspondente(s) da Coluna **II**.

COLUNA I	COLUNA II
Lara Paula Tomás	**(1)** Na primeira volta, foi-lhe atribuída uma parcela do mapa do recinto. **(2)** Na segunda volta, foi o responsável a pronunciar-se após a parcela ter sido retificada. **(3)** Inicia a terceira volta. **(4)** Na terceira volta, foi-lhe atribuída uma parcela do mapa do recinto. **(5)** Na terceira volta, retificou a parcela. **(6)** Nunca retificou qualquer parcela. **(7)** Nunca iniciou qualquer volta.

3. No parque de campismo de Dujal, existem cinco ecopontos: A, B, C, D e E.

No final de cada dia, um funcionário recolhe o conteúdo dos ecopontos. De modo a tornar mais eficiente o seu trabalho, o funcionário definiu um itinerário, com início e fim no portão do parque (P), para a recolha do conteúdo dos cinco ecopontos.

O itinerário definido resultou de um grafo construído com o algoritmo seguinte:

- escolher a aresta do grafo com menor peso, qualquer que ela seja;
- escolher, sucessivamente, as arestas com menor peso, garantindo que três arestas do grafo que está a ser definido não se encontram num mesmo vértice e não permitindo que se formem quaisquer percursos fechados que não incluam todos os vértices.

As distâncias mínimas, em metros, entre cada dois ecopontos e entre o portão e cada um dos cinco ecopontos estão registadas na Tabela 2.

Tabela 2

	B	C	D	E	P
A	310	730	365	600	395
B		550	400	790	710
C			800	610	366
D				605	615
E					380

Apresente um possível itinerário, definido pelo funcionário, com início e fim no portão.

Na sua resposta, apresente:

– a ordenação das arestas selecionadas pelo algoritmo descrito;

– um grafo semelhante ao que terá sido construído pelo funcionário.

✱ 4. Na Figura 2, está reproduzida parte da tabela de taxas diárias praticadas no parque de campismo da ilha de Dujal, no mês de junho.

	***Bungalow* M (até 4 pessoas)**	***Bungalow* G (até 6 pessoas)**	**Tenda**
Taxa diária	80 €	100 €	6,50 €*

* a este preço acresce o valor de 5,50 € por adulto alojado.

Figura 2

Durante o mês de junho, uma empresa organizou um evento para 140 pessoas, reservando 8 *bungalows* M, 10 *bungalows* G e 12 tendas para um dia.

Admita que todos os *bungalows* foram usados na sua capacidade máxima e que, do valor faturado, o parque obteve um lucro de 25%.

Qual é o valor exato do lucro, em euros, que o parque de campismo obteve com este evento?

5. Uma das principais atrações do parque de campismo da ilha de Dujal é o seu lago natural, onde existem diversas espécies de peixes.

Admita que o número de peixes da espécie A existentes no lago, em centenas, t anos após o início do ano 2000, é bem aproximado pelo modelo

$$A(t) = \frac{20}{1 + 99e^{-0,8t}}$$

Assim, por exemplo, como $A(10) \approx 19,35713$ centenas, o número aproximado de peixes da espécie A existentes no lago, dez anos após o início do ano 2000, é 1936.

* **5.1.** Qual foi o aumento, em percentagem, do número de peixes da espécie A no lago, comparando o número de peixes existentes três anos após o início do ano 2000 com o número existente seis anos após o início do ano 2000?

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

5.2. Num determinado momento, o número de peixes da espécie A foi, pela primeira vez, seis vezes maior do que o número de peixes existentes no início do ano 2002.

Determine em que ano tal ocorreu.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às décimas.

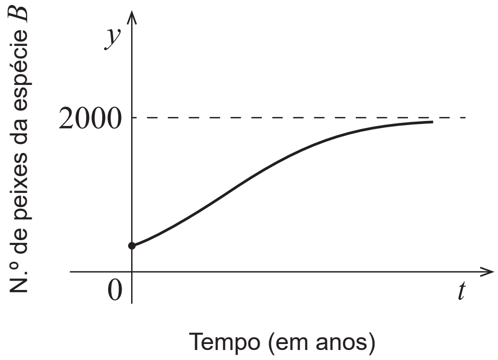
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

5.3. A evolução do número de peixes da espécie B no lago do parque de campismo, desde o início do ano 1997, pode ser modelada através de uma função.

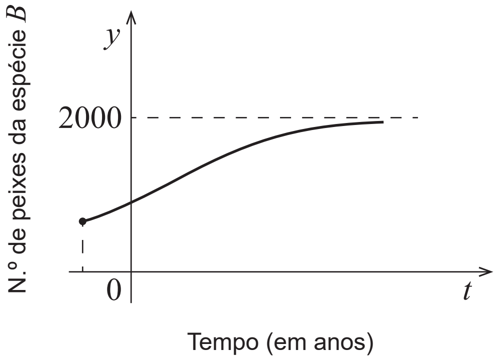
Com o tempo, estima-se que o número de peixes da espécie B no lago venha a atingir o dobro do número de peixes da espécie A.

Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico dessa função, desde o início do ano 1997, considerando que $t = 0$ corresponde ao início do ano 2000?

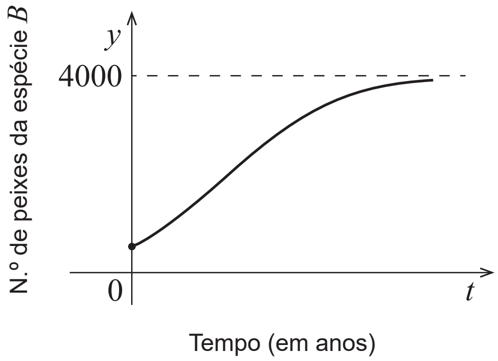
(A)



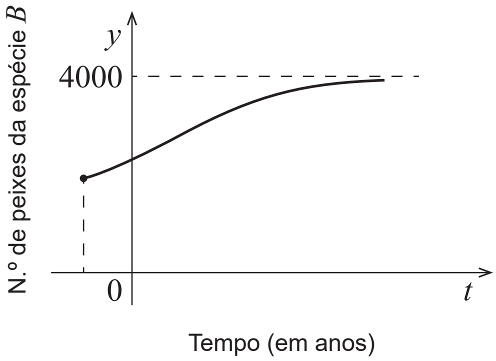
(B)



(C)



(D)



6. No parque de campismo de Dujal, existem 380 lugares distribuídos do seguinte modo:

- lugares para tendas;
- lugares para estacionar autocaravanas;
- lugares para estacionar automóveis.

Ao longo de uma determinada semana, verificou-se que estiveram sempre ocupados os mesmos 200 lugares.

Na Figura 3, é apresentada a distribuição dos lugares ocupados, tendo em conta a sua função.

Na Tabela 3, apresenta-se o número de lugares no parque de campismo, tendo em conta a sua função e o número de lugares ocupados por autocaravanas.

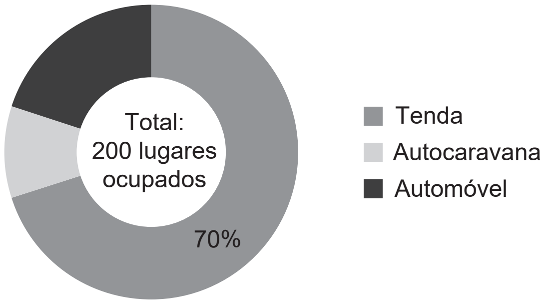


Figura 3

Tabela 3

	N.º de lugares	N.º de lugares ocupados
Tenda	175	
Autocaravana	80	20
Automóvel	125	

Determine a percentagem de lugares ocupados por automóveis, relativamente ao número de lugares existentes para os estacionar.

7. Um grupo de catorze pessoas, o grupo A, cuja média de idades é 20 anos, realizou uma festa no parque de campismo de Dujal.

* **7.1.** Admita que a amplitude da distribuição das idades das pessoas do grupo A é 19 anos.

Em cada uma das opções seguintes, é apresentado um diagrama de caule e folhas. Nos diagramas, o algarismo das dezenas de cada registo é indicado no caule, e o algarismo das unidades é indicado nas folhas.

Qual dos diagramas seguintes pode representar as idades daquele grupo de pessoas?

(A)

$$\begin{array}{r|l} 1 & 8, 8, 8, 8, 9, 9 \\ 2 & 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 3 & 0 \end{array}$$

(B)

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5 \\ 2 & 0, 1, 2 \\ 3 & 0, 0, 1, 1 \end{array}$$

(C)

$$\begin{array}{r|l} 1 & 4, 6 \\ 2 & 0, 2 \\ 3 & 1, 2, 2, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 9 \end{array}$$

(D)

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 8, 9 \\ 2 & 1, 1, 2 \\ 3 & 1 \end{array}$$

* **7.2.** Ao grupo A, constituído por 14 pessoas, juntou-se um outro grupo de pessoas, o grupo B, cuja média de idades é 18 anos.

Admita que a média das idades da totalidade das pessoas dos dois grupos é $18{,}7$ anos.

Determine por quantas pessoas é constituído o grupo B.

8. O parque de campismo dispõe de diversas comodidades para os seus clientes, sendo duas delas um bar e uma piscina.

* **8.1.** Questionou-se um conjunto de 300 clientes que usufruíram de, pelo menos, uma das duas comodidades referidas e verificou-se que:

- 80 clientes tinham usufruído de ambas as comodidades;
- dos clientes que usufruíram do bar, a terça parte também usufruiu da piscina.

Quantos, do conjunto de 300 clientes, usufruíram da piscina?

8.2. Numa determinada altura do ano, verificou-se que:

- 60% dos clientes eram estrangeiros;
- 30% dos clientes eram estrangeiros e não usufruíram da piscina;
- dos clientes que não eram estrangeiros, 80% não usufruíram da piscina.

Escolheu-se, ao acaso, um destes clientes.

Determine a probabilidade de esse cliente ter usufruído da piscina.

Apresente o resultado na forma de dízima.

* **9.** No parque de campismo da ilha de Dujal, foi feito um estudo para estimar a idade média dos campistas, em anos, que aí acamparam nos últimos doze meses.

Para esse estudo, recorreu-se a uma amostra aleatória, de dimensão superior a 30 campistas, e construiu-se um intervalo a 90% de confiança para a idade média dos campistas.

Admita que a amplitude desse intervalo de confiança era $0{,}3619$ e que o desvio padrão amostral era, aproximadamente, igual a $5{,}5$ anos.

Qual terá sido a dimensão dessa amostra?

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.2.**	**2.**	**4.**	**5.1.**	**5.3.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.1.**	**9.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	20	18	18	12	12	18	18	18	**146**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.1.**	**3.**	**5.2.**	**6.**	**8.2.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos									**54**
TOTAL										**200**

Prova 835

2.ª Fase

1.

1.1. Da observação do diagrama podemos preencher a totalidade da tabela apresentada:

Preferência \ **Votos**	3	4	4	6	6	7
1.ª	A	A	B	B	C	C
2.ª	B	C	A	C	B	A
3.ª	C	B	C	A	A	B

Aplicando o método descrito para determinar qual dos candidatos foi eleito como novo diretor do parque de campismo, começando por comparar as votações dos candidatos A e C, temos:

	N.º de votos	N.º de votos	Vencedor
Candidatos A e C	Candidato A $3+4+4=11$	Candidato C $6+6+7=19$	Candidato C
Candidatos C e B	Candidato C $4+6+7=17$	Candidato C $3+4+6=13$	Candidato C

Como o Carlos (candidato C) venceu em todas as comparações com os restantes, foi eleito como novo diretor do parque de campismo.

1.2. A probabilidade condicionada $P(R|S)$ significa a probabilidade de escolher, ao acaso, um dos votos, e ele ter assinalado como primeira preferência o candidato B, sabendo que tem assinalado como segunda preferência o candidato A.

Assim, identificando o número de votos tem assinalado como segunda preferência o candidato A, são $4+7=11$ (correspondentes à 3.ª e última colunas da tabela anterior).

Considerando estes 11 votos, podemos verificar que apenas em 4 votos (correspondentes à 3.ª coluna da tabela anterior) tem assinalado como primeira preferência o candidato B, e assim temos que $P(R|S)=\frac{4}{11}$

Resposta: **Opção A**

2. De acordo com o método descrito, e com os dados do enunciado, temos que:

Primeira volta					
Ordem	Manuel	Tomás	Lara	Vasco	Paula
Retificou		✓			
Parcela atribuída		✓			

(Como a Lara começou a segunda volta, a parcela foi atribuída ao Tomás na primeira volta)

Segunda volta				
Ordem	Lara	Vasco	Paula	Manuel
Retificou		✓		
Parcela atribuída		✓		

(Na segunda volta a parcela foi atribuída ao Vasco)

Terceira volta			
Ordem	Paula	Manuel	Lara
Retificou		✓	✓
Parcela atribuída			✓

(Como na terceira volta houve retificações por parte de dois responsáveis, foram o Manuel e Lara, e a parcela foi atribuída à Lara por estar no papel do responsável E)

Assim, temos que:

- (1) Na primeira volta, a parcela foi atribuída ao **Tomás**.
- (2) Na segunda volta, a **Paula** e o **Manuel** pronunciaram-se, concordando com a divisão, após a parcela ter sido retificada pelo Vasco.
- (3) A **Paula** iniciou a terceira volta.
- (4) Na terceira volta, foi atribuída uma parcela do mapa do recinto à **Lara**.
- (5) Na terceira volta, o **Manuel** e a **Lara** retificaram a parcela.
- (6) A **Paula** nunca retificou qualquer parcela.
- (7) O **Tomás** nunca iniciou qualquer volta.

Ou seja, as afirmações correspondentes a cada um dos responsáveis indicados são:

- **Lara**: 4,5
- **Paula**: 2,3,6
- **Tomás**: 1,7

3. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura:

   I - Aresta A-B - distância 310 (menor comprimento)

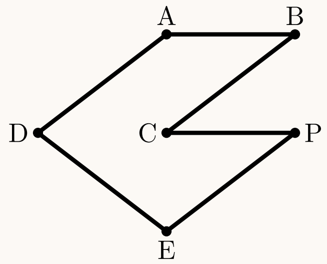
   II - Aresta A-D - distância 365

   III - Aresta C-P - distância 366
   (não se considera a aresta A-P, porque se encontrariam três arestas no vértice A)

   IV - Aresta E-P - distância 380
   (não se considera a aresta B-D, porque se formaria um percurso fechado sem todos os vértices B-D-A-B)

   V - Aresta B-C - distância 550
   (não se considera a aresta A-E, porque se encontrariam três arestas no vértice A)

   VI - Aresta D-E - distância 605



   Desta forma, um itinerário, com início e fim no portão do parque, que passe pelos cinco ecopontos, é, por exemplo:

   P - E - D - A - B - C - P

   (o mesmo itinerário em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).

4. Como os *bungalows* foram usados na sua capacidade máxima, o número de pessoas que ficou em tendas, ou seja, que não ficou em *bungalows*, foi de:

$$140 - 8 \times 4 - 10 \times 6 = 48$$

   Assim, o valor faturado à empresa pelo aluguer dos espaços é a soma de três parcelas:

   - 8 *bungalows* M: $8 \times 80 = 64$ €
   - 10 *bungalows* G: $10 \times 100 = 1000$ €
   - 12 tendas com 48 pessoas: $12 \times 6{,}5 + 48 \times 5{,}5 = 904$ €

   Ou seja, o valor faturado foi de: $64 + 1000 + 904 = 1982$ €

   Como o lucro foi de 25% do valor faturado temos que o lucro, em euros, obtido com o evento foi de:

$$1718 \times 0{,}25 = 495{,}5 \text{ €}$$

5.

   5.1. Temos que o número aproximado de peixes da espécie A existentes no lago:

   - três anos após o início do ano 2000, era $A(3) = \dfrac{20}{1 + 99e^{-0{,}8\times 3}} \approx 2{,}00379$
   - seis anos após o início do ano 2000, era $A(6) = \dfrac{20}{1 + 99e^{-0{,}8\times 6}} \approx 11{,}02083$

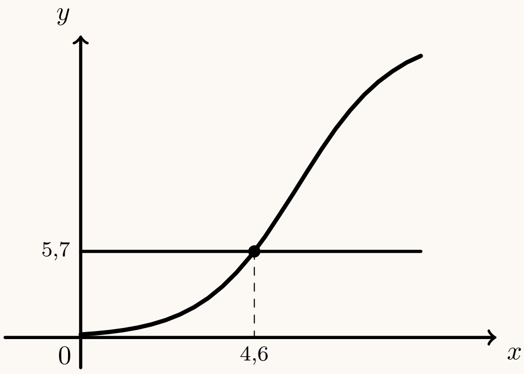
   Assim, neste período, o aumento foi de $A(6) - A(3) \approx 11{,}02083 - 2{,}00379 \approx 9{,}01704$ centenas de peixes, a que corresponde um aumento percentual, a, com arredondamento às unidades, dado por:

$$\frac{2{,}00379}{9{,}01704} = \frac{100}{a} \Leftrightarrow a = \frac{100 \times 9{,}01704}{200} \Leftrightarrow a \approx 450\%$$

5.2. Como o número aproximado de peixes da espécie A existentes no lago no início do ano 2002 era 95, porque $A(6) = \frac{20}{1+99e^{-0,8\times 6}} \approx 0{,}95294$, então este número foi, pela primeira vez, seis vezes maior quando atingiu o valor de $6 \times 95 = 570$, ou seja 5,7 centenas.

Assim, usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y = \frac{20}{1+99e^{0,8x}}$ e a reta $y = 5{,}7$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com arredondamento às décimas) das coordenadas do ponto de interseção: $(4{,}6\,;\,5{,}7)$

Desta forma, temos que o número de peixes da espécie A foi, pela primeira vez, seis vezes maior do que o número de peixes existentes no início do ano 2002, 4,6 anos após o início de 2002, ou seja durante o ano de 2004.



5.3. Como o número de peixes da espécie A existentes no lago, em centenas, t anos após o início do ano 2000, é bem aproximado pelo modelo $A(t) = \frac{20}{1+99e^{0,8t}}$ temos que o número máximo de peixes desta espécie se aproxime de 20 centenas, ou seja dos 2000 peixes.

Assim, o número máximo de peixes da espécie B deve aproximar-se de 4000 (o dobro da espécie A) pelo que apenas os gráficos das opções (C) e (D) podem representar o modelo que aproxima o número de peixes da espécie B ao longo do tempo.

Adicionalmente, como $t = 0$ corresponde ao início de 2000 e o modelo deve reportar-se ao início de 1997, a que corresponde $t = -3$, o gráfico deve estar representado para valores de t superiores ou iguais a -3 ($t \geq -3$), pelo que das duas opções anteriores, apenas o gráfico da opção (D) pode representar o modelo pretendido.

Resposta: **Opção D**

6. Temos que:

- de acordo com a informação do gráfico circular, como existiam 200 lugares ocupados, e 70% eram ocupados por tendas, esta percentagem corresponde a $200 \times 0{,}7 = 140$
- de acordo com a informação da tabela e com o valor anterior, o número de lugares ocupados por automóveis era de $200 - 140 - 20 = 40$

Como existem 125 lugares para automóveis e só estavam ocupados 40, a percentagem, p, correspondente é dada por:

$$\frac{125}{40} = \frac{100}{p} \Leftrightarrow p = \frac{100 \times 40}{125} \Leftrightarrow p = 32\%$$

7.

7.1. Identificando o máximo e o mínimo dos conjuntos de dados de cada diagrama, podemos determinar as respetivas amplitudes:

- (A) $30 - 18 = 12$
- (B) $31 - 12 = 19$
- (C) $39 - 14 = 25$
- (D) $31 - 12 = 19$

Assim, temos que apenas os diagramas das opções (B) e (D) podem representar as idades daquele grupo de pessoas. Adicionalmente podemos verificar que ambos os diagramas representam um conjunto com 14 dados, pelo devemos verificar em qual dos diagramas a média é 20:

- (B) $\overline{x} = \dfrac{12 \times 2 + 13 \times 2 + 15 \times 3 + 20 + 21 + 22 + 30 \times 2 + 31 \times 2}{14} = 20$
- (D) $\overline{x} = \dfrac{12 \times 3 + 13 \times 2 + 15 \times 2 + 17 + 18 + 19 + 21 \times 2 + 22 + 31}{14} \approx 17{,}2$

Resposta: **Opção B**

7.2. Designando por b o número de pessoas do grupo B, temos que:

- o número total de pessoas é: $14 + b$
- a soma das idades de todas as pessoas é: $20 \times 14 + 18 \times b$

Assim, como a média dos dos dois grupos é 18,7, o valor de b, é dado por:

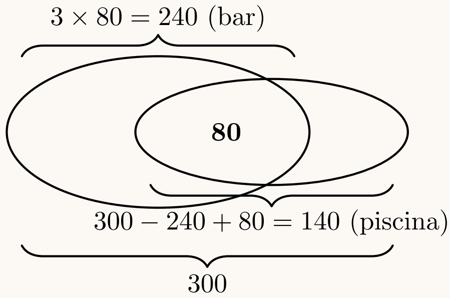
$$\frac{20 \times 14 + 18 \times b}{14 + b} = 18{,}7 \Leftrightarrow 280 + 18b = 18{,}7(14 + b) \Leftrightarrow 280 + 18b = 261{,}8 + 18{,}7b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 280 - 261{,}8 = 18{,}7b - 18b \Leftrightarrow 18{,}2 = 0{,}7b \Leftrightarrow \frac{18{,}2}{0{,}7} = b \Leftrightarrow 26 = b$$

8.

8.1. Como dos clientes que usufruíram do bar, a terça parte também usufruiu da piscina, a terça parte corresponde aos 80 clientes que usufruíram de ambas as comodidades, pelo que o número total de clientes que usufruíram do bar é o triplo dos que usufruíram das duas comodidades, ou seja, $3 \times 80 = 240$.

Como o conjunto analisado tinha 300 clientes que usufruíram de, pelo menos, uma das duas comodidades referidas, e como 80 clientes tinham usufruído de ambas as comodidades, os que usufruíram da piscina são os que não usufruíram do bar $(300 - 240 = 60)$ acrescidos dos que usufruíram de ambas as comodidades: $60 + 80 = 140$.



8.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma dos clientes presentes naquela altura do ano, e os acontecimentos:
E:≪O cliente ser estrangeiro≫
Pi:≪O cliente ter usufruído da piscina≫

Temos, de acordo com o enunciado, que: $P(E) = 0{,}6$, $P\left(E \cap \overline{Pi}\right) = 0{,}3$ e $P\left(\overline{Pi}|\overline{E}\right) = 0{,}8$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
- $P\left(\overline{Pi} \cap \overline{E}\right) = P\left(\overline{Pi}|\overline{E}\right) \times P\left(\overline{E}\right) = 0{,}8 \times 0{,}4 = 0{,}32$
- $P\left(\overline{Pi}\right) = P\left(E \cap \overline{Pi}\right) + P\left(\overline{Pi} \cap \overline{E}\right) = 0{,}3 + 0{,}32 = 0{,}62$

	E	$\overline{E}$	
Pi			
$\overline{Pi}$	0,3	0,32	0,62
	0,6	0,4	1

Desta forma a probabilidade, na forma de dízima, de uma dos clientes, escolhida ao acaso, ter usufruído da piscina, é:

$$P(Pi) = 1 - P\left(\overline{Pi}\right) = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$$

9. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, considerando o valor n para a dimensão da amostra e os valores:

- A média amostral: $\overline{x}$
- O desvio padrão amostral: $s \approx 5{,}5$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, temos:

$$\left] \overline{x} - 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}}, \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} \right[$$

E assim, a amplitude do intervalo, em função de n, é:

$$\overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} - \left(\overline{x} - 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}}\right) = \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} - \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} = 2 \times 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} = \frac{18{,}095}{\sqrt{n}}$$

Como a amplitude do intervalo de confiança é 0,3619, temos que a a dimensão da amostra correspondente é a solução da equação

$$\frac{18{,}095}{\sqrt{n}} = 0{,}3619$$

Inserindo na calculadora gráfica a expressão $y = \frac{18{,}095}{\sqrt{x}}$, e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o valor de x que verifica a condição anterior, ou seja, a solução da equação, isto é, $x = 2500$

X	Y1
2497	0,36211
2498	0,36204
2499	0,36197
2500	0,3619
2501	0,36182
2502	0,36176
2503	0,36168

Logo, podemos concluir que a dimensão da amostra, para verificar as condições do enunciado é:

$$n = 2500$$

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Critérios de Classificação 7 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de seleção, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de seleção, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	**Classificação**
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).

8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... **18 pontos**

Apresentar uma tabela semelhante à Tabela 1, devidamente preenchida .... 4 pontos

Comparar A com C .... 6 pontos

Apresentar o número de votos em A (11) .... 3 pontos

Apresentar o número de votos em C (19) .... 3 pontos

Comparar B com C .... 6 pontos

Apresentar o número de votos em B (13) .... 3 pontos

Apresentar o número de votos em C (17) .... 3 pontos

Concluir .... 2 pontos
[O Carlos foi eleito como novo diretor do parque de campismo.]

1.2. .... **12 pontos**

(A)

2. .... **20 pontos**

Lara – **(4)**, **(5)**; **Paula** – **(2)**, **(3)**, **(6)**; **Tomás** – **(1)**, **(7)**;

Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
4	Associa corretamente as 7 afirmações aos respetivos nomes.	20
3	Associa corretamente 5 ou 6 afirmações aos respetivos nomes.	15
2	Associa corretamente 3 ou 4 afirmações aos respetivos nomes.	10
1	Associa corretamente 2 afirmações aos respetivos nomes.	5

Nota: Caso o aluno associe o mesmo número a mais do que um nome, ainda que uma das associações possa estar correta, esta não é considerada para efeitos de classificação.

3. .... **18 pontos**

Apresentar a ordenação das arestas selecionadas .... 7 pontos

Apresentar um grafo que modele a situação .... 8 pontos

Associar os vértices aos diferentes ecopontos e ao portão .... 2 pontos

Associar as arestas às distâncias .... 6 pontos

Apresentar um itinerário possível .... 3 pontos
[Por exemplo: P-C-B-A-D-E-P]

4. .... **18 pontos**

Determinar o valor relativo à ocupação dos *bungalows* $(1640\ €)$ .... 3 pontos

Determinar o valor relativo à ocupação das tendas .... 10 pontos

Determinar o valor do aluguer do espaço ocupado pelas tendas $(78\ €)$ .... 2 pontos

Determinar o valor relativo ao alojamento dos adultos nas tendas ... 7 pontos

Determinar o número de adultos alojados nos *bungalows* (92) .... 4 pontos

Determinar o número de adultos alojados nas tendas (48) .... 2 pontos

Obter o valor relativo ao alojamento dos adultos nas tendas $(264\ €)$ .... 1 ponto

Obter o valor apurado com a ocupação das tendas $(342\ €)$ .... 1 ponto

Determinar o valor diário recebido $(1982\ €)$ .... 1 ponto

Determinar o valor do lucro diário $(495{,}50\ €)$ .... 4 pontos

5.1. .... **18 pontos**

Identificar $t = 3$ .... 2 pontos

Determinar $A(3)$ $(\approx 2{,}00379)$ .... 4 pontos

Identificar $t = 6$ .... 2 pontos

Determinar $A(6)$ $(\approx 11{,}02083)$ .... 4 pontos

Determinar a percentagem de aumento (450) .... 6 pontos

5.2. .... **18 pontos**

Identificar $t = 2$ .... 2 pontos

Determinar $A(2)$ $(\approx 0{,}95294)$ .... 3 pontos

Determinar $A(2) \times 6$ $(\approx 5{,}71764)$ .... 3 pontos

Apresentar o(s) gráfico(s) .... 4 pontos

Apresentar a abcissa do ponto relevante $(4{,}6)$ .... 4 pontos

Concluir .... 2 pontos
[Ocorreu durante o ano de 2004.]

5.3. .... **12 pontos**

(D)

6. .... **18 pontos**

Determinar o número de lugares ocupados por tendas (140) .... 6 pontos

Determinar o número de lugares ocupados por automóveis (40) .... 6 pontos

Obter o valor solicitado (32%) .... 6 pontos

7.1. .... **12 pontos**

(B)

7.2. .... **18 pontos**

Escrever $\dfrac{14 \times 20 + 18 \times x}{14 + x} = 18{,}7$ (ou equivalente) .... 8 pontos

Escrever $280 + 18x = 261{,}8 + 18{,}7x$ (ou equivalente) .... 5 pontos

Obter o valor solicitado (26) .... 5 pontos

8.1. .... **18 pontos**

Determinar o número de pessoas que usufruíram do bar (240) .... 6 pontos

Determinar o número de pessoas que usufruíram apenas da piscina (60) .... 6 pontos

Obter o valor solicitado (140) .... 6 pontos

8.2. .... **18 pontos**

Considerem-se os acontecimentos seguintes:

E: «O cliente é estrangeiro»

T: «O cliente usufruiu da piscina»

Determinar $P(\overline{T})$ .... 15 pontos

- Determinar $P(\overline{E} \cap \overline{T})$ .... 9 pontos
  - Escrever $P(E) = 0{,}6$ .... 2 pontos
  - Determinar $P(\overline{E})$ $(0{,}4)$ .... 1 ponto
  - Escrever $P(\overline{T} \mid \overline{E}) = 0{,}8$ .... 2 pontos
  - Obter $P(\overline{E} \cap \overline{T})$ $(0{,}32)$ .... 4 pontos
- Escrever $P(E \cap \overline{T}) = 0{,}3$ .... 2 pontos
- Obter $P(\overline{T})$ $(0{,}62)$ .... 4 pontos

Determinar $P(T)$ $(0{,}38)$ .... 3 pontos

9. .... **18 pontos**

Identificar os valores de s e z para um intervalo de confiança a 90% .... 2 pontos

$s = 5{,}5$ .... 1 ponto

$z = 1{,}645$ .... 1 ponto

Calcular a dimensão da amostra (n) .... 16 pontos

Escrever $2 \times 1{,}645 \times \dfrac{5{,}5}{\sqrt{n}} = 0{,}3619$ (ou equivalente) .... 7 pontos

Escrever $\dfrac{18{,}095}{\sqrt{n}} = 0{,}3619$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter $\sqrt{n} = 50$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter o valor solicitado (2500) .... 2 pontos

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.2.**	**2.**	**4.**	**5.1.**	**5.3.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.1.**	**9.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	20	18	18	12	12	18	18	18	**146**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.1.**	**3.**	**5.2.**	**6.**	**8.2.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos									**54**
TOTAL										**200**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | Época Especial | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 12 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

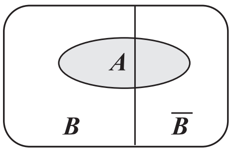
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

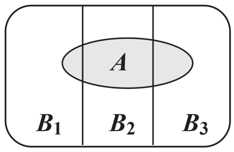
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. Um clube vai participar na final da Taça Amizade. Dispõe de 710 convites para distribuir pelos sócios dos seus três núcleos, A, B e C.

A distribuição desses convites é feita de acordo com o método a seguir descrito.

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo o número total de sócios dos três núcleos pelo número total de convites.
- Calcula-se a quota padrão para cada um dos núcleos, dividindo o número de sócios de cada núcleo pelo divisor padrão.
- Atribui-se a cada núcleo um número de convites igual à parte inteira da quota padrão.
- Caso ainda fiquem convites por distribuir, atribuem-se os convites que restam aos núcleos cujas quotas padrão tenham partes decimais maiores (um por cada núcleo).
- Se houver dois núcleos cujas quotas padrão apresentem a mesma parte decimal, o último convite é atribuído ao núcleo com o menor número de convites.

Na Tabela 1, está registado o número de sócios de cada núcleo.

Tabela 1

Núcleo	Número de sócios
A	938
B	1152
C	395

* **1.1.** Suponha que o núcleo A dispensava os 268 convites que, aplicando o método descrito, lhe seriam atribuídos e que estes eram distribuídos, de forma diretamente proporcional ao número de sócios, pelos outros dois núcleos.

Quantos destes convites seriam atribuídos ao núcleo C?

(A) 43

(B) 45

(C) 68

(D) 124

1.2. Admita que houve uma entrada recente de novos sócios nos núcleos A e B, havendo necessidade de redistribuir os 710 convites.

Na Tabela 2, está registado o novo número de sócios de cada núcleo.

Tabela 2

Núcleo	Número de sócios
A	939
B	1159
C	395
Total	2493

Determine o número de convites que cada núcleo recebeu após a entrada dos novos sócios, aplicando o método descrito.

Na sua resposta, apresente o valor do divisor padrão e os valores das quotas padrão, com arredondamento às centésimas.

✱ 2. Um jornal desportivo convidou os leitores a participarem na eleição do melhor jogador de futebol de 2021, de entre os jogadores P, Q, R e S.

Cada leitor ordenou, uma única vez, os quatro jogadores, de acordo com a sua preferência. A ordenação efetuada por cada leitor corresponde a um voto. Foram apurados 1200 votos válidos.

A Tabela 3 encontra-se parcialmente preenchida com as listas de preferências obtidas.

Tabela 3

	Lista 1	**Lista 2**	**Lista 3**
	200 votos	400 votos	600 votos
1.ª Preferência	P		
2.ª Preferência		P	
3.ª Preferência		S	P
4.ª Preferência	S		

Concluída a votação, para se obter a decisão final, foi aplicado o método a seguir descrito.

- São atribuídos pontos a cada um dos jogadores, em função do seu lugar nas listas de preferências. Cada jogador recebe:
  - quatro pontos por cada voto na primeira preferência;
  - três pontos por cada voto na segunda preferência;
  - dois pontos por cada voto na terceira preferência;
  - um ponto por cada voto na quarta preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos jogadores.
- O jogador que obtiver a pontuação total mais elevada será eleito o melhor jogador de futebol de 2021.

Admita que, após o apuramento da pontuação total de cada jogador, se verificou que:

– o jogador Q obteve um total de 1400 pontos;

– o jogador S obteve uma pontuação total inferior à do jogador P.

Apresente a ordenação dos jogadores P, Q, R e S na Lista 3.

Na sua resposta, apresente todas as justificações e todos os cálculos efetuados.

*** 3.** Com o intuito de avaliar as condições de segurança de alguns estádios de futebol, uma comissão vai proceder à sua inspeção.

Na Tabela 4, para cada um dos sete estádios passíveis de inspeção, estão indicados o país onde o estádio se localiza e a sua capacidade.

Tabela 4

País onde o estádio se localiza	Capacidade do estádio
África do Sul	94 736
Austrália	83 500
Coreia do Norte	114 000
Espanha	99 354
França	81 338
Inglaterra	90 000
México	87 000

A comissão decidiu inspecionar apenas os estádios com capacidade superior a 85 000 espectadores.

De modo a definir um percurso, considerou a duração do voo entre os diferentes países que se apresentam na Tabela 5.

Tabela 5

	Austrália	Coreia do Norte	Espanha	França	México	Inglaterra
África do Sul	14h13	15h57	10h25	11h22	18h38	11h46
Austrália		11h50	21h52	21h35	16h38	21h38
Coreia do Norte			12h12	11h24	15h26	11h16
Espanha				1h32	12h18	1h55
França					11h56	5h24
México						11h36

O percurso será definido atendendo ao método seguinte:

- escolher o menor tempo de voo, qualquer que ele seja;
- escolher, sucessivamente, os menores tempos de voo, garantindo que não são selecionados mais de dois voos que partam do mesmo país ou que cheguem ao mesmo país, e terminar depois de serem selecionados todos os países onde se localizam os estádios a inspecionar.

Apresente o percurso a efetuar pela comissão, com início na África do Sul.

Na sua resposta, apresente:

– um grafo que resulte da aplicação do algoritmo descrito;

– a ordem pela qual a comissão visitará os estádios.

* **4.** Uma atleta de alta competição precisa de adquirir um novo equipamento para as suas provas.

Dado o elevado custo do equipamento, contraiu um empréstimo nas condições seguintes.

- Valor financiado: 1200 €.
- Prazo de pagamento: dois anos.
- Taxa de juro sobre o valor financiado: 16%.
- Pagamento: prestações mensais constantes.

Determine o valor da prestação mensal que a atleta terá de pagar.

5. O Campeonato Mundial de Fórmula 1 é composto por várias corridas, denominadas Grandes Prémios (GP), que se realizam em países diferentes.

No final de cada GP, são atribuídos pontos aos pilotos, até à 10.ª posição, em função do lugar em que cada um terminou a prova.

Na Tabela 6, está representado o sistema de pontuação utilizado.

Tabela 6

Lugar	**1.º**	**2.º**	**3.º**	**4.º**	**5.º**	**6.º**	**7.º**	**8.º**	**9.º**	**10.º**
Pontos	25	18	15	12	10	8	6	4	2	1

* **5.1.** Um piloto obteve 58 pontos nos três primeiros GP.

Por quantas vezes, no máximo, pode ter ficado em segundo lugar?

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

5.2. Em cada temporada do Campeonato Mundial de Fórmula 1, é definida previamente a ordem dos GP.

Numa determinada temporada, o GP da Austrália foi o primeiro a realizar-se, seguindo-se os da Espanha, do Canadá, do Reino Unido, da Itália, da França e do Japão.

Na Figura 1, está registada a variação do número de pontos obtidos por Mike, um dos pilotos, em cada GP, em relação ao número de pontos obtidos no GP imediatamente anterior.

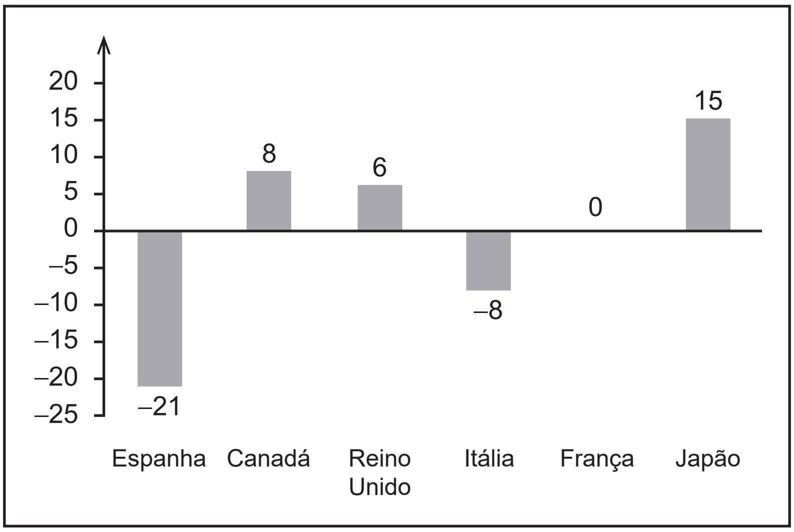


Figura 1

* **5.2.1.** No GP do Reino Unido, Mike obteve 18 pontos.

Determine o número médio de pontos obtidos por este piloto nos quatro últimos GP apresentados na Figura 1.

5.2.2. As condições meteorológicas podem limitar a realização dos GP, inviabilizando a realização da totalidade das voltas previstas. Caso uma corrida termine antes de se efetuar um número de voltas correspondente a 70% do total de voltas previstas, atribui-se a cada um dos dez primeiros pilotos metade dos pontos apresentados na Tabela 6, arredondados às unidades.

Admita que:

– o total de voltas do GP da Espanha é 66 e que, devido a condições adversas, só foram realizadas 45 voltas;

– Mike obteve o primeiro lugar no GP da Austrália, onde se percorreram todas as voltas previstas.

Determine o lugar em que Mike terminou o GP da Espanha.

6. A canoagem é um desporto náutico praticado com uma canoa ou com um caiaque.

Uma das modalidades deste desporto é a canoagem de velocidade, na qual se insere a prova K1 1000 m. Nesta prova, a embarcação, um caiaque, tem apenas um lugar (K1), como se representa na Figura 2, devendo o atleta percorrer 1000 metros.

Figura 2

Um atleta participou numa prova de canoagem K1 1000 m.

Admita que, enquanto a prova decorreu, a distância, D, percorrida pelo seu caiaque, em metros, t segundos após o início da prova, é bem aproximada pelo modelo seguinte, com arredondamento às centésimas.

$$D(t) = -3680 + 1840 \log(t + 100) \qquad t \geq 0 \qquad (\log \text{ designa o logaritmo de base } 10)$$

Assim, por exemplo, como $D(3) \approx 23{,}62049$, a distância percorrida pelo caiaque do atleta, 3 segundos após o início da prova, foi, aproximadamente, $23{,}62$ metros.

6.1. Perante os dados recolhidos, o atleta afirmou:

«Fui mais rápido nos primeiros cinco segundos da prova do que nos cinco segundos seguintes.»

Justifique a afirmação do atleta, baseando-se no modelo apresentado.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

6.2. O recorde mundial desta prova é 3 minutos e 15 segundos.

Qual é a diferença entre o tempo alcançado pelo atleta e o recorde mundial?

Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às décimas.

7. O Alexandre é um jogador profissional de ténis e tem uma equipa técnica que o acompanha e que recolhe dados diversos.

* **7.1.** Os torneios de ténis podem ser disputados em diferentes tipos de piso, nomeadamente em piso sintético ou em piso de terra batida.

Dos adversários que o Alexandre enfrentará num torneio de ténis, sabe-se que:

- 90% venceram torneios disputados em piso sintético ou em piso de terra batida;
- 60% nunca venceram torneios disputados em piso de terra batida.

Qual é a probabilidade de o próximo adversário do Alexandre ter vencido torneios disputados em piso sintético e nunca ter vencido torneios disputados em piso de terra batida?

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}4$ **(C)** $0{,}5$ **(D)** $0{,}6$

* **7.2.** Ao começar uma partida, o Alexandre faz uma primeira tentativa para colocar a bola em jogo (primeiro serviço). Se não for bem-sucedido, pode ainda fazer uma segunda tentativa (segundo serviço). Quando a bola está em jogo, disputa-se um ponto entre os jogadores.

A equipa técnica recolhe dados que incidem na proporção de primeiros serviços bem-sucedidos e na proporção de vezes em que o Alexandre pontua, conforme foi, ou não, bem-sucedido no primeiro serviço.

Na Figura 3, apresenta-se a recolha de dados efetuada pela equipa técnica.

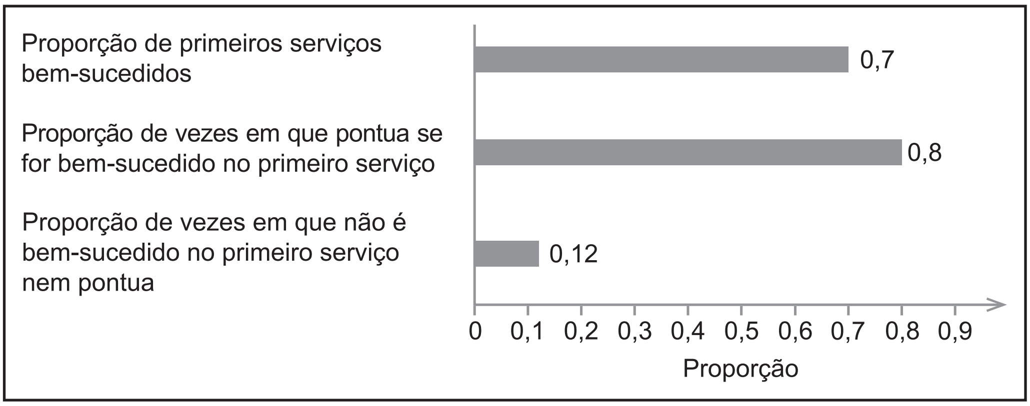


Figura 3

Determine a probabilidade de, tendo colocado uma bola em jogo, o Alexandre pontuar.

Apresente o resultado na forma de dízima.

7.3. A equipa técnica analisou a eficácia do Alexandre ao defender o serviço dos seus adversários.

Com base nos dados, determinou que a probabilidade de o atleta conseguir defender um serviço dos seus adversários é $0{,}6$.

Considere que o Alexandre vai tentar defender dois serviços dos seus adversários.

Determine a probabilidade de o Alexandre conseguir defender, no máximo, um serviço dos seus adversários.

*** 8.** Num jogo de basquetebol, verificou-se que, numa amostra de 225 espectadores aleatoriamente selecionados no recinto desportivo, 81 tinham comprado *online* o ingresso para o jogo.

Determine um intervalo de confiança a 99% para a proporção de espectadores que adquiriram *online* o ingresso para o jogo.

Apresente os extremos do intervalo de confiança com arredondamento às centésimas.

Na sua resposta:

– utilize a calculadora apenas para efetuar cálculos numéricos;

– caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve quatro casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.1.</td><td>2.</td><td>3.</td><td>4.</td><td>5.1.</td><td>5.2.1.</td><td>7.1.</td><td>7.2.</td><td>8.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>18</td><td>20</td><td>18</td><td>12</td><td>18</td><td>12</td><td>18</td><td>18</td><td>146</td></tr>
<tr><td>Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">1.2.</td><td colspan="2">5.2.2.</td><td colspan="2">6.1.</td><td colspan="2">6.2.</td><td>7.3.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="9">3 x 18 pontos</td><td>54</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td colspan="9"></td><td>200</td></tr>
</table>

1.

1.1. Como os 268 convites destinados ao núcleo A, devem ser distribuídos, de forma diretamente proporcional ao número de sócios, pelos outros dois núcleos, temos que o número de sócios dos núcleos B e C, é:

$$1152 + 395 = 1547$$

Pelo que, calculando a proporção c, dos 268 convites, correspondente ao núcleo C, temos:

$$\frac{1547}{268} = \frac{395}{c} \Leftrightarrow c = \frac{395 \times 268}{1547} \Rightarrow c \approx 68{,}4$$

Assim, temos que o número de convites que seriam atribuídos ao núcleo C, dos que foram dispensados pelo núcleo A, é 68.

Resposta: **Opção C**

1.2. Aplicando o método descrito, temos que:

	A	**B**	**C**
Número de sócios	939	1159	395
Total de sócios	$939 + 1150 + 395 = 2493$		
Divisor padrão	$\frac{2493}{710} \approx 3{,}51$		
Quota padrão	$\frac{939}{3{,}51} \approx 267{,}52$	$\frac{1159}{3{,}5} \approx 330{,}20$	$\frac{395}{5{,}31} \approx 112{,}54$
Primeira atribuição	267	330	112
Total provisório	$267 + 330 + 112 = 709$		
Segunda atribuição	0	0	1

Assim, temos que o número de convites que cada núcleo recebeu, é:

- Núcleo A: 267 convites
- Núcleo B: 330 convites
- Núcleo C: $112 + 1 = 113$ convites

2. De acordo com o método descrito, temos que a pontuação total do jogador P, é:

$$4 \times 200 + 3 \times 400 + 2 \times 600 = 3200$$

Como o jogador Q obteve um total de 1400 pontos, e sabemos que não ficou na 4.ª preferência da lista 1 (porque essa preferência foi dada ao jogador S), então ficou na 4.ª preferência das listas 2 e 3, e na 3.ª preferência da lista 1, porque é a única forma de somar apenas 1400 pontos:

$$2 \times 200 + 1 \times 400 + 1 \times 600 = 1400$$

Relativamente à pontuação do jogador S, sabemos que não ficou na primeira preferência da lista e, porque assim teria mais pontos que o jogador S: $(1 \times 200 + 2 \times 400 + 4 \times 600 = 3400)$, e como também não ficou na 4.ª preferência (jogador Q) nem na 3.ª (jogador S), então a sua preferência é a 2.ª.

Assim o jogador R deve ocupar a 1.ª preferência da lista 3, por ser o único jogador e a única preferência ainda não determinados. Desta forma a ordenação dos jogadores na lista 3, é:

	1.ª Preferência	**2.ª Preferência**	**3.ª Preferência**	**4.ª Preferência**
Jogador	R	S	P	Q

3. De acordo com as capacidades indicadas na tabela, e como a comissão decidiu inspecionar apenas os estádios com capacidade superior a 85 000 espectadores, podemos observar que não serão inspecionados os estádios da Austrália e da França.

Assim, não considerando linhas e colunas relativas à Ausrália e França na tabela relativa às durações dos voos e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura,onde as arestas representam os voos e os vértices a localização dos estádios:

I - Aresta Espanha-Inglaterra - duração 1h55 (menor tempo de voo)

II - Aresta Espanha-África do Sul - duração 10h25

III - Aresta Inglaterra- Coreia do Norte - duração 11h16

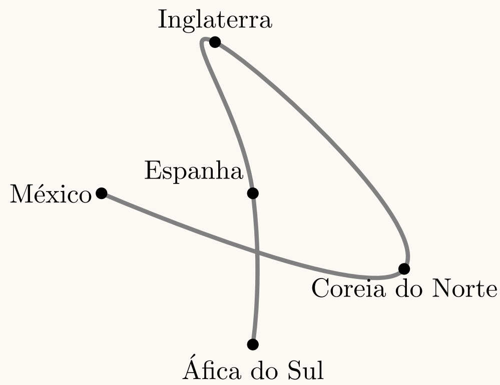
(não se considera a aresta México-Inglaterra, porque já selecionamos uma aresta com Inglaterra)

(não se considera a aresta África do Sul-Inglaterra, porque já selecionamos arestas com estes países)

(não se considera a aresta África do Coreia do Norte-Espanha, porque já selecionamos arestas com estes países)

(não se considera a aresta África do Coreia do Espanha-México, porque já selecionamos duas arestas com Espanha)

IV - Aresta Coreia do Norte-México - duração 15h25



Desta forma, o percurso a efetuar pela comissão, com início na África do Sul, é:

$$\text{África do Sul} \rightarrow \text{Espanha} \rightarrow \text{Inglaterra} \rightarrow \text{Coreia do Norte} \rightarrow \text{México}$$

4. De acordo com as condições do empréstimo, o atleta terá que pagar 0 valor financiado acrescido de 16%, ou seja, um valor total de

$$1200 + 1200 \times 0{,}16 = 1200 \times 1{,}16 = 1392 \text{ €}$$

Como o prazo de pagamento é de dois anos (24 meses) e as prestações são constantes, o valor de cada prestação mensal é:

$$\frac{1392}{24} = 58 \text{ €}$$

5.

5.1. Analisando todas os cenários possíveis temos:

- 3 vezes: esta situação não pode ter ocorrido porque assim teria $3 \times 18 = 54$ pontos e não 58 como indicado.
- 2 vezes: esta situação não pode ter ocorrido porque assim teria $2 \times 18 + 25 = 61$, pontos se na prova restante tivesse ficado em primeiro lugar, ou $2 \times 18 + 15 = 51$ pontos se na prova restante tivesse ficado em terceiro lugar, em qualquer outr posição na prova restante teria ainda menos pontos e nunca os 58 indicados.
- 1 vez: esta situação pode ter ocorrido visto que teria que ter ocupado um primeiro lugar, visto que com um segundo e dois terceiros a pontuação seria $18 + 2 \times 15 = 48$ pontos. Considerando um primeiro e um segundo, a pontuação obtida é $18 + 25 = 43$ pontos e assim para a prova restante a pontuação necessária seria $58 - 43 = 15$ correspondente a um terceiro lugar.

Como se pretende identificar o número máximo de vezes que o piloto pode ter ficado em segundo lugar, a resposta é 1, correspondendo a 1 primeiro lugar, 1 segundo lugar e um terceiro lugar.

Resposta: **Opção B**

5.2.

5.2.1. Pela observação do gráfico, e sabendo que a pontuação no Reino Unido foi de 18 pontos, podemos determinar a pontuação dos quatro últimos GP, adicionando a diferença para os GP que se realizaram depois deste:

GP	**Variação**	**Pontos**
Reino Unido	6	18
Itália	-8	$18 - 8 = 10$
França	0	$10 + 0 = 10$
Japão	15	$10 + 15 = 25$

Assim, o número médio de pontos obtidos por este piloto nos quatro últimos GP, é:

$$\overline{x} = \frac{18 + 10 + 10 + 25}{4} = 15{,}75$$

5.2.2. Como o piloto obteve o primeiro lugar no GP da Austrália, onde se percorreram todas as voltas previstas obteve 25 pontos.

Como no GP de Espanha a variação foi de -21, a pontuação obtida foi de $25-21=4$ pontos.

Como este GP tem um total de 66 voltas, das quais só se realizaram 45, a percentagem p de voltas concluídas é:

$$\frac{66}{100}=\frac{45}{p} \Leftrightarrow p=\frac{45\times 100}{66} \Rightarrow p\approx 68{,}18\,\%$$

Ou seja, no GP de Espanhanão se cumpriram pelo menos 70% das voltas previstas, pelo que os 4 pontos obtidos pelo piloto correspondem a metade dos pontos previstos na tabela para a sua posição, ou seja 8 pontos, a que corresponde a 6.ª posição.

6.

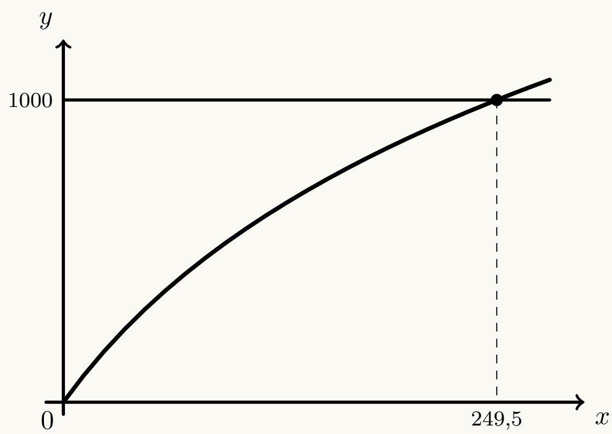
6.1. De acordo com o modelo apresentado, podemos calcular as distâncias percorridas, respetivamente em 5 segundos e em 10 segundos após o inicio da prova:

- $D(5)=-3680+1840\log(5+100)\approx 38{,}98831$
- $D(10)=-3680+1840\log(10+100)\approx 76{,}16254$

Assim temos que a distância percorrida nos primeiros 5 segundos foi, aproximadamente 38,99 metros e nos 5 segundos seguintes foi de $76{,}16254-38{,}98831\approx 37{,}17$ metros. Assim, no segundo período de 5 segundos percorreu uma distância inferior no mesmo espaço de tempo, pelo que a afirmação do atleta é correta.

6.2. Como a prova tem 1000 metros, o tempo, em segundos, que o atleta demorou a fazer a prova é a abcissa do ponto de interseção do gráfico da função que modela a distância percorrida pelo atleta com a reta de equação $y=1000$.

Assim, usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y=-3680+1840\log(x+100)$ e a reta $y=1000$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com arredondamento às décimas) das coordenadas do ponto de interseção: $(249{,}5\,;\,1000)$.



Assim, temos que o atleta demorou 249,5 segundos a completar a prova, e como o recorde mundial é de $3\times 60+15=195$ segundos, a diferença, em segundos, arredondado às décimas, entre o tempo alcançado pelo atleta e o recorde mundial é:

$$249{,}5-195=54{,}5 \text{ segundos}$$

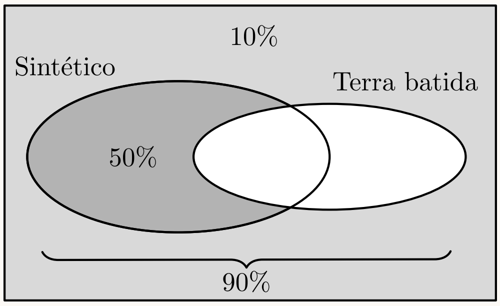
7.

7.1. Como 90% dos adversários do Alexandre venceram torneios disputados em piso sintético ou em piso de terra batida, a percentagem de adversários que nunca venceram é:

$$100 - 90 = 10\%$$

Como 60% nunca venceram torneios disputados em piso de terra batida, e destes 10% nunca venceram qualquer torneio, a percentagem dos que venceram em piso sintético, sem terem vencido em terra batida. é:

$$60 - 10 = 50\%$$



Resposta: **Opção C**

7.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em o Alexandre começar uma partida, e os acontecimentos:
$S1$:≪Conseguir um primeiro serviço bem-sucedido≫
Pt:≪Conseguir pontuar≫

Temos, de acordo com os dados do gráfico, que: $P(S1) = 0{,}7$, $P(Pt|S1) = 0{,}8$ e $P\left(\overline{S1} \cap \overline{Pt}\right) = 0{,}12$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{S1}\right) = 1 - P(S1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$
- $P\left(\overline{S1} \cap Pt\right) = P\left(\overline{S1}\right) - P\left(\overline{S1} \cap \overline{Pt}\right) = 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}18$
- $P(S1 \cap Pt) = P(Pt|S1) \times P(S1) = 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}56$

	$S1$	$\overline{S1}$	
Pt	0,56	0,18	0,74
$\overline{Pt}$		0,12	
	0,7	0,3	1

Desta forma a probabilidade, na forma de dízima, de tendo colocado uma bola em jogo, o Alexandre pontuar, é:

$$P(Pt) = P(S1 \cap Pt) + P\left(\overline{S1} \cap Pt\right) = 0{,}56 + 0{,}18 = 0{,}74$$

7.3. Como o Alexandre vai tentar defender dois serviços dos seus adversários, a probabilidade de o Alexandre conseguir defender, no máximo, um serviço pode ser calculada como a soma das probabilidades de defender apenas o primeiro, defender apenas o segundo ou não defender qualquer serviço.

Como a probabilidade de defender um serviço é 0,6, a a probabilidade de não defender um serviço é $1 - 0{,}6 = 0{,}4$, pelo que a probabilidade de o Alexandre conseguir defender, no máximo, um serviço dos seus adversários, é:

$$\overbrace{0{,}6 \times 0{,}4}^{\text{defender apenas o 1.º}} + \overbrace{0{,}4 \times 0{,}6}^{\text{defender apenas o 2.º}} + \overbrace{0{,}4 \times 0{,}4}^{\text{não defender nenhum}} = 0{,}64$$

8. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

    - A dimensão da amostra: $n = 225$
    - A proporção amostral de espectadores que adquiriram *online* o ingresso para o jogo: $\hat{p} = \dfrac{81}{225} = 0{,}36$
    - O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

    Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança, para estimar a proporção de espectadores que adquiriram *online* o ingresso para o jogo $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 0{,}36 - 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{225}} \; ; \; 0{,}36 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{225}} \right[\approx \left]0{,}28; 0{,}44\right[$$

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | Época Especial | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Critérios de Classificação 8 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de seleção, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de seleção, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).

8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... **12 pontos**

(C)

1.2. .... **18 pontos**

Determinar o divisor padrão $(3{,}51)$ .... 2 pontos

Determinar as quotas padrão .... (2 + 2 + 2) .... 6 pontos
(A – $267{,}52$; B – $330{,}20$; C – $112{,}54$)

Indicar, para cada núcleo, o número de convites igual à parte inteira da quota padrão .... (2 + 2 + 2) .... 6 pontos
(A – 267; B – 330; C – 112)

Indicar o núcleo que recebe o convite que resta (C) .... 3 pontos

Determinar a distribuição final dos convites .... 1 ponto
(A – 267; B – 330; C – 113)

2. .... **18 pontos**

Justificar a posição de Q em cada lista de preferências .... (3 + 3 + 3) .... 9 pontos
(Lista 1 – 3.ª preferência; Lista 2 – 4.ª preferência; Lista 3 – 4.ª preferência)

Determinar a pontuação obtida por P (3200) .... 3 pontos

Provar que S tem de ocupar a 2.ª preferência na Lista 3 .... 4 pontos

Concluir .... 2 pontos
[A ordem de preferências da Lista 3 é 1.ª – R, 2.ª – S, 3.ª – P e 4.ª – Q.]

3. .... **20 pontos**

Apresentar um grafo que modele a situação .... 17 pontos

Selecionar os vértices .... 5 pontos
[África do Sul, Coreia do Norte, Espanha, Inglaterra e México]

Selecionar as arestas .... 12 pontos

Indicar o percurso efetuado pela comissão .... 3 pontos
[África do Sul, Espanha, Inglaterra, Coreia do Norte e México]

4. .... **18 pontos**

Determinar o valor do juro $(192\ €)$ .... 6 pontos

Determinar o valor final a pagar $(1392\ €)$ .... 5 pontos

Identificar o número de meses do empréstimo (24) .... 3 pontos

Determinar o valor da prestação mensal $(58\ €)$ .... 4 pontos

5.1. .... **12 pontos**

(B)

5.2.1. .... **18 pontos**

Indicar o número de pontos obtidos no GP da Itália (10) .... 4 pontos

Indicar o número de pontos obtidos no GP da França (10) .... 4 pontos

Indicar o número de pontos obtidos no GP do Japão (25) .... 4 pontos

Determinar a média $(15{,}75)$ .... 6 pontos

5.2.2. .... **18 pontos**

Provar que 45 voltas em 66 são menos do que 70% do número total de voltas previstas .... 6 pontos

Indicar o número de pontos obtidos no GP da Austrália (25) .... 3 pontos

Indicar o número de pontos obtidos no GP da Espanha (4) .... 3 pontos

Indicar o lugar em que Mike terminou o GP da Espanha $(6.^{\text{o}})$ .... 6 pontos

6.1. .... **18 pontos**

Identificar $t=5$ .... 2 pontos

Determinar $D(5)$ $(38{,}98831)$ .... 3 pontos

Identificar $t=10$ .... 2 pontos

Determinar $D(10)$ $(76{,}16254)$ .... 3 pontos

Determinar $D(10)-D(5)$ $(37{,}17)$ .... 5 pontos

Justificar a afirmação .... 3 pontos

[O atleta percorreu uma distância maior nos primeiros cinco segundos do que nos cinco segundos seguintes. Logo, tendo percorrido maior distância no mesmo intervalo de tempo, o atleta foi mais rápido nos primeiros cinco segundos da prova do que nos cinco segundos seguintes.]

6.2. .... **18 pontos**

Apresentar o(s) gráfico(s) .... 6 pontos

Apresentar a abcissa do ponto relevante $(249{,}5)$ .... 6 pontos

Determinar, em segundos, o tempo do recorde mundial (195) .... 3 pontos

Determinar o valor solicitado $(54{,}5)$ .... 3 pontos

7.1. .... **12 pontos**

(C)

7.2. .... **18 pontos**

Considerem-se os acontecimentos seguintes:

A: «O Alexandre efetua de forma eficiente o primeiro serviço»;

B: «O Alexandre pontua».

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Calcular $P(A \cap B)$ .... 5 pontos

Escrever $P(A) = 0{,}7$ .... 1 ponto

Escrever $P(B \mid A) = 0{,}8$ .... 1 ponto

Obter $P(A \cap B)$ $(0{,}56)$ .... 3 pontos

Calcular $P(\overline{A} \cap B)$ .... 11 pontos

Escrever $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}12$ .... 1 ponto

Calcular $P(\overline{A})$ $(0{,}3)$ .... 2 pontos

Calcular $P(\overline{B} \mid \overline{A})$ $(0{,}4)$ .... 3 pontos

Calcular $P(B \mid \overline{A})$ $(0{,}6)$ .... 2 pontos

Obter $P(\overline{A} \cap B)$ $(0{,}18)$ .... 3 pontos

Calcular $P(B)$ $(0{,}74)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Calcular $P(A \cap \overline{B})$ .... 9 pontos

Escrever $P(A) = 0{,}7$ .... 1 ponto

Escrever $P(B \mid A) = 0{,}8$ .... 1 ponto

Calcular $P(\overline{B} \mid A)$ $(0{,}2)$ .... 3 pontos

Obter $P(A \cap \overline{B})$ $(0{,}14)$ .... 4 pontos

Calcular $P(\overline{B})$ .... 5 pontos

Escrever $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}12$ .... 1 ponto

Obter $P(\overline{B})$ $(0{,}26)$ .... 4 pontos

Calcular $P(B)$ $(0{,}74)$ .... 4 pontos

7.3. .... **18 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Determinar a probabilidade de o Alexandre não conseguir defender o serviço $(0{,}4)$ .... 2 pontos

Determinar a probabilidade de o Alexandre não defender nenhum serviço .... 6 pontos

Escrever $0{,}4^2$ (ou equivalente) .... 5 pontos

Obter o valor da probabilidade $(0{,}16)$ .... 1 ponto

Determinar a probabilidade de o Alexandre defender um serviço .... 8 pontos

Escrever $2 \times 0{,}4 \times 0{,}6$ (ou equivalente) (**ver nota**) .... 7 pontos

Obter o valor da probabilidade $(0{,}48)$ .... 1 ponto

Obter o valor solicitado $(0{,}64)$ .... 2 pontos

Nota – Por cada fator incorreto ou não apresentado, devem ser descontados 3 pontos. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, a classificação a atribuir a esta etapa é 0 pontos.

2.º Processo

Determinar a probabilidade de o Alexandre defender os dois serviços $(0{,}36)$ ..... 9 pontos

Obter o valor solicitado $(0{,}64)$ .... 9 pontos

3.º Processo

Apresentar os elementos recolhidos quando a resposta for obtida recorrendo às estatísticas da calculadora.

Caracterizar a distribuição binominal $(\mathrm{B}\ (2;\ 0{,}6))$ .... 9 pontos

Obter o valor solicitado $(0{,}64)$ .... 9 pontos

8. .... **18 pontos**

Determinar o valor de $\hat{p}$ $(0{,}36)$ .... 6 pontos

Identificar os valores de n e de z para um intervalo de confiança a 99% .... 2 pontos

$n = 225$ .... 1 ponto

$z = 2{,}576$ .... 1 ponto

Calcular os extremos do intervalo de confiança $(]0{,}28\,;\,0{,}44[)$ .... 10 pontos

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.1.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	18	20	18	12	18	12	18	18	**146**

Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.2.**	**5.2.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.3.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos					**54**
TOTAL						**200**

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 15 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens que envolvem cálculos, apresente todas as justificações necessárias e todos os cálculos que tiver de efetuar.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

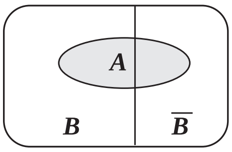
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

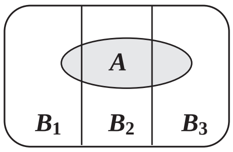
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. Todos os anos, na freguesia de Avelares, realiza-se a Festa da Freguesia. A organização da festa é da responsabilidade de uma comissão formada por 15 moradores da freguesia, garantindo-se que exista uma proporção representativa do número de moradores das três zonas em que esta se divide, Zona Norte (N), Zona Centro (C) e Zona Sul (S).

Os moradores de cada uma das zonas, interessados em pertencer à comissão, começam por se inscrever.

No total, este ano, 105 moradores da freguesia inscreveram-se para fazer parte da comissão.

Na Figura 1, encontra-se organizada, por zonas da freguesia, a contagem dessas 105 inscrições.

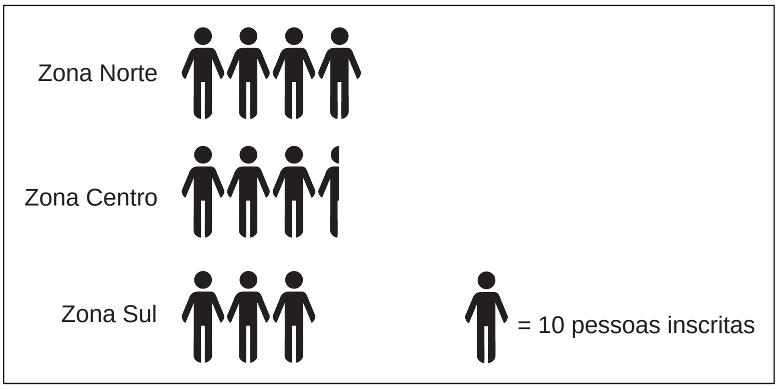


Figura 1

A composição da comissão resulta da aplicação do método a seguir descrito.

1.º passo: Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total de pessoas inscritas pelo número de pessoas que fará parte da comissão.

2.º passo: Calcula-se a quota padrão de cada zona, dividindo-se pelo divisor padrão o número de pessoas inscritas de cada zona.

3.º passo: Se a quota padrão de uma zona for um número inteiro, atribui-se essa quota a essa zona.

4.º passo: Se a quota padrão de uma zona não for um número inteiro, calcula-se $\sqrt{L(L+1)}$, sendo L o maior número inteiro menor do que a quota padrão.

5.º passo: Se a quota padrão de uma zona for menor do que $\sqrt{L(L+1)}$, atribui-se a essa zona uma quota modificada igual ao maior número inteiro menor do que a quota padrão; se a quota padrão de uma zona for maior do que $\sqrt{L(L+1)}$, atribui-se a essa zona uma quota modificada igual ao resultado da adição de 1 com o maior número inteiro menor do que a quota padrão. O número de pessoas a selecionar por cada zona, cuja quota padrão não for um número inteiro, é igual à respetiva quota modificada.

Indique a constituição da comissão, resultante da aplicação do método descrito, determinando o número de pessoas de cada zona.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve uma casa decimal.

2. No recinto da Festa da Freguesia, existem 5 expositores, L, M, N, O e P, que estão ligados por troços pedonais, como se pode observar na Figura 2.

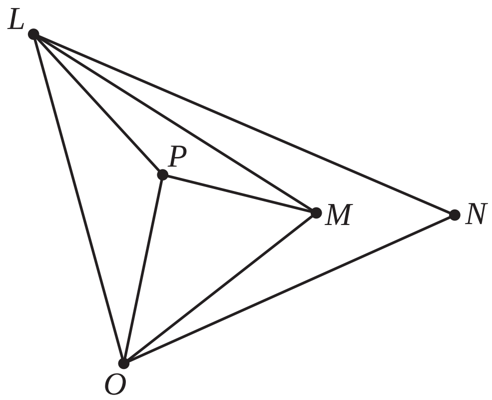


Figura 2

* **2.1.** O presidente da junta de freguesia pretende visitar todos os expositores, sem repetir nenhum deles, iniciando a visita no expositor L.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção adequada a cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** que lhe corresponde. A cada espaço corresponde uma só opção.

O presidente da junta de freguesia verificou que existem ____**I**____ percursos possíveis, mas, se quiser visitar o expositor N depois de visitar o expositor O, apenas existe(m) ____**II**____ percurso(s) possível(is).

Verificou também que não poderia visitar o expositor M imediatamente a seguir ao expositor ____**III**____ e que, imediatamente a seguir a visitar o expositor N, poderia visitar o expositor ____**IV**____ .

I	II	III	IV
a) 2	**a)** 1	**a)** N	**a)** M
b) 3	**b)** 2	**b)** O	**b)** O
c) 4	**c)** 3	**c)** P	**c)** P

✱ 2.2. No final de cada dia, o Rui verifica se todos os expositores, L, M, N, O e P, e o restaurante, $R1$, ficam devidamente encerrados.

Na Tabela 1, estão indicados os comprimentos, em metros, dos troços pedonais que ligam os diferentes espaços.

Tabela 1

	L	M	N	O	P	$R1$
L		284	401	375	356	
M	284			255	270	253
N	401			260		
O	375	255	260		200	250
P	356	270		200		214
$R1$		253		250	214	

O Rui deve iniciar a verificação no restaurante, $R1$.

Para definir o percurso, utiliza o método seguinte.

- Seleciona o espaço a visitar em seguida, tendo em conta que:
  - deve ser o mais próximo possível;
  - se houver dois espaços à mesma distância, a seleção é aleatória.
- Procede como foi indicado no ponto anterior, não repetindo nenhum espaço, e termina depois de ter verificado todos os espaços.

Determine a distância, em metros, percorrida pelo Rui.

Na sua resposta, apresente:

– um grafo ponderado que resulte da aplicação do método descrito;

– o percurso que respeita as condições definidas.

3. A Mariana é uma funcionária da junta de freguesia de Avelares que, após ser promovida, passou a auferir um salário bruto de 1500 euros. O salário bruto, também designado por remuneração mensal, é o salário antes de quaisquer descontos e não inclui o subsídio de refeição.

Admita que o salário líquido, valor monetário que a Mariana efetivamente recebe, resulta da aplicação da fórmula de cálculo seguinte:

$$SL = SB + SR - SS - RF$$

Em que:

- SL é o salário líquido, em euros;
- SB é o salário bruto, em euros;
- SR é o subsídio de refeição, em euros, que corresponde a 5,2 euros por cada dia de trabalho realizado durante o mês;
- SS é a contribuição para a Segurança Social, em euros, que corresponde a 11% do salário bruto;
- RF é a retenção na fonte, em euros, calculada sobre o salário bruto, com base nos dados publicados, anualmente.

A Tabela 2 é a tabela que a Mariana consulta para saber qual o valor da taxa de retenção na fonte aplicada ao seu salário bruto.

Tabela 2

Salário bruto mensal (euros)	**Número de dependentes**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5 ou mais**
...						
$]822{,}00; 931{,}00]$	10,1%	7,3%	6,5%	3,8%	3,1%	1,2%
$]931{,}00; 1015{,}00]$	11,3%	8,6%	7,8%	5,1%	4,4%	3,1%
$]1015{,}00; 1075{,}00]$	12,1%	9,5%	8,6%	6,0%	4,8%	3,9%
$]1075{,}00; 1154{,}00]$	13,1%	11,4%	10,6%	7,9%	7,1%	5,3%
$]1154{,}00; 1237{,}00]$	14,1%	12,4%	11,5%	8,9%	8,0%	6,3%
$]1237{,}00; 1333{,}00]$	15,1%	14,4%	12,6%	10,7%	9,0%	8,1%
$]1333{,}00; 1437{,}00]$	16,1%	15,3%	13,6%	11,9%	10,0%	9,2%
$]1437{,}00; 1577{,}00]$	17,1%	16,4%	14,6%	12,8%	11,1%	10,2%
$]1577{,}00; 1727{,}00]$	18,5%	17,7%	16,1%	14,3%	13,4%	11,7%
...						

Fonte: https://info.portaldasfinancas.gov.pt (consultado em outubro de 2022). (Adaptado)

Por exemplo, segundo esta tabela, a um salário bruto, no valor de 1300 euros, de um trabalhador com quatro dependentes, será aplicada a taxa de retenção na fonte de 9,0%.

Admita que a Mariana tem dois dependentes e que, no próximo mês, trabalhará 22 dias.

Determine o valor do salário líquido da Mariana no próximo mês.

*** 4.** Dois amigos, o Augusto e o Joaquim, todos os anos compram, a meias, um conjunto de rifas. Num certo ano, ganharam os prémios X, Y e Z.

Como não chegaram a acordo sobre a divisão dos três prémios, resolveram aplicar o método a seguir descrito.

- Cada um dos amigos atribui, secretamente, um certo número de pontos a cada um dos três prémios, num total de 100 pontos.
- Cada prémio é destinado, temporariamente, ao amigo que mais o valoriza.
- Determina-se o total de pontos do(s) prémio(s) temporariamente destinado(s) a cada um dos amigos. Se o total de pontos for igual, a partilha está concluída. Caso contrário, procede-se ao ajuste da partilha, de modo que os dois amigos fiquem com número igual de pontos, no total, através da partilha de um dos prémios.
- Para se efetuar o ajuste da partilha, o prémio a partilhar pelos amigos será, de entre os atribuídos ao amigo com total de pontos mais elevado, aquele que tiver menor diferença de pontos atribuídos.
  - Seja A o amigo com o total de pontos mais elevado e seja B o outro amigo. O total final de pontos a atribuir ao amigo A corresponde à diferença entre o total temporário dos seus pontos e x por cento dos pontos por ele atribuídos ao prémio a partilhar.
  - O total final de pontos a atribuir ao amigo B corresponde à soma do total temporário dos seus pontos com x por cento dos pontos por ele atribuídos ao prémio a partilhar.
  - Igualam-se os dois totais finais, de modo a determinar o valor de x, com o qual a partilha ficará equilibrada.
  - O amigo B fica com o(s) prémio(s) a si destinado(s) e x por cento do prémio a partilhar, e o amigo A fica com o restante.

Na Tabela 3, apresenta-se o número de pontos atribuído aos três prémios por cada um dos amigos.

Tabela 3

	X	Y	Z
Augusto	32	38	30
Joaquim	24	51	25

Complete o texto seguinte, selecionando a opção adequada a cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** que lhe corresponde. A cada espaço corresponde uma só opção.

O prémio temporariamente destinado ao Joaquim foi o prémio ___**I**___ , sendo o total de pontos dos prémios temporariamente destinados ao Augusto igual a ___**II**___ . O prémio a utilizar no ajuste da partilha é o prémio ___**III**___ . Na partilha final dos prémios, o Augusto terá direito a ___**IV**___ desse prémio.

I	**II**	**III**	**IV**
a) X **b)** Y **c)** Z	**a)** 32 **b)** 62 **c)** 68	**a)** X **b)** Y **c)** Z	**a)** 15% **b)** 20% **c)** 80%

5. O número de habitantes da freguesia de Avelares, decorridas t décadas após o início do ano 1970, é bem aproximado pelo modelo seguinte

$$A(t) = \frac{10\,566}{1+5e^{-0{,}8t}}\,, \qquad t \geq 0$$

* **5.1.** Em qual dos intervalos de tempo o crescimento da população foi mais acentuado?

(A) Do início de 1980 ao início de 1990

(B) Do início de 1990 ao início de 2000

(C) Do início de 2000 ao início de 2010

(D) Do início de 2010 ao início de 2020

5.2. Na década em que o número de habitantes da freguesia atingiu os cinco milhares, o centro de saúde de Avelares sofreu uma ampliação.

Prove que a ampliação do centro de saúde de Avelares ocorreu durante a década de 80.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

* **5.3.** O número de habitantes da freguesia de Bileira, uma freguesia vizinha de Avelares, decorridas t décadas após o início do ano 1970, é bem aproximado pelo modelo seguinte

$$B(t) = \frac{a}{1+4e^{-0{,}7t}}\,, \qquad t \geq 0 \ \text{ e } \ a \text{ número real positivo.}$$

De acordo com os modelos apresentados, as freguesias de Avelares e Bileira tinham o mesmo número de habitantes no início do ano 1970.

Determine o número de habitantes da freguesia de Bileira, com arredondamento às unidades, no início do ano de 2020.

Na sua resposta, comece por determinar o valor de a.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve seis casas decimais.

6. Uma das atrações da Festa da Freguesia é a quermesse, onde se podem comprar rifas.

Considere que, num conjunto de 200 rifas:

- 120 são verdes;
- um quarto das rifas verdes são rifas premiadas;
- das rifas premiadas, há tantas verdes quantas as que não são verdes.

Escolhe-se, aleatoriamente, uma rifa daquele conjunto de 200.

Determine a probabilidade de a rifa escolhida não ser premiada, sabendo-se que não é verde.

Apresente a sua resposta na forma de dízima.

* **7.** De acordo com um estudo, o tempo que cada cliente aguarda até ser atendido na zona de restauração da Festa da Freguesia segue uma distribuição aproximadamente normal, de valor médio 15 minutos, sendo a probabilidade de um cliente aguardar entre 7 e 23 minutos até ser atendido igual a 0,9545.

Considere que, num determinado dia, foram atendidos 1550 clientes.

Determine quantos desses clientes é de esperar que aguardem entre 11 e 15 minutos até serem atendidos.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

Na sua resposta, apresente, justificando, o valor do desvio padrão.

8. No ano passado, a Festa da Freguesia teve a duração de catorze dias, consecutivos, correspondendo a duas semanas completas. A festa começou no domingo, dia 7, e terminou no sábado, dia 20.

Na Tabela 4, apresentam-se os dados das temperaturas (T), mínima e máxima, em graus Celsius (ºC), e da precipitação acumulada diária (P), em milímetros (mm), para cada dia da primeira semana da festa.

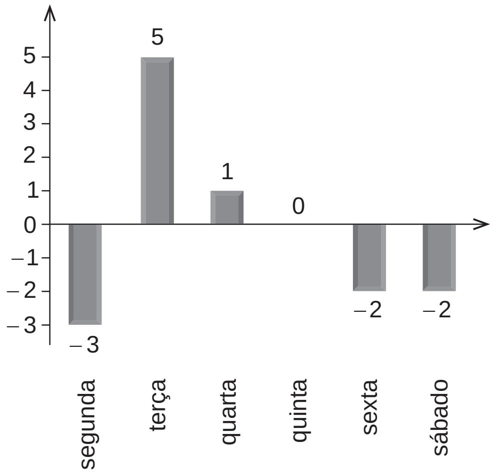
Tabela 4

1.ª semana

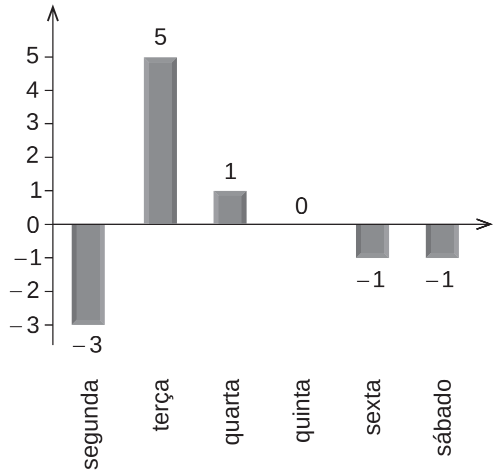
	Dom., 7	**Seg., 8**	**Terça, 9**	**Quarta, 10**	**Quinta, 11**	**Sexta, 12**	**Sáb., 13**
	Céu nublado	Céu nublado	Céu nublado	Céu pouco nublado	Céu pouco nublado	Céu pouco nublado	Céu pouco nublado
T	16 ºC 26 ºC	15 ºC 23 ºC	16 ºC 28 ºC	16 ºC 29 ºC	15 ºC 29 ºC	15 ºC 28 ºC	14 ºC 26 ºC
P	1 mm	0,5 mm	0,1 mm	0,2 mm	0 mm	0,3 mm	3 mm

* **8.1.** Em qual das opções seguintes está representado, para a primeira semana, o gráfico de variação da temperatura máxima, relativamente ao dia anterior?

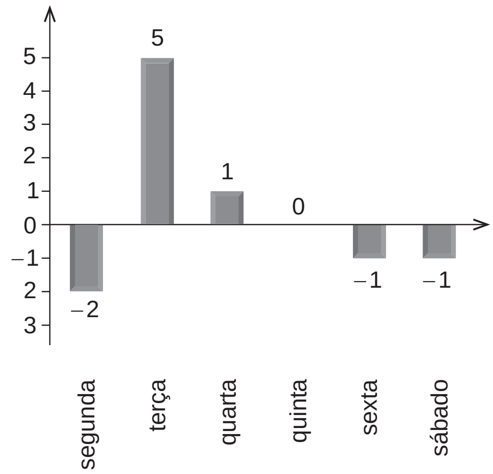
(A)



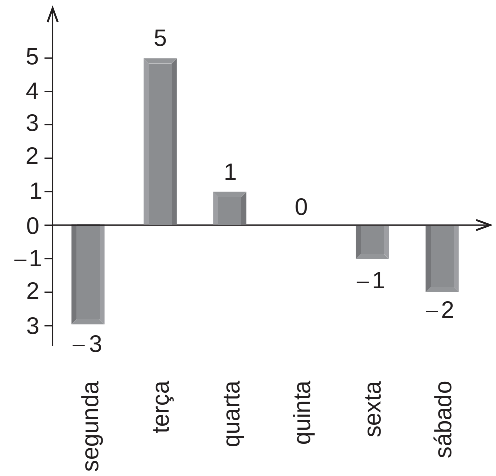
(B)



(C)



(D)



8.2. Associe a cada conjunto de dados apresentados na Coluna **I** (e registados na Tabela 4) as afirmações da Coluna **II** que lhe correspondem.

Cada um dos números, de 1 a 7, deve ser associado apenas a uma letra, e todos os números devem ser utilizados.

Escreva na folha de respostas cada uma das letras da Coluna **I**, seguida do(s) número(s) correspondente(s) da Coluna **II**.

COLUNA I	COLUNA II
(a) Dados da temperatura mínima **(b)** Dados da temperatura máxima **(c)** Dados da precipitação acumulada diária	**(1)** O conjunto dos dados é o que apresenta média inferior à mediana. **(2)** O conjunto dos dados é o que apresenta o primeiro quartil igual à mediana. **(3)** Num par de dias consecutivos, são os únicos dados que apresentam um valor decrescente, enquanto os outros apresentam um valor crescente. **(4)** O conjunto dos dados é amodal. **(5)** O conjunto dos dados é o que apresenta menor dispersão em relação à média. **(6)** A amplitude dos dados é igual a 6. **(7)** A percentagem dos dados acima da sua média é inferior a 30%.

8.3. Admita que, comparando a temperatura máxima registada no domingo, dia 7, com a temperatura máxima registada no domingo, dia 14; comparando a temperatura máxima registada na segunda-feira, dia 8, com a temperatura máxima registada na segunda-feira, dia 15, e assim sucessivamente, as mesmas diminuíram exatamente o mesmo valor em graus Celsius.

Considere que a média das temperaturas máximas registadas na freguesia de Avelares durante os catorze dias da Festa da Freguesia foi 25,5 ^{o}C.

Qual foi a descida, em graus Celsius, da temperatura máxima, comparando a temperatura máxima registada no domingo, dia 7, com a temperatura máxima registada no domingo, dia 14?

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

9. Ao longo dos anos, tem-se registado uma elevada afluência à Festa da Freguesia.

Para estimar a proporção de visitantes que visitaram a Festa da Freguesia pela primeira vez em 2022, realizou-se um estudo.

Para esse estudo, recorreu-se a uma amostra aleatória de visitantes da festa, em 2022. A cada visitante foi perguntado se era a primeira vez que visitava a festa ou se já o fizera antes; a estes últimos, foi pedido que indicassem o número de anos distintos em que haviam visitado a festa (incluindo o ano em que o estudo se realizou).

No Gráfico 1, apresentam-se os resultados obtidos.

Número de visitantes que visitaram a Festa da Freguesia

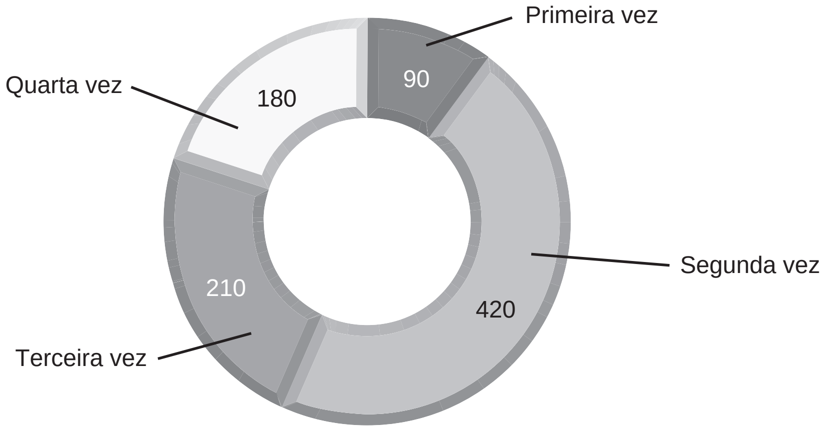


Gráfico 1

Determine o intervalo de confiança a 90% para a proporção de visitantes da Festa da Freguesia que a visitaram pela primeira vez em 2022.

Apresente os extremos do intervalo de confiança, com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**2.1.**	**2.2.**	**4.**	**5.1.**	**5.3.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**8.3.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	14	20	14	14	18	18	14	14	20	**146**

Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.**	**3.**	**5.2.**	**6.**	**9.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos					**54**
TOTAL						**200**

Prova 835

1.ª Fase

1. Pela observação da informação representada na figura, sabemos que o número de inscrições por cada zona, é:

   - Zona Norte: $4 \times 10 = 40$ pessoas inscritas;
   - Zona Centro: $3{,}5 \times 10 = 35$ pessoas inscritas;
   - Zona Sul: $3 \times 10 = 30$ pessoas inscritas.

   Assim, aplicando o método descrito, temos que:

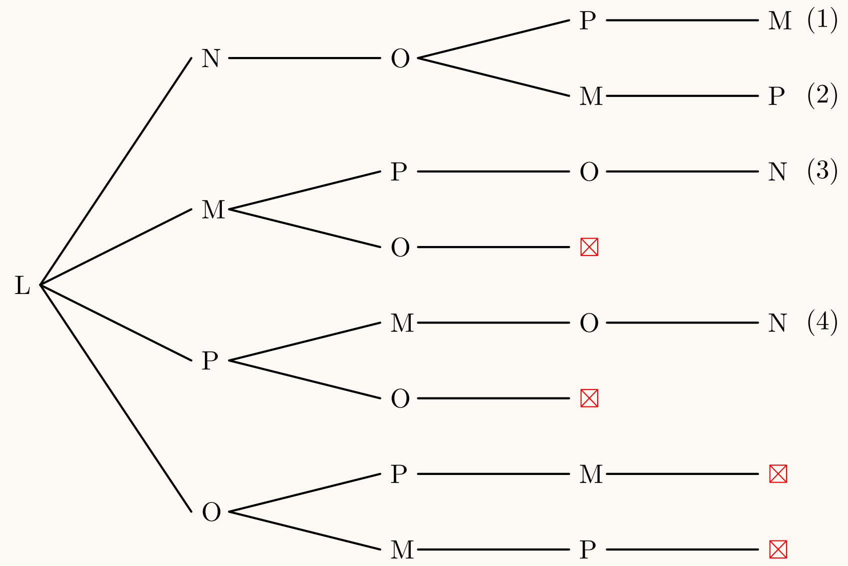
	Zona Norte	**Zona Centro**	**Zona Sul**
Número de inscrições	40	35	30
Divisor padrão	$\frac{105}{15} = 7$		
Quota padrão	$\frac{40}{7} \approx 5{,}7$	$\frac{35}{7} = 5$	$\frac{30}{7} \approx 4{,}3$
Primeira atribuição	–	5	–
L	5	–	4
$\sqrt{L(L+1)}$	$\sqrt{5 \times 6} = \sqrt{30} \approx 5{,}5$	–	$\sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20} \approx 4{,}5$
Quota modificada	$5 + 1 = 6$	—	4

   Desta forma, a comissão deve ser constituída por:

   - 6 moradores da Zona Norte;
   - 5 moradores da Zona Centro;
   - 4 moradores Zona Sul.

2.

2.1. Analisando o grafo da figura, e determinando todas as visitas que se podem definir nas condições descritas, através de um diagrama em árvore, temos:



Assim, vem que:

O presidente da junta de freguesia verificou que existem __**4**__ percursos possíveis, mas, se quiser visitar o expositor N depois de visitar o expositor O, apenas existe(m) __**2**__ percurso(s) possível(is).
Verificou também que não poderia visitar o expositor M imediatamente a seguir ao expositor __**N**__ e que, imediatamente a seguir a visitar o expositor N, poderia visitar o expositor __**O**__ .

Logo, as correspondências corretas são:

- **I $\rightarrow$ c)**
- **II $\rightarrow$ b)**
- **III $\rightarrow$ a)**
- **IV $\rightarrow$ b)**

2.2. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, iniciando a verificação no restaurante, $R1$, obtemos a seguinte ordenação dos troços e um grafo ponderado que representa o percurso escolhido pela aplicação do método descrito:

I - $R1$ - P (214 m)

II - P - O (200 m)

III - O - M (255 m)
(não se seleciona o troço O-P porque P já foi visitado)

IV - M - L (284 m)
(O, P e $R1$ já foram visitados)

IV - L - N (401 m)
(todos os restantes já foram visitados.)

Desta forma, o percurso que respeita as condições definidas, é:

$$R1 \rightarrow P \rightarrow O \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow N$$

E a distância, em metros, percorrida pelo Rui, é:

$$214 + 200 + 255 + 284 + 401 = 1354 \text{ m}$$

3. Identificando os valores de que depende o cálculo do salário líquido, SL, temos:

   - $SB = 1500$
   - $SR = 5{,}2 \times 22 = 144{,}4$, correspondente a 22 dias de trabalho;
   - $SS = 1500 \times 0{,}11 = 165$ correspondente a 11%; do salário bruto;
   - $1500 \times 0{,}146 = 219$ correspondente á taxa de 14,6% indicada na tabela para um salário bruto compreendido entre 1437 e 1577 e a 2 dependentes.

   Assim, temos que o valor do salário líquido, de acordo com a fórmula de cálculo, é:

$$SL = SB + SR - SS - RF = 1500 + 144{,}4 - 165 - 219 = 1230{,}4 \text{ euros}$$

4. Procedendo à distribuição dos bens, aplicando o método descrito, temos:

	Augusto	**Joaquim**
X	32	24
Y	38	51
Z	30	25
Atribuição temporária	X+Z	Y
Total temporário	$32 + 30 = 62$	51
Diferença	X:$32 - 24 = 8$; Y:$51 - 38 = 13$; Z:$30 - 25 = 5$	
Bem usado no ajuste	Z	
Designação	A	B
Total final de pontos	$62 - \frac{x}{100} \times 30$	$51 + \frac{x}{100} \times 25$

   Igualando os dois totais finais e revolvendo a equação que traduz a partilha equilibrada, vem:

$$62 - \frac{x}{100} \times 30 = 51 + \frac{x}{100} \times 25 \Leftrightarrow 62 - \frac{x \times 30}{100} = 51 + \frac{x \times 25}{100} \Leftrightarrow 62 - 0{,}3x = 51 + 0{,}25x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 62 - 51 = 0{,}25x + 0{,}3x \Leftrightarrow 11 = 0{,}55x \Leftrightarrow \frac{11}{0{,}55} = x \Leftrightarrow x = 20$$

   Assim, a partilha final dos bens pelos dois amigos é:

   - O Joaquim (B) recebe o bem Y e mais 20% do bem Z;
   - O Augusto recebe o bem X mais $100 - 20 = 80\%$ do bem Z.

   Assim, vem que:

   O prémio temporariamente destinado ao Joaquim foi o prémio **Y** , sendo o total de pontos dos prémios temporariamente destinados ao Augusto igual a **62** . O prémio a utilizar no ajuste da partilha é o prémio **Z** . Na partilha final dos prémios, o Augusto terá direito a **80** desse prémio.

   Logo, as correspondências corretas são:

   - **I** $\rightarrow$ **b)**
   - **II** $\rightarrow$ **b)**
   - **III** $\rightarrow$ **c)**
   - **IV** $\rightarrow$ **c)**

5.

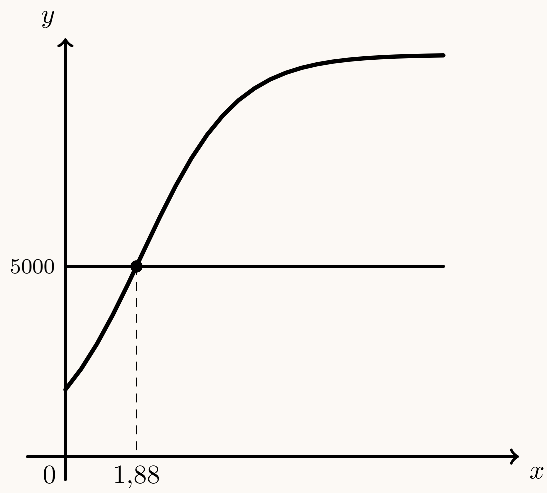
5.1. Analisando o número de habitantes no início de cada uma das décadas e o crescimento associado, temos:

Anos	**N.º de habitantes**	**Crescimento**
1980	$A(1) = \frac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 1}} \approx 3254$	—
1990	$A(2) = \frac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 2}} \approx 5258$	$5258 - 3234 = 2004$
2000	$A(3) = \frac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 3}} \approx 7269$	$7269 - 5258 = \mathbf{2011}$
2010	$A(4) = \frac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 4}} \approx 8777$	$8777 - 7269 = 1508$
2020	$A(5) = \frac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 5}} \approx 9679$	$9679 - 8777 = 902$

Logo é possível verificar que, de entre os intervalos de tempo apresentados, aquele em que se verificou o crescimento da população mais acentuado foi entre o inicio de 1990 e o início de 2000.

Resposta: **Opção B**

5.2. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do número de habitantes em função do tempo $\left(y = \frac{10\,566}{1+5e^{-0,8x}}\right)$ e da reta correspondente aos 5 milhares de habitantes ($y = 5000$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $x \geq 0$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.



Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção do modelo com a reta, obtemos o valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, o valor correspondente ao tempos em que o número de habitantes da freguesia era 5000, ou seja, os pontos de coordenadas $(1,88\,;\,5000)$.

Assim, como $A(1,88) \approx 5000$, sabemos que a ampliação do centro de saúde aconteceu 1,88 décadas após o inicio de 1970, ou seja, num período de tempo compreendido entre 1 e 2 décadas ($1 < 1,88 < 2$) após o inicio de 1970, o que nos permite garantir que a ampliação ocorreu entre 1980 e 1990, ou seja, na década de 80.

5.3. Calculando o número de habitantes, em cada uma das duas freguesias, no inicio de 1970, ou seja, para $t = 0$, temos:

- $A(0) = \dfrac{10566}{1 + 5 \times e^{-0,8 \times 0}} = 1761$
- $B(0) = \dfrac{a}{1 + 4 \times e^{-0,7 \times 0}} = \dfrac{a}{1 + 4 \times e^{0}} = \dfrac{a}{1 + 4 \times 1} = \dfrac{a}{5}$

Como, nesta data, as duas freguesias tinham o mesmo número de habitantes, estes valores são iguais, pelo que podemos calcular o valor de a:

$$\frac{a}{5} = 1761 \Leftrightarrow a = 1761 \times 5 \Leftrightarrow a = 8805$$

E assim, substituindo o valor de a no modelo, temos que o número de habitantes da freguesia de Bileira, com arredondamento às unidades, no início do ano de 2020, ou seja, para $t = 5$, é:

$$B(5) = \frac{8805}{1 + 4 \times e^{-0,7 \times 5}} \approx 7856$$

6. Consideramos a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma rifa da quermesse, e os acontecimentos:

V:≪A rifa é verde≫
Pr:≪A rifa é premiada≫

Organizando os dados numa tabela obtemos:

- Número total de rifas: 200
- Número de rifas verdes: 120
- Número de rifas não verdes: $200 - 120 = 80$
- Número de rifas verdes premiadas: $\dfrac{1}{4} \times 120 = 30$
- Número de rifas não verdes premiadas: 30
- Número de rifas não verdes e não premiadas: $80 - 30 = 50$

	V	$\overline{V}$	
Pr	30	30	
$\overline{Pr}$		50	
	120	80	200

Desta forma, a probabilidade de a rifa escolhida não ser premiada, sabendo-se que não é verde,na forma de dízima,é:

$$P\left(\overline{Pr}|\overline{V}\right) = \frac{P\left(\overline{Pr} \cap \overline{V}\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \frac{\frac{50}{200}}{\frac{80}{200}} = \frac{50}{80} = \frac{5}{8} = 0,625$$

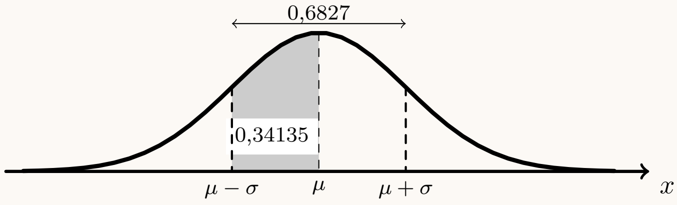
7. Considerando a variável aleatória X que define o tempo que cada cliente aguarda até ser atendido na zona de restauração da Festa da Freguesia, como esta segue uma distribuição normal, com $\mu = 15$ minutos e $15 - 8 = 7$ tal como $15 + 8 = 23$, temos que 7 e 23 são valores equidistantes do valor médio.

   Como numa distribuição normal $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$, e neste caso, $P(\mu - 8 < X < \mu + 8) \approx 0{,}9545$, podemos calcular o valor do desvio padrão:

$$2\sigma = 8 \Leftrightarrow \sigma = \frac{8}{2} \Leftrightarrow \sigma = 4$$

   Assim, como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio, a probabilidade de um cliente aguardar entre 11 e 15 minutos, é:

$$P(11 < X < 15) = P(12 - 4 < X < 15) =$$
$$= P(\mu - \sigma < X < \mu) = \frac{P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)}{2} \approx$$
$$\approx \frac{0{,}6827}{2} \approx 0{,}34135$$



   Logo, dos 1550 clientes que foram atendidos naquele dia, espera-se que o número dos que devem esperar entre 11 e 15 minutos, seja:

$$1550 \times 0{,}34135 \approx 529$$

8.

   8.1. Analisando os valores da temperatura máxima em cada um dos dias e a variação em relação ao dia anterior, temos:

Dia	Temperatura máxima (°C)	Variação (°C)
7 (domingo)	26	—
8 (segunda)	23	$23 - 26 = -3$
9 (terça)	28	$28 - 23 = 5$
10 (quarta)	29	$29 - 28 = 1$
11 (quinta)	29	$29 - 29 = 0$
12 (sexta)	28	$28 - 29 = -1$
13 (sábado)	26	$26 - 28 = -2$

   Logo, observando em concreto os valores da variação de segunda, sexta e sábado, podemos concluir que o gráfico de variação da temperatura máxima, relativamente ao dia anterior é o que está representado na opção D.

   Resposta: **Opção D**

8.2. Organizando os dados relativos aos valores da temperatura mínima (16; 15; 16; 16; 15; 15; 14), da temperatura máxima (26; 23; 28; 29; 29; 28; 26) e da precipitação acumulada diária (1; 0,5;0,1; 0,2; 0; 0,3; 3), em três listas na calculadora gráfica e calculando as medidas estatísticas de cada uma das variáveis, obtemos os seguintes valores, relativos à média, mediana, 1.º quartil, desvio padrão, e amplitude:

	Temperatura mínima	Temperatura máxima	Precipitação acumulada diária
Média	15,2857	27	0,7286
Mediana	15	28	0,3
1º quartil	15	26	0,1
Desvio padrão	0,6999	2	0,9765
Amplitude	2	6	3

E assim, podemos estabelecer as correspondências seguintes:

- **(1) - (b)** O conjunto dos dados é o que apresenta média inferior à mediana são os da temperatura máxima;
- **(2) - (a)** O conjunto dos dados é o que apresenta o primeiro quartil igual à mediana para a variável temperatura mínima;
- **(3) - (c)** De segunda para terça, os valores da precipitação decresceram (de 0,5 para 0,1) e os valores das temperaturas miníma e máxima cresceram (de 15 para 16 e de 23 para 28, respetivamente) e em nenhum outro par de dias se verificou uma tendência semelhante;
- **(4) - (c)** Os valores da precipitação são todos diferentes,pelo que nenhum deles tem uma frequência maior que os restantes, pelo que não existe moda, ou seja, o conjunto dos dados é amodal;
- **(5) - (a)** O conjunto dos dados é o que apresenta menor dispersão em relação à média, que pode ser identificado através do valor do desvio padrão que é menor, são os dados relativos à temperatura mínima;
- **(6) - (b)** A amplitude dos dados da temperatura mínima é igual a 6;
- **(7) - (c)** Relativamente à temperatura mínima existem 3 dados acima da média, ou seja, mais de 30% $\left(3 \times \frac{100}{7} \approx 42{,}86\right)$; relativamente à temperatura máxima existem 4 dados acima da média, ou seja, mais de 30% $\left(4 \times \frac{100}{7} \approx 51{,}14\right)$ e relativamente à precipitação acumulada existem 2 dados acima da média, ou seja, menos de 30% $\left(2 \times \frac{100}{7} \approx 28{,}57\right)$

Resposta: **(a) - 2,5**; **(b) - 1,6** e **(c) - 3,4,7**

8.3. Designando por d, o valor da descida da temperatura máxima entre dois dias correspondentes das duas semanas, e calculado a soma das temperaturas registadas, temos:

- entre os dias 7 e 13: $26 + 23 + 28 + 29 + 29 + 28 + 26 = 189$
- entre os dias 14 e 20: $(26-d)+(23-d)+(28-d)+(29-d)+(29-d)+(28-d)+(26-d) = 189-7d$
- nos 14 dias da Festa: $189 + 189 - 7d = 378 - 7d$

Assim, sabendo que a média dos 14 dias da Festa foi de 25,5 °C, podemos calcular o valor d, da a descida da temperatura máxima entre os dias 7 e 14:

$$\frac{378-7d}{14} = 25{,}5 \Leftrightarrow 378 - 7d = 25{,}5 \times 14 \Leftrightarrow 378 - 7d = 357 \Leftrightarrow 378 - 357 = 7d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 378 - 357 = 7d \Leftrightarrow 21 = 7d \Leftrightarrow \frac{21}{7} = d \Leftrightarrow d = 3$$

9. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

   - A dimensão da amostra: $n = 90 + 420 + 210 + 180 = 900$
   - A proporção amostral do número de visitantes que visitaram a Festa da Freguesia pela primeira vez: $\hat{p} = \frac{90}{900} = 0{,}1$
   - O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

   Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 0{,}1 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{900}} \; ; \; 0{,}1 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{900}} \right[\approx]0{,}08; 0{,}12[$$

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Critérios de Classificação

8 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

As respostas aos itens de seleção podem ser classificadas de forma dicotómica ou por níveis de desempenho, de acordo com os critérios específicos. No primeiro caso, a pontuação só é atribuída às respostas corretas, sendo todas as outras respostas classificadas com zero pontos. No caso da classificação por níveis de desempenho, a cada nível corresponde uma dada pontuação, de acordo com os critérios específicos.

Nas respostas aos itens de seleção, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra ou do número correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Organização e Linguagem Científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	**Classificação**
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).

9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **18 pontos**

Calcular o divisor padrão (7) .... 3 pontos

Calcular as quotas padrão .... (1 + 1 + 1) .... 3 pontos
[Zona Norte: 5,7; Zona Centro: 5; Zona Sul: 4,3]

Calcular $\sqrt{L(L+1)}$ .... (2 + 2) .... 4 pontos
[Zona Norte: 5,5; Zona Sul: 4,5]

Indicar a constituição da comissão .... (3 + 2 + 3) .... 8 pontos
[Zona Norte: 6 moradores; Zona Centro: 5 moradores; Zona Sul: 4 moradores]

2.1. .... **14 pontos**

I → c) II → b) III → a) IV → b)

Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
3	Completa o texto com as 4 opções corretas.	14
2	Completa o texto com 3 opções corretas.	10
1	Completa o texto com 2 opções corretas.	6

2.2. .... **20 pontos**

Apresentar um grafo que modele a situação .... 14 pontos

Identificar os vértices, associando-os aos expositores e restaurante .. 2 pontos

Apresentar as arestas selecionadas pela aplicação do método descrito .... 12 pontos

Apresentar o percurso possível .... 3 pontos
$[R1\text{-}P\text{-}O\text{-}M\text{-}L\text{-}N]$

Calcular a distância percorrida pelo Rui $(1354\ \text{m})$ .... 3 pontos

3. .... **18 pontos**

Identificar o valor de SB $(1500\ €)$ .... 1 ponto

Calcular o valor de SR $(114{,}40\ €)$ .... 3 pontos

Calcular o valor de SS $(165\ €)$ .... 4 pontos

Calcular o valor de RF .... 8 pontos

Identificar a taxa de retenção na fonte $(14{,}6\%)$ .... 4 pontos

Obter o valor de RF $(219\ €)$ .... 4 pontos

Calcular o valor de SL $(1230{,}40\ €)$ .... 2 pontos

4. .... **14 pontos**

I → b) **II → b)** **III → c)** **IV → c)**

Níveis	**Descritores de desempenho**	**Pontuação**
3	Completa o texto com as 4 opções corretas.	14
2	Completa o texto com 3 opções corretas.	10
1	Completa o texto com 2 opções corretas.	6

5.1. .... **14 pontos**

(B)

5.2. .... **18 pontos**

Identificar o número de habitantes (5000) .... 3 pontos

Apresentar os gráficos (**ver nota**) .... 8 pontos

Representar graficamente a função A .... 4 pontos

Representar graficamente a reta $y = 5000$ .... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 2 pontos

Apresentar a abcissa do ponto relevante $(1{,}88)$ .... 4 pontos

Reconhecer que a ampliação do centro de saúde ocorreu no decorrer do ano 1988 .... 3 pontos

Nota – Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em um ponto.

5.3. .... **18 pontos**

Identificar $t = 0$ .... 1 ponto

Determinar $A(0)$ (1761) .... 3 pontos

Escrever $\frac{a}{1 + 4e^{-0,7 \times 0}} = 1761$ (ou equivalente) .... 5 pontos

Determinar o valor de a (8805) .... 3 pontos

Identificar $t = 5$ .... 3 pontos

Determinar $B(5)$ (7856) .... 3 pontos

6. .... **18 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Considerem-se os acontecimentos seguintes:

A: «A rifa é verde»

B: «A rifa é premiada»

1.º Processo

Calcular o número de rifas verdes premiadas (30) .... 4 pontos

Calcular o número de rifas que não são verdes e são premiadas (30) .... 3 pontos

Calcular o número de rifas que não são verdes (80) .... 3 pontos

Calcular o número de rifas que não são verdes nem premiadas (50) .... 3 pontos

Calcular $P(\overline{B}|\overline{A})$ $(0{,}625)$ .... 5 pontos

2.º Processo

Calcular $P(\overline{A})$ .... 3 pontos

- Calcular $P(A)$ $\left(\frac{3}{5}\right)$ .... 2 pontos
- Obter $P(\overline{A})$ $\left(\frac{2}{5}\right)$ .... 1 ponto

Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ .... 10 pontos

- Escrever $P(B|A) = \frac{1}{4}$ .... 1 ponto
- Calcular $P(A \cap B)$ $\left(\frac{3}{20}\right)$ .... 4 pontos
- Reconhecer que $P(\overline{A} \cap B) = \frac{3}{20}$ .... 3 pontos
- Obter $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ $\left(\frac{1}{4}\right)$ .... 2 pontos

Calcular $P(\overline{B}|\overline{A})$ $(0{,}625)$ .... 5 pontos

7. .... **18 pontos**

Identificar, justificando, o valor de σ .... 8 pontos

- Reconhecer que $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$ (ou equivalente) .... 4 pontos
- Obter o valor de σ (4) .... 4 pontos

Determinar $P(\mu - \sigma < X < \mu)$ $(0{,}34135)$ .... 6 pontos

Determinar o valor solicitado (529) .... 4 pontos

8.1. .... **14 pontos**

(D)

8.2. .... **14 pontos**

(a) → (2); (5) **(b) → (1); (6)** **(c) → (3); (4); (7)**

Níveis	**Descritores de desempenho**	**Pontuação**
4	Associa corretamente as 7 afirmações aos respetivos registos.	14
3	Associa corretamente 5 ou 6 afirmações aos respetivos registos.	11
2	Associa corretamente 3 ou 4 afirmações aos respetivos registos.	8
1	Associa corretamente 2 afirmações aos respetivos registos.	5

Nota – Caso o aluno associe o mesmo número a mais do que um registo, ainda que uma das associações possa estar correta, esta não é considerada para efeitos de classificação.

8.3. .... **20 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Calcular a soma das temperaturas máximas registadas na primeira semana (189) .... 5 pontos

Escrever $\frac{189+(189-7x)}{14}=25{,}5$ (ou equivalente) .... 9 pontos

Determinar o valor de x (3) .... 5 pontos

Concluir .... 1 ponto
[A temperatura máxima desceu 3 ºC.]

2.º Processo

Calcular a média das temperaturas máximas registadas na primeira semana (27) .... 5 pontos

Escrever $\frac{27+x}{2}=25{,}5$ (ou equivalente) .... 9 pontos

Determinar o valor de x (24) .... 3 pontos

Concluir .... 3 pontos
[A temperatura máxima desceu 3 ºC.]

9. .... **18 pontos**

Identificar os valores de n e z para um intervalo de confiança a 90% .... 3 pontos

$n = 900$ .... 2 pontos

$z = 1{,}645$ .... 1 ponto

Calcular o valor de $\hat{p}$ $(0{,}1)$ .... 5 pontos

Obter o intervalo solicitado $(]\,0{,}08;\, 0{,}12\,[)$ .... 10 pontos

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**2.1.**	**2.2.**	**4.**	**5.1.**	**5.3.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**8.3.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	14	20	14	14	18	18	14	14	20	**146**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.**	**3.**	**5.2.**	**6.**	**9.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos									**54**
TOTAL										**200**

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 15 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens que envolvem cálculos, apresente todas as justificações necessárias e todos os cálculos que tiver de efetuar.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

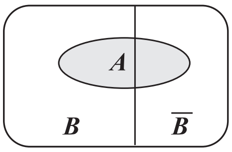
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

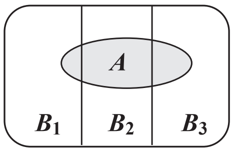
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

*** 1.** No verão passado, o José viajou pelas Caraíbas num navio de cruzeiro. No penúltimo jantar da viagem, como é tradição, o comandante do navio colocou à votação dos turistas a escolha do empregado mais popular da zona de restauração. Na viagem que o José realizou, a escolha foi feita entre a Ana (A), o Bernardo (B), o Carlos (C) e a Diana (D).

Ao votar, cada turista tinha de dispor os nomes dos quatro empregados, A, B, C, e D, de acordo com a ordem da sua preferência.

Cada um dos turistas votou uma única vez, correspondendo cada ordenação efetuada a um voto.

Para representar o resultado da votação:

- desenharam-se quatro círculos concêntricos com diferentes raios;
- definiram-se tantos sectores circulares quanto o número de listas de preferências obtidas, sendo a amplitude dos sectores proporcional ao número de votos em cada lista.
  Cada sector é composto por quatro faixas circulares; na faixa mais próxima do centro, regista-se o empregado que ocupa a primeira posição na lista de preferências, na faixa seguinte, apresenta-se o empregado que ocupa a segunda posição na lista de preferências, e assim sucessivamente.

Na Figura 1, representa-se o resultado dos 900 votos validamente expressos.

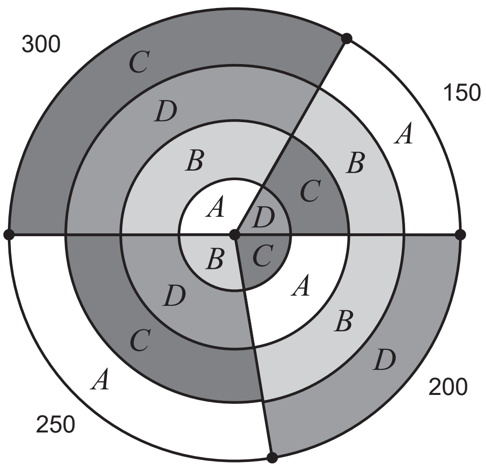


Figura 1

Da análise da Figura 1, conclui-se que se obtiveram quatro listas de preferências e que, por exemplo, 150 pessoas votaram na lista em que o empregado D ocupa a primeira preferência, o empregado C ocupa a segunda preferência, o empregado B ocupa a terceira preferência, e o empregado A ocupa a quarta preferência.

Para apurar o empregado mais popular da zona de restauração, decidiu-se aplicar o método a seguir descrito.

- Efetua-se a contagem do número de votos em cada empregado, como primeira preferência, e verifica-se se algum deles obtém a maioria absoluta. Caso isso se verifique, esse empregado é o mais popular da zona de restauração.
- Caso contrário, o empregado que obteve o menor número de votos, como primeira preferência, é eliminado de todos os quatro sectores. Cada um dos sectores é reestruturado de modo que os empregados que ocupavam as faixas circulares mais afastadas do centro do que a faixa do empregado eliminado se movem uma posição em direção ao centro, mantendo-se a mesma ordem.
- Após a reestruturação dos sectores circulares, aplicam-se novamente os procedimentos anteriores.
- O processo repete-se até que um dos empregados obtenha a maioria absoluta como primeira preferência.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção adequada a cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** que lhe corresponde. A cada espaço corresponde uma só opção.

O número mínimo de votos, como primeira preferência, para que um empregado obtivesse maioria absoluta era ____**I**____ . Na contagem efetuada após a primeira eliminação de um dos candidatos, o candidato ____**II**____ ficou com 350 votos.

O segundo candidato a ser eliminado foi ____**III**____ .

O candidato vencedor obteve ____**IV**____ votos.

I	II	III	IV
a) 451 **b)** 450 **c)** 900	**a)** A **b)** B **c)** C	**a)** A **b)** B **c)** C	**a)** 550 **b)** 600 **c)** 750

✱ 2. Num dos navios de cruzeiro da empresa LZD, existe um circuito de manutenção com seis estações. Um circuito de manutenção consiste numa série de exercícios físicos dispostos sequencialmente (em estações), de modo que os turistas, quando passam pelas estações, têm a possibilidade de executar o exercício proposto.

Na Figura 2, apresenta-se um grafo, no qual os vértices representam as estações, e as arestas representam os troços pedonais existentes entre elas.

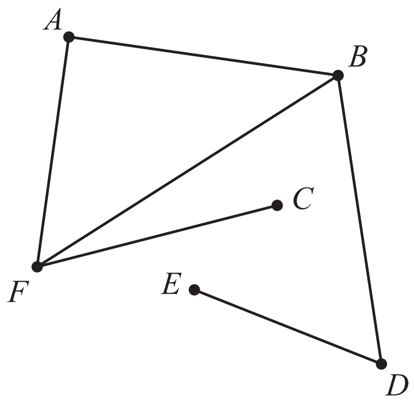


Figura 2

Pretende-se construir novos troços pedonais entre as estações existentes, para que seja possível iniciar e terminar o circuito de manutenção numa mesma estação, percorrendo todos os troços, incluindo os novos, sem repetir nenhum deles.

Qual o número mínimo de troços pedonais a construir?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

*** 3.** Os pais da Luísa fizeram um cruzeiro com o itinerário seguinte.

Dia 1 – Atenas (A) **Dia 2** – Istambul (I) **Dia 3** – Volos (V) **Dia 4** – Mykonos (M)
Dia 5 – Rodes (R) **Dia 6** – Santorini (S) **Dia 7** – Atenas (A)

A Luísa, não podendo acompanhar os pais, tenciona visitar os mesmos locais, sem repetir nenhum deles, mas viajando em transportes públicos terrestres e marítimos. No seu planeamento, a Luísa pretende iniciar e terminar a viagem em Atenas, despendendo o menor tempo possível nas deslocações entre estes locais.

Na Tabela 1, estão registadas as durações das viagens entre os vários locais a visitar, pesquisadas na Internet pela Luísa.

Tabela 1

	A	I	M	R	S	V
A		17h20	2h50	15h50	9h30	4h40
I	17h20		26h00	15h30	28h20	14h50
M	2h50	26h00		10h30	2h30	6h10
R	15h50	15h30	10h30		2h40	7h00
S	9h30	28h20	2h30	2h40		6h20
V	4h40	14h50	6h10	7h00	6h20	

Para definir o seu percurso, a Luísa decide construir um grafo para modelar a situação, aplicando o método seguinte.

- Escolhe-se a aresta do grafo com menor peso, qualquer que ela seja.
- Escolhe-se, sucessivamente, as arestas com menor peso, garantindo que três arestas do grafo que está a ser definido não se encontram num mesmo vértice e não permitindo a formação de quaisquer percursos fechados que não incluam todos os vértices.

Poderá a Luísa visitar os locais pela mesma ordem seguida pelos pais?

Na sua resposta, apresente:

– a ordenação das arestas selecionadas que resulte da aplicação do método descrito;

– um grafo semelhante ao que terá sido construído pela Luísa;

– um possível itinerário definido pela Luísa.

4. O José e a irmã pediram uma *pizza* enquanto desfrutavam da piscina do navio de cruzeiro. A *pizza* pedida, além de outros ingredientes, tinha numa metade cogumelos e, na outra, azeitonas, como se ilustra na Figura 3.

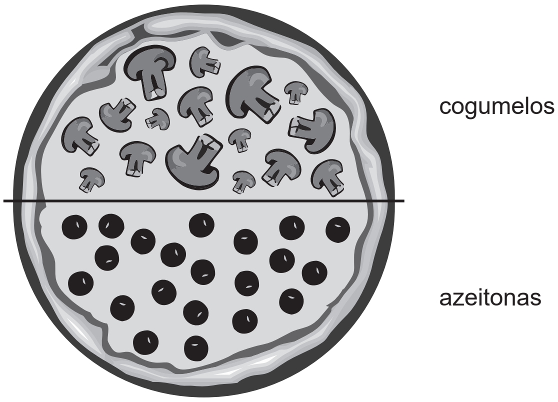


Figura 3

A irmã do José dividiu a *pizza* em duas porções que, para ela, tinham o mesmo valor monetário.

Na Figura 4, apresenta-se a divisão em duas porções de igual tamanho, P_1 e P_2 , efetuada pela irmã do José.

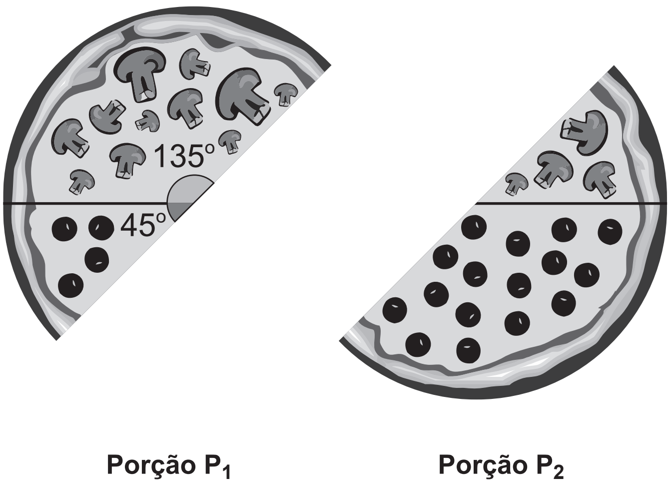


Figura 4

O José, que atribui à parte com cogumelos, representada na Figura 3, o dobro do valor monetário que atribui à parte com azeitonas, escolheu a porção P_1 e lembrou-se de determinar o valor monetário da porção que escolheu.

Admita que o preço da *pizza* é 42 euros.

Indique o valor monetário atribuído pelo José à porção que selecionou.

5. O Tiago consultou um mediador de seguros para conhecer as condições de um seguro de saúde para o seu agregado familiar e o orçamento anual do mesmo.

Para orçamentar o seguro, o mediador solicitou ao Tiago informação sobre a constituição do seu agregado familiar e sobre a idade, em anos, de cada membro que o constitui.

Na Tabela 2, apresenta-se a informação fornecida pelo Tiago.

Tabela 2

Elemento do agregado familiar	Idade (em anos)
Tiago	50
Alice	44
Beatriz	14
Nuno	12

Na Tabela 3, apresentam-se os prémios totais anuais, de acordo com o escalão etário dos segurados, e, na Tabela 4, as taxas de desconto a aplicar aos prémios totais anuais, em função do número de pessoas seguradas.

Tabela 3

Escalão etário (em anos)	Prémios totais anuais (em euros)
Dos 0 aos 5	356,99
Dos 6 aos 10	334,42
Dos 11 aos 20	241,48
Dos 21 aos 25	286,85
Dos 26 aos 30	349,56
Dos 31 aos 35	381,08
Dos 36 aos 40	405,85
Dos 41 aos 45	466,18
Dos 46 aos 50	531,08
Dos 51 aos 55	599,23
Dos 56 aos 60	668,81

Tabela 4

Taxa de desconto a aplicar aos prémios totais anuais	
2 pessoas seguradas	5%
3 ou 4 pessoas seguradas	11%
5 ou mais pessoas seguradas	20%

Com a informação prestada na Tabela 2 e utilizando os dados das Tabelas 3 e 4, o mediador orçamentou o prémio do seguro para todo o agregado familiar do Tiago.

Determine o valor anual, em euros, que o mediador de seguros terá apresentado para o seguro de saúde de todo o agregado familiar do Tiago.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

Na sua resposta, apresente o valor em euros, com arredondamento às centésimas.

6. A empresa LZD explora os itinerários de cruzeiro A, B e C.

Desde o início do ano 2000, a empresa contratou, numa instituição bancária, uma conta-corrente para cada um dos itinerários.

Admita que o saldo A da conta-corrente, em milhões de euros, para o itinerário A, t anos após o início do ano 2000, é dado por

$$A(t) = 4 + 3\ln(2t+1)\,, \quad t \in [0, 22]$$

6.1. O maior investimento em publicidade para promover o itinerário A ocorreu nos anos em que o saldo da conta-corrente se situou entre 11,15 milhões de euros e 13,5 milhões de euros.

Determine durante quantos anos completos ocorreu o maior investimento em publicidade para promover o itinerário A.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

* **6.2.** Qual é o valor, aproximado às unidades, da percentagem de aumento do saldo A, no final do primeiro ano de contratação da conta-corrente?

(A) 55%

(B) 53%

(C) 85%

(D) 82%

*** 6.3.** Admita que o saldo B da conta-corrente do itinerário B e o saldo C da conta-corrente do itinerário C, em milhões de euros, t anos após o início do ano 2000, são dados, respetivamente, por

$$B(t) = -0{,}3t + 4{,}8 \;, \quad t \in [0, 22] \quad \text{e} \quad C(t) = 8 - 10e^{-0{,}2t} \;, \quad t \in [0, 22]$$

Associe a cada um dos saldos, apresentados na Coluna **I**, as afirmações da Coluna **II** que lhe correspondem.

Cada um dos números, de 1 a 7, deve ser associado apenas a uma das letras, e todos os números devem ser utilizados.

Escreva na folha de respostas cada letra da Coluna **I**, seguida do(s) número(s) correspondente(s) da Coluna **II**.

COLUNA I	COLUNA II
(a) Saldo A	**(1)** Tem vindo a diminuir.
(b) Saldo B	**(2)** No início do ano 2000, apresentava o maior valor.
(c) Saldo C	**(3)** No início do ano de 2001, apresentava valor negativo.
	(4) Foi sempre positivo.
	(5) Entre o início do ano 2000 e o início do ano de 2002, aumentou, aproximadamente, 3 milhões de euros.
	(6) No início do ano de 2016, foi nulo.
	(7) No início do ano de 2002, apresentava o maior valor.

7. O *Net Promoter Score* (NPS) é um dos indicadores mais utilizados para aferir o grau de satisfação dos clientes relativamente a uma empresa.

Para calcular o NPS, um conjunto de clientes responde à questão:

«Numa escala de 0 a 10, recomendaria a nossa empresa a um amigo?»

Em que 0 representa «nada provável» e 10 «extremamente provável».

Recolhidas as respostas, os clientes são divididos em três grupos: Promotores, se atribuem 9 ou 10 pontos; Neutros, se atribuem 7 ou 8 pontos; Detratores, se atribuem entre 0 e 6 pontos.

De seguida, aplica-se a seguinte fórmula:

$$NPS = \text{percentagem de Promotores} - \text{percentagem de Detratores}$$

O valor NPS obtido pode variar entre -100% e 100%.

Na Tabela 5, apresenta-se a escala de classificação do grau de satisfação dos clientes de uma empresa, de acordo com o resultado do NPS, arredondado às unidades.

Tabela 5

NPS (%)	**-100 a -1**	**0 a 49**	**50 a 74**	**75 a 100**
Classificação do grau de satisfação	Zona crítica	Zona de aperfeiçoamento	Zona de qualidade	Zona de excelência

7.1. A empresa de cruzeiros LZD pretende aferir o grau de satisfação dos seus clientes.

Para isso, recolheu os resultados da pontuação atribuída por 1080 dos seus clientes. Na Tabela 6, apresentam-se os resultados obtidos.

Tabela 6

	Detratores							**Neutros**		**Promotores**	
N.º de clientes	0	34	25	9	0	22	30	124	170	369	297
Pontos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

7.1.1. Atualmente, para aferir o grau de satisfação dos seus clientes, a empresa de cruzeiros LZD recorre ao cálculo do NPS, mas, anteriormente, recorria ao cálculo da média das pontuações atribuídas pelos clientes.

Admita que uma média de pontuações igual ou superior a 9 pontos corresponde a um grau de satisfação numa Zona de excelência.

Prove que o grau de satisfação dos clientes não se encontra na Zona de excelência, independentemente da forma de aferição, recorrendo aos dados das Tabelas 5 e 6.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

Na sua resposta, apresente:

– a média das pontuações atribuídas pelos clientes;

– o valor do NPS.

*** 7.1.2.** Complete o texto seguinte, selecionando a opção adequada a cada espaço.

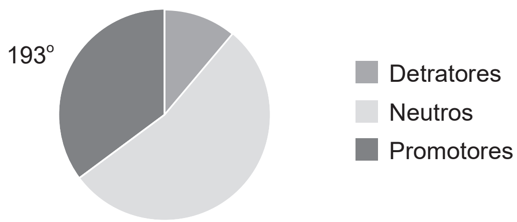
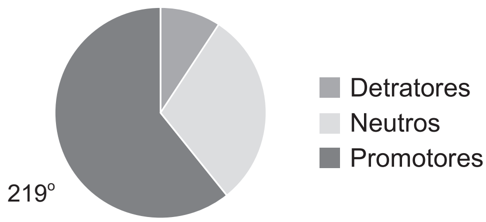
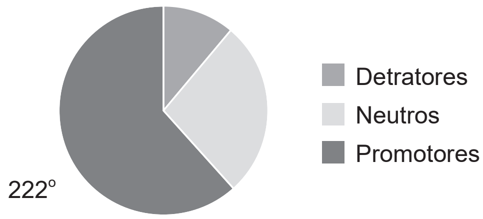
Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** que lhe corresponde. A cada espaço corresponde uma só opção.

A moda das pontuações atribuídas pelos Detratores é ____**I**____ .

Os clientes Neutros representam, com arredondamento às unidades, aproximadamente ____**II**____ % da amostra.

A mediana das pontuações atribuídas pelos 1080 clientes é ____**III**____ .

Os resultados obtidos estão organizados no gráfico circular ____**IV**____ , no qual se apresenta a amplitude, em graus, de um dos sectores.

I	II	III	IV
a) 1	**a)** 31	**a)** 10	**a)** 
b) 3	**b)** 29	**b)** 9	**b)** 
c) 6	**c)** 27	**c)** 8	**c)** 

*** 7.2.** Analisados os resultados obtidos numa outra amostra composta por 1000 clientes da empresa LZD, conclui-se que 723 são clientes Promotores.

Admita que os clientes Detratores representam 8% da amostra.

Determine, para esta amostra, o número mínimo de clientes Neutros que teriam de passar a Promotores para que a empresa LZD se classificasse na Zona de excelência, de acordo com o resultado do NPS obtido.

8. Foram analisados 500 formulários preenchidos pelos turistas que embarcaram num navio de cruzeiro.

8.1. Concluiu-se que:

- 200 turistas estão em lua de mel;
- dos turistas que estão em lua de mel, metade está instalada numa *suite*;
- dos turistas que não estão em lua de mel, a quinta parte não está instalada numa *suite*.

Escolhe-se ao acaso um desses 500 formulários.

Determine a probabilidade de o formulário escolhido pertencer a um turista que não está em lua de mel, sabendo-se que está instalado numa *suite*.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

*** 8.2.** Admita que a idade dos 500 turistas cujos formulários foram analisados segue uma distribuição normal de valor médio 51 anos.

Admita ainda que a probabilidade de um desses turistas, selecionado ao acaso, ter uma idade:

- inferior a 44 anos é igual a 0,32;
- compreendida entre 41 e 58 anos é igual a 0,42.

Determine quantos dos 500 turistas é de esperar que tenham uma idade compreendida entre 41 e 44 anos.

9. A empresa LZD estudou o tempo, em minutos, necessário para o embarque de turistas nos seus navios de cruzeiro.

Para construir um intervalo de confiança para o tempo médio necessário para o embarque de turistas, constituiu uma amostra aleatória de 256 turistas que se encontravam a bordo dos seus vários navios, tendo estes indicado o tempo decorrido até ao seu embarque.

Na Figura 5, apresentam-se os dados recolhidos, organizados em classes.

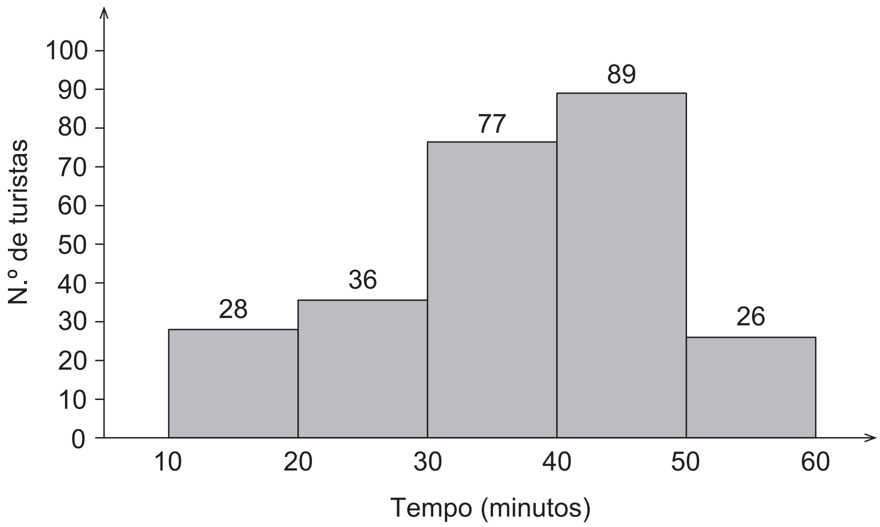


Figura 5

Determine um intervalo de confiança a 95% para o valor médio do tempo necessário, em minutos, para o embarque de turistas nos navios de cruzeiro da empresa LZD.

Na sua resposta, apresente a média do tempo necessário para o embarque dos turistas inquiridos, o valor do desvio padrão e os valores dos extremos do intervalo, arredondados às décimas.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**6.2.**	**6.3.**	**7.1.2.**	**7.2.**	**8.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	14	14	20	18	14	14	14	20	18	**146**

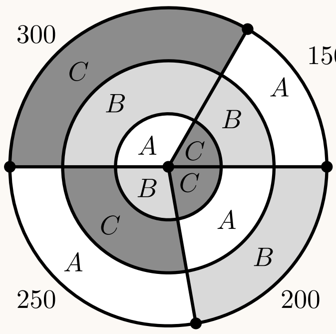
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**5.**	**6.1.**	**7.1.1.**	**8.1.**	**9.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos					**54**
TOTAL						**200**

Prova 835

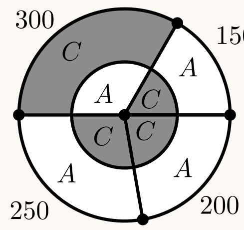
2.ª Fase

1. Aplicando o método descrito, temos:

- Número de votos necessário para obter maioria absoluta: $\dfrac{900}{2}+1=451$;
- observando o número de votos em cada empregado, como primeira preferência, verifica-se que nenhum deles obtém a maioria absoluta (o empregado mais votado foi a Ana com 300 votos);
- o empregado com menor número de votos foi a Diana com 150 votos;
- reestruturando o diagrama, eliminando a Diana, podemos verificar que:
  - observando o número de votos em cada empregado, como primeira preferência, verifica-se que nenhum deles obtém a maioria absoluta (o empregado mais votado foi o Carlos com $150+200=350$ votos);
  - o empregado com menor número de votos foi a Bernardo com 200 votos;



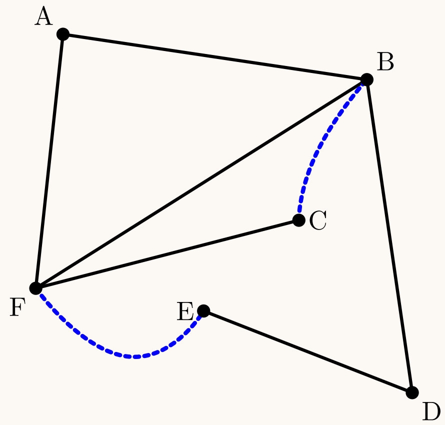
- reestruturando novamente o diagrama, eliminando o Bernardo, podemos verificar que o Carlos obtém a maioria absoluta com $150+250+200=600$ votos;



Logo, as correspondências corretas são:

- **I** $\rightarrow$ **a)**
- **II** $\rightarrow$ **c)**
- **III** $\rightarrow$ **b)**
- **IV** $\rightarrow$ **b)**

2. A partir do grafo apresentado, analisando o grau de cada de cada vértice, temos:



- A - Grau 2
- B - Grau 3
- C - Grau 1
- D - Grau 2
- E - Grau 1
- F - Grau 3

Iniciar e terminar o circuito de manutenção numa mesma estação, percorrendo todos os troços, incluindo os novos, sem repetir nenhum deles, corresponde à definição de um circuito de Euler. Tal só será possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem quatro vértices com grau ímpar: C e E (grau 1) e F e B (grau 3).

Assim, o número mínimo de troços pedonais a construir é 2, correspondendo a novas arestas no grafo que liguem os vértices de grau ímpar, para que passem a ter grau par e assim para que seja possível definir circuitos de Euler.

Resposta: **Opção B**

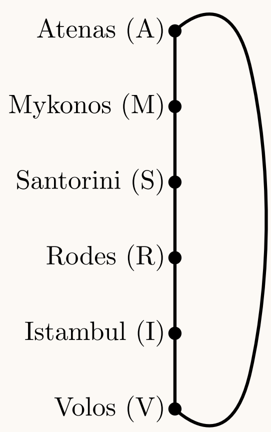
3. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas:

I - Aresta M - S, peso 2h30 (menor peso)
II - Aresta R - S, peso 2h40
III - Aresta A - M, peso 2h50
IV - Aresta A - V, peso 4h40
(não se considera a aresta M - V, porque três arestas se iriam encontrar no vértice M)
(não se considera a aresta S - V, porque três arestas se iriam encontrar no vértice S)
(não se considera a aresta R - V, porque formaria um percurso fechado que não incluia todos os vértices)
(não se considera a aresta A - S, porque três arestas se iriam encontrar no vértice A)
(não se considera a aresta M - R, porque três arestas se iriam encontrar no vértice M)
V - Aresta I - V - peso 14h50
VI - Aresta I - R - peso 15h30

Desta forma, apresenta-se a seguir um grafo semelhante ao que poderá terá sido construído pela Luísa e um percurso que a Luísa poderá ter definido, com início e fim na cidade de Atenas:

Atenas $\rightarrow$ Mykonos $\rightarrow$ Santorini $\rightarrow$ Rodes $\rightarrow$ Istambul $\rightarrow$ Volos $\rightarrow$ Atenas

(o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).



Desta forma é possível verificar que a Luísa não pode visitar os locais pela mesma ordem seguida pelos pais.

4. Como o José atribui à parte com cogumelos o dobro do valor monetário que atribui à parte com azeitonas, o valor da *pizza* pode ser dividido em 3 terços (2 terços para a parte com cogumelos e 1 terço para a parte com azeitonas). Logo, o valor da *pizza* pode ser dividido em:

- parte dos cogumelos (V_C): $\frac{2}{3} \times 42 = 28$ euros (correspondente a um setor de 180°)
- parte das azeitonas (V_A): $\frac{1}{3} \times 42 = 14$ euros (correspondente a um setor de 180°)

Assim, relacionado o valor monetário de cada uma das partes da porção P_1 como o valor total de cada uma das partes da *pizza*, temos:

- parte dos cogumelos: $\frac{V_C}{28} = \frac{135}{180} \Leftrightarrow V_C = \frac{135 \times 28}{180} \Leftrightarrow V_C = 21$ euros
- parte das azeitonas: $\frac{V_A}{14} = \frac{45}{180} \Leftrightarrow V_A = \frac{45 \times 14}{180} \Leftrightarrow V_A = 3{,}5$ euros

Desta forma, temos que e o valor monetário atribuído pelo José à porção P_1, é:

$$V_C + V_A = 21 + 3{,}5 = 24{,}5 \text{ euros}$$

5. De acordo com os dados das tabelas 2 e 3, podemos determinar o valor total anual (sem desconto) a pagar pelos elementos do agregado familiar do Tiago:

Elemento do agregado familiar	**Idade (em anos)**	**Prémios totais anuais (em euros)**
Tiago	50 (Dos 46 aos 50)	531,08
Alice	44 (Dos 41 aos 45)	466,18
Beatriz	14 (Dos 11 aos 20)	241,48
Nuno	12 (Dos 11 aos 20)	241,48
	Soma:	1480,22

De acordo com a tabela 4, o desconto a aplicar para um conjunto de 4 pessoas seguradas é 11%, pelo que o valor do desconto, é:

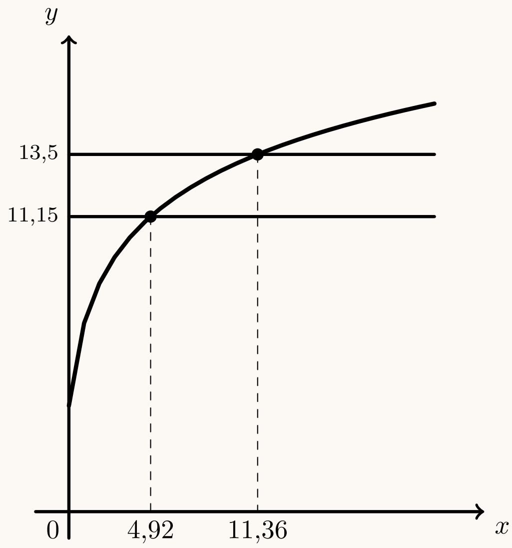
$$1480{,}22 \times 0{,}11 = 162{,}8242$$

E assim, temos que o valor anual, em euros, que o mediador de seguros terá apresentado para o seguro de saúde de todo o agregado familiar do Tiago, com arredondamento às centésimas, é:

$$1480{,}22 - 162{,}8242 \approx 1317{,}40$$

6.

6.1. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do saldo A da conta-corrente ($y = 4 + 3\ln(2x+1)$) e das retas correspondente aos 11,15 e 13,5 milhões de euros ($y = 11{,}15$ e $y = 13{,}5$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $0 \leq x \leq 22$, que se encontram reproduzidos na figura ao lado.



Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção do modelo com cada uma das retas, obtemos o valores arredondados (às centésimas) das abcissas dos pontos de interseção, ou seja, o valor correspondente ao tempos em que o saldo era 11,15 e 13,5 milhões de euros, ou seja, os pontos de coordenadas $(4{,}92\,;\,11{,}5)$ e $(11{,}36\,;\,13{,}5)$.

Assim, o período de tempo em ocorreu o maior investimento em publicidade para promover o itinerário A, durou $11{,}36 - 4{,}92 = 6{,}44$ anos a que correspondem 6 anos completos.

6.2. Relativamente ao valor do saldo A, temos que:

- no inicio do ano 200 era: $A(0) = 4 + 3\ln(2 \times 0 + 1) = 4$ milhões de euros;
- no final do primeiro ano, era: $A(1) = 4 + 3\ln(2 \times 1 + 1) \approx 7{,}2958$ milhões de euros ;
- durante o primeiro ano registou um aumento de: $A(1) - A(0) \approx 7{,}2958 - 4 \approx 3{,}2958$ milhões de euros .

Assim, o aumento em percentagem, a registado no primeiro ano é:

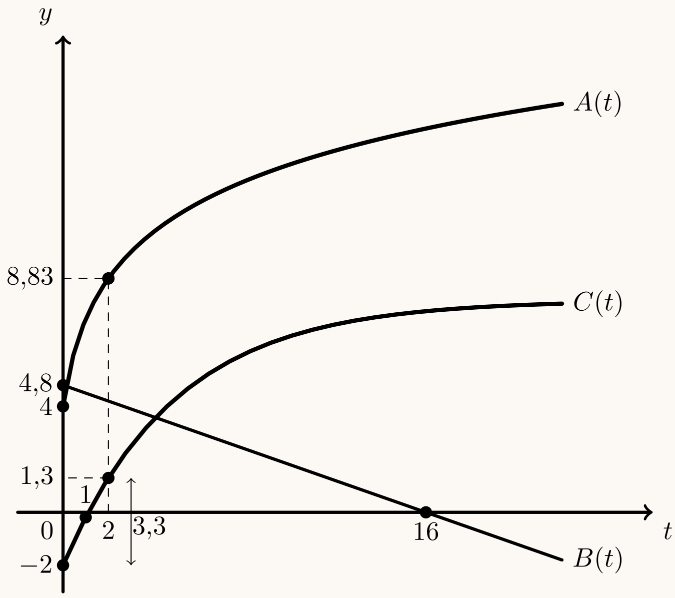
$$\frac{a}{3{,}2958} = \frac{100}{4} \Leftrightarrow a = \frac{100 \times 3{,}2958}{4} \Leftrightarrow a = 82{,}395 \Rightarrow a \approx 82\%$$

Resposta: **Opção D**

6.3. Representando na calculadora gráfica os gráficos dos três modelos, numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $0 \leq x \leq 22$, obtemos os gráficos reproduzidos na figura seguinte.

Da observação dos gráficos e usando as diferentes ferramentas da calculadora gráfica, podemos estabelecer as seguintes correspondências:

- **(b) - (1)** o saldo B tem vindo a diminuir;
- **(b) - (2)** o saldo B era o que tinha maior valor no inicio do ano 2000;
- **(c) - (3)** o saldo C era o único com valor negativo no início de 2001;
- **(a) - (4)** o saldo A foi o único com valor sempre positivo;
- **(c) - (5)** o saldo C nos dois primeiros anos (entre 2000 e 2002) aumentou aproximadamente 3 milhões de euros;
- **(b) - (6)** o saldo B era nulo no início de 2016;
- **(a) - (7)** o saldo A era o que apresentava maior valor no início de 2002.



Resposta: **(a) - 4,7**; **(b) - 1,2,6** e **(c) - 3,5**

7.

7.1.

7.1.1. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos "Pontos", e noutra lista os valores correspondentes do "N.º de clientes"como as respetivas frequências absolutas simples, temos:

Pontos	**N.º de clientes Freq. absoluta simples**
0	0
1	34
2	25
3	9
4	0
5	22
6	30
7	124
8	170
9	369
10	297

Calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos o valor da média:

$$\overline{x} \approx 8{,}26$$

Para uma classificação do grau de satisfação na "Zona de excelência", o valor da média das pontuações deveria ser igual ou superior a 9 pontos, o que não acontece, usando este indicador.

Calculando o NPS, temos:

- total de Promotores: $369 + 297 = 666$
- total de Detratores: $0 + 34 + 25 + 9 + 0 + 22 + 30 = 120$
- percentagem de Promotores: $\frac{p}{666} = \frac{100}{1080} \Leftrightarrow p = \frac{100 \times 666}{1080} \Rightarrow p \approx 61{,}67\%$
- percentagem de Detratores: $\frac{p}{120} = \frac{100}{1080} \Leftrightarrow p = \frac{100 \times 120}{1080} \Rightarrow p \approx 11{,}11\%$
- $NPS = 61{,}67 - 11{,}11 = 50{,}56\%$

De acordo com a tabela, o valor do NPS (50 a 74) corresponde a uma classificação do grau de satisfação na "Zona de qualidade"e não na "Zona de excelência", de acordo com este indicador.

7.1.2. Observando os dados da tabela anterior e o valor da mediana obtida com recurso à calculadora gráfica, temos:

- Moda das pontuações dos Detratores: $\hat{x} = 1$
- Percentagem de clientes Neutros: $\frac{n}{124+170} = \frac{100}{1080} \Leftrightarrow n = \frac{100 \times 294}{1080} \Rightarrow n \approx 27\%$
- Mediana das pontuações dos 1080 clientes: $\tilde{x} = 9$
- Amplitude do setor circular relativo aos Promotores (666 num total de 1080):
  $\frac{s}{666} = \frac{360}{1080} \Leftrightarrow s = \frac{360 \times 666}{1080} \Leftrightarrow s = 222°$

E assim, vem que:

A moda das pontuações atribuídas pelos Detratores é **1**.
Os clientes Neutros representam, com arredondamento às unidades, aproximadamente **27** % da amostra.
A mediana das pontuações atribuídas pelos 1080 clientes é **9**.
Os resultados obtidos estão organizados no gráfico circular **222**, no qual se apresenta a amplitude, em graus, de um dos sectores.

Logo, as correspondências corretas são:

- **I** $\rightarrow$ **a)**
- **II** $\rightarrow$ **c)**
- **III** $\rightarrow$ **b)**
- **IV** $\rightarrow$ **c)**

7.2. Como os 723 clientes Promotores correspondem a $\frac{723 \times 100}{1000} = 72{,}3\%$ do total da amostra, podemos determinar o valor do NPS desta amostra:

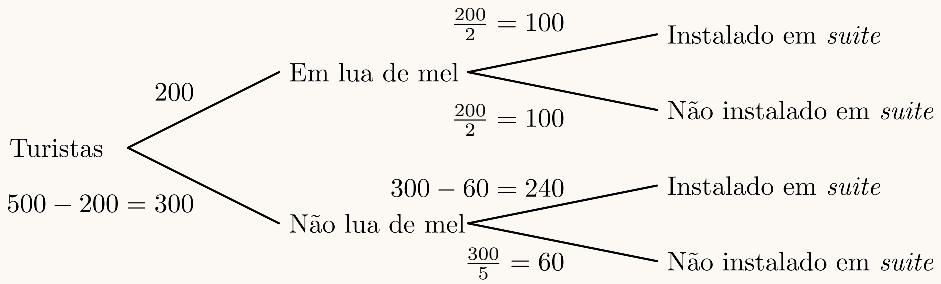
$$NPS = 72{,}3 - 8 = 64{,}3\%$$

Para que a amostra permitisse classificar a empresa na Zona de excelência, este valor deveria ser, pelo menos, 75%, ou seja, seria necessário uma percentagem adicional de Promotores de $75 - 64{,}3 = 10{,}7\%$, a que corresponde o número mínimo de clientes Neutros, que teriam de passar a Promotores, de:

$$1000 \times \frac{10{,}7}{100} = 1000 \times 0{,}107 = 107$$

8.

8.1. Esquematizando os valores conhecidos num diagrama em árvore, temos:



Assim, temos que:

- total de turistas que estão instalados numa *suite*: $100 + 240 = 340$
- turistas instalados em *suite* que não estão em lua de mel: 240

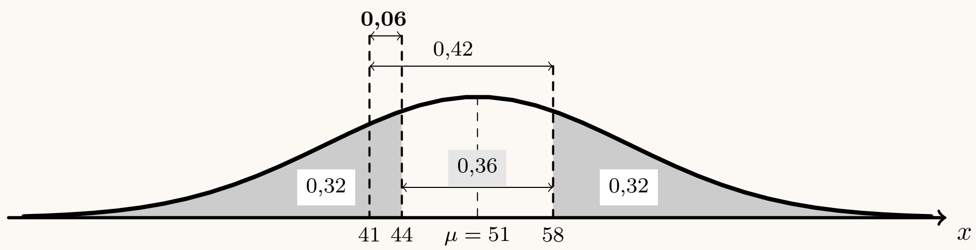
Logo, calculando a probabilidade de o formulário escolhido pertencer a um turista que não está em lua de mel, sabendo-se que está instalado numa suite, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, vem:

$$\frac{240}{340} = \frac{12}{17}$$

8.2. Considerando a variável aleatória X como a idade dos turistas a que preencheram os formulários da amostra, temos que $\mu = 51$.

Assim, como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio, e 44 e 51 são valores equidistantes do valor médio, temos que:

- $P(X \geq 58) = P(X \leq 44) = 0{,}32$
- $P(44 \leq X \leq 58) = 1 - P(X \leq 44) - P(X \geq 58) = 1 - 0{,}32 - 0{,}32 = 0{,}36$
- $P(41 \leq X \leq 44) = P(41 \leq X \leq 44) - P(44 \leq X \leq 58) = 0{,}42 - 0{,}36 = 0{,}06$



Logo, dos 500 turistas cujos formulários foram analisados, espera-se que tenham uma idade compreendida entre 41 e 44 anos, 6%, ou seja:

$$500 \times 0{,}06 = 30$$

9. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores relativos à marca de classe de cada uma das classes do histograma, e noutra lista os valores correspondentes às respetivas frequências absolutas absolutas simples, temos:

Marca de classe	**Freq. absoluta simples**
15	28
25	36
35	77
45	89
55	26

Calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos o valor da média e do desvio padrão da amostra, arredondados às décimas:

$$\overline{x} \approx 36{,}9 \text{ e } s \approx 11{,}4$$

Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, considerando ainda:

- A dimensão da amostra: $n = 256$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para o tempo necessário para o embarque $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} \, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às décimas, temos:

$$\left] 36{,}9 - 1{,}960 \times \frac{11{,}4}{\sqrt{256}} \, ; \, 36{,}9 + 1{,}960 \times \frac{11{,}4}{\sqrt{256}} \right[\approx]35{,}5\,;\,38{,}3[$$

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Critérios de Classificação 8 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

As respostas aos itens de seleção podem ser classificadas de forma dicotómica ou por níveis de desempenho, de acordo com os critérios específicos. No primeiro caso, a pontuação só é atribuída às respostas corretas, sendo todas as outras respostas classificadas com zero pontos. No caso da classificação por níveis de desempenho, a cada nível corresponde uma dada pontuação, de acordo com os critérios específicos.

Nas respostas aos itens de seleção, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra ou do número correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Organização e Linguagem Científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).

9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **14 pontos**

I → a) II → c) III → b) IV → b)

Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
3	Completa o texto com as 4 opções corretas.	14
2	Completa o texto com 3 opções corretas.	10
1	Completa o texto com 2 opções corretas.	6

2. .... **14 pontos**

(B)

3. .... **20 pontos**

Apresentar a ordenação das arestas selecionadas .... 6 pontos

Apresentar um grafo que modele a situação .... 8 pontos

Associar os vértices aos locais a visitar .... 2 pontos

Associar as arestas à duração das viagens .... 6 pontos

Apresentar um itinerário possível .... 3 pontos
[Por exemplo: A-M-S-R-I-V-A]

Concluir .... 3 pontos
[A Luísa não poderá visitar os locais pela mesma ordem seguida pelos pais.]

4. .... **18 pontos**

Determinar o valor monetário atribuído pelo José a cada uma das metades da *pizza* .... 6 pontos
[parte com cogumelos – 28 €; parte com azeitonas – 14 €]

Determinar o valor monetário atribuído pelo José à porção P_1 .... 12 pontos

Calcular o valor monetário do sector de amplitude 135º (21 €) .... 5 pontos

Calcular o valor monetário do sector de amplitude 45º $(3{,}5\text{ €})$ .... 5 pontos

Obter o valor monetário da porção P_1 $(24{,}5\text{ €})$ .... 2 pontos

5. .... **18 pontos**

Indicar o prémio anual correspondente a cada membro do agregado familiar ..... 6 pontos
[Tiago – $531,08$ €; Alice – $466,18$ €; Beatriz e Nuno – $241,48$ €]

Calcular o valor do prémio anual para o agregado familiar, sem desconto ($1480,22$ €) .... 3 pontos

Determinar o valor do desconto .... 6 pontos

Identificar a taxa de desconto (11%) .... 2 pontos

Obter o valor do desconto ($162,824$ €) .... 4 pontos

Calcular o valor apresentado ao Tiago ($1317,40$ €) .... 3 pontos

6.1. .... **18 pontos**

Apresentar os gráficos (**ver nota**) .... 8 pontos

Representar graficamente a função A .... 4 pontos

Representar graficamente as retas $y = 11,15$ e $y = 13,5$ .... 2 pontos

Assinalar os pontos de intersecção dos gráficos .... 2 pontos

Apresentar as abcissas dos pontos relevantes ($4,92$; $11,36$) ...... (3 + 3) ...... 6 pontos

Concluir .... 4 pontos
[O maior investimento em publicidade para promover o itinerário A ocorreu durante seis anos completos.]

Nota – Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em um ponto.

6.2. .... **14 pontos**

(D)

6.3. .... **14 pontos**

(a) – **(4)**, **(7)**; **(b)** – **(1)**, **(2)**, **(6)**; **(c)** – **(3)**, **(5)**.

Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
4	Associa corretamente as 7 afirmações aos respetivos saldos.	14
3	Associa corretamente 5 ou 6 afirmações aos respetivos saldos.	11
2	Associa corretamente 3 ou 4 afirmações aos respetivos saldos.	8
1	Associa corretamente 2 afirmações aos respetivos saldos.	5

Nota: Caso o aluno associe o mesmo número a mais do que uma letra, ainda que uma das associações possa estar correta, esta não é considerada para efeitos de classificação.

7.1.1. .... **18 pontos**

Calcular o valor da média das pontuações atribuídas pelos clientes $(8{,}26)$ ... 6 pontos

Indicar que $8{,}26 < 9$ .... 1 ponto

Determinar a percentagem de Promotores $(61{,}67\%)$ .... 4 pontos

Determinar a percentagem de Detratores $(11{,}11\%)$ .... 4 pontos

Determinar o valor do NPS $(50{,}56\%)$ .... 2 pontos

Indicar que $50{,}56 < 75$ .... 1 ponto

7.1.2. .... **14 pontos**

I → a) II → c) III → b) IV → c)

Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
3	Completa o texto com as 4 opções corretas.	14
2	Completa o texto com 3 opções corretas.	10
1	Completa o texto com 2 opções corretas.	6

7.2. .... **20 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar o número mínimo de Promotores para a empresa se classificar na Zona de excelência .... 15 pontos

Escrever $0{,}75 = x - 0{,}08$ (ou equivalente) .... 7 pontos

Determinar o valor de x $(0{,}83)$ .... 3 pontos

Obter o número mínimo de Promotores (830) .... 5 pontos

Obter o valor solicitado (107) .... 5 pontos

2.º Processo

Determinar o número de Detratores (80) .... 5 pontos

Determinar a diferença entre o número de Promotores e o número de Detratores (643) .... 5 pontos

Determinar a diferença mínima entre o número de Promotores e o número de Detratores para a empresa se classificar na Zona de excelência (750) .... 5 pontos

Obter o valor solicitado (107) .... 5 pontos

8.1. .... **18 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Considerem-se os acontecimentos seguintes:

L: «O turista está em lua de mel»

S: «O turista está instalado numa *suite*»

1.º Processo

Calcular o número de turistas que não estão em lua de mel (300) .... 2 pontos

Calcular o número de turistas em lua de mel instalados numa *suite* (100) .... 3 pontos

Calcular o número de turistas que não estão em lua de mel nem estão instalados numa *suite* (60) .... 4 pontos

Calcular o número de turistas que não estão em lua de mel, mas que estão instalados numa *suite* (240) .... 2 pontos

Calcular o número de turistas que estão instalados numa *suite* (340) .... 2 pontos

Calcular $P(\overline{L}\,|\,S)$ $\left(\frac{12}{17}\right)$ .... 5 pontos

2.º Processo

Calcular $P(\overline{L} \cap S)$ .... 8 pontos

- Calcular $P(L)$ $\left(\frac{2}{5}\right)$ .... 2 pontos
- Calcular $P(\overline{L})$ $\left(\frac{3}{5}\right)$ .... 1 ponto
- Escrever $P(\overline{S}\,|\,\overline{L}) = \frac{1}{5}$ .... 1 ponto
- Calcular $P(S|\overline{L})$ $\left(\frac{4}{5}\right)$ .... 2 pontos
- Obter $P(\overline{L} \cap S)$ $\left(\frac{12}{25}\right)$ .... 2 pontos

Calcular $P(S)$ .... 5 pontos

- Escrever $P(S|L) = \frac{1}{2}$ .... 1 ponto
- Calcular $P(L \cap S)$ $\left(\frac{1}{5}\right)$ .... 2 pontos
- Obter $P(S)$ $\left(\frac{17}{25}\right)$ .... 2 pontos

Calcular $P(\overline{L}|S)$ $\left(\frac{12}{17}\right)$ .... 5 pontos

8.2. .... **18 pontos**

Determinar $P(44 < X < 58)$ $(0{,}36)$ .... 9 pontos

Determinar $P(41 < X < 44)$ $(0{,}06)$ .... 5 pontos

Obter o número de turistas que têm uma idade compreendida entre 41 e 44 anos (30) .... 4 pontos

9. .... **18 pontos**

Identificar os valores de n e z para um intervalo de confiança a 95% .... 2 pontos

$n = 256$ .... 1 ponto

$z = 1{,}960$ .... 1 ponto

Determinar o valor de $\overline{x}$ $(36{,}9)$ .... 4 pontos

Determinar o valor de s $(11{,}4)$ .... 4 pontos

Obter o intervalo solicitado $(]35{,}5;\ 38{,}3[)$ .... 8 pontos

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**6.2.**	**6.3.**	**7.1.2.**	**7.2.**	**8.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	14	14	20	18	14	14	14	20	18	**146**

Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**5.**	**6.1.**	**7.1.1.**	**8.1.**	**9.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos					**54**
TOTAL						**200**

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 14 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados.

Formulário

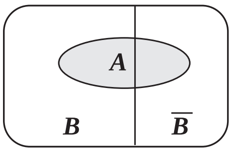
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

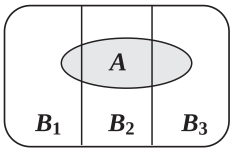
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\quad \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

A Estrada Nacional 2 (EN2) foi incluída no Plano Rodoviário Nacional de 1945. É a mais extensa estrada portuguesa, totalizando 739,26 quilómetros, e a única na Europa que atravessa um país em toda a sua extensão, desde Chaves até Faro, passando por 35 concelhos.

* **1.** A família Silva vai percorrer a EN2 de automóvel e, antes da viagem, decidiu que ia visitar um dos castelos seguintes: castelo de Abrantes (A), castelo de Lamego (L), castelo de Montemor-o-Novo (M) ou castelo de Viana do Alentejo (V).

Para selecionar o castelo a visitar, decidiu-se que cada elemento do agregado familiar atribuía pontos a cada um dos castelos, num total de dez pontos, não podendo atribuir igual número de pontos a castelos distintos.

A Tabela 1 apresenta a distribuição dos 10 pontos realizada por cada elemento da família Silva, de acordo com as suas preferências.

Tabela 1

	A	L	M	V
Carlos	0	5	2	3
Diana	3	1	4	2
Fausto	5	3	0	2
Matilde	3	1	2	4

A escolha do castelo a visitar resultou da aplicação do método seguinte.

- Efetua-se a soma dos pontos atribuídos a cada castelo pelos elementos do agregado familiar e verifica-se se algum dos castelos obtém a maioria absoluta do total de pontos. Caso isso se verifique, será esse o castelo a visitar.
- Se nenhum dos castelos obtiver mais pontos do que os outros todos juntos, o castelo menos pontuado é eliminado da tabela. Caso exista empate entre os castelos menos pontuados, o castelo a eliminar é determinado por sorteio. Uma nova tabela de pontuações é criada, em seguida, com menos uma coluna do que a anterior e os pontos atribuídos por cada elemento do agregado familiar ao castelo eliminado revertem para o castelo, de entre os restantes, ao qual cada um deles atribuiu maior pontuação.
- Os procedimentos anteriores são aplicados à nova tabela de pontuações obtida no ponto anterior, com os pontos já acumulados.
- O processo repete-se até que um dos castelos obtenha maioria absoluta do total de pontos atribuídos.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Por aplicação do método descrito, o primeiro castelo eliminado foi o ___**I**___ , e o segundo foi o ___**II**___ . De entre os restantes castelos, aquele que será visitado será o ___**III**___ , tendo o outro totalizado ___**IV**___ pontos.

I	II	III	IV
a) L **b)** M **c)** V	**a)** L **b)** M **c)** V	**a)** A **b)** L **c)** V	**a)** 18 **b)** 19 **c)** 20

* **2.** O Sr. Augusto é um fornecedor de brindes alusivos à EN2. De momento, dispõe de 200 porta-chaves para entrega imediata a três estabelecimentos: A, B e C.

Na Tabela 2, está registado o número de porta-chaves encomendados ao Sr. Augusto por cada um dos três estabelecimentos.

Tabela 2

Estabelecimentos	**A**	**B**	**C**
N.º de porta-chaves encomendados	350	150	300

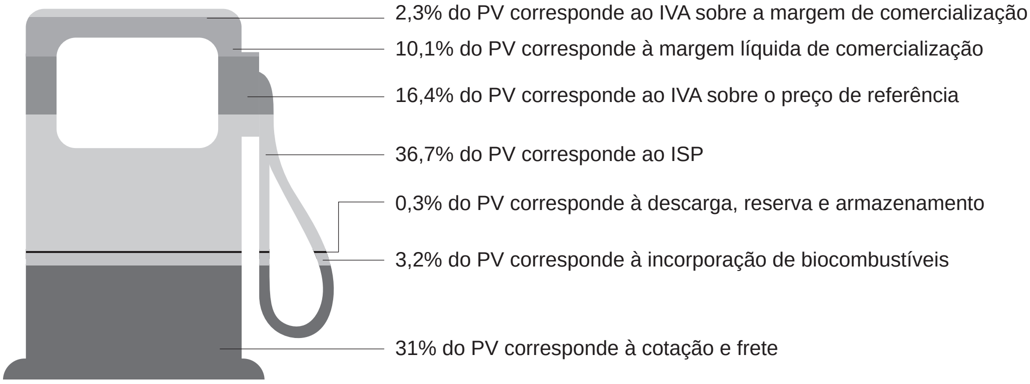
Não conseguindo dar resposta à totalidade das encomendas, o Sr. Augusto optou por distribuir os 200 porta-chaves disponíveis pelos três estabelecimentos, de acordo com o método a seguir descrito.

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo o número total de porta-chaves encomendados pelo número de porta-chaves disponíveis para entrega.
- Calcula-se a quota padrão para cada um dos estabelecimentos, dividindo o número de porta-chaves encomendados por cada estabelecimento pelo divisor padrão.
- Atribui-se a cada estabelecimento um número de porta-chaves igual à parte inteira da sua quota padrão.
- Caso ainda fiquem porta-chaves por distribuir, atribuem-se os porta-chaves que restam, um por estabelecimento, sucessivamente, por ordem decrescente das partes decimais das suas quotas padrão, até não restarem porta-chaves para distribuir.
- Se houver dois estabelecimentos cujas quotas padrão apresentem a mesma parte decimal, o último porta-chaves é atribuído ao estabelecimento com o menor número de porta-chaves atribuídos até esse momento.

Determine o número de porta-chaves distribuídos pelo Sr. Augusto a cada estabelecimento, aplicando o método descrito.

3. O preço que o consumidor paga pelos combustíveis resulta da soma de várias parcelas. Algumas delas correspondem a impostos, a saber, o imposto sobre os produtos petrolíferos e energéticos (ISP), e o imposto sobre o valor acrescentado (IVA), que é aplicado tanto à margem de comercialização como ao preço de referência.

Numa determinada semana, foi possível apurar a percentagem do preço de venda de gasolina (PV) correspondente a cada uma das parcelas que o compõem. Na Figura 1, está indicada a percentagem de cada uma das parcelas em relação ao preço de venda de cada litro de gasolina, nessa semana.



Fonte: www.deco.proteste.pt/familia-consumo/orcamento-familiar/noticias/como-calculado-preco-combustiveis (consultado em outubro de 2023). (Adaptado)

Figura 1

Nessa semana, a família Silva viajou pela EN2, percorrendo um total de 3125 km no seu automóvel, que gasta, em média, 4,8 litros de gasolina por cada 100 km.

Admita que toda a gasolina necessária para a viagem foi adquirida durante essa semana e que o preço de venda de cada litro de gasolina foi sempre 1,77 €.

Do valor total gasto em gasolina pela família Silva, nessa semana, uma parte destinou-se a impostos.

Determine o valor, em euros, da parte destinada a impostos, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve quatro casas decimais.

4. Durante as pausas na viagem ao longo da EN2, alguns viajantes aproveitam para se divertir com jogos.

O Manuel inventou um jogo, criando peças divididas ao meio. Nas extremidades de cada peça, inscreveu uma das letras, A, B, C, D, E ou F.

A Figura 2 apresenta a totalidade das peças criadas pelo Manuel.

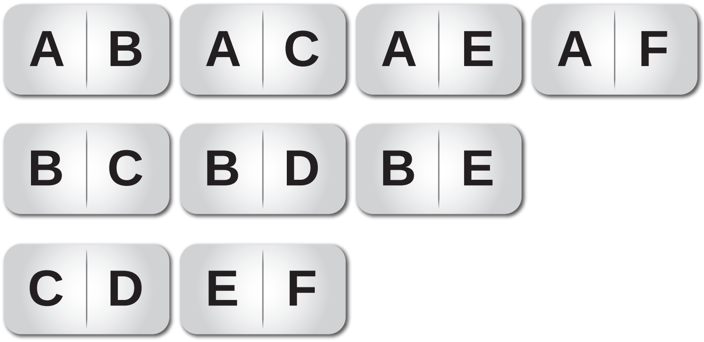


Figura 2

O objetivo deste jogo é criar uma sequência:

– formada por todas as peças, independentemente da primeira peça a ser jogada;
– em que duas peças adjacentes têm de ter letras iguais nas extremidades de contacto, como se exemplifica na Figura 3.

Figura 3

Para averiguar se as peças criadas eram suficientes para formar uma sequência nas condições descritas, o Manuel decidiu construir um grafo.

No grafo construído, cada vértice representa uma das letras utilizadas nas peças criadas pelo Manuel, e cada aresta representa uma peça. Assim, por exemplo, a aresta AB representa a existência da peça em que uma das extremidades tem a letra A e a outra extremidade tem a letra B.

Depois de construir o grafo, o Manuel concluiu que faltava uma peça ao jogo.

Indique as letras que devem estar inscritas nas extremidades da peça em falta.

Na sua resposta, apresente:

– um grafo semelhante ao que o Manuel terá construído;
– uma razão que justifique a impossibilidade de atingir o objetivo do jogo, utilizando apenas as peças da Figura 2.

5. No verão de 2001, um concelho atravessado pela EN2 foi afetado por um incêndio. Visando a criação de uma floresta com maior biodiversidade e mais resistente a incêndios, uma equipa especializada promoveu, ao longo de alguns anos, um projeto de reflorestação daquela zona, plantando diversas espécies de árvores, a partir de 1 de janeiro de 2002.

Admita que o número de árvores, em milhares, existentes naquela região, decorridos t anos após o dia 1 de janeiro de 2002, é bem aproximado pelo modelo

$$A(t) = \frac{66}{1+32e^{-0,97t}}, \qquad t \geq 0$$

* **5.1.** A expressão $A(7) - A(5) > 10$ significa que:

(A) Entre 1 de janeiro de 2005 e 1 de janeiro de 2007, o aumento do número de árvores foi superior a 10 000.

(B) Entre 1 de janeiro de 2007 e 1 de janeiro de 2009, o aumento do número de árvores foi superior a 10 000.

(C) Entre 1 de janeiro de 2005 e 1 de janeiro de 2007, o aumento do número de árvores foi superior a 10.

(D) Entre 1 de janeiro de 2007 e 1 de janeiro de 2009, o aumento do número de árvores foi superior a 10.

5.2. No ano em que, pela primeira vez, a 1 de janeiro, o número de árvores foi superior a trinta vezes o número de árvores existentes a 1 de janeiro de 2002, a equipa especializada informou a população de que o número de árvores era aproximadamente igual ao existente antes de ocorrer o incêndio.

Em que ano foi divulgada essa informação?

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas.

* **5.3.** Ao longo de cada ano, o número de árvores, A, foi evoluindo graças não só à quantidade de árvores plantadas ao abrigo do projeto de reflorestação, mas também graças à variação no número de árvores devida a fatores naturais.

Admita que, durante o ano, o aumento do número de árvores devido a fatores naturais corresponde a 0,21% do número de árvores existentes a 1 de janeiro desse ano.

Qual foi, aproximadamente, o número de árvores que se plantou entre 1 de janeiro de 2011 e 1 de janeiro de 2012?

(A) 73 **(B)** 138 **(C)** 65 **(D)** 211

6. Num estabelecimento comercial, estudou-se o valor gasto, em euros, por um determinado número de clientes na compra de lembranças alusivas à EN2.

Na Figura 4, estão parcialmente registados os dados recolhidos, junto desses clientes, num histograma de frequências absolutas simples e num histograma de frequências relativas acumuladas, em percentagem. Em ambos os gráficos, os clientes foram agrupados nas classes $]0,10]$, $]10,20]$, ... , $]50,60]$, de acordo com os valores gastos, em euros, por cada um deles.

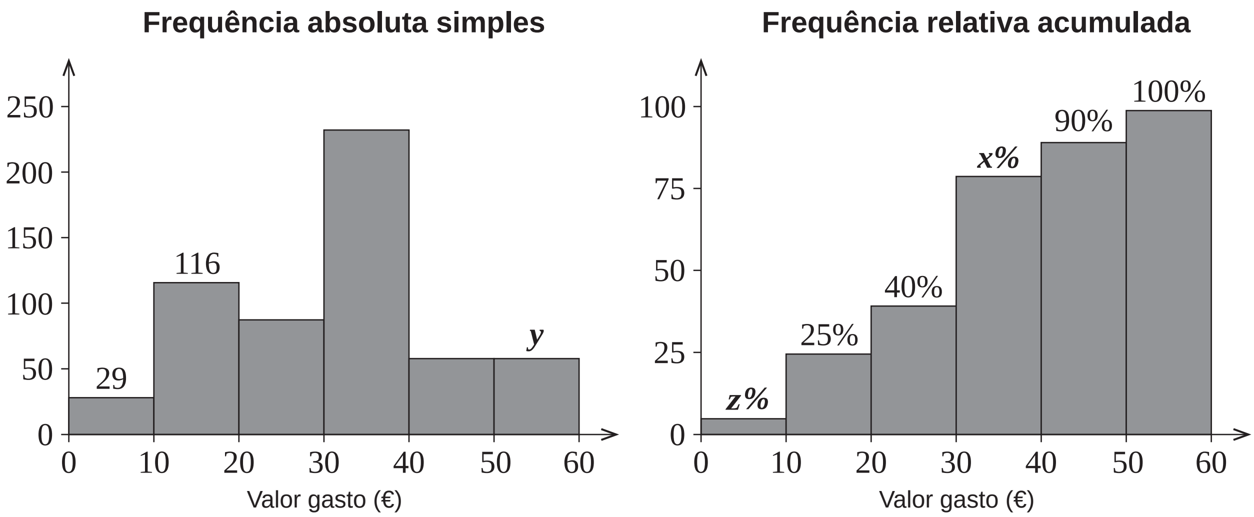


Figura 4

Como se pode observar no histograma de frequências absolutas simples, as classes $]40,50]$ e $]50,60]$ têm a mesma frequência.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

De acordo com a informação disponível na Figura 4, ___**I**___ dos clientes gastaram na compra de lembranças alusivas à EN2 um valor, em euros, pertencente à classe $]20,30]$. O valor de z é ___**II**___ , o valor de x é ___**III**___ , e o valor de y é ___**IV**___ .

I	II	III	IV
a) 15%	**a)** 5	**a)** 75	**a)** 46
b) 25%	**b)** 6	**b)** 80	**b)** 52
c) 40%	**c)** 7	**c)** 85	**c)** 58

7. Numa campanha de sensibilização rodoviária realizada na EN2, 400 condutores responderam a um questionário. As respostas obtidas foram organizadas, de acordo com o tipo de veículo conduzido: automóveis ligeiros, motociclos ou autocaravanas.

Na Figura 5, apresentam-se os resultados obtidos relativos às idades, em anos, dos inquiridos, organizados nas classes $[18, 28[$, $[28, 38[$, $[38, 48[$ e $[48, 58[$.

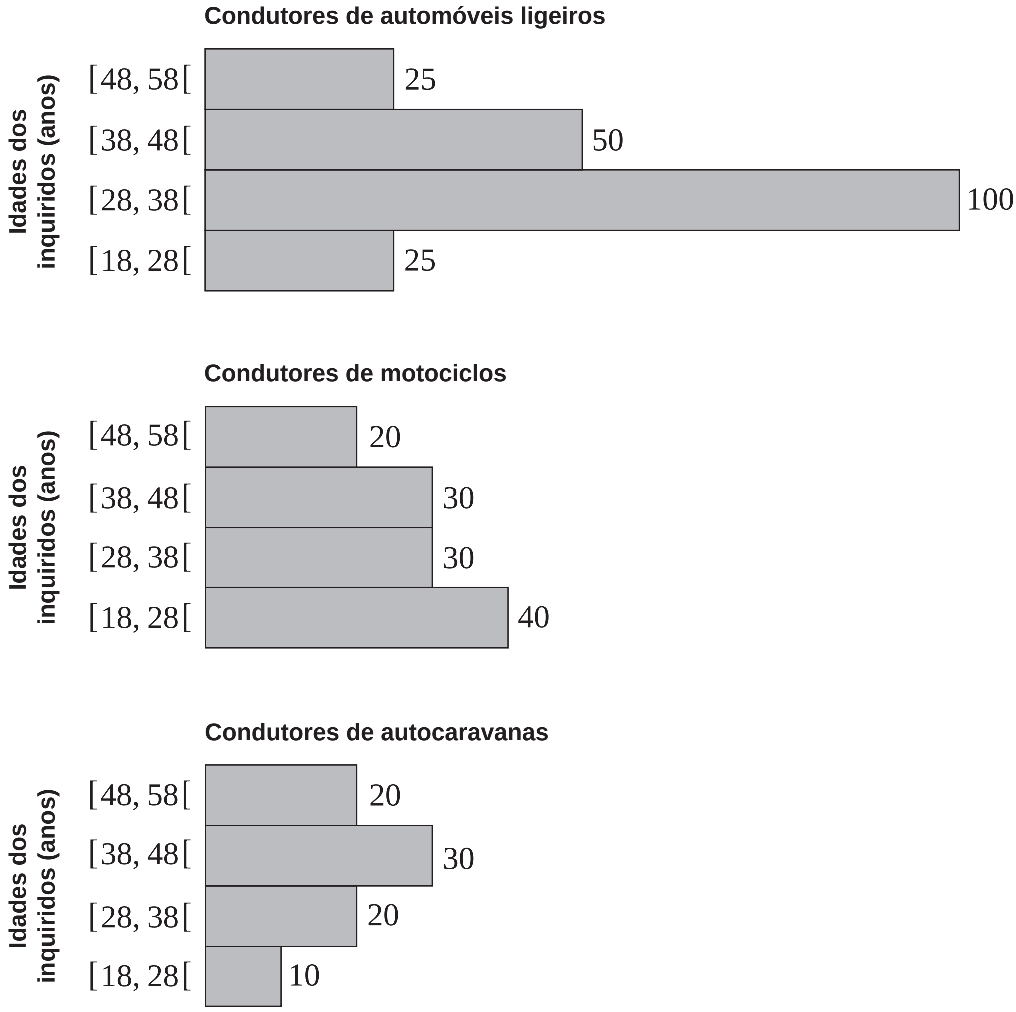


Figura 5

7.1. Apresente uma tabela de frequências absolutas simples e de frequências relativas simples para as idades, em anos, dos 400 condutores inquiridos, sem discriminação do tipo de veículo.

Na sua resposta:

– mantenha as classes utilizadas;

– apresente as frequências relativas simples, em percentagem.

7.2. Na Figura 6, apresentam-se os resultados relativos ao tempo de condução habitual, em horas, em viagens longas, até fazer a primeira pausa, de acordo com as respostas dadas pelos condutores ao questionário.

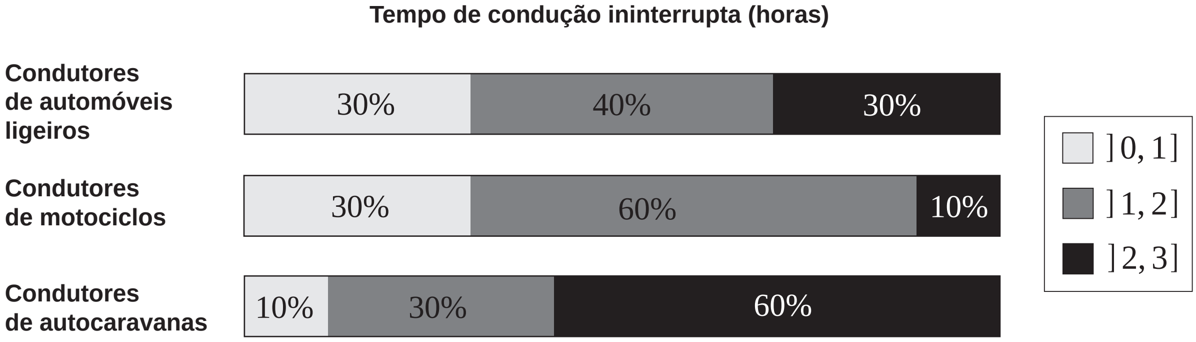


Figura 6

Atendendo aos dados apresentados na Figura 5 e na Figura 6, associe a cada tipologia de condutor apresentada na Coluna **I** as afirmações da Coluna **II** que lhe correspondem.

Cada um dos números, de 1 a 7, deve ser associado apenas a uma letra, e todos os números devem ser utilizados.

Escreva na folha de respostas cada uma das letras da Coluna **I**, seguida do(s) número(s) correspondente(s) da Coluna **II**.

COLUNA I	COLUNA II
(a) Condutores de automóveis ligeiros **(b)** Condutores de motociclos **(c)** Condutores de autocaravanas	**(1)** São os mais numerosos. **(2)** São os menos numerosos de entre os que perfazem mais de 2 horas de condução ininterrupta. **(3)** São aqueles em que mais de metade perfaz um tempo de condução ininterrupta superior a 2 horas. **(4)** São 36 os que perfazem um tempo de condução ininterrupta inferior, ou igual, a 1 hora. **(5)** São aqueles cuja classe modal das suas idades, em anos, é $[18, 28[$. **(6)** São aqueles cujo primeiro quartil do tempo de condução ininterrupta, em horas, se situa em $]1, 2]$. **(7)** São aqueles cuja mediana das suas idades, em anos, se situa em $[38, 48[$.

8. A partir de março de 2020, as matrículas atribuídas em Portugal passaram a ser compostas por sequências formadas por duas letras, dois algarismos e duas letras.

Na Figura 7, apresenta-se uma matrícula possível.

Figura 7

Considere apenas as matrículas que têm na parte numérica o número 78 e cujas letras se podem selecionar ao acaso de entre as 10 letras do conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$.

* **8.1.** Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Escolhe-se ao acaso uma das matrículas que é possível formar nas condições dadas.

Para determinar a probabilidade de obter uma matrícula com apenas uma vogal, que não se pode repetir, o Manuel desenvolveu o raciocínio seguinte.

Uma vez que a parte numérica da matrícula (78) já se encontra definida, o Manuel dedicou a sua atenção à sequência de letras que constitui a matrícula.

O Manuel começou por pensar que a única vogal só poderia ser escolhida de entre as ___**I**___ disponíveis. De seguida, percebeu que existem ___**II**___ formas de escolher as restantes três letras. Concluiu, portanto, que o número de casos favoráveis para determinar a probabilidade solicitada seria o ___**III**___ do produto dos dois valores anteriores.

Quanto ao número de casos possíveis, o Manuel obteve ___**IV**___ casos.

I	II	III	IV
a) 2	**a)** $7 \times 6 \times 5$	**a)** dobro	**a)** $10 \times 9 \times 8 \times 7$
b) 3	**b)** 7^3	**b)** triplo	**b)** 10^4
c) 5	**c)** $7 \times 6 \times 5 \times 3$	**c)** quádruplo	**c)** $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 4$

* **8.2.** Algumas das matrículas nas condições iniciais começam e terminam com a letra A, e as restantes letras que as compõem são diferentes entre si e são diferentes da letra A.

Quantas são essas matrículas?

(A) 64 **(B)** 72 **(C)** 81 **(D)** 95

9. Fez-se um inquérito aos alunos de uma escola secundária com o intuito de saber se gostariam de percorrer a EN2 e se tinham carta de condução.

Na Figura 8, apresentam-se os resultados obtidos. Como se pode observar, os dados do gráfico circular situado à direita dizem respeito apenas aos alunos que têm carta de condução.

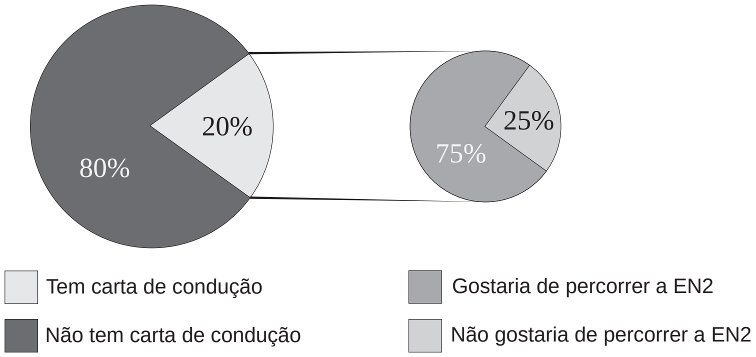


Figura 8

Sabe-se ainda que 50% dos alunos questionados gostariam de percorrer a EN2.

Escolhe-se, de forma aleatória, um dos alunos questionados que gostaria de percorrer a EN2.

Determine a probabilidade de esse aluno não ter carta de condução.

10. A maioria dos viajantes opta por percorrer a EN2 em diversas etapas.

Num clube de motociclismo, pretende-se organizar uma viagem para percorrer toda a extensão da EN2. Numa das reuniões de preparação da viagem, alguém proferiu a afirmação seguinte.

«Em média, nos últimos anos, percorremos toda a EN2 em 6 etapas.»

O Fred, que pertence ao clube, duvidou da afirmação. Falou com 225 motociclistas do clube, escolhidos aleatoriamente, que já tinham realizado a viagem, tendo verificado que, em média, estes a tinham realizado em 4,5 etapas, e que o desvio padrão amostral era 1,2. Por fim, construiu um intervalo de confiança a 99% para o valor médio do número de etapas realizadas.

Conclua, construindo um intervalo de confiança nas mesmas condições do Fred, se este tinha razão para duvidar da afirmação proferida no clube de motociclismo.

Na sua resposta, apresente o intervalo de confiança construído, com os extremos arredondados às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**4.**	**5.1.**	**5.3.**	**6.**	**7.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	15	19	19	15	15	15	15	15	15	**143**

Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**3.**	**5.2.**	**7.1.**	**9.**	**10.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 19 pontos					**57**
TOTAL						**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 835

1.ª Fase

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Critérios de Classificação

8 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

As respostas aos itens de seleção podem ser classificadas de forma dicotómica ou por níveis de desempenho, de acordo com os critérios específicos. No primeiro caso, a pontuação só é atribuída às respostas corretas, sendo todas as outras respostas classificadas com zero pontos. No caso da classificação por níveis de desempenho, a cada nível corresponde uma dada pontuação, de acordo com os critérios específicos.

Nas respostas aos itens de seleção, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra ou do número correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Linguagem Científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por etapas a classificação, a atribuir à resposta, resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de classificação definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).

10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico.

Nota – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **15 pontos**

I → b)   II → a)   III → c)   IV → b)

Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
3	Completa o texto com as 4 opções corretas.	15
2	Completa o texto com 3 opções corretas.	11
1	Completa o texto com 2 opções corretas.	7

2. .... **19 pontos**

Calcular o divisor padrão (4) .... 4 pontos

Calcular as quotas padrão .... (2 + 2 + 2) .... 6 pontos
[A – 87,5; B – 37,5; C – 75]

Atribuir a parte inteira das quotas padrão .... (1 + 1 + 1) .... 3 pontos
[A – 87; B – 37; C – 75]

Calcular a soma das partes inteiras das quotas padrão (199) .... 1 ponto

Atribuir o porta-chaves restante ao estabelecimento B .... 3 pontos

Apresentar a distribuição final dos 200 porta-chaves .... 2 pontos
[A – 87 porta-chaves; B – 38 porta-chaves; C – 75 porta-chaves]

3. .... **19 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Calcular o número de litros de gasolina necessários $(150\ \text{l})$ .... 4 pontos

Calcular o valor total que a família Silva gastou em gasolina $(265{,}50\ €)$ .... 2 pontos

Calcular a percentagem destinada a impostos $(55{,}4\%)$ .... 6 pontos

Calcular o valor destinado a impostos $(147{,}09\ €)$ .... 7 pontos

2.º Processo

Calcular o número de litros de gasolina necessários $(150\ \text{l})$ .... 4 pontos

Calcular o valor total que a família Silva gastou em gasolina $(265{,}50\ €)$ .... 2 pontos

Calcular o valor destinado ao IVA sobre a margem de comercialização $(6{,}1065\ €)$ ... 4 pontos

Calcular o valor destinado ao IVA sobre o preço de referência $(43{,}542\ €)$ .... 4 pontos

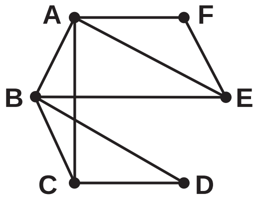
Calcular o valor destinado ao ISP $(97{,}4385\ €)$ .... 4 pontos

Calcular o valor destinado a impostos $(147{,}09\ €)$ .... 1 ponto

4. .... **19 pontos**

Apresentar um grafo semelhante ao que o Manuel terá construído .... 12 pontos

Por exemplo:



Apresentar uma razão que justifique a impossibilidade de atingir o objetivo do jogo .. 3 pontos
[Existem vértices de grau ímpar.]

Indicar as letras que devem estar inscritas nas extremidades da peça em falta (C e E) .... 4 pontos

5.1. .... **15 pontos**

(B)

5.2. .... **19 pontos**

Identificar $t = 0$ .... 1 ponto

Determinar $A(0)$ (2) .... 3 pontos

Determinar $30 \times A(0)$ (60) .... 2 pontos

Apresentar os gráficos (**ver nota**) .... 7 pontos

- Representar graficamente a função A .... 4 pontos
- Representar graficamente a reta $y = 60$ .... 2 pontos
- Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos .... 1 ponto

Apresentar a abcissa do ponto relevante $(5{,}95)$ .... 3 pontos

Concluir .... 3 pontos
[A informação foi divulgada no ano de 2008.]

Nota – Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em um ponto.

5.3. .... **15 pontos**

(A)

6. .... **15 pontos**

I → a)   II → a)   III → b)   IV → c)

Nível	**Descritor de desempenho**	**Pontuação**
3	Completa o texto com as 4 opções corretas.	15
2	Completa o texto com 3 opções corretas.	11
1	Completa o texto com 2 opções corretas.	7

7.1. .... **19 pontos**

Calcular a frequência absoluta simples de cada classe, considerando a totalidade das respostas $(75, 150, 110, 65)$ .... 8 pontos

Calcular a frequência relativa simples, em percentagem, de cada classe $(18{,}75\%;\ 37{,}5\%;\ 27{,}5\%;\ 16{,}25\%)$ .... 8 pontos

Apresentar uma tabela com as frequências solicitadas .... 3 pontos

7.2. .... **15 pontos**

(a) – **(1)**

(b) – **(2)**, **(4)**, **(5)**

(c) – **(3)**, **(6)**, **(7)**

Nível	**Descritor de desempenho**	**Pontuação**
4	Associa corretamente as 7 afirmações à respetiva tipologia de condutor.	15
3	Associa corretamente 5 ou 6 afirmações à respetiva tipologia de condutor.	11
2	Associa corretamente 3 ou 4 afirmações à respetiva tipologia de condutor.	7
1	Associa corretamente 2 afirmações à respetiva tipologia de condutor.	3

Nota – Caso o aluno associe o mesmo número a mais do que uma tipologia de condutor, ainda que uma das associações possa estar correta, esta não é considerada para efeitos de classificação.

8.1. .... **15 pontos**

I → b)   II → b)   III → c)   IV → b)

Nível	**Descritor de desempenho**	**Pontuação**
3	Completa o texto com as 4 opções corretas.	15
2	Completa o texto com 3 opções corretas.	11
1	Completa o texto com 2 opções corretas.	7

8.2. .... **15 pontos**

(B)

9. .... **19 pontos**

Considerem-se os acontecimentos seguintes:

C: «O aluno tem carta de condução.»

N: «O aluno gostaria de percorrer a EN2.»

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Calcular $P(C \cap N)$ .... 8 pontos

Escrever $P(C) = 0{,}2$ .... 1 ponto

Escrever $P(N|C) = 0{,}75$ .... 2 pontos

Obter $P(C \cap N)$ $(0{,}15)$ .... 5 pontos

Calcular $P(\overline{C} \cap N)$ .... 6 pontos

Escrever $P(N) = 0{,}5$ .... 1 ponto

Obter $P(\overline{C} \cap N)$ $(0{,}35)$ .... 5 pontos

Calcular $P(\overline{C}|N)$ $(0{,}7)$ .... 5 pontos

2.º Processo

Apresentar uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam:
C e $\overline{C}$; N e $\overline{N}$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(C)$ $(0{,}2)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(C \cap N)$ $(0{,}15)$ .... 6 pontos

Preencher a célula da tabela relativa a $P(N)$ $(0{,}5)$ .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a $P(\overline{C} \cap N)$ $(0{,}35)$ .... 5 pontos

Calcular $P(\overline{C}|N)$ $(0{,}7)$ .... 5 pontos

10. .... **19 pontos**

Identificar os valores de n, $\overline{x}$, s e z .... (1 + 1 + 1 + 1) .... 4 pontos
$[n = 225;\ \overline{x} = 4{,}5;\ s = 1{,}2;\ z = 2{,}576]$

Obter o intervalo de confiança $(]4{,}29;\ 4{,}71[)$ .... 10 pontos

Concluir .... 5 pontos
[O Fred tinha razão em duvidar da afirmação proferida no clube de motociclismo, uma vez que o número médio de etapas indicado (6) não se situa no intervalo $]4{,}29;\ 4{,}71[$, com 99% de confiança.]

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**4.**	**5.1.**	**5.3.**	**6.**	**7.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	15	19	19	15	15	15	15	15	15	**143**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**3.**	**5.2.**	**7.1.**	**9.**	**10.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 19 pontos									**57**
TOTAL										**200**